Agenda 26.1.

- Kommende Termine:
  9.2. Besprechung EA 7 & Fragen
  28.2. Klausur
  (weitere Fragen per Mail, im Forum, in Sprechstunde)
- Video zu KE7 von Prof. Riedel im aple-Kurs
- Heute: EA6 [insbes. 1, 2 & 4 mit Fokus (wie immer) auf Themen & Tricks, die allgemein wichtig sind; nicht nur im Kontext der einzelnen Aufgabe] + Tipps EA7

A1)

1. Grundbegriffe (10 Punkte). In einer Sendung von 10 Geräten befindet sich eine unbekannte Anzahl fehlerhafter Geräte, wobei der Fehler jeweils nur durch eine sehr kostspielige Qualitätskontrolle festgestellt werden kann. Ein Abnehmer, der an einer völlig einwandfreien Lieferung interessiert ist, führt folgende Eingangskontrolle durch: Er prüft 5 Geräte. Sind diese alle einwandfrei, so nimmt er die Sendung an, sonst lässt er sie zurückgehen.

a) (3 Punkte) Beschreiben Sie das Vorgehen testtheoretisch.
b) (2 Punkte) Was sind Fehler erster und zweiter Art in diesem Modell?
c) (3 Punkte) Ermitteln Sie das effektive Niveau des Testverfahrens.
d) (2 Punkte) Wieviele Geräte müssen überprüft werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Annahme der Sendung kleiner gleich 0.1 sein soll?

Tipps:

1. Für a): Formulieren Sie die Hypothese, den kritischen Bereich und berechnen sie die W'keit, dass die Testgröße X im kritischen Bereich liegt.
2. Die Aufgabe hat mit Kombinatorik zu tun. Angenommen wir betrachten eine Urne mit ϑ roten und $s = N - \vartheta$ schwarzen Kugeln, aus welcher n-mal ohne Zurücklegen gezogen wird. Dann besitzt die Anzahl X der gezogenen roten Kugeln eine so genannte *hypergeometrische* Verteilung:
$$\mathbf{P}_\vartheta[X = k] = \frac{\binom{\vartheta}{k}\binom{N-\vartheta}{n-k}}{\binom{N}{n}} \mathbb{1}_{\{k=0,1,\dots,\vartheta\wedge n\}}$$
3. Zu d): Wir suchen nach n, sodass $\mathbf{P}_\vartheta[\phi(X) = 0] \leq 0.1$ für alle $\vartheta \in \Theta_1$ gilt. Man darf ohne Beweis verwenden, dass $\frac{\vartheta\binom{N-\vartheta}{n}}{\binom{N}{n}}$ fallend in ϑ ist.

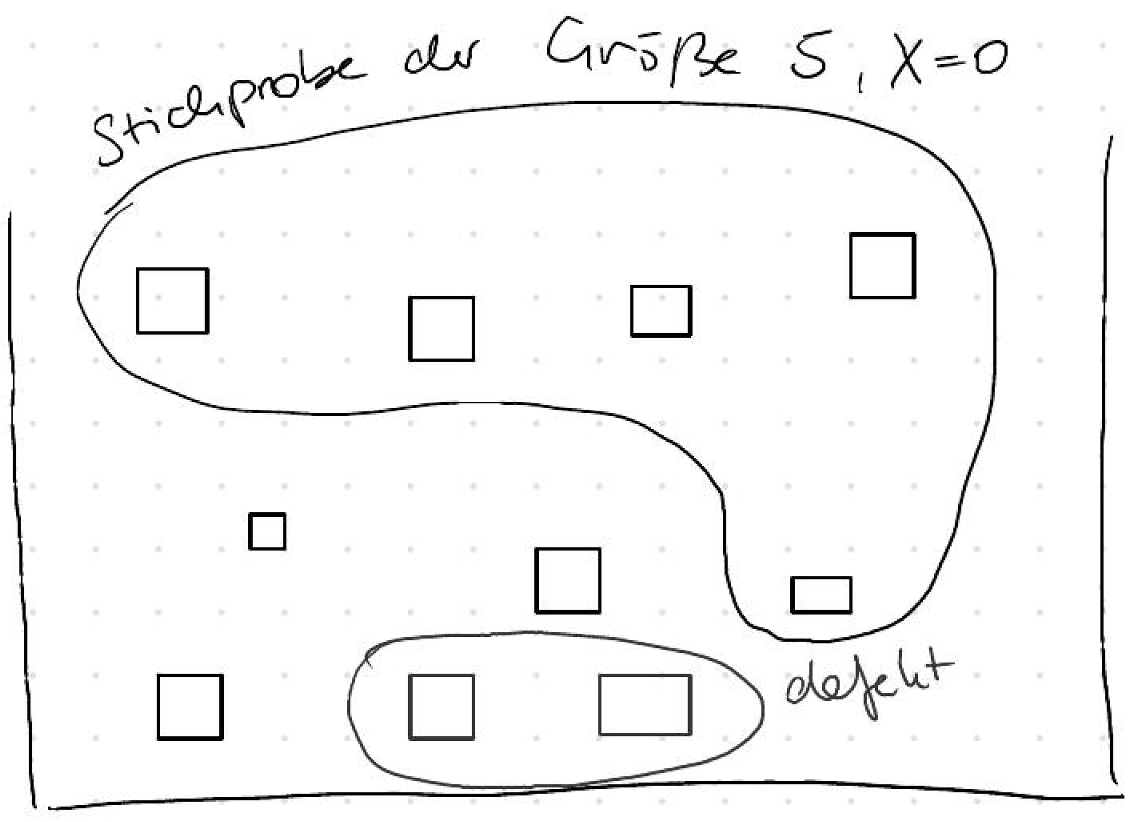
a) "testtheoretisch", d.h.
→ Was ist H_0? Was ist φ? ...

