Wir haben:

