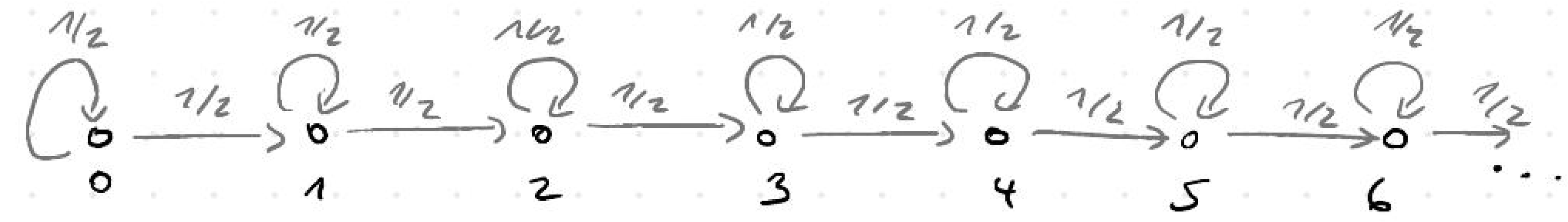
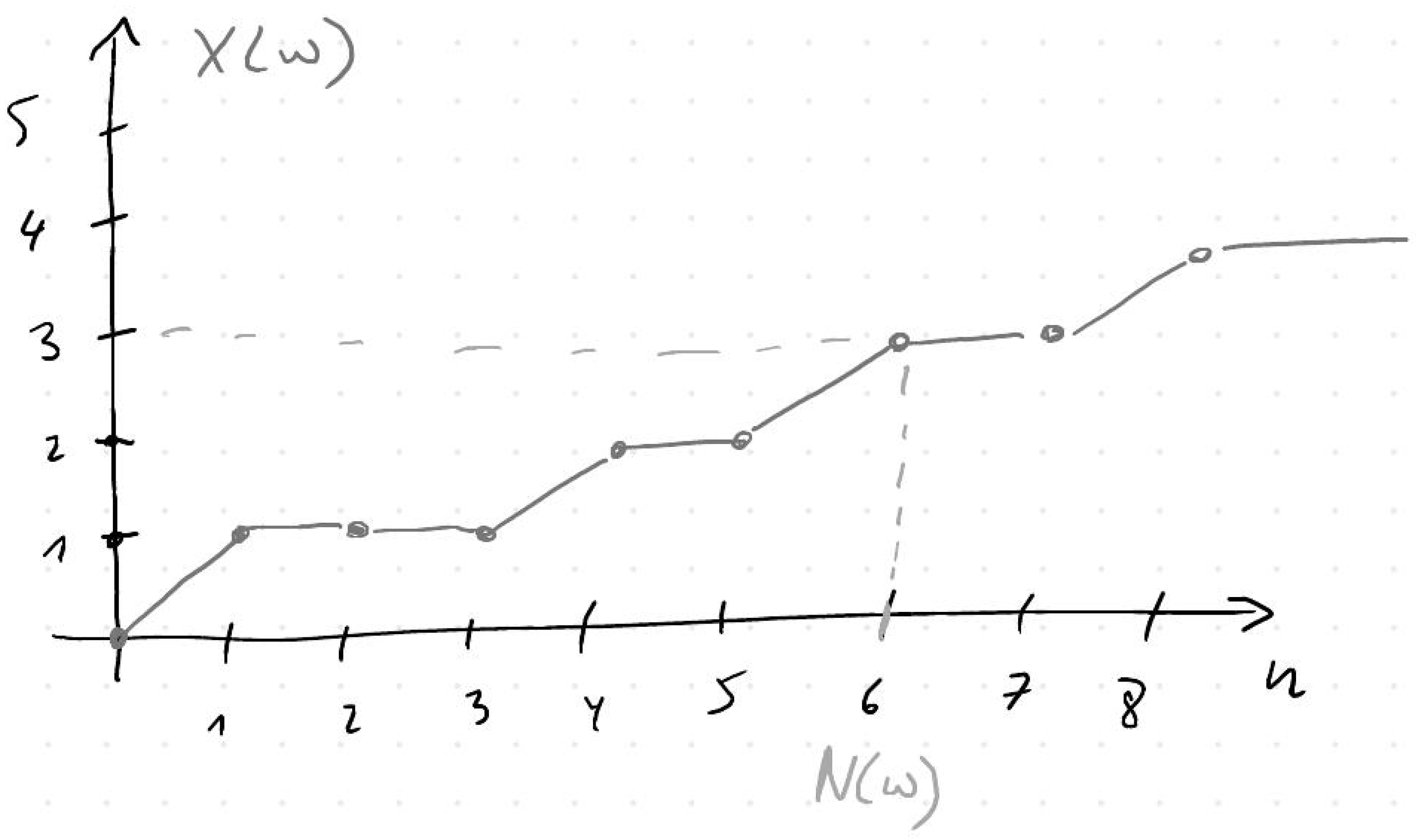
$(X_n)_{n\geq 1}$ homogene MK auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$