$\vartheta \hat{=}$ Anzahl fehlerh. Geräte (unbekannt)

$H_0: \vartheta = 0$ ($\hat{=}$ Lieferung einwandfrei)
$(H_1: \vartheta > 0)$

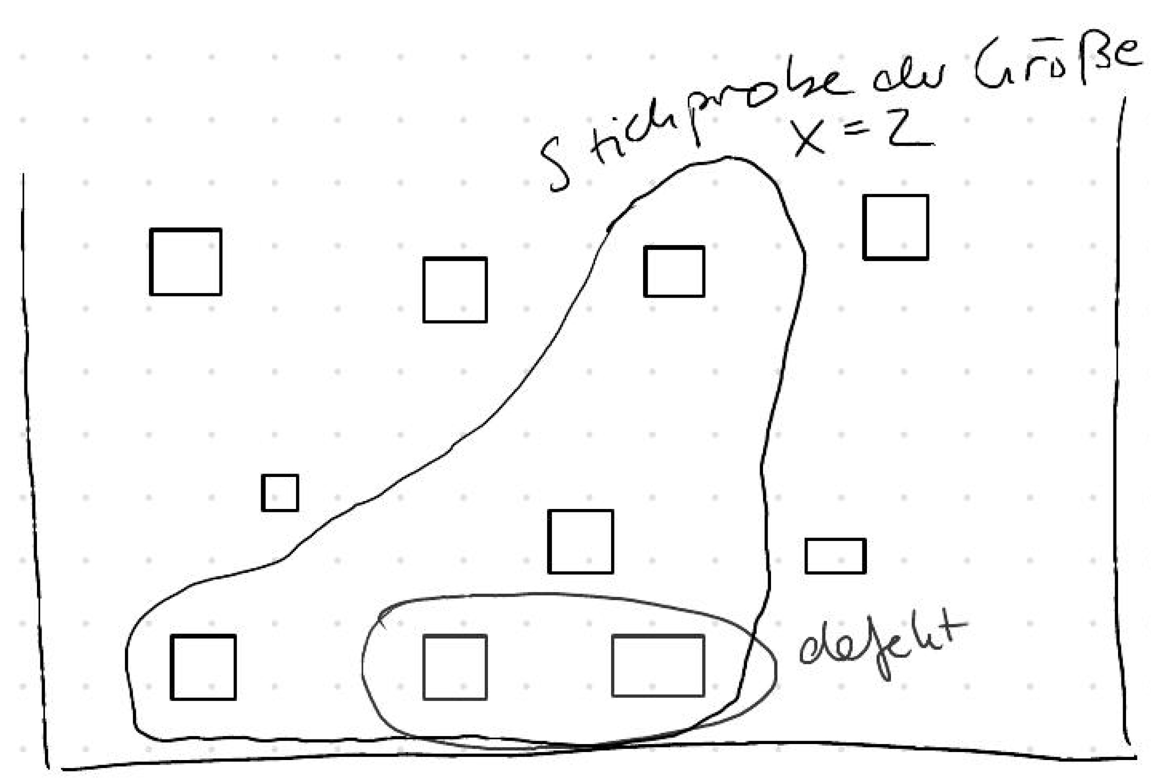
Stichprobe $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to \{0,1,2,3,4,5\} =: \mathcal{X}$
$\hat{=}$ Anzahl defekter Geräte bei Prüfung

Der Test wird beschrieben durch
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 1 \quad (\text{ablehnen, falls} \geq 1 \text{ Gerät defekt}) \\ 0 & \text{falls } x = 0 \quad (\text{annehmen, falls alle 5 ok}) \end{cases}$$



Lieferung $\vartheta = 2$

$\Rightarrow \varphi(X) = 0 \Rightarrow$ Testergebnis:
H_0 ist wahr



Lieferung $\vartheta = 2$

$\Rightarrow \varphi(X) = 1 \Rightarrow$ Testergebnis:
H_0 wird verworfen

Der kritische Bereich ist $\{1,2,3,4,5\}$ (Ablehnungsbereich, $\{x \in \mathcal{X} : \varphi(x) = 1\}$).

b) & c)

1. Unser Test sagt aus, dass die Nullhypothese nicht zutrifft, obwohl dies in Wahrheit der Fall war. In diesem Fall spricht man von einem *Fehler 1. Art* oder einem *falsch-positiven* Testergebnis.
2. Der Test sagt aus, dass die Nullhypothese zutrifft, obwohl dies nicht der Fall ist. Man nennt dies einen *Fehler 2. Art* bzw. ein *falsch-negatives* Testergebnis.

In „Wirklichkeit"

Testergebnis	H_0 wahr	H_0 falsch
H_0 wahr	ok (W'keit $1-\alpha$ für Test mit Niveau α)	Fehler 2. Art
H_0 falsch	Fehler 1. Art (W'keit α)	ok (W'keit apriori nicht bekannt ⇝ Trennschärfe/Gütefkt.)

Hier, Fehler 1. Art:

$\vartheta = 0$, keine fehlerhaften Geräte (H_0 wahr)

aber Test gibt aus, dass es welche gibt

→ ist hier unmöglich! → $\alpha = 0$

Fehler 2. Art:

$\vartheta > 0$, es gibt mind. 1 fehlerh. Gerät (H_0 falsch),

aber Test gibt aus, dass H_0 wahr ist

→ kein fehlerh. Gerät in Stichprobe, fehlerh. Geräte bleiben „unentdeckt"

d) bezieht sich auf W'keit für Fehler 2. Art → technische Details in Lösungsskizze

A2)

2. Verspätete Züge (10 Punkte). Wir betrachten ein Beförderungsunternehmen. Für ein Machine-Learning-Modell, welches voraussagen soll, ob ein Zug mehr als 16 Minuten Verspätung hat, wollen wir herausfinden ob der Wochentag ein relevantes Merkmal ist. Wir haben die folgenden Daten beobachtet:

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Anzahl verspätete Züge	31	31	14	29	40	16	14
Anzahl pünktl. Züge	119	69	86	91	110	84	66

Testen Sie mit einem χ^2-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$, ob der Wochentag in das Modell miteinbezogen werden sollte.

Tipps:

1. Eine Tabelle für die absoluten und relativen Häufigkeiten machen. Die h^A, h^B und L^A, L^B ergeben sich dann leicht als Summen der Zeilen bzw. Spalten.
2. Die Musterlösung ist so lang, weil noch einmal detailliert die Notation der Vorlesung betrachtet wird. Wenn dies auch machen möchte, ist es eine gute Übung. Man kann die Lösung aber auch knapper aufschreiben.

Frage: Hat der Wochentag, an dem ein Zug fährt einen Einfluss darauf, ob der Zug verspätet ist?

Hier: Zwei Merkmale

X: Verspätung ja/nein

Y: Wochentag

χ^2 Test auf Unabhängigkeit: H_0: X und Y sind unabhängig

(wird H_0 verworfen, gehen wir davon aus, dass es einen Zusammenhang zw. Verspätung und Wochentag gibt).

Wir setzen alles in die Notation von Abschnitt 6.2.6.

6.2.6 Chiquadrat-Test auf Unabhängigkeit

In vielen Fällen möchte man entscheiden, ob zwei beobachtete Ereignisse unabhängig sind oder miteinander korreliert. Typische Beispiele sind etwa, ob die Einnahme von Vitaminen oder anderer Stoffe Auswirkungen hat auf die Häufigkeit gewisser Krankheiten, z.B. einer Erkältung. In diesem Abschnitt wollen wir dafür einen Test vorstellen, mit dem man solche Fragen entscheiden kann.

