(X_n) hom. MK, $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$ Stoppzeit. $\mathcal{Z} \hat{=}$ Zustandsraum

$A \in \mathcal{A}$ sodass $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \exists B_n \in \mathcal{Z}^{n+1}$

$$\{\tau = n\} \cap A = \{(X_0, \dots, X_n) \in B_n\}$$

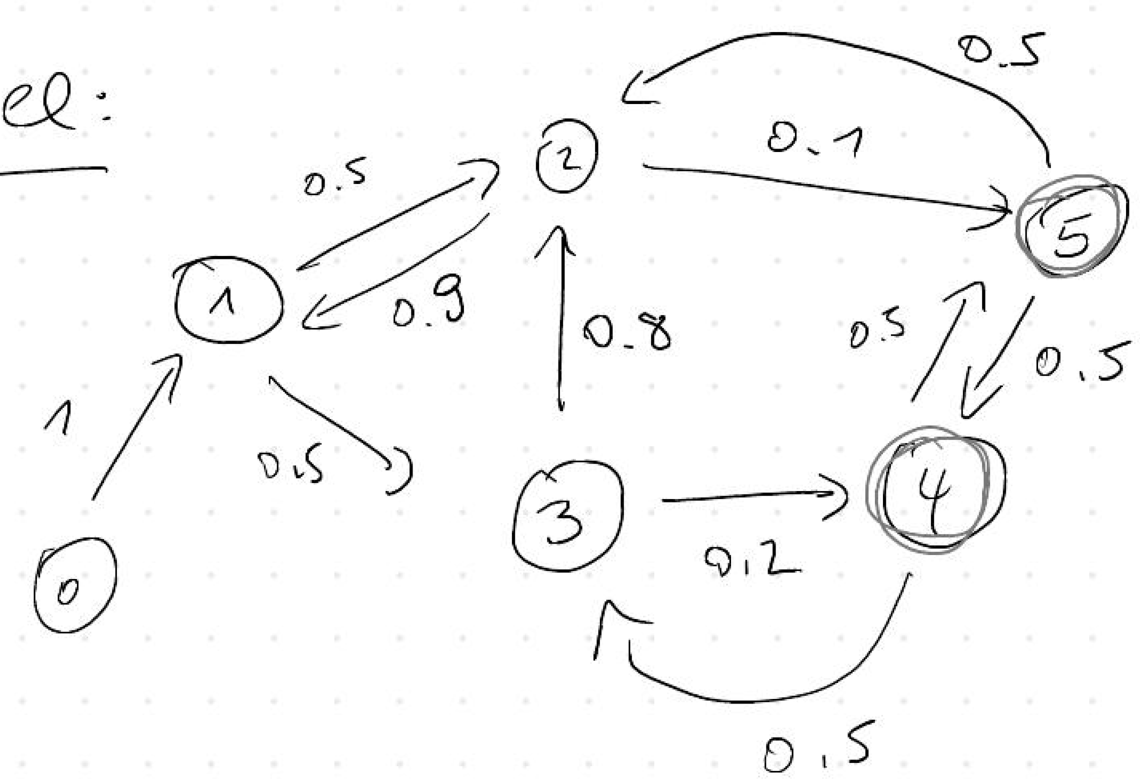
Dann $\forall z \in \mathcal{Z}, m \in \mathbb{N}, \tilde{z}_0, \dots, \tilde{z}_m \in \mathcal{Z}$

$$\mathbb{P}[\{X_\tau = \tilde{z}_0, \dots, X_{\tau+m} = \tilde{z}_m\} \cap A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]$$

$$= \mathbb{P}[Y_0 = \tilde{z}_0, \dots, Y_m = \tilde{z}_m \mid \tau < \infty, X_\tau = z] \ \mathbb{P}[A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]$$

