S. Riedel
L.V. Brinker

EA 2

1. Ereignisse (10 Punkte). Es seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse auf einem (diskreten) Wahrscheinlichkeitsraum.

a) (5 Punkte) Drücken Sie folgende Ereignisse mit Hilfe von $A_1, \dots, A_n$ aus:

i) $M_k =$ „mindestens k der Ereignisse treten ein“

ii) $G_k =$ „genau k der Ereignisse treten ein“.

$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) (5 Punkte) Wir definieren $Z = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ die Anzahl der eingetroffenen Ereignisse. Schreiben Sie $\mathbb{E}[Z]$...

i) ... in Abhängigkeit von $\mathbb{P}[A_k]$.

ii) ... in Abhängigkeit von $\mathbb{P}[G_k]$.

iii) ... in Abhängigkeit von $\mathbb{P}[M_k]$.

$M_k = \bigcup_{\substack{\mathcal{I} \subset \{1,\dots,n\} \\ |\mathcal{I}| \geq k}} \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$

$A_1 \; A_2 \; \underbrace{A_3 \; A_4 \; A_5}_{}$ $\quad k=3 \quad n=5$

$\mathcal{I} = \{3,4,5\}$

$A_3 \cap A_4 \cap A_5$

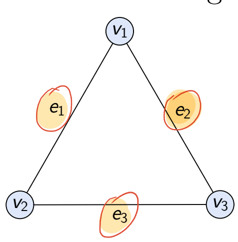
$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{n} k \, \mathbb{P}[Z=k]$

$\mathbb{E}[Z] \overset{\text{überlegen}}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[\underbrace{Z \geq k}_{M_k}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[M_k]$

2. Zufallsgraph (10 Punkte). Wir betrachten den unten abgebildeten Graphen mit drei Knoten v_1, v_2, v_3 und stellen uns vor, dass nach den folgenden Regeln entschieden wird, ob eine Kante e_1, e_2, e_3 Teil des Graphen ist:

- Wir werfen eine Münze. Zeigt Sie Kopf, ist e_1 Teil des Graphen (und sonst nicht).
- Wir würfeln mit einem (sechsseitigen) Würfel. Ist das Ergebnis kleiner oder gleich 5, ist e_2 Teil des Graphen (und sonst nicht).
- Ist das Ergebnis des obigen Würfelwurfs größer als 3 oder gleich 1, dann ist e_3 Teil des Graphen (und sonst nicht).

Wir nehmen an, dass Münze und Würfel jeweils fair sind. Der Zufallsgraph G ist eine Zufallsvariable mit der folgenden Verteilung:



$\mathbb{P}(G = \dots)$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

a) (1 Punkte) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1,2,3,4,5,6 gewürfelt wurde, wenn man weiß, dass der G die Form △, .\, ∧ oder ⦣ hat. → Beispiel in Form $\mathbb{P}[W=i \mid G \in \{△, .\backslash, \wedge, >\}]$

b) (4 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass e_3 in der Kantenmenge von G ist. Berechnen Sie dann jeweils die Wahrscheinlichkeit unter der Zusatzinformation, dass ...

	1	2	3	4	5	6
Kopf	∧	∧	∧	∧	∧	/
Zahl	.\	.\	.\	.\	.\	.

usw.

$\Omega = \{K, Z\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

$\{G \in \{△, .\backslash, \wedge, >\}\} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \dots\}$

i) … e_1 in der Kantenmenge ist bzw. e_1 nicht in der Kantenmenge ist.

ii) … e_2 in der Kantenmenge ist bzw. e_2 nicht in der Kantenmenge ist.

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie i) und ii) vergleichen?

c) (2 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie „$\mathbb{P}[B \mid C] = \mathbb{P}[C \mid B]$“ für $B = \{v_2 \text{ hat mind. 1 Kante}\}$ und $C = \{\text{entweder ist } e_1 \text{ in } G \text{ oder eine 3 wurde gewürfelt, aber nicht beides}\}$.

d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Verteilung und den Erwartungswert der Zufallsvariable „Anzahl der Kanten an dem Knoten mit den meisten Kanten“ jeweils bedingt darauf, dass

i) … v_2 genau eine Kante hat.

ii) … v_3 genau eine Kante hat.

