1 Lineare Algebra

1.1 Definitionen

Ein **Kern** ($Ker(A)$) existiert, wenn $\det(A) = 0$.
Der Kern einer Matrix A ist die Lösungsmenge von $A \cdot \vec{v} = \vec{0} \rightarrow$ LGS=0 durch elem. Zeilenoperationen lösen.

Das **Bild** ($Im(A)$) einer Matrix gibt an, welche Menge an Vektoren als Lösungen auftreten können (vgl. Wertebereich bei Funktionen). Das Bild einer Matrix A ist die Lösungsmenge von $A \cdot \vec{v} = \vec{b}$

Der **Rang** ($rank(A)$) einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren
Ermittlung: Spalten von links nach rechts $\rightarrow$ ist die Spalte$_i$ linear abhängig von den vorherigen? Rang = Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren
Verwendung z.B. zur Komprimierung von A:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & 4 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & 3 & 5 & 4 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 & 4 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 \\ a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \\ a_3 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \\ a_4 = 1 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 \\ a_5 = 2 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 \end{array} \rightarrow A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die **Länge** eines Vektors $\vec{v}$ ist die Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst.
$\rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$

Das **Skalarprodukt** $\langle x, y \rangle$ zweier Vektoren ist die Summe der Produkte der jeweiligen Komponenten
$\rightarrow x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$; man kann damit den von x und y eingeschlossenen Winkel als Zahl $\theta \in [0, \pi]$ berechnen mit: $\cos\theta = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \rightarrow$ Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander, wenn $\langle x, y \rangle = 0$

1.2 Determinante

Spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet. Diese gibt an, wie sich das Volumen bei der durch die Matrix beschriebenen linearen Abbildung ändert.

- $det(A) = 0 \rightarrow$ Matrix A ist nicht invertierbar; ist z.B. der Fall, wenn
  - eine Zeile oder Spalte nur aus Nullen besteht
  - 2 Zeilen/Spalten identisch sind
  - Zeilen/Spalten ein Vielfaches einer anderen Zeile/Spalte sind.
  - $Ker(A)$ existiert
- $det(I) = 1$
- $det(A) = det(A^T)$
- $det \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow$ Eine Zeile mit λ multiplizieren
- $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det(A) \rightarrow$ Ganze Matrix ($\mathbb{R}^{nxn}$) mit λ multiplizieren
- $det(A^{-1}) = det(A)^{-1} = \frac{1}{det(A)}$
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \rightarrow$ Zeilentausch: Vorzeichenwechsel

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - ibd$$

1.3 Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenraum

Eine Zahl λ heißt Eigenwert der Matrix A, wenn es einen Vektor $\vec{v}$ gibt, der nicht der Nullvektor ist, so dass gilt:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av - \lambda v &= 0 \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

1.3.1 Charakteristisches Polynom berechnen

Anstatt o.g. Gleichung zu lösen: Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$ der Matrix A.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

1.3.2 Eigenvektoren berechnen

Der zu einem Eigenwert λ_i gehörende Eigenvektor $\vec{v_i}$ ist die Lösung der Gleichung:

$$\begin{aligned} A\vec{v_i} &= \lambda_i \vec{v_i} \\ (A - \lambda_i I) \cdot \vec{v_i} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Rechenweg:

1. λ_i für λ in die Matrix $(A - \lambda I)$ einsetzen (siehe charakterisches Polynom)
2. Das folgende LGS durch elementare Zeilenoperationen lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda & 0 \end{array} \right)$$

3. Für Nullzeilen ergeben sich beliebige Lösungen, die gleich 1 gesetzt werden können.

1.3.3 Eigenraum berechnen

Der Eigenraum $E_A(\lambda_i)$ einer Matrix A zu einem Eigenwert λ_i ist die Menge aller Eigenvektoren $\vec{v_i}$ zu λ_i.

Lösung: Vielfaches der Eigenvektoren in Mengenschreibweise festhalten:

$$E_A(\lambda_i) = \{k \cdot \vec{v_i} | k \in \mathbb{R}\}$$

1.3.4 algebraische vs. geometrische Vielfachheit von λ

- **algebraische Vielfachheit**: Anzahl gleicher Eigenwerte im charakteristischen Polynom; $\leq dim(A)$
- **geometrische Vielfachheit**: Dimension (Anzahl der Vektoren) des Eigenraums $E(\lambda)$; $\leq$ algebraische Vielfachheit

$\rightarrow$ Wenn algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit, dann ist die Matrix diagonalisierbar.

1.4 Orthogonale Matrizen

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr **Skalarprodukt**

$$\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_i b_i \ = 0$$

Äquivalente Aussagen:

- Matrix B ist orthogonal
- $B^T B = I$, d.h. B ist invertierbar mit $B^{-1} = B^T$.
- Die Spaltenvektoren von B definieren eine Orthonomalbasis von $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Orthogonalen Vektor mit dem Kreuzprodukt finden

Für $\vec{a} \perp \vec{b}$ ergibt sich $\vec{c}$ mit $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ aus:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Projektion eines Punktes auf eine Gerade

Gegeben: Punkt P und Gerade g durch den Ursprung $(0, 0)$ mit Richtungsvektor $\vec{r}$. Dann berechnet sich die Projektion von P auf g wie folgt:

$$\vec{p} = \frac{\langle \vec{p}, \vec{r} \rangle}{||\vec{r}||^2} \vec{r} \text{ bzw. wenn } ||\vec{r}|| = 1 \text{ dann } \vec{p} = \langle \vec{p}, \vec{r} \rangle \vec{r}$$

1.4.3 Gram-Schmidt-Verfahren

Ziel: Orthonormalbasis (ONB) zu einem Vektorraum $B = \{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ finden.