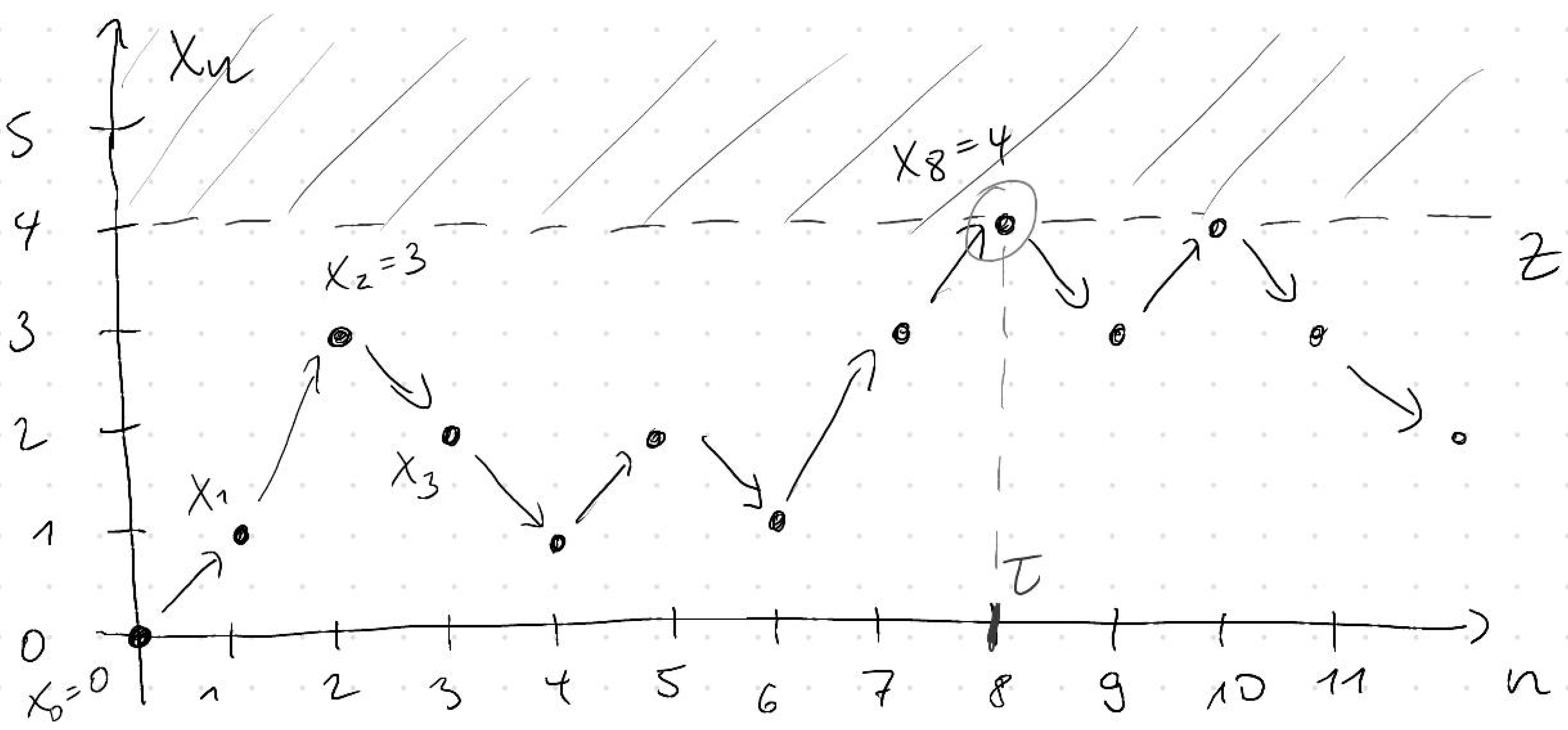
$$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}[X_0^z = \tilde{z}_0, \dots, X_m^z = \tilde{z}_m] \cdot \mathbb{P}[A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]$$

Beispiel:

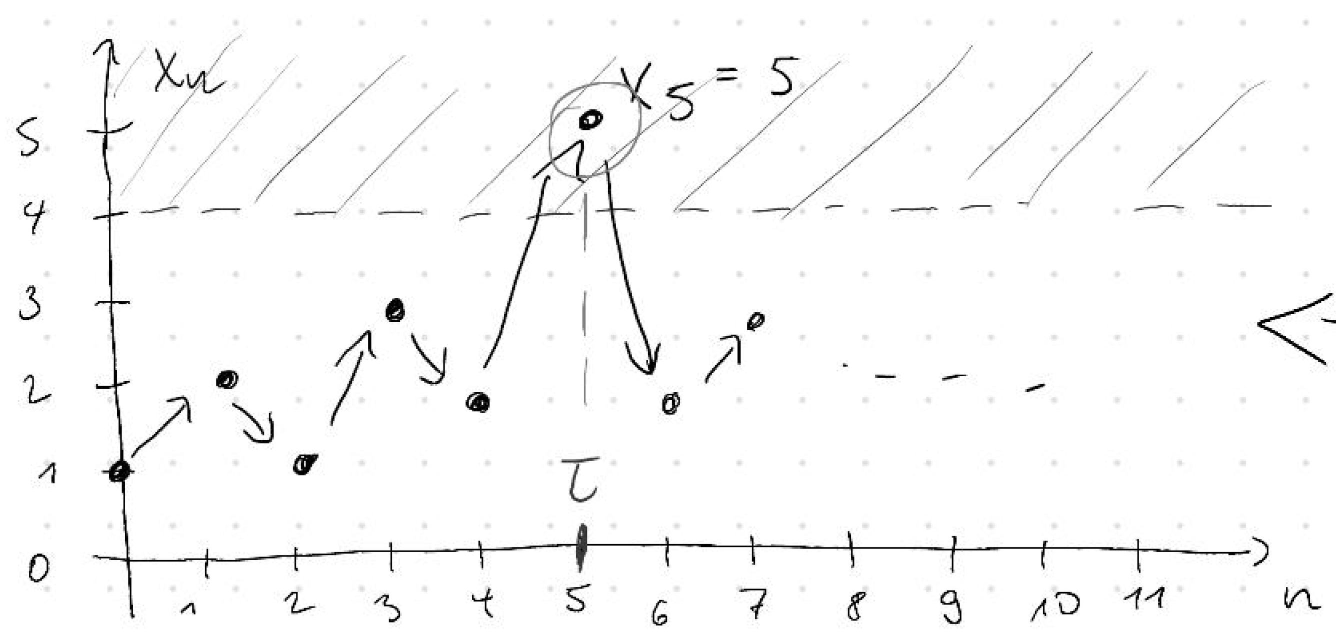


$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{4,5\}\}$

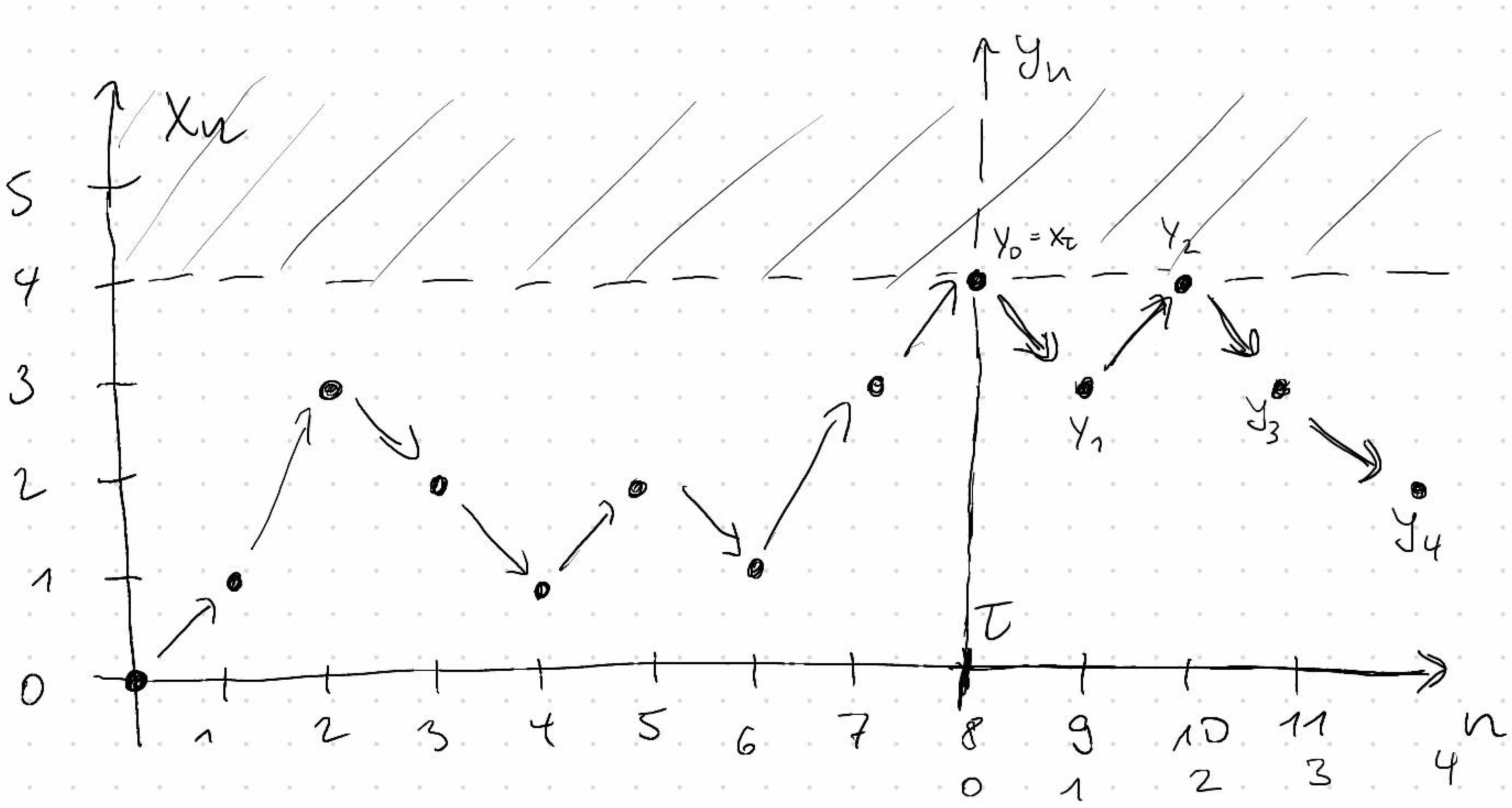
= "erste Zeit zu der $\boxed{4 \text{ oder } 5}$ erreicht wird"



