

1 Lineare Algebra

1.1 Kern, Bild und Rang

Ein **Kern** ($\text{Ker}(A)$) existiert, wenn $\det(A) = 0$.

Der Kern einer Matrix A ist die Lösungsmenge von $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$
→ LGS=0 durch elem. Zeilenoperationen lösen.

Das **Bild** ($\text{Im}(A)$) einer Matrix gibt an, welche Menge an Vektoren als Lösungen auftreten können (vgl. Wertebereich bei Funktionen).

Das Bild einer Matrix A ist die Lösungsmenge von $A \cdot \vec{v} = \vec{b}$

Der **Rang** ($\text{rank}(A)$) einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

Rang = Anzahl der Nichtnullzeilen der Matrix in Zeilenstufenform.

→ A durch elem. Zeilenoperationen umformen.

1.2 Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

2x2 Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - ibd$$

3x3 Matrix

Ergänzung: Laplace'scher Entwicklungssatz bei höherrangigen Matrizen

Siehe: <https://www.mathebibel.de/laplace-entwicklungssatz>

1.3 Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenraum

Eine Zahl λ heißt Eigenwert der Matrix A, wenn es einen Vektor \vec{v} gibt, der nicht der Nullvektor ist, so dass gilt:

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

1.3.1 Charakteristisches Polynom berechnen

Anstatt o.g. Gleichung zu lösen: Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$ der Matrix A.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) \\ = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

1.3.2 Eigenvektoren berechnen

Der zu einem Eigenwert λ_i gehörende Eigenvektor \vec{v}_i ist die Lösung der Gleichung:

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \\ (A - \lambda_i I) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

Rechenweg:

1. λ_i für λ in die Matrix $(A - \lambda E)$ einsetzen (siehe charakteristisches Polynom)
2. Das folgende LGS durch elementare Zeilenoperationen lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda & 0 \end{array} \right)$$

3. Für Nullzeilen ergeben sich beliebige Lösungen, die gleich 1 gesetzt werden können.

1.3.3 Eigenraum berechnen

Der Eigenraum $E_A(\lambda_i)$ einer Matrix A zu einem Eigenwert λ_i ist die Menge aller Eigenvektoren \vec{v}_i zu λ_i .

Lösung: Vielfaches der Eigenvektoren in Mengenschreibweise festhalten:

$$E_A(\lambda_i) = \{k \cdot \vec{v}_i | k \in \mathbb{R}\}$$

1.3.4 algebraische vs. geometrische Vielfachheit von λ

- **algebraische Vielfachheit:** Anzahl gleicher Eigenwerte im charakteristischen Polynom
- **geometrische Vielfachheit:** Dimension (Anzahl der Vektoren) des Eigenraums $E(\lambda)$; \leq algebraische Vielfachheit

1.4 Orthogonale Matrizen

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_i b_i = 0$$

Äquivalente Aussagen:

- Matrix B ist orthogonal
- $B^T B = I$, d.h. B ist invertierbar mit $B^{-1} = B^T$.
- Die Spaltenvektoren von B definieren eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n

1.4.1 Orthogonalen Vektor mit dem Kreuzprodukt finden

Für $\vec{a} \perp \vec{b}$ ergibt sich \vec{c} mit $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ aus:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Gram-Schmidt-Verfahren

Ziel: Orthonormalbasis (ONB) zu einem Vektorraum $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ finden.

1. Ersten Basisvektor normieren: $\vec{q}_1 = \frac{\vec{q}_1}{\|\vec{q}_1\|}$
2. Fällt das Lot von b_2 auf die von q_1 erzeugte Gerade: $l_2 = b_2 - \langle b_2, q_1 \rangle q_1$
3. Normiere das Lot: $\vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|}$
4. Wiederhole Schritte 2 und 3 für alle Basisvektoren:
 $l_i = b_i - \langle b_i, q_1 \rangle q_1 - \langle b_i, q_2 \rangle q_2 - \dots - \langle b_i, q_{i-1} \rangle q_{i-1}$ und $\vec{q}_i = \frac{\vec{l}_i}{\|\vec{l}_i\|}$

1.5 Diagonalisierbarkeit

1.5.1 Diagonalisierbarkeit

A ist diagonalisierbar, wenn

- für jeden Eigenwert von A die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit ist, oder
- wenn alle Eigenwerte (λ_i) von A unterschiedlich sind.

Um die Diagonalmatrix $D = S^{-1} A S$ bzw. $A = S D S^{-1}$ zu bestimmen:

1. Eigenwerte λ_i von A bestimmen \rightarrow *Nullstellen char. Polynom*
2. Eigenvektoren \vec{v}_i zu λ_i bestimmen \rightarrow *Spalten der Matrix S*
3. Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i)$ bestimmen

1.5.2 Orthogonale Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $D = S^T A S = S^{-1} A S$ eine Diagonalmatrix ist ($S^T S = I \Rightarrow$ Orthogonalität $S^{-1} = S^T$).

Dies ist genau dann der Fall, wenn A symmetrisch ist:

$$A^T = (S D S^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = S D S^T = A$$

Vorgehensweise analog zur Diagonalisierbarkeit; zusätzlich müssen die Eigenvektoren \vec{v}_i zu λ_i noch normiert werden ($\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$)

1.6 Pseudo-Inverse A^+

Approximation einer inversen Matrix Für nicht-quadratische Matrizen mit Hilfe der Singulärwertzerlegung (siehe 1.7).

$$A^+ = V \cdot \Sigma^{-1} \cdot U^T$$

wobei $\Sigma^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1})$

Eigenschaften:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^T = AA^+ \rightarrow AA^+$ ist symmetrisch
- $(A^+A)^T = A^+A \rightarrow A^+A$ ist symmetrisch
- $A^+ = A^{-1}$, wenn A invertierbar ist
- $A = U \Sigma V^T \Leftrightarrow A^T = V \Sigma U^T$

1.7 Singulärwertzerlegung

$$\underbrace{A}_{\mathbb{R}^{m \times n}} = \underbrace{U}_{\mathbb{R}^{m \times m}} \underbrace{\Sigma}_{\mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{V^T}_{\mathbb{R}^{n \times n}}$$

- U und V sind orthogonale/unitäre Matrizen
- Σ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ (sortiert) auf der Hauptdiagonalen

1.7.1 Verfahren

1. Form prüfen: ist A „hochkant“?

→ sonst aufwendiger zu lösen

Umstellen zu A^T ist möglich, da

$$(A^T)^T = A; \text{ d.h. } A^T = V\Sigma^T U^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Eigenwerte von $A^T A$ bestimmen

Eigenwerte (≥ 0) über *Nullstellen char.*

Polynom bestimmen, absteigend sortieren!

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A^T A - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$(5 - \lambda)^2 - 16 = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$$

3. Σ aufstellen

Diagonalmatrix mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, Rest = 0

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Spaltenvektoren für V ermitteln

Eigenvektoren zu λ aus 2. bestimmen,

normieren und in Matrix V eintragen

Für SVD: V^T bilden

für $\lambda_1 = 9$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-9 & 4 & 0 \\ 4 & 5-9 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow v_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{v_1^*}{\|v_1^*\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_2 = 1$:

...

$$v_2 = \frac{v_2^*}{\|v_2^*\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. U aufstellen

a) für vorhandene Singulärwerte:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

b) sonst: u_i so finden, dass u_i ONB sind

→ Kreuzprodukt (\mathbb{R}^3)

→ Gram-Schmidt

$$u_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$