Seien $A = \{1, \ldots, a\}$ und $B = \{1, \ldots, b\}$ die Mengen der jeweils möglichen Ausprägungen zweier Merkmale. Wie in Abschnitt 6.2.5 definieren wir

$$\Theta_A = \left\{\alpha = (\alpha(i))_{1\le i\le a} \in (0,1) : \sum_{i=1}^{a} \alpha(i) = 1\right\},$$

$$\Theta_B = \left\{\beta = (\beta(i))_{1\le i\le b} \in (0,1) : \sum_{i=1}^{b} \beta(i) = 1\right\}.$$

Auf $E = A \times B$ definieren wir ebenfalls

$$\Theta = \Theta_E = \left\{\vartheta = (\vartheta(ij))_{i\in A, j\in B} : \sum_{i\in A, j\in B} \vartheta(ij) = 1\right\}.$$

Für $\vartheta \in \Theta$ definieren wir die Randverteilungen

$$\vartheta^A = (\vartheta^A(i))_{i\in A}, \qquad \vartheta^A(i) = \sum_{j\in B} \vartheta(ij),$$

$$\vartheta^B = (\vartheta^B(j))_{j\in B}, \qquad \vartheta^B(j) = \sum_{i\in A} \vartheta(ij).$$

Wochentag Y ($A \hat{=}$ ZR von Y)

$A = \{1 = \text{Mo}, 2, 3, 4, 5, 6, 7 = \text{So}\}$

$\Theta_A = \{\alpha = (\alpha(i))_{1\le i\le 7} \in (0,1) : \sum_{i=1}^{7} \alpha(i) = 1\}$

Verspätung X ($B \hat{=}$ ZR von X)

$B = \{1 = \text{Ja}, 2 = \text{Nein}\}$

$\Theta_B = \{\beta = (\beta(i))_{i=1,2} \in (0,1) : \beta_1 + \beta_2 = 1\}$

Gemeinsamer Raum: $E = A \times B \hat{=}$ ZR von (Y,X)

$\Theta = \{\vartheta = (\vartheta(ij))_{ij \in \{1,\ldots,7\}\times\{1,2\}} \in (0,1) : \sum_{i\in\{1,\ldots,7\}} \sum_{j\in\{1,2\}} \vartheta(ij)\}$

Ist $(X,Y) \sim \vartheta$, so ist $X \sim \vartheta^A$ und $Y \sim \vartheta^B$. Sei $(X,Y) \sim \vartheta$. Wir möchten herausfinden, ob X und Y unabhängig sind. Ist dies der Fall, so gilt

$$\vartheta(ij) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \vartheta^A(i)\vartheta^B(j).$$

Gilt $\vartheta(ij) = \vartheta^A(i)\vartheta^B(j)$, so benutzen wir die Notation $\vartheta = \vartheta^A \otimes \vartheta^B$. Das statistische Modell ist von folgender Form: Wir beobachten N Paare aus $E = A \times B$, d.h. der Stichprobenraum ist gegeben durch $\mathcal{X} = E^N$. Wir nehmen an, die Beobachtungen seien unabhängig und identisch verteilt, also $P_\vartheta = \vartheta^{\otimes N}$ mit $\vartheta \in \Theta$ wie oben. Bei unserem *Testproblem* gehen wir davon aus, dass die beobachteten Paare unabhängig sind. Die Nullhypothese ist also $H_0 : \vartheta = \vartheta^A \otimes \vartheta^B$ und die Alternative $H_1 : \vartheta \neq \vartheta^A \otimes \vartheta^B$. Also ist

$$\Theta_0 = \{\alpha \otimes \beta = (\alpha(i)\beta(j))_{ij\in E} : \alpha \in \Theta_A, \beta \in \Theta_B\}$$

und $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

Idee:

Falls X und Y unabh., dann sollte

$$\vartheta(ij) = \mathbb{P}[(X,Y) = (i,j)] = \mathbb{P}[X = i] \cdot \mathbb{P}[Y = j]$$

$$= \vartheta_B(i)\, \vartheta_A(j) \quad \forall\, ij$$

gelten.

D.h. für die Hypothese oben können wir auch $H_0 : \vartheta = \vartheta_A \otimes \vartheta_B$ (gemeinsame Vt. = Produktmaß / -verteilung) schreiben. → Beispiel in Lösungsskizze

Jetzt kommt der eigentliche Test.

Seien $Z_1, \ldots, Z_N$ unsere Beobachtungen, also $Z_i = (X_i, Y_i) \in A \times B = E$. Ähnlich wie in Abschnitt 6.2.5 definieren wir die absoluten Häufigkeiten einer Beobachtung ij durch

$$h(ij) = |\{1 \le k \le N : Z_k = ij\}|, \qquad ij \in E$$

und die relative Häufigkeit durch

$$L = (L(ij))_{ij\in E} = (h(ij)/N)_{ij\in E} \in \mathbb{R}^{a\times b}.$$

Weiter definieren wir

$$h^A(i) = \sum_{j\in B} h(ij) = NL^A(i) \quad \text{und} \quad h^B(j) = \sum_{i\in A} h(ij) = NL^B(j).$$

L^A und L^B seien hier implizit durch die jeweiligen zweiten Gleichungen definiert. Man kann leicht nachprüfen, dass

$$h^A(i) = |\{1 \le k \le N : X_k = i\}| \quad \text{und}$$
$$h^B(j) = |\{1 \le k \le N : Y_k = j\}|$$

ist, es sich hierbei also um die absoluten Häufigkeiten der Beobachtungen handelt. Um die Unabhängigkeit zu quantifizieren definieren wir

$$\tilde{D} := N \sum_{ij\in E} L^A(i)L^B(j) \left(\frac{L(ij)}{L^A(i)L^B(j)} - 1\right)^2.$$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{1, 2\}$

$A = 1$ — $A = 7$

		Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	gesamt
$B = 1$	Anzahl verspätete Züge	31	31	14	29	40	16	14	$h^B(1) = 175$
$B = 2$	Anzahl pünktl. Züge	119	69	86	91	110	84	66	$h^B(2) = 625$
	gesamt	$h^A(1) = 150$	100	100	120	150	100	80	$800 = N$

Die Tabelle enthält die $h(ij)$. Z.B. $h(11) = 31$, $h(12) = 119$. $h^A(1) = h(11) + h(12) = 31 + 119 = 150$.