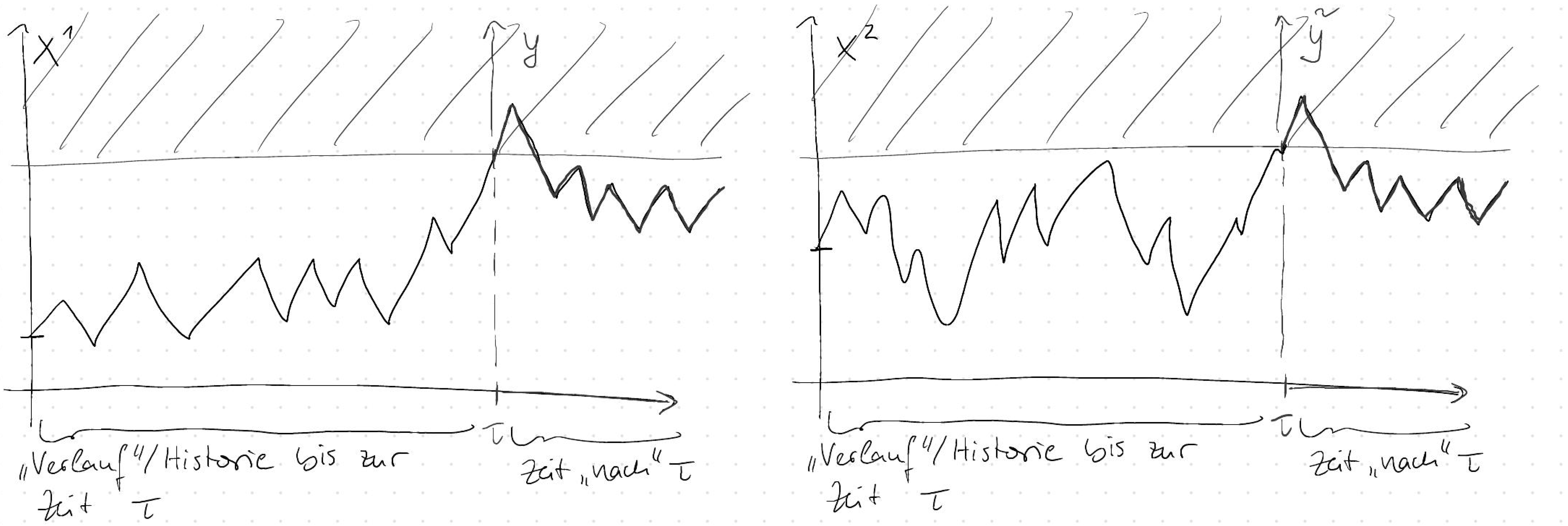
z.B. wenn X wie links abgebildet, gilt $\tau = 8$