Vergleichen Sie dies mit dem „normalen“ Erwartungswert ohne Zusatzinformation. Was passiert, wenn wir auf $\{G =$ $\}$ bedingen?

3. Monte-Carlo-Simulation (10 Punkte). Wir betrachten in dieser Aufgabe zwei Beispiele für das Verfahren.

a) (4 Punkte) Wir betrachten die Funktion $G(x, y) = \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Finden Sie C sodass

$$\frac{\pi}{C} = \int_{[0,1]^2} G(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

gilt und beschreiben (und begründen) Sie, wie Sie diese Gleichung nutzen können, um π numerisch zu schätzen, wenn nur stetig gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 1 erzeugt werden können.

Hinweis: Mit der Polarkoordinatentransformation ($x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$) kann man $\int_{[0,1]^2} G(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ zeigen.

Als Nächstes wollen wir die Wahrscheinlichkeit, dass eine Standard Normalverteilte Zufallsvariable im Intervall $[-1, 1]$ liegt, numerisch berechnen. Wir verwenden ein Monte-Carlo-Verfahren und haben bereits $n = 15$ unabhängige Realisierungen einer auf $[0, 2]$ gleichverteilten Zufallsvariable X erzeugt:

1.5021	0.6016	1.3623	1.2606	1.7799
0.8449	0.5189	1.7723	0.4940	1.5046
1.8094	1.7911	0.2775	1.5358	1.4985

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine Konstante C gibt, sodass das gesuchte Integral dem Ausdruck $C \cdot \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{-(X-1)^2/2}\big)$ entspricht und berechnen Sie C.

c) (2 Punkte) Verwenden Sie b) und die Realisierungen von X um das gesuchte Integral zu approximieren.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der beiliegenden Tabelle

./.

und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem Ergebnis aus c).
Hinweis: $\Phi(1) = 0.8413$.

n wurde hier absichtlich klein gewählt. Bei einer numerischen Auswertung des Integrals am Computer würde man n wesentlich größer wählen und auch weniger runden.

4. Portfolio-Optimierung (10 Punkte). Ein Manager kann in zwei verschiedene Aktien investieren. Der Kurs i-ten Aktie am heutigen Tag bezeichnen wir mit x_i, den Kurs in einem Jahr mit X_i. Die Rendite ist damit $R_i = (X_i - x_i)/x_i$. Aus der Entwicklung der letzen Jahre wurden folgende Charakteristiken geschätzt: $\mathbb{E}(R_1) = 0.4$, $\mathbb{E}(R_2) = 0.6$, $Var(R_1) = 0.25$, $Var(R_2) = 1$, $Cov(R_1, R_2) = 0.4$. Der Manager will nun eine möglichst sichere Investition wählen. Er investiert den a-ten Teil des Vermögens in Aktie 1, den $(1 - a)$-ten Teil in Aktie 2. Somit hat er die Rendite $Y(a) = aR_1 + (1 - a)R_2$. Er will nun $Var(Y(a))$ minimieren.

a) (2 Punkt) Berechnen Sie die Korrelation zwischen R_1 und R_2.

b) (2 Punkt) Angenommen alle Werte $a \in \mathbb{R}$ sind erlaubt. Wie muss a gewählt werden, um die Varianz zu minimieren? Wie groß ist die erwartete Rendite für das optimale a?

c) (3 Punkte) Wie muss a gewählt werden, falls nur Werte in $[0, 1]$ erlaubt sind?

d) (3 Punkte) Wie muss a gewählt werden, falls zusätzlich die erwartete Rendite $\mathbb{E}(Y(a))$ mindestens 0.5 betragen soll?

$$Cor(A, B) = \frac{Cov(A, B)}{\sqrt{Var(A) \cdot Var(B)}}$$