Dies sind die absoluten Häufigkeiten. Wir berechnen noch die relativen Häufigkeiten $h(ij)/N = L(ij)$, L^A und L^B (wir teilen die ganze Tabelle durch N):

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	gesamt
Anteil versp. Z.	0.0388	0.0388	0.0175	0.0363	0.05	0.02	0.0175	$L_1^B = 0.2188$
Anteil pünktl. Z.	0.1486	0.0863	0.1075	0.1136	0.1375	0.105	0.0825	$L_2^B = 0.7813$
gesamt	$L_1^A = 0.1875$	0.125	0.125	0.15	0.1875	0.125	$L_7^A = 0.1$	1

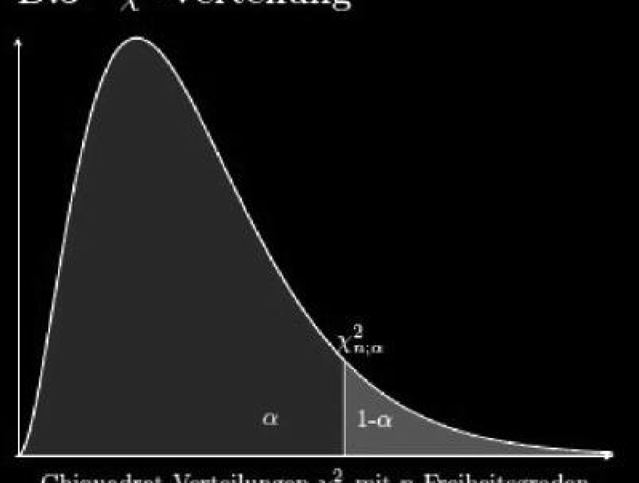
Wären die Merkmale unabhängig, dann wäre $L_{ij} \approx L_i^A \cdot L_j^B$. Wir berechnen

$$\tilde{D} = N \sum_{i,j\in E} L^A(i) L^B(j) \left(\frac{L(ij)}{L^A(i) L^B(j)} - 1 \right)^2 = \ldots = 13.9288.$$

Satz 6.2.38 ⇒ Falls $\tilde{D} > \chi^2_{(a-1)(b-1);1-\alpha}$ wird H_0 verworfen.

Hier $a = 7$, $b = 2$, $\alpha = 0.05$ ⇝ $\chi^2_{6;0.95} = 12.59$. Es gilt $\tilde{D} > 12.59$, also wird H_0 verworfen. Unser Test gibt aus, dass es einen Zusammenhang von Wochentag und Verspätung gibt.

D.3 χ^2-Verteilung



Chiquadrat-Verteilungen χ^2_n mit n Freiheitsgraden

$\alpha =$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n = 1$	3.9^{-5}	1.6^{-4}	6.3^{-4}	3.9^{-3}	.0158	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0404	.1026	.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.1848	.3518	.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4294	.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.134	1.635	2.204	10.64	12.59	15.03	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59

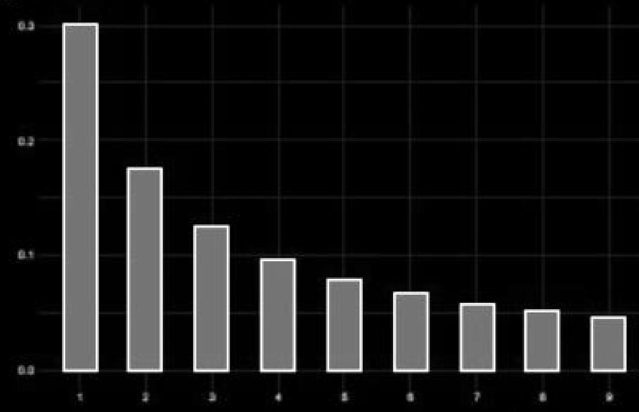
A4)

4. Benford's Law (10 Punkte). 1881 beobachtete der amerikanische Mathematiker Simon Newcomb, dass die vorderen Seiten seiner Logarithmentafeln deutlich stärker abgegriffen waren, als die hinteren. Dies bedeutete, dass also häufiger Zahlen mit führender Ziffer 1 nachgeschlagen wurden, als mit höheren führenden Ziffern. Diese Beobachtung führte zur Entdeckung von Benford's Law, welches (intuitiv) besagt, dass in vielen realen Datensätzen (zum Beispiel Populationszahlen, Sterberaten, Sportstatistiken) anteilig etwa 30% der Zahlen mit einer 1 beginnen, 17.5% mit einer 2 und diese Anteile weiter fallen bis etwa 5%, was der Anteil der mit einer 9 beginnenden Zahlen ist. Die zugehörige Verteilung kann wie folgt beschrieben werden. Eine positive Zufallsvariable X heißt *Benfordsch*, falls

$$\mathbb{P}[X \in E_i] = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{i}\right), \quad \text{wobei } E_i = \{x > 0 : \text{führende Ziffer von } x \text{ ist } i\}, \qquad i = 1, \ldots, 9.$$

Approximationen für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle aufgelistet und im Balkendiagramm dargestellt.

1	0.3010
2	0.1761
3	0.1249
4	0.0969
5	0.0792
6	0.0669
7	0.0580
8	0.0512
9	0.0458



In vielen Szenarien passt diese Verteilung erstaunlich gut zu „echten" Daten. Darum wird diese Verteilung auch verwendet, um gefälschte bzw. manipulierte Datensätze zu erkennen, von denen man normalerweise erwarten würde, dass sie Benford's Law erfüllen (zum Beispiel bei Wahlergebnissen und Steuerdaten, aber auch bei Bilddateien).

erste Ziffer	Beobachtungen Deutschland	Beobachtungen China
1	47 $h(1)$	149
2	24 $h(2)$	84
3	20 $h(3)$	79
4	15 .	42
5	10 .	30
6	11 .	46
7	6	25
8	12	23
9	5	21

Wir betrachten nun das Handelsvolumen von Aktien, die für die jeweils gelisteten Unternehmen an den betrachteten Märkten (Deutschland und China) am 5.12.23 bzw. 6.12.23 gehandelt wurden. Wir nutzen die Auswertung der Website `http://shiny.calpoly.sh/BenfordData/`, um in der Tabelle oben direkt die Häufigkeiten der beobachteten ersten Ziffern der Volumina in der jeweiligen Geldwährung (EUR, CNY) aufzulisten.

a) (4 Punkte) Nutzen Sie einen geeigneten statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.1$, um zu überprüfen, ob die an der deutschen Börse gehandelten Volumina Benford's law genügen.

b) (4 Punkte) Nutzen Sie einen geeigneten statistischen Test zum Niveau $\alpha = 0.1$, um zu überprüfen, ob die an der chinesischen Börse gehandelten Volumina Benford's law genügen.

c) (2 Punkte) Als 'p-Wert' bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Teststatistik (unter der Nullhypothese) einen mindestens so extremen Wert ergibt wie in den betrachteten Daten. Bestimmen Sie (approximativ) den p-Wert für b) mithilfe der folgenden Tabelle und beschreiben Sie, was dieser hier aussagt.

$1-p$

$\chi^2_{n,\tilde{\alpha}}$	$\tilde{\alpha} = 0.904$	0.903	0.902	0.901	0.9	0.1
$n = 1$	2.7707695	2.7541889	2.7377935	2.7215796	2.7055435	0.0157908
2	4.6868142	4.6660886	4.6455756	4.6252709	4.6051702	0.2107210
3	6.3445226	6.3208948	6.2974996	6.2743324	6.2513886	0.5843744
4	7.8819369	7.8559436	7.8301997	7.8047003	7.7794403	1.0636232
5	9.3469601	9.3189184	9.2911408	9.2636220	9.2363569	1.6103080
6	10.7624970	10.7326224	10.7030252	10.6736997	10.6446407	2.2041307
7	12.1415171	12.1099685	12.0787093	12.0477339	12.0170366	2.8331069
8	13.4921822	13.4590829	13.4262844	13.3937808	13.3615661	3.4895391
9	14.8200146	14.7854640	14.7512250	14.7172911	14.6836566	4.1681590
10	16.1289529	16.0930335	16.0574357	16.0221530	15.9871792	4.8651821

Suche in Zeile 8 den Wert, der "gerade so" noch kleiner ist als $D_\rho = 13.4358$

Tipps:

1. Die Situation zuerst wieder in die Notation der Vorlesung 'übersetzen'. Dafür kann man sich an Abschnitt 6.2.5 orientieren.
2. In der Musterlösung wurde für a) und b) die Tabelle aus Anhang D der Vorlesungsnotizen verwendet. Man könnte aber auch die genaueren Werte aus der Tabelle in c) nutzen. Eigentlich wird die Tabelle aber nur für den p-Wert benötigt.

Frage: Haben die Daten eine bestimmte, theoretisch vermutete Verteilung? $\rightsquigarrow$ χ^2-Anp.

a) Wie Abschnitt 6.2.5: Beobachtungen $X_1, \ldots X_N$ (Deutschland: $N=150$).

- X_i ist die erste Ziffer des Handelsvolumens, z.B. HV des i-ten Aktie ist 25 Mio., dann $X_i = 2$
- ρ ist die Benford-Verteilung
- ϑ ist die "wahre" Verteilung der X_i. Wir testen

$H_0 : \vartheta(i) = \rho(i)$ für alle i

gegen $H_1 : \vartheta(i) \neq \rho(i)$ für mind. ein i.

$$D_\rho := \sum_{i=1}^{s} \frac{(h(i) - N\rho(i))^2}{N\rho(i)} = N \sum_{i=1}^{s} \rho(i) \left(\frac{L(i)}{\rho(i)} - 1\right)^2 = N \sum_{i=1}^{s} \frac{L(i)^2}{\rho(i)} - N$$

Man sieht, dass D_ρ klein sein sollte, wenn ϑ nah bei der gesuchten Verteilung ρ liegt.

Satz 6.2.35 (Chiquadrat-Anpassungstest). *Wir betrachten das Testproblem $H_0 : \vartheta = \rho$ gegen $H_1 : \vartheta \neq \rho$. Sei $\alpha > 0$. Der Test*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } D_\rho(x) > \chi^2_{s-1;1-\alpha}, \\ 0 & \text{falls } D_\rho(x) \leq \chi^2_{s-1;1-\alpha} \end{cases}$$

heißt Chiquadrat-Anpassungstest *oder einfach* χ^2-Test. *Hierbei bezeichnet $\chi^2_{s-1;1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2_{s-1}-Verteilung. Der Chiquadrat-Anpassungstest hat approximativ, d.h. für große Zahlen N, das Niveau α.*

Bemerkung 6.2.36. Dies ist ein *asymptotischer Test*, d.h. das angestrebte Niveau wird erreicht, wenn die Stichprobengröße hinreichend groß ist. In der Praxis hat sich bewährt, dass man $N \geq 5/\min_{1\leq i\leq s} \rho(i)$ wählen sollte.

$\rightsquigarrow$ Hier $N = 150 \geq 109.2717 = \frac{s}{\min_i \rho_i}$ $\Rightarrow$ ok!

Die Tabelle aus der Aufgabe enthält die $h(i)$. N ist bekannt und $\rho(i)$ ist in der Aufgabenstellung angegeben. Wir haben $D_\rho = 4.5670$. (→ vgl. Lösungsskizze)

Es gilt $s = 9$, $\alpha = 0.1$ $\Rightarrow$ $\chi^2_{8,0.9} \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 13.36$. D.h., da $D_\rho \leq \chi^2_{8,0.9}$, wird H_0 angenommen.

b) genauso. Es gilt $N = 495$, $D_\rho = 13.4356 > \chi^2_{8;0.9}$ $\Rightarrow$ Hypothese H_0 wird abgelehnt.

c) Wenn H_0 wahr ist, ist D_ρ χ^2_8-verteilt. Wir suchen also die W'keit, dass eine χ^2_8-vt. ZV mindestens den Wert 13.4356 annimmt.

$$p = \mathbb{P}[D_\rho \geq 13.4358] \rightsquigarrow 1 - p = \mathbb{P}[D_\rho < 13.4358] \approx 0.902$$

→ Tabelle "rückwärts" lesen. $1-p$ muss zwischen 0.902 und 0.903 liegen. $\Rightarrow$ $p \approx 0.098$. Der p-Wert impliziert das größte Signifikanzniveau, bei dem H_0 für diese Daten verworfen wird.

Tipps EA 7:

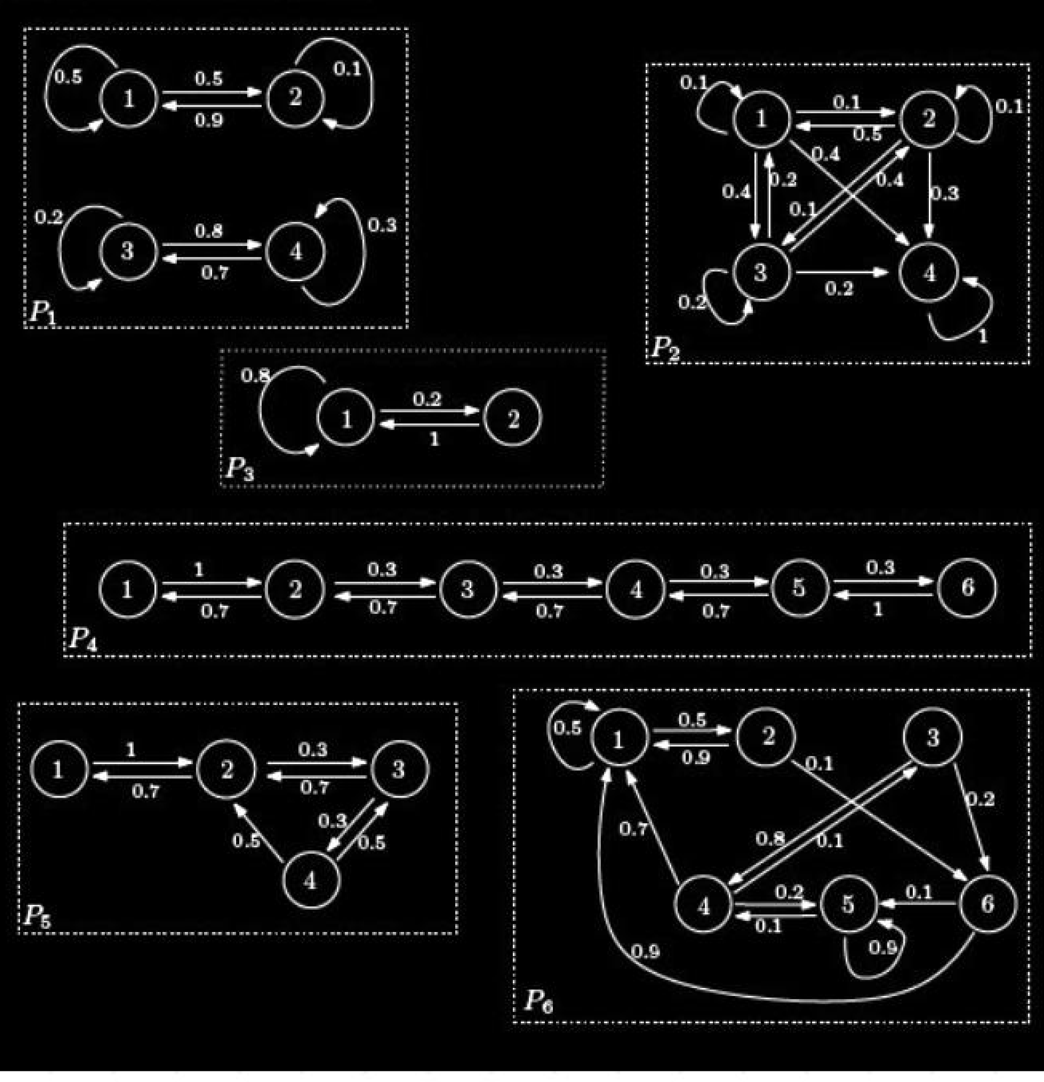
1. Übergangswahrscheinlichkeiten (10 Punkte). Die abgebildeten Graphen $P_1, \dots P_6$ gehören zu Markovketten.

a) (4 Punkte) Schreiben Sie die Übergangsmatrizen auf und begründen Sie, warum diese in der Tat Übergangsmatrizen von Markovketten sind.

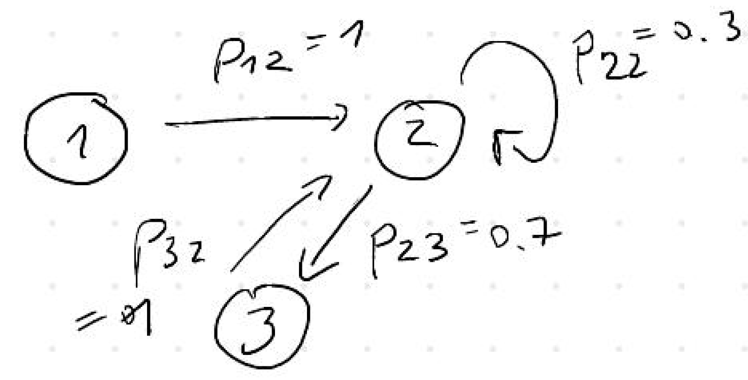
b) Prüfen sie für alle Graphen, ob die zugehörigen Markovketten

i) (3 Punkte) irreduzibel und/oder

ii) (3 Punkte) aperiodisch sind.



1. Man kann sich überlegen, dass es dann eine Markovkette zu einem Graph/einer Matrix P gibt, wenn
   - $p_{ij} \in [0,1]$ für alle i, j (Warum?) $\to$ p_{ij} ist W'keit
   - $*$ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ für alle i (Warum?) $\to$ "irgendetwas muss passieren, wenn wir in j sind"
2. Die Eigenschaft der Irreduzibilität hängt mit Wegen im Graphen zusammen (siehe Bemerkung in der Vorlesung)! Man überlege sich, was es mit Def. 7.3.24 zu tun hat, wenn man über die Kanten des Graphen von z zu $\tilde{z}$ 'laufen' kann.
3. Aperiodizität kann man sich ähnlich am Graph verdeutlichen: Wir haben $P^k_{i,i} > 0$ genau dann, wenn es einen Weg von i nach i mit genau k Schritten im Graph gibt (also über k Kanten).



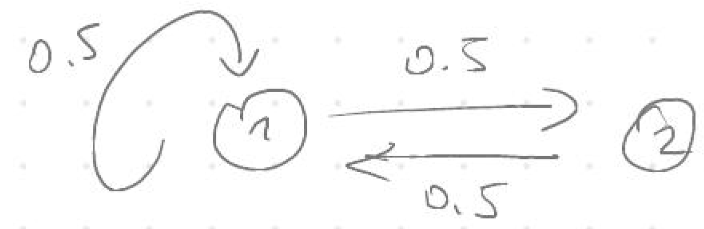
$p_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$

= W'keit, von i nach j zu gehen

von 1 nach 1   von 1 nach 2

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$*$ Falls nicht:

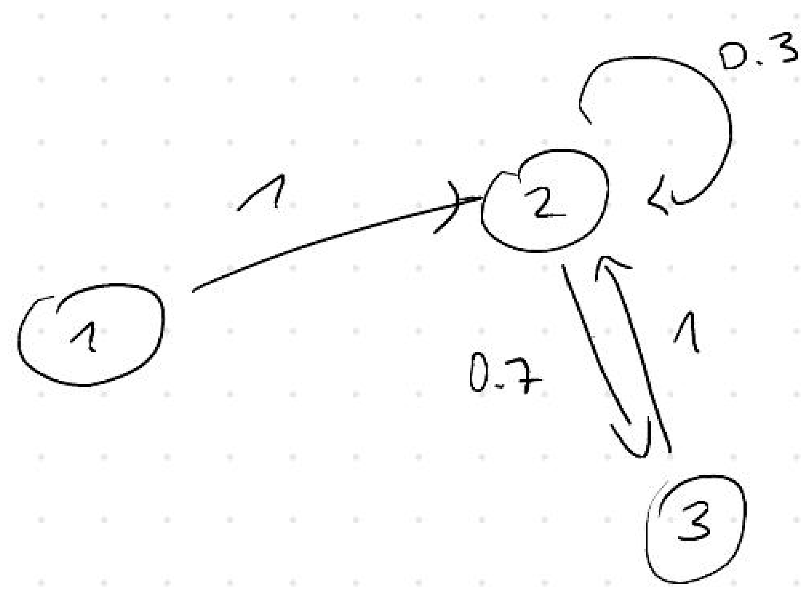


$p_{21} + p_{22} \neq 1$
$\rightsquigarrow$ Was passiert, wenn wir nicht von 2 nach 1 gehen?

$\mathbb{P}[X_{k+n} = i \mid X_n = j] > 0 \iff$ es gibt einen Weg im Graph von j nach i über k Kanten

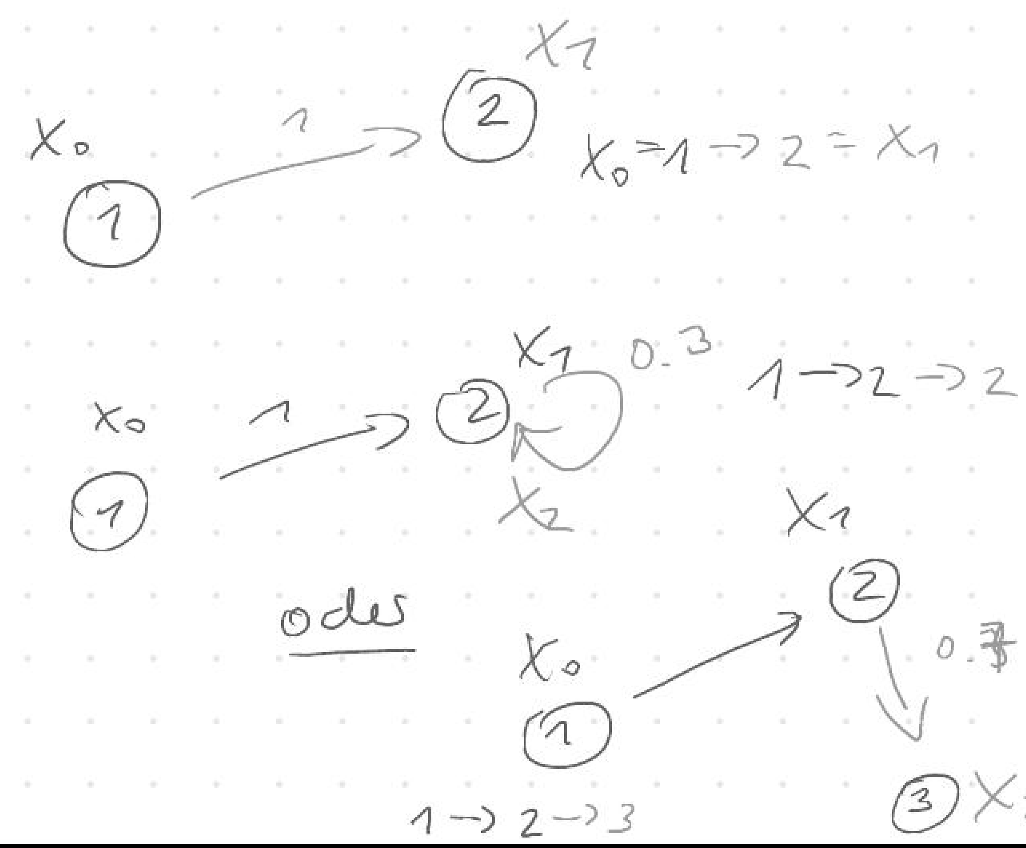
z.B.

$\mathbb{P}[X_3 = 2 \mid X_0 = 1]$?



$\mu^{(0)} = (1, 0, 0)$ Startverteilung

$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)} P = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1, 0)$$

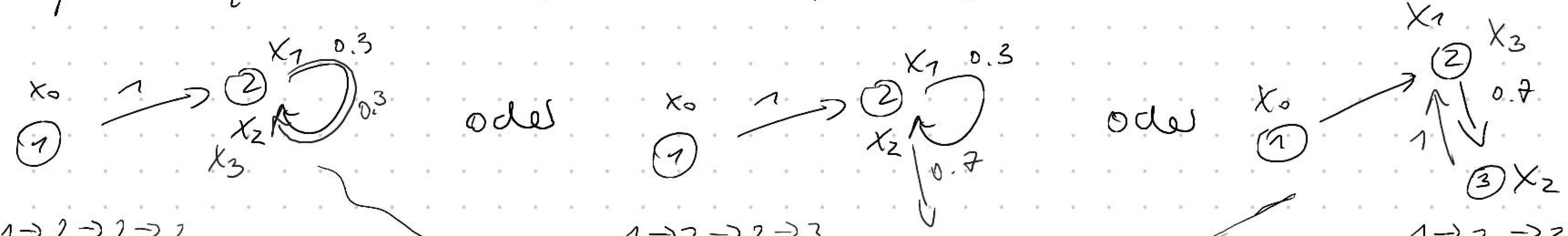


$\mathbb{P}[X_1 = 2 \mid X_0 = 1] = p_{12} = 1 = \mu^{(0)}_2$

$\mu^{(2)} = \mu^{(1)} P = \mu^{(0)} P^2 = (0, 1, 0)\, P = (0, 0.3, 0.7)$

$\mathbb{P}[X_2 = 2 \mid X_0 = 1] = p_{12} \cdot p_{22} = 1 \cdot 0.3 = 0.3 = \mu^{(1)}_2$

$\mu^{(3)} = \mu^{(2)} P = \mu^{(0)} P^3 = (0, 0.09 + 0.7, 0.21)$



$\mathbb{P}[X_3 = 2 \mid X_0 = 1] = p_{12} p_{22} p_{22} + p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{32} = 1 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7 \cdot 1 = 0.79$

A2)

2. Stationäre Verteilung I (10 Punkte). Wir betrachten eine Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie den zugehörigen Graph und zeigen Sie, dass diese Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist. wie oben

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nach drei Schritten in Zustand 3 zu sein, falls man in Zustand 1 gestartet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nach zwei Schritten in Zustand 3 zu sein, falls die Wahrscheinlichkeit in Zustand 1 zu starten $\frac{1}{4}$ ist und in Zustand 3 zu starten $\frac{3}{4}$. wie oben

c) (3 Punkte) Wir wollen nun das Langzeitverhalten der Markovkette betrachten.

i) Finden Sie eine Lösung π für die Gleichung $\pi P = \pi$, wobei $\pi \in \mathbb{R}^3$ ein Wahrscheinlichkeits(zeilen)vektor ist.

ii) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} P^n$.

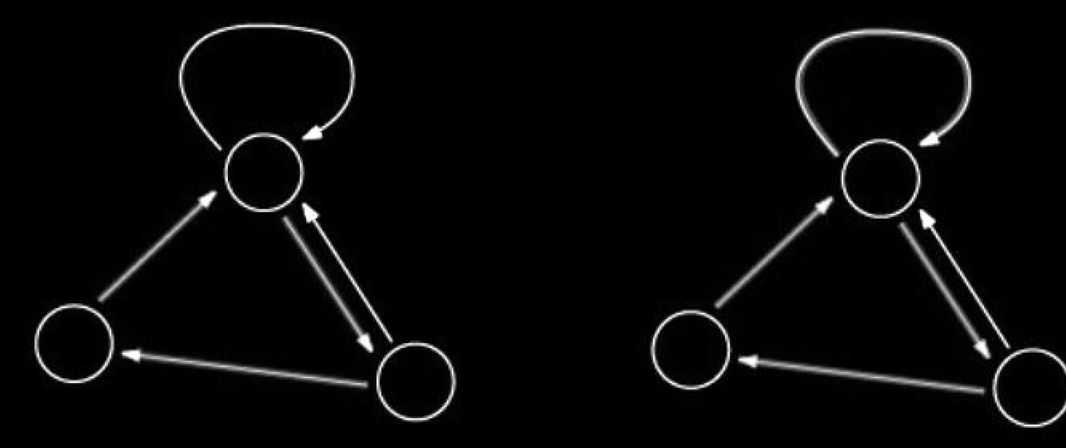
Tipps:

1. Für c): $\lim_{n\to\infty} P^n = Q$ bedeutet, dass alle Einträge konvergieren, d.h. $\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = Q_{ij}$ für alle i, j. Man kann die Aufgabe mit Satz 7.3.31 lösen. $\longrightarrow \mu^{(n)} \to \pi$

$\mu^{(n)} = P^n \mu^{(0)}$

$\to$ wähle $\mu^{(0)}$ geschickt als $\mu^{(0)} = (1,0,0), (0,1,0)$ und $(0,0,1)$ [Warum?]

3. Aperiodizität (10 Punkte). Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum S. Wir nehmen an, dass die Markovkette irreduzibel ist. Zeigen Sie: Falls es einen Zustand $i \in S$ gibt mit $p_{ii} > 0$, dann ist die Markovkette aperiodisch.



Tipps:

1. siehe Bild + Beispiele aus Aufgabe 1.

+ Frage im Forum

A4)

4. Stationäre Verteilung II (10 Punkte). Wir wollen nun betrachten, was bei der Konvergenz zur stationären Verteilung 'schief gehen' kann, falls die Kette nicht irreduzibel ist. Wir betrachten eine Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Begründen Sie, dass die betrachtete Markovkette reduzibel ist. Zeigen Sie, dass diese Markovkette keine eindeutige stationäre Verteilung besitzt.

b) (6 Punkte) Zeigen Sie:

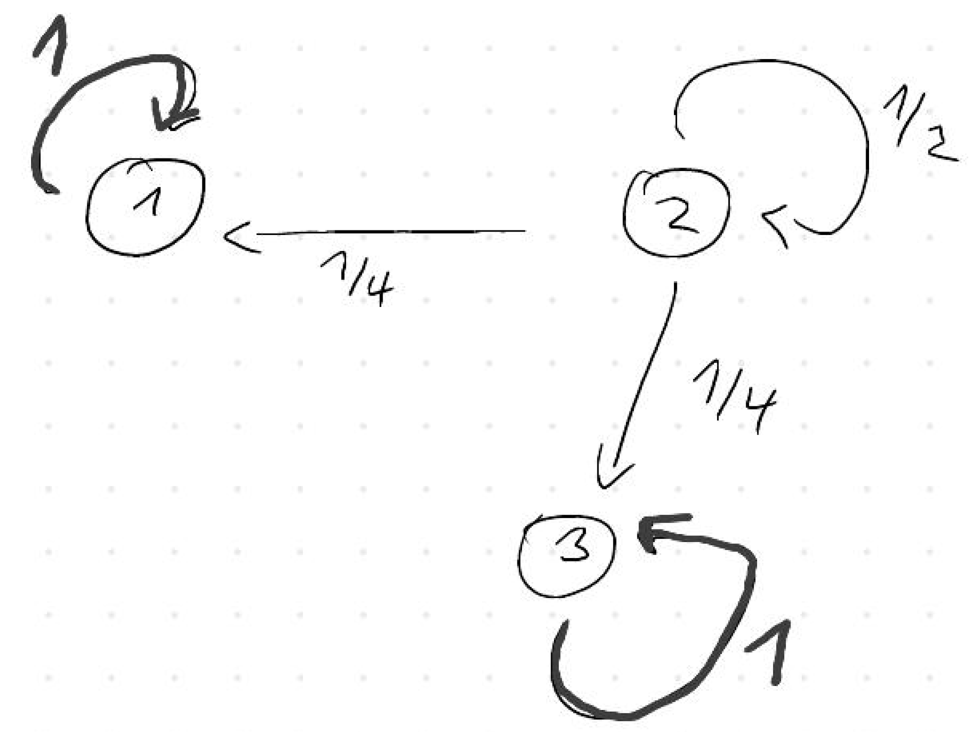
$$\text{falls } P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{dann folgt } P^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Tipps:

1. 'Keine eindeutige stationäre Verteilung' kann entweder heißen, dass es gar keine stationäre Verteilung gibt oder dass es gleich mehrere gibt.
2. Auf die Form in ii) kommt man, indem man P^1, P^2, P^3 „zu Fuß" berechnet und versucht ein Muster zu erkennen. Dann kann man mit Induktion beweisen, dass P^n eine bestimmte Form hat und dadurch auf den Grenzwert schließen. $\longrightarrow$ muss man hier nicht machen



Bonusfrage: Ist das Ergebnis aus b) eine stat. Vt.?