Hier: $\tau = 5$



MkE: Wir fangen im Zeitpunkt τ eine "neue" Markovkette Y an (;)) und diese verhält sich genauso, wie eine Markovkette, die zum ZP 0 in $z \hat{=} X_\tau$ gestartet wurde



Intuition: Was „nach τ" passiert, hängt nur von X_τ ab, aber nicht von dem „Weg" dorthin
y und $\tilde{y}$ haben hier die gleiche Verteilung (gleiche Startvt.+ Ü'W'keiten)

Wir beweisen (*) in 2 Schritten (nur bei Interesse weiterlesen ü):

1) Wir zeigen

$$\mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap A \mid X_m = z]$$
$$= \mathbb{1}_{z_m = z}\, p_{z_m z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \cdot \mathbb{P}[A \mid X_m = z]. \qquad (*2)$$

für feste $m \in \mathbb{N}_0$, wenn $A = \{(X_0, \dots X_m) \in B\}$ $(\exists B)$

2) Wir zeigen

$$\mathbb{P}[Y_0 = \tilde{z}_0, \dots, Y_m = \tilde{z}_m \mid \tau < \infty, X_\tau = z]\ \mathbb{P}[A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]$$
$$\overset{(*)}{=} \mathbb{P}[X_0^z = \tilde{z}_0, \dots, X_m^z = \tilde{z}_m] \cdot \mathbb{P}[A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]$$
$$\left(\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{1}_{\tilde{z}_0 = z}\, p_{\tilde{z}_0 \tilde{z}_1} \cdot \ldots \cdot p_{\tilde{z}_{m-1} \tilde{z}_m} \cdot \mathbb{P}[A \mid \tau < \infty, X_\tau = z]\right)$$

für Stoppzeiten τ, wenn $\{\tau = m\} \cap A = \{(X_0, \dots X_m) \in B_m\}$ $(\exists B_m)$ $\forall m$.

Zu (*), vgl. Norris, Thm 1.4.2 [Nor98]:

Wir wissen, dass X die Markoveigenschaft hat, d.h.

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = z_{n+1} \mid X_n = z_n, \dots, X_0 = z_0) = \mathbb{P}[X_{n+1} = z_{n+1} \mid X_n = z_n]$$

(d.h. „Historie" ist wie oben nicht relevant für <u>feste</u> Zeitpunkte)
Sei insbesondere A ein Ereignis mit $A = \{(X_0, \dots, X_m) \in B\}$ $B \in \mathcal{X}^{m+1}$
dann gilt

$$\mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap A \mid X_m = z]$$
$$= \mathbb{1}_{z_m = z}\, p_{z_m z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \cdot \mathbb{P}[A \mid X_m = z]. \qquad (*2)$$

Beweis:

<u>Fall 1:</u> $A = \{X_0 = z_0, \dots X_m = z_m\}$, dann

$$\mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap \overbrace{\{X_0 = z_0, \dots X_m = z_m\}}^{A} \mid X_m = z]$$

$$= \frac{\mathbb{P}[X_0 = z_0, \dots, X_m = z_m, X_m = z, \dots X_{m+n} = z_{m+n}]}{\mathbb{P}[X_m = z]}$$

$$= \frac{\mathbb{1}_{z_m = z} \cdot p_{z_0 z_1} \cdot p_{z_1 z_2} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m-1} z_m} \cdot p_{z_m z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n}}}{\mathbb{P}[X_m = z]}$$

$$= \mathbb{1}_{z_m = z} \, p_{z_m, z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \; \frac{p_{z_0 z_1} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m-1} z_m} \cdot \mathbb{1}_{z_m = z}}{\mathbb{P}[X_m = z]}$$

$$= \mathbb{1}_{z_m = z} \, p_{z_m, z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \; \frac{\mathbb{P}[A \cap \{X_m = z\}]}{\mathbb{P}[X_m = z]} = (\ldots) \cdot \mathbb{P}[A \mid X_m = z].$$