1. Ersten Basisvektor normieren: $\vec{q_1} = \frac{\vec{q_1}}{||\vec{q_1}||}$
2. Fälle das Lot von b_2 auf die von q_1 erzeugte Gerade: $l_2 = b_2 - \langle b_2, q_1 \rangle q_1$
3. Normiere das Lot: $\vec{q_2} = \frac{\vec{l_2}}{||\vec{l_2}||}$
4. Wiederhole Schritte 2 und 3 für alle Basisvektoren:
   $l_i = b_i - \langle b_i, q_1 \rangle q_1 - \langle b_i, q_2 \rangle q_2 - \ldots - \langle b_i, q_{i-1} \rangle q_{i-1}$ und $\vec{q_i} = \frac{\vec{l_i}}{||\vec{l_i}||}$

1.5 Diagonalisierbarkeit

1.5.1 Diagonalisierbarkeit

A ist diagonalisierbar, wenn

- für jeden Eigenwert von A die algebraische Vielfachheit **gleich** der geometrischen Vielfachheit ist, oder
- wenn alle Eigenwerte (λ_i) von A unterschiedlich sind.

Um die Diagonalmatrix $D = M^{-1} A M$ bzw. $A = M D M^{-1}$ zu bestimmen:

1. Eigenwerte λ_i von A bestimmen $\rightarrow$ *Nullstellen char. Polynom*
2. Eigenvektoren $\vec{v_i}$ zu λ_i bestimmen $\rightarrow$ *Spalten der Matrix M*
3. Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i)$ bestimmen

1.5.2 Orthogonale Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $D = S^T AS = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist ($S^T S = I \Rightarrow$ Orthogonalität $S^{-1} = S^T$).

Dies ist genau dann der Fall, wenn A symmetrisch ist:

$$\boldsymbol{A^T} = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = \boldsymbol{A}$$

Vorgehensweise analog zur Diagonalisierbarkeit, Spalten von M werden zu Zeilen von S; zusätzlich müssen die Eigenvektoren $\vec{v_i}$ zu λ_i noch normiert werden ($\tilde{v_i} = \frac{v_i}{||v_i||}$)

1.6 Pseudo-Inverse A^+

Approximation einer inversen Matrix für nicht-quadratische Matrizen mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (siehe 1.7).

$$A^+ = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^T$$

wobei $\Sigma^{-1} = diag(\sigma_1^{-1}, \dots \sigma_r^{-1})$

Eigenschaften:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^T = AA^+ \rightarrow AA^+$ ist symmetrisch
- $(A^+A)^T = A^+A \rightarrow A^+A$ ist symmetrisch
- $A^+ = A^{-1}$, wenn A invertierbar ist
- $A = U\Sigma V^T \Leftrightarrow A^T = V\Sigma U^T$
- $V^T V = VV^T = I$ und $U^T U = UU^T = I$

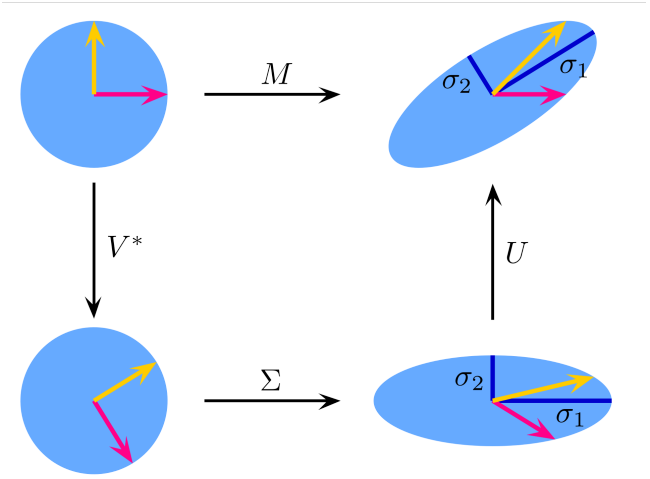
1.7 Singulärwertzerlegung

$$\underbrace{A}_{\mathbb{R}^{m \times n}} = \underbrace{U}_{\mathbb{R}^{m \times m}} \overbrace{\Sigma}^{\mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{V^T}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$$

- U und V sind orthogonale/unitäre Matrizen
- U enthält die normierten Eigenvektoren von AA^T; kann als eine Basis für den Spaltenraum von A betrachtet werden
- V enthält die normierten Eigenvektoren von $A^T A$; kann als eine Basis für den Zeilenraum von A betrachtet werden
- Σ ist eine Diagonalmatrix mit den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$ (sortiert) auf der Hauptdiagonalen. Die Singulärwerte sind die Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A$ und AA^T ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, Rest $= 0$).
- Die Singulärwerte in Σ geben die Stärke der Korrelation zwischen den Spalten und Zeilen von A an. Die größten Singulärwerte in Σ geben die wichtigsten Merkmale von A an, während die kleinsten Singulärwerte in Σ die Rauschkomponenten von A darstellen.

1.7.1 Einfaches Berechnungsverfahren (über Eigenvektoren)

1. AA^T und $A^T A$ bestimmen
2. Für „kleinere"Matrix aus 1) Eigenwerte λ_i bestimmen (char. Polynom)
3. Σ mit $diag(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n)$ aufstellen; Singulärwerte $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ auf Hauptdiagonalen; Rest $= 0$
4. U aufstellen: normierte Eigenvektoren für AA^T für alle λ_i bestimmen
5. V aufstellen: normierte Eigenvektoren für $A^T A$ für alle λ_i bestimmen; V^T bilden



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

Singulärwertzerlegung

1.7.2 Alternatives Berechnungsverfahren

1. Form prüfen: ist A „hochkant“?
→ sonst aufwendiger zu lösen
Umstellen zu A^T ist möglich, da
$(A^T)^T = A$; d.h. $A^T = V\Sigma^T U^T$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte von $A^T A$ bestimmen
Eigenwerte (≥ 0) über *Nullstellen char. Polynom* bestimmen, absteigend sortieren!