$N: \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

z.B.: $N(\omega) = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq 3\}$ (✱)



zB.: $X_n = \#$ "Kopf" bis zum n-ten Münzwurf

Zusätzlich soll für eine SZ gelten:

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0\ \exists\, B_n \in \sigma(\mathcal{Z}^{n+1})$

Sodass $\{N = n\} = \{\omega \in \Omega : N(\omega) = n\}$

$= \{(X_0, \dots X_n) \in B_n\}$

↯ d.h. das Ereignis $\{N = n\}$ hängt nur von $X_1, \dots X_n$ ab.

(✱) ist eine Stoppzeit nach der Def.

$$\{N = n\} = \{\inf\{m \geq 0 : X_m \geq 3\} = n\} = \{X_1 \neq 3, X_2 \neq 3, \dots, X_{n-1} \neq 3, X_n = 3\}$$

$$= \{(X_1, X_2, X_3, \dots X_{n-1}, X_n) \in \underbrace{(\mathbb{Z} \setminus \{3\})^{n-1} \times \{3\}}_{B_n}\}$$

wobei $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2 \dots\}$ abzählbarer ZR der Markovkette

und $\mathcal{Z}^{n+1} = \{z_1, z_2, \dots\}^{n+1} = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) : y_\ell \in \mathcal{Z}\}$

zB. $\mathcal{Z} = \mathbb{N}_0$

$X_0 = 0 \in \mathbb{N}_0$ $\qquad (X_0, X_1) \in \mathbb{N}_0^2$

$X_1 = 1 \in \mathbb{N}_0$ $\qquad (X_0, X_1, X_2) \in \mathbb{N}_0^3$

$X_2 = 1 \in \mathbb{N}_0$ $\qquad = (0, 1, 1)$

$\vdots$

Anderes Beispiel:

$N \in \mathbb{N}_0$ deterministisch zB $N = 5$ bzw $N(\omega) = 5\ \forall\, \omega \in \Omega$.

$\Rightarrow \exists\, \tilde{N} \in \mathbb{R}$ sd. $N(\omega) = \tilde{N}\ \forall\, \omega \in \Omega. \rightsquigarrow \mathbb{P}[N = n] = \begin{cases} 0 & n \neq \tilde{N} \\ 1 & n = \tilde{N} \end{cases}$

$\{N = n\} = \{\omega \in \Omega : N(\omega) = n\} = (✱)$

falls $n = 5$ dann

$(✱) = \{\omega \in \Omega : \underbrace{N(\omega)}_{= 5\ \forall \omega \in \Omega} = 5\} = \{\omega \in \Omega : \text{"}5 = 5\text{"}\} = \Omega$

sonst $(✱) = \emptyset$