Fall 2: A ist "kompliziester". Dann können wir aber schreiben

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad \text{wobei} \quad A_i = \{X_0 = z_0^i, \dots, X_m = z_m^i\}.$$

(*2) gilt dann für alle A_i (nach Fall 1). Wir haben:

$$\mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap A \mid X_m = z]$$

$$= \mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \mid X_m = z]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{X_m = z_m, X_{m+1} = z_{m+1}, \dots, X_{m+n} = z_{m+n}\} \cap A_i \mid X_m = z]$$

$$\overset{(*2)}{\underset{\text{für } A_i}{=}} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{z_m = z} \, p_{z_m, z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \cdot \mathbb{P}[A_i \mid X_m = z]$$

$$= \mathbb{1}_{z_m = z} \, p_{z_m, z_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_{z_{m+n-1}, z_{m+n}} \cdot \mathbb{P}[\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \mid X_m = z].$$

$\Rightarrow$ (*2) allgemein. $\Rightarrow$ Schritt 1).

Nun kommt Schritt 2). Wir schreiben $A_k = A \cap \{\tau = k\} = \{(X_0, \dots, X_k) \in B_k\}$.
Nach Schritt 1) gilt für jedes feste k die Gleichung (*2).
Wir haben daher

$$\mathbb{P}[\{X_\tau = \tilde{z}_0, \dots, X_{\tau+m} = \tilde{z}_m\} \cap A \cap \{\tau = k\} \cap \{X_\tau = z\}]$$

$$= \mathbb{P}[\{X_k = \tilde{z}_0, \dots, X_{k+m} = \tilde{z}_m, X_k = z\} \cap A_k \cap \{X_k = z\}]$$

$$= \mathbb{P}[\{X_k = \tilde{z}_0, \dots, X_{k+m} = \tilde{z}_m, X_k = z\} \cap A_k \cap \{X_k = z\} \mid X_k = z] \, \mathbb{P}[X_k = z]$$

$$\overset{(*2)}{=} \mathbb{1}_{\tilde{z}_0 = z} \, p_{\tilde{z}_0 \tilde{z}_1} \cdot \ldots \cdot p_{\tilde{z}_{m-1} \tilde{z}_m} \cdot \underbrace{\mathbb{P}[A_k \cap X_k = z \mid X_k = z] \, \mathbb{P}[X_k = z]}_{\mathbb{P}[A_k \cap X_k = z]}$$

$$= \mathbb{1}_{\tilde{z}_0 = z} \, p_{\tilde{z}_0 \tilde{z}_1} \cdot \ldots \cdot p_{\tilde{z}_{m-1} \tilde{z}_m} \cdot \mathbb{P}[A_k \cap X_k = z]$$

$$= \mathbb{P}[X_0^z = \tilde{z}_0, \dots, X_m^z = \tilde{z}_m] \cdot \underbrace{\mathbb{P}[A \cap \{\tau = k\} \cap \{X_k = z\}]}_{= \mathbb{P}[A \cap \{\tau = k\} \cap \{X_\tau = z\}]}$$

Hier ist der Schritt, der die Frage beantwortet.

Wir summieren über alle $k = 0, 1, \ldots$: (Beachte $\{\tau < \infty\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\tau = k\}$!)

$$\mathbb{P}[\{X_\tau = \tilde{z}_0, \ldots, X_{\tau+m} = \tilde{z}_m\} \cap A \cap \{\tau < \infty\} \cap \{X_\tau = z\}]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{X_\tau = \tilde{z}_0, \ldots, X_{\tau+m} = \tilde{z}_m\} \cap A \cap \{\tau = k\} \cap \{X_\tau = z\}]$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X_0^z = \tilde{z}_0, \ldots, X_m^z = \tilde{z}_m] \cdot \mathbb{P}[A \cap \{\tau = k\} \cap \{X_\tau = z\}]$$

$$= \mathbb{P}[X_0^z = \tilde{z}_0, \ldots, X_m^z = \tilde{z}_m] \cdot \mathbb{P}[A \cap \{\tau < \infty\} \cap \{X_\tau = z\}]$$

Teilen wir beide Seiten durch $\mathbb{P}[\tau < \infty, X_\tau = z]$, folgt die Beh. $(*)$.

$\Box$