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$p_A(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$
$$(5-\lambda)^2 - 16 = 0$$
$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$$

3. Σ aufstellen
Diagonalmatrix mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, Rest $= 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Spaltenvektoren für V ermitteln
Eigenvektoren zu λ aus 2. bestimmen, normieren und in Matrix V eintragen
Für SVD: V^T bilden

für $\lambda_1 = 9$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-9 & 4 & 0 \\ 4 & 5-9 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$v_1 = \frac{v_1^*}{||v_1^*||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_2 = 1$:

$\ldots$

$$v_2 = \frac{v_2^*}{||v_2^*||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. U aufstellen
a) für vorhandene Singulärwerte:
$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$
b) sonst: u_i so finden, dass u_i ONB sind
→ Kreuzprodukt ($\mathbb{R}^3$)
→ Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Formeln

2.1.1 Kovarianz, Korrelation

$$Cov[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$Cov[X,Y] = Cov[Y,X] \text{ und } Cov[X,X] = Var[X]$$

$$r_{XY} = Cor[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \rightarrow [-1;+1]$$

Zusammenhänge beachten:

- statistische Unabhängigkeit $\Rightarrow$ Unkorreliertheit
- Unkorreliertheit $\Rightarrow$ statistische Unabhängigkeit, nur wenn X und Y normalverteilt sind

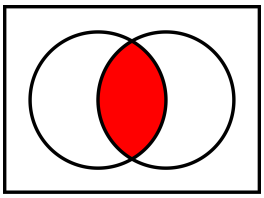
2.1.2 Linearkombinationen

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

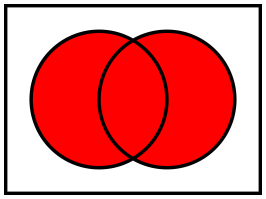
$$Var[aX + bY] = a^2 Var[X] + b^2 Var[Y] + 2abCov[X,Y]$$

$$Var[X_1 + \ldots + X_n] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov[X_i, X_j] \rightarrow \textit{ Satz von Bienaymé}$$

2.1.3 Mengen



Schnittmenge $A \cap B$



Vereinigung $A \cup B$

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

2.1.4 Konvergenz

- **in Wahrscheinlichkeit**: $X_n \xrightarrow{P} X$ wenn $\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(|X_n - EW(X)| \geq \epsilon) =$
  $= P(X_n \geq \epsilon) = P(X_1 \geq \epsilon) \times \ldots \times P(X_n \geq \epsilon) = (1-\epsilon)^n = 0$ für X_n unab. und gleichverteilt in [0,1]
- **im p-ten Mittel/in $\mathcal{L}^p$**: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ wenn $\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p)$
- **fast sicher**: $X_n \xrightarrow{fs} X$ wenn $P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$

Konvergenz bei einer Summe von Zufallsvariablen: $X_n \rightarrow a$ und $Y_n \rightarrow b \Longrightarrow X_n + Y_n \rightarrow a + b$

2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

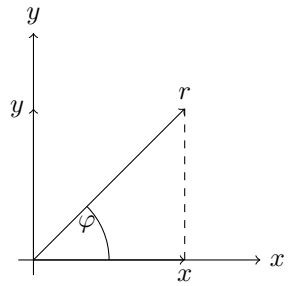
2.3 Bayes-Theorem

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

3 Optimierung

3.1 Polarkoordinaten

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten:



$$\cos(\varphi) = \frac{y}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{x}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \sin(\varphi)$$
$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

3.2 Konvexe Funktionen/Mengen

Eine *Menge* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in G$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$tx + (1 - t)y \in G$$

D.h. die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten der Menge liegt komplett in der Menge.

Eine *Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *konvex* ($\leq$) bzw. *strikt konvex* ($<$), wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0, 1]$ gilt:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Eine Funktion $f(x)$ ist (strikt) konvex, wenn $f''(x)$ überall ≥ 0 (bzw. > 0) ist.

3.2.1 Vorgehensweise bei mehrdimensionalen Funktionen:

1. Hesse-Matrix ($H_f(x)$, =symmetrisch) bestimmen: $H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
2. Definitheit bestimmen:
   (a) über *Eigenwerte*
   - Nullstellen charakteristisches Polynom bestimmen ($\rightarrow$ 1.3.1)
   - Interpretation:
     - alle $\lambda > 0 \rightarrow H_f(x)$ = pos. definit
     - alle $\lambda \geq 0 \rightarrow H_f(x)$ = pos. semidefinit
     - alle $\lambda < 0 \rightarrow H_f(x)$ = neg. definit
     - alle $\lambda \leq 0 \rightarrow H_f(x)$ = neg. semidefinit
     - λ positiv und negativ $\rightarrow H_f(x)$ = indefinit

   (b) über *Diagonaldominanz*: Ist $H_f(x)$ Diagonaldominant und alle Diagonalelemente > 0, so ist $H_f(x)$ positiv definit. $\rightarrow$ für alle Zeilen: ||Diagonalelement|| $> \sum$ ||übrige Zeilenelemente||

   (c) *Choleskyzerlegung* ist möglich = $H_f(x)$ ist positiv definit
3. Konvexität bestimmen:
   - $H_f(x)$ positiv definit $\Leftrightarrow$ f strikt konvex
   - $H_f(x)$ positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ f konvex
   - $H_f(x)$ negativ definit $\Leftrightarrow$ f strikt konvex
   - $H_f(x)$ negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ f konvex

3.2.2 L-glatt und Lipschitz-stetig

Eine Funktion $f(x)$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn $||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||$ für alle x, y gilt.

Eine Lipschitz-stetige Funktion ist eine stetige Funktion, deren Steigung beschränkt ist:

$$\left\| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right\| \leq L \rightarrow \text{Jede Sekantensteigung} \leq L$$

Implikation: Wenn zwei eingesetzte Punkte (x, y) näher zusammenrücken, dann nähern sich auch die Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ an.

Eine Funktion $f(x)$ heißt **L-glatt**, wenn f L-mal differenzierbar ist und ihre L-te Ableitung ($f^{(L)}(x)$) Lipschitz-stetig ist, d.h. es gibt eine Konstante K , so dass für alle x, y in ihrem Definitionsbereich gilt:

$$||f^{(L)}(x) - f^{(L)}(y)|| \leq K||x - y||$$

3.3 Optimierung ohne NB - Gradientenverfahren

Beginnend an einer Stelle x_0:

1. Berechne Gradienten $\nabla f(x_n)$ (im ersten Schritt mit x_0)
2. Setze $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n), \quad n \geq 0$ mit Schrittweite α
3. Wiederhole Schritt 1 und 2 bis Abbruchkriterium erfüllt; $x^* = x_k$

Approximation von $\nabla f(x_0)$ durch $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ möglich.

3.4 Optimierung unter Nebenbedingungen (KKT)

Erweiterung des Lagrange-Verfahrens um Nebenbedingungen. Es gelten folgende KKT-Bedingungen:

(I) $g_i(x^*) \leq 0 \rightarrow$ *Ungleichungs-NB nach* 0 *umformen*

(II) $h_j(x^*) = 0 \rightarrow$ *Gleichungs-NB nach* 0 *umformen*

(III) $\lambda_i^* \geq 0$

(IV) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$

(V) $\mathcal{L}'(x, \lambda, v) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$

mit den Lagrangemultiplikatoren (λ, v) als *duale Variablen* und x als *primale Variable*.

Vorgehensweise:

- Gleichungs-NB vorhanden → (II) nach einer Variablen auflösen und in (I) und (V) einsetzen
- 1. Ableitungen (Gradient ∇) von (I), (II) und Zielfunktion $f(x^*)$ bilden und (V) aufstellen
- (IV) aufstellen und Fallgruppen bilden: Was muss für λ_i und $g_i(x^*)$ gelten, damit Produkt = 0 wird? Fallgruppen über Kreuz bilden!
- Fallgruppen in (V) einsetzen und prüfen: Ist Lösung möglich? Sind alle Bedingungen erfüllt?
  - Wenn ja: KKT-Punkt = Lösung gefunden
  - Wenn nein: Kombination nicht zulässig → verwerfen!
- Lösung aufschreiben: KKT-Punkt (x, y), Zielfunktionswert (p^*), duale Variablen (Lagrange-Multiplikatoren λ_i, v_j)

Beispiel:

$$\begin{aligned} p^* &= \min 3x^2 + y^2 \\ \text{unter } x - y &\leq -8 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

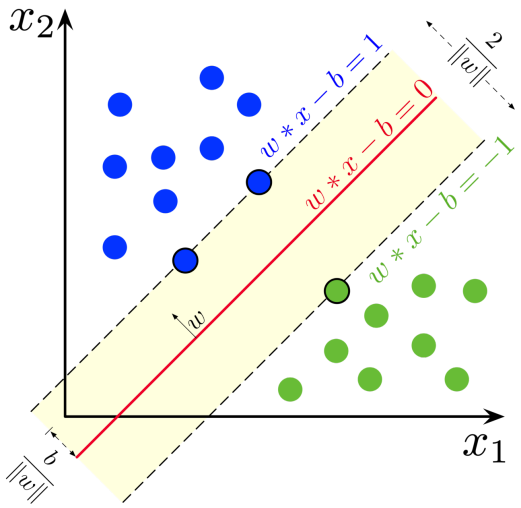
1. $g_1(x^*) = x - y + 8 \leq 0 \rightarrow \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   $g_2(x^*) = -y \leq 0 \rightarrow \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   $\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix}$
2. (V): $\begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\lambda_1^* g_1(x^*) = \lambda_1^*(x - y + 8) = 0 \rightarrow \underline{\lambda_1^* = 0}$ und $x - y + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = y - 8}$
   $\lambda_2^* g_2(x^*) = -\lambda_2^* y = 0 \rightarrow \underline{\lambda_2^* = 0}$ und $\underline{y = 0}$
4. Fallkombinationen prüfen:
   - Fall 1: $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$ ↯ wegen $x - y \leq -8$
   - Fall 2: $\lambda_1^* = y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 6x \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \lambda_2^* = 0$ ↯ wegen $x - y \leq -8$
   - Fall 3: $x = y - 8; \lambda_2^* = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 6(y-8) \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

     $$\begin{aligned} 6y - 48 + \lambda_1^* &= 0 \\ 2y - \lambda_1^* &= 0 \end{aligned}$$

     $$\begin{aligned} 8y = 48 &\Leftrightarrow y = 6\checkmark \\ x = y - 8 &\Leftrightarrow x = -2\checkmark \\ \lambda_1^* = 2y &= 12\checkmark \end{aligned}$$

     Es handelt sich um einen KKT-Punkt
   - Fall 4: $x = y - 8; y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 6(-8) \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1^* = 48$ und $-\lambda_1^* - \lambda_2^* = 0 \Leftrightarrow \lambda_2^* = -48$ ↯ wegen (III)
5. Lösung: Der Punkt $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^2) = (-2, 6, 12, 0)$ erfüllt die KKT-Bedingungen (KKT-Punkt). $(x, y) = \underline{(-2, 6)}$ löst das *primale Problem* und $(\lambda_1, \lambda_2) = (12, 0)$ löst das *duale Problem*. Damit ist $p^* = 3 \cdot (-2)^2 + 6^2 = 48$

3.5 Support Vector Machines (SVM)



- Ziel: Finde die *Hyperebene (Hyperplane)* mit der größten *Geometric Margin* (Abstand zu den *Support Vectors*). Da die *margin-Breite* $= \frac{2}{||w||}$ maximiert werden soll, wird $||w||$ minimiert
- *Support Vectors* sind die Punkte, die den *Geometric Margin* bestimmen und selbst darauf liegen; alle anderen Punkte sind irrelevant
- *Geometric Margin* ist der Abstand von der *Hyperplane* zu den *Support Vectors*
- *Hyperplane* ist die Trennebene, die die Klassen voneinander trennt

4 Statistik

4.1 Verteilungen

4.1.1 Binomialverteilung ($X \sim Bin(n, \pi)$)

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung; beschreibt die Anzahl an Erfolgen in einer Serie von unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei Ergebnisse haben (Erfolg/Misserfolg); z.B. beim Münzwurf, Ziehen mit Zurücklegen.

- n=Anzahl der Versuche/Ziehungen, π=Erfolgswahrscheinlichkeit (z.B. 0.3)
- **Wahrscheinlichkeit:** $P(X = k) = \binom{n}{k}\pi^k(1-\pi)^{n-k}$; k = Anzahl der gewünschten Erfolge
- **Erwartungswert:** $E(X) = n\pi$
- **Varianz:** $Var(X) = n\pi(1-\pi)$
- **Normalapproximation:** $X \sim N(n\pi, n\pi(1-\pi))$
- **Binomialkoeffizient:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- **Bernoulli-Verteilung:** Spezialfall der Binomialverteilung mit $n = 1$

4.1.2 Poisson-Verteilung ($X \sim Poi(\mu)$)

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung; beschreibt die Anzahl an Ereignissen in einem festgelegten Zeitintervall, wenn die Ereignisse mit einer konstanten Rate und unabhängig von der Zeit auftreten; z.B. Anzahl der Anrufe in einer Stunde, Anzahl der Kunden in einer Schlange, Anzahl der Fehler in einem Text. Für kleine μ zeigt die Poisson-Verteilung eine starke Asysmmetrie (Rechtsschiefe).

- Θ=Erwartungswert (z.B. 0.3)
- **Wahrscheinlichkeit:** $P(X = n) = \frac{\Theta^n}{n!}e^{-\Theta}$; n = Anzahl der gewünschten Ereignisse
- **Erwartungswert:** $E(X) = \Theta$
- **Varianz:** $Var(X) = \Theta$
- **Normalapproximation:** $X \sim N(\Theta, \Theta)$

4.1.3 Hypergeometrische Verteilung ($X \sim H(n, N, m)$)

Ähnlich wie Binomialverteilung, aber ohne Zurücklegen; z.B. beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit N Kugeln, davon m mit Erfolgsmarkierung.

- n=Anzahl der Versuche/Ziehungen, N=Anzahl der Kugeln in der Urne, m=Anzahl der Kugeln mit Erfolgsmarkierung
- **Wahrscheinlichkeit:** $P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$; k = Anzahl der gewünschten Erfolge
- **Erwartungswert:** $E(X) = n\frac{m}{N}$
- **Varianz:** $Var(X) = n\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- **Normalapproximation:** $X \sim N\left(n\frac{m}{N}, n\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right)$

4.1.4 Normalverteilung ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung; beschreibt viele natürliche Vorgänge (z.B. Körpergröße, IQ, Fehler in Messungen); zentrales Grenzwerttheorem: Summe von unabhängigen Zufallsvariablen strebt gegen Normalverteilung; symmetrisch um μ, σ^2-bestimmte Breite; μ=Erwartungswert, σ^2=Varianz, σ=Standardabweichung.

- **Erwartungswert:** $E(X) = \mu$
- **Varianz:** $Var(X) = \sigma^2$
- **Standardnormalverteilung:** $Z \sim N(0, 1)$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

4.2 Parameterschätzung

Kriterien für gute Schätzer:

- **Konsistenz:** Schätzungen werden genauer, je größer die Stichprobe ist
  - Ein Schätzer T ist konsistent für θ, wenn $\lim_{n\to\infty} P(|T-\theta|>\varepsilon)\to 0$ bzw. $\lim_{n\to\infty} Var(T)\to 0$
- **Erwartungstreue/Unverzerrtheit/unbiased:** Schätzer liegt im Mittel richtig
  - Ein Schätzer T ist erwartungstreu für θ, wenn $E(T)=\theta$; z.B. $E(T)=E(T(X))=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{T(k)\cdot \text{Wkt.fn}}_{(k^2-k)\frac{\Theta^k}{k!e^\Theta}}$ Bei gegebenem Schätzer $T(x)=x^2-x$ und Verteilung $\mathbb{P}_\Theta(\{n\})=\frac{\Theta^n}{n!e^\Theta}$
  - z.B. $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ liegt im Mittel bei μ.
  - Achtung: Stichprobenvarianz $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$ ist nicht erwartungstreu, da $\hat{\mu}$ in s^2 eingeht, Ausreißer landen systematisch seltener in der Stichprobe, so dass s^2 zu klein ist. Lösung: Korrektur, so dass Schätzer der Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}^2=\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n-1}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$
  - Beispiel: Stichprobe mit $N=5$, $s^2=2$ und $\bar{x}=32\to$ Schätzer Varianz $\hat{\sigma}^2=\frac{5}{5-1}\cdot 2=2.5$ und Standardschätzfehler $\hat{\sigma}_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}=\sqrt{\frac{2.5}{5}}=0.707$
- *Beispiel 1:* $T_1=\bar{X}$ mit $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(\mu,\sigma)$
  - $E(T_1)=E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\frac{1}{n}n\mu=\mu\to$ erwartungstreu
  - $Var(T_1)=Var(\bar{X})=Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}\to 0$ für $\lim_{n\to\infty}\to$ konsistent
- *Beispiel 2:* $T_2=\frac{1}{2}(X_1+X_n)$ mit $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(\mu,\sigma)$
  - $E(T_2)=E(\frac{1}{2}(X_1+X_n))=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_n))=\frac{1}{2}(\mu+\mu)=\mu\to$ erwartungstreu
  - $Var(T_2)=Var(\frac{1}{2}(X_1+X_n))=\left(\frac{1}{2}\right)^2(Var(X_1)+Var(X_n))=\frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{2}\nrightarrow 0\to$ nicht konsistent

Zentrale Größen:

- Kovarianz: $cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]=E(XY)-E(X)E(Y)$
- Korrelation: $corr(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ (liegt zwischen -1 und +1)
- Standardschätzfehler des Mittelwerts: $\hat{\sigma}_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$

4.2.1 Maximum-Likelihood Schätzer (ML-Schätzer)

Wichtige ML-Schätzer:

- ***Binomialverteilung*** ($X\sim Bin(n,\pi)$, n=Länge der Versuchsreihe, π=Wahrscheinlichkeit für Erfolg):
  - Erwartungswert $\hat{\pi}=T(x)=\frac{x}{n}\to$ Anzahl Erfolge / Anzahl Versuche
  - Varianz $\hat{\sigma}^2=\frac{\pi(1-\pi)}{n}\to$ ggf. mit $\hat{\pi}$ rechnen
- ***Normalverteilung*** ($X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ=Erwartungswert, σ^2=Varianz):
  - Erwartungswert $\hat{\mu}=T(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to$ arithmetisches Mittel
  - Varianz $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2\to$ empirische Varianz
  - korrigierte Stichprobenvarianz $S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$

Mathematische Bestimmung eines ML-Schätzers:

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$; mit Dichtefunktion $f(x_i)$ (vgl. S. 11)
2. Logarithmierung: $\ln(L(\theta))=\sum_{i=1}^{n}\ln(f(x_i))$; Umformen/Vereinfachen mit ***Logarithmengesetzen***:
   - $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$
   - $\ln(a^b)=b\cdot\ln(a)$

- $\ln(e^a) = a$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- 1. Ableitung: $\frac{\partial \ln(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}$

3. Ableiten nach θ und Nullsetzen: $\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = 0$
4. Lösen der Gleichung nach θ
5. Überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt

Beispiel 1 für Herleitung einer Dichtefunktion:
Bestimme θ mit der ML-Methode für die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3\theta e^{-\theta x^4} & \text{für } x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 4x_i^3\theta e^{-\theta x_i^4} = \overbrace{4^n(x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3)\theta^n e^{-\theta(x_1^4+x_2^4+\dots+x_n^4)}}^{\text{Sinnvoll zusammenfassen}}$
2. Logarithmierung: $\ln(L(\theta)) = \ln(4^n(x_1^3 x_2^3 \dots x_n^3)) + n\ln(\theta) - \theta(x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4)\underbrace{\ln(e)}_{=1}$
3. Ableiten nach θ: $\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta} = n\frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$

Beispiel 2 für Herleitung ($X \sim N(\mu, \sigma)$):

1. Aufstellen der ML-Funktion: $L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. Logarithmierung:

$$\begin{aligned} \ln(L(\mu, \sigma^2)) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{aligned}$$

3. Ableiten nach μ und σ^2 und Nullsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma^2))}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\mu \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{\partial \ln(L(\mu, \sigma^2))}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{2} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\ &\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

4.3 Zentraler Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen einer beliebigen Verteilung für $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung konvergiert, auch wenn die Ausgangsverteilung nicht normalverteilt ist. Als Theorem mit Erwartungswert (μ), Varianz (σ^2) und n Zufallsvariablen:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \sqrt{\frac{n}{V}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E\right) \to \Phi(x) \sim N(0,1)$$

4.4 Regression

Unterscheidung zwischen (einfacher/multipler) linearer und logistischer Regression:

- **Lineare Regression:**
  - Ziel: Schätzung des Erwartungswerts einer abhängigen Variable Y in Abhängigkeit von einer oder mehreren unabhängigen Variablen X
  - Modell: $Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \ldots + \beta_n \cdot X_n + \varepsilon$
  - ε: Fehlerterm
  - β_0: Achsenabschnitt
  - $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$: Regressionskoeffizienten
- **Logistische Regression:**
  - Ziel: Schätzung der Wahrscheinlichkeit, dass eine abhängige Variable Y den Wert 1 annimmt, in Abhängigkeit von einer oder mehreren unabhängigen Variablen X
  - Modell: $P(Y=1) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta_1\cdot X_1+\beta_2\cdot X_2+\ldots+\beta_n\cdot X_n)}}$
  - $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$: Regressionskoeffizienten

4.5 Konfidenzintervalle

Schätzung eines Intervalls, in dem sich der wahre Wert (z.B. der Erwartungswert μ) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit befindet.

4.5.1 Vorgehensweise bei Normalverteilung und bekanntem σ

1. Punktschätzung des Erwartungswerts aus n Stichproben (x_i)

   $$M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

   $\to$ dieser entspricht i.d.R. nicht dem wahren Wert μ der Grundgesamtheit.

2. Konfidenzniveau ($1-\alpha$; α = Irrtumsniveau) festlegen und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ aus Tabelle zur Normalverteilung ablesen
   - $90\% = 1-\alpha \to \alpha = 0.1 \to z_{0.95} = 1.65$
   - $95\% \to \alpha = 0.05 \to z_{0.975} = 1.96$
   - $96\% \to \alpha = 0.04 \to z_{0.980} = 2.06$
   - $97\% \to \alpha = 0.03 \to z_{0.985} = 2.17$
   - $98\% \to \alpha = 0.02 \to z_{0.99} = 2.33$
   - $99\% \to \alpha = 0.01 \to z_{0.995} = 2.58$
3. Berechnung des Konfidenzintervalls

   $$\mathcal{I}(x) = \left[M(x) - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;;\; M(x) + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

   ist ein Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$.

   Vorgehensweise: $1-\frac{\alpha}{2}$ berechnen und innerhalb der Tabelle zur Normalverteilung diesen Wert suchen. Der gesuchte z-Wert ergibt sich dann aus den Zeilen- und Spaltenberschriften.

4.5.2 Vorgehensweise bei Normalverteilung und unbekanntem σ

Grds. analog zu oben, wobei Werte für $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ aus der t-Verteilung verwendet werden (Studentsche (t-) Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden). Nur bei $n \geq 30$.

1. Punktschätzung des Erwartungswerts aus n Stichproben (x_i)

$$M(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   $\rightarrow$ dieser entspricht i.d.R. nicht dem wahren Wert μ der Grundgesamtheit.

2. Berechnung des Standardfehlers der Stichprobenmittelwerte

$$\text{korrigierte Stichprobenvarianz: } V^*(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2$$

$$\text{Standardfehler: } s^* = \sqrt{\frac{V^*(x)}{n}}$$

   $\rightarrow$ dieser entspricht i.d.R. nicht dem wahren Wert σ der Grundgesamtheit.

3. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\mathcal{I}(x) = \left[M(x) - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s^* \;\; ; \;\; M(x) + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s^* \right]$$

   ist ein Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$ *mit* $n-1$ *Freiheitsgraden*

   Vorgehensweise: Richtige Zeile für Freiheitsgrade $n-1$ suchen. In Spalte $1-\frac{\alpha}{2}$ suchen. Der gewünschte t-Wert ergibt sich aus der Tabelle.

4.5.3 Vorgehensweise im Binominalmodell

Wenn X binominalverteilt ist ($X \sim B(n,p)$, n=Anzahl gezogene Versuche, p=Erfolgswahrscheinlichkeit), n groß und die Varianz nicht zu klein ist (Faustregel: $np(1-p) > 9$), gilt die Approximation durch die Normalverteilung mit:

- Erwartungswert: $\mu = np$
- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$
- Standardfehler: $s = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
- Punktschätzung: $\hat{p} = \frac{x}{n}$
- Konfidenzintervall für p: $\mathcal{I}(p) \approx \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s; \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s \right]$
- Konfidenzintervall für μ: $\mathcal{I}(\mu) \approx \left[\hat{\mu} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s; \hat{\mu} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s \right]$

Vorgehensweise: $1-\frac{\alpha}{2}$ berechnen und innerhalb der Tabelle zur Normalverteilung diesen Wert suchen. Der gesuchte z-Wert ergibt sich dann aus den Zeilen- und Spaltenberschriften.

4.6 Tests

- **Nullhypothese (H_0):** Annahme, die geprüft werden soll (z.B. $H_0 : p_0 = 0.3$ als EW für Münzwurf)
- **Gegenhypothese (H_1):** Gegenteil der Nullhypothese
  - Alternativtest: Prüfe, ob anstatt $H_0 : p_0 = 0.3$ nicht $H_1 : p_1 = 0.2$ gilt
  - Linksseitiger Test: Prüfe, ob anstatt $H_0 : p_0 = 0.3$ nicht $H_1 : p_1 < 0.3$ gilt
  - Rechtsseitiger Test: Prüfe, ob anstatt $H_0 : p_0 = 0.3$ nicht $H_1 : p_1 > 0.3$ gilt
  - Zweiseitiger Test: Prüfe, ob anstatt $H_0 : p_0 = 0.3$ nicht $H_1 : p_1 \neq 0.3$ gilt

- **Signifikanzniveau (α):** Auch: Niveau des Testverfahrens. (Irrtums-)Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird
- **Teststatistik:** Funktion der Stichprobenwerte, die zur Entscheidung über die Annahme oder Ablehnung der Nullhypothese herangezogen wird
- **Ablehnungsbereich:** Bereich der Teststatistik, in dem die Nullhypothese abgelehnt wird
- **p-Wert:** Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese verworfen werden kann
- **Fehler 1. Art:** H_0 wird fälschlicherweise abgelehnt
- **Fehler 2. Art:** H_0 wird fälschlicherweise nicht abgelehnt

4.6.1 χ^2-Anpassungstest

Vergleicht die beobachtete Verteilung einer Stichprobe mit einer theoretischen (erwarteten) Verteilung. Es wird geprüft, ob die beobachtete Häufigkeitsverteilung von Kategorien mit der erwarteten Häufigkeitsverteilung übereinstimmt (z.B. ob beobachtete erste Ziffern der *Benford-Verteilung* ($\mathbb{P}(X \in E_i) = \log_{10}(1+1/i)$) entsprechen).

1. Voraussetzung: Zufallsvariable X (z.B. Ergebnis eines Würfelwurfs) mit s Ausprägungen (Kategorien; z.B. 1-6 Würfelaugen) und N Beobachtungen (Stichprobenumfang); Mindestens: $N \geq 5/\min(\rho_i)$

2. Nullhypothese (H_0): Die tatsächliche Verteilung entspr. der erwarteten Verteilung ($P(X \in A_i) = \rho_i = \frac{1}{6}$)

3. Gegenhypothese (H_1): Nicht H_0

4. χ^2-Teststatistik:

$$D_\rho = \sum_{i=1}^{s} \frac{(h(i) - N\rho(i))^2}{N\rho(i)} = \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{h(i)^2}{N\rho(i)}\right) - N = N\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{L(i)^2}{\rho(i)}\right) - N$$

wobei

- N = Stichprobengröße *(z.B. 50 Würfe mit Würfel)*
- s = Anzahl der Kategorien *(z.B. 6 Würfelaugen)*
- A_i = Kategorie i *(z.B. Würfelaugen 1-6)*
- $h(i)$ = Anzahl der Beobacht. in Kategorie A_i *(z.B. 8 Würfe 1er Würfe)*
- $L(i) = \frac{h(i)}{N}$ = relative Häufigkeit der Beobachtungen in Kategorie A_i *(z.B. 8/50 Würfe mit Würfelaugen 1 usw.)*
- $\rho(i)$ = Wahrscheinlichkeit der Kategorie A_i *(z.B. $\frac{1}{6}$ für Würfelauge 1 usw.)*
- α = Irrtumswahrscheinlichkeit/Signifikanzniveau *(z.B. 5%)*

5. Ablehnungsbereich: H_0 ablehnen, wenn: $D_\rho > \chi^2_{s-1;1-\alpha}$

Wenn nach einem ***p*-Wert** gefragt wird: Hierbei sucht man rückwärts in der Tabelle den Eintrag, der gerade so noch kleiner ist als der in der Aufgabe genannte Wert. Der Wert in der Spalte α ist dann der gesuchte p-Wert. Dieser gibt das größte Signifikanzniveau an, bei dem die Nullhypothese verworfen wird. Je kleiner der p-Wert, desto unwahrscheinlicher ist es, dass die beobachteten Daten unter der Nullhypothese vorkommen könnten.

4.6.2 χ^2-Unabhängigkeitstest

Prüft die Unabhängigkeit zweiter Merkmale, d.h. ob das Vorkommen einer Variable von der anderen ahängt oder nicht.

1. Voraussetzung: Zufallsvariable X und Y nehmen jeweils zwei Werte an (z.B. X=männlich/weiblich, Y=raucht/nicht raucht).

2. Nullhypothese (H_0): X und Y sind stochastisch unabhängig

3. Gegenhypothese (H_1): Nicht H_0

4. χ^2-Teststatistik:

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

	Y	$\overline{Y}$	Σ
X	N_{11}	N_{12}	$N_{1\cdot}$
$\overline{X}$	N_{21}	N_{22}	$N_{2\cdot}$
Σ	$N_{\cdot 1}$	$N_{\cdot 2}$	n

	Nichtraucher	Raucher	Σ
männlich	170	30	200
weiblich	250	150	400
Σ	420	180	600

Daraus Berechnung der Teststatistik:

$$D_\rho = n\frac{(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21})^2}{N_{1\cdot}N_{2\cdot}N_{\cdot 1}N_{\cdot 2}}$$

Gedankenstütze: Determinante hoch 2 geteilt durch Produkt aus allen Spalten- und Zeilensummen

Bzw. für größere Tabellen:

Absoulte Häufigkeiten

	B_1	$\cdots$	B_J	Σ
A_1	N_{11}	$\cdots$	N_{1j}	$N_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	N_{i1}	$\cdots$	N_{ij}	$N_{i\cdot}$
Σ	$N_{\cdot 1}$	$\cdots$	$N_{\cdot j}$	n

$\longrightarrow$ Alles durch n teilen

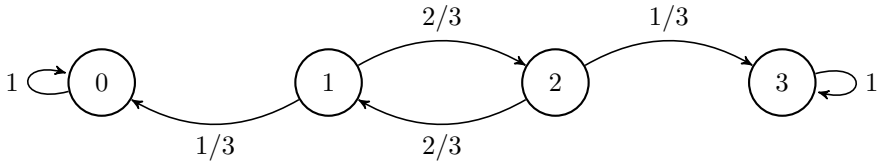
Relative Häufigkeiten

	B_1	$\cdots$	B_J	Σ
A_1	L_{11}	$\cdots$	L_{1j}	$L_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_I	L_{i1}	$\cdots$	L_{ij}	$L_{i\cdot}$
Σ	$L_{\cdot 1}$	$\cdots$	$L_{\cdot j}$	1

$$D_\rho = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(N_{ij} - \frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n})^2}{\frac{N_{i\cdot}N_{\cdot j}}{n}} = n\cdot\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{N_{ij}^2}{N_{i\cdot}N_{\cdot j}} - 1 = n\cdot\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}L_{i\cdot}L_{\cdot j}\left(\frac{L_{ij}}{L_{i\cdot}L_{\cdot j}} - 1\right)^2$$

5. Ablehnungsbereich: H_0 ablehnen, wenn: $T > \chi^2_{1;1-\alpha}$ bzw. $T > \chi^2_{(s-1)(t-1);1-\alpha}$ $\rightarrow$ Wert lt. Teststatistik (D_ρ) mit χ^2-Tabelle vergleichen

5 Markov-Ketten



Eine homogene, ***irreduzible, aperiodische*** *Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum ist immer* ***stationär****, d.h. sie konvergiert gegen ihr statistisches Gleichgewicht.*

5.1 Übergangsmatrix

5.2 Stationäre Verteilung

Ein Zustandsvektor π heißt *stationäre Verteilung* einer Markov-Kette, wenn gilt:

$$\pi \cdot P = \pi$$

Gleichungen lösen, ggf. mit Hilfe von Parametern t, wenn es keine eindeutige Lösung gibt. Wert für t bestimmen, indem die Summe der Komponenten des Vektors π gleich 1 gesetzt wird.

Beispiel:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$$

Da $\sum \pi_i = 1$ gilt

$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \Leftrightarrow \underline{\pi_1 = 1 - \pi_2} \Leftrightarrow \underline{\pi_2 = 1 - \pi_1}$$

π_1 und π_2 in die folgenden Gleichungen einsetzen:

$$\pi_1 \cdot 0.5 + \pi_2 \cdot 0.3 = \pi_1 \Longrightarrow \pi_2 = \frac{5}{8}$$

$$\pi_1 \cdot 0.5 + \pi_2 \cdot 0.7 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 = \frac{3}{8}$$

Daraus folgt der stationäre Zustandsvektor: $\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$

5.3 Irreduzibilität

Es ist von jedem Zustand aus möglich, jeden anderen Zustand zu erreichen. Die Prüfung kann manuell erfolgen.

Beispiel: $P = \begin{pmatrix} 1-p & p/2 & p/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist irreduzibel für $p \in (0, 1]$, da für $p = 0$ Zustände 2 und 3 nicht mehr erreichbar sind.

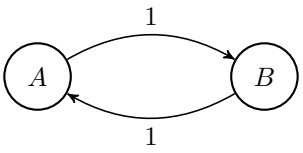
5.4 Aperiodizität

Die Periode eines Zustands ist die größte gemeinsame Teiler aller Pfade, die zu diesem Zustand zurück führen.

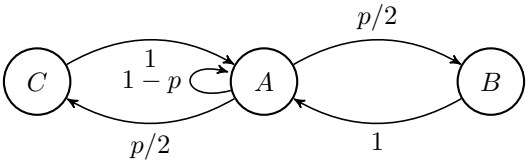
Starte in einem Zustand i und gehe in einen Zustand j. Die Periode von i ist die größte gemeinsame Teiler aller Pfade, die von j nach i führen. Wenn die Periode von jedem Zustand i gleich 1 ist, ist die Markov-Kette aperiodisch. Das heißt:

$$d(z) = ggT\{n \in \mathbb{N} | P_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$$

Beispiel: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist *nicht* aperiodisch, da $d(z) = 2$; man springt immer zwischen den beiden Zuständen mit einer geraden Anzahl hin und her.



Beispiel: $P = \begin{pmatrix} 1-p & p/2 & p/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist aperiodisch für $p \in [0,1)$, da bei $p = 1$ immer von Zustand 1 in 2 oder 3 gesprungen wird und wieder zurück. Für alle anderen Werte wird in zwei Fällen auch hin- und zurückgesprungen. Allerdings gibt es auch die Möglichkeit, dass vom Zustand A nicht geswechelt wird und man dort bleibt.



5.5 Stoppzeiten

Eine Stoppzeit ist eine Zufallsvariable, die das Eintreten eines Ereignisses beschreibt, das von der bisherigen Entwicklung eines stochastischen Prozesses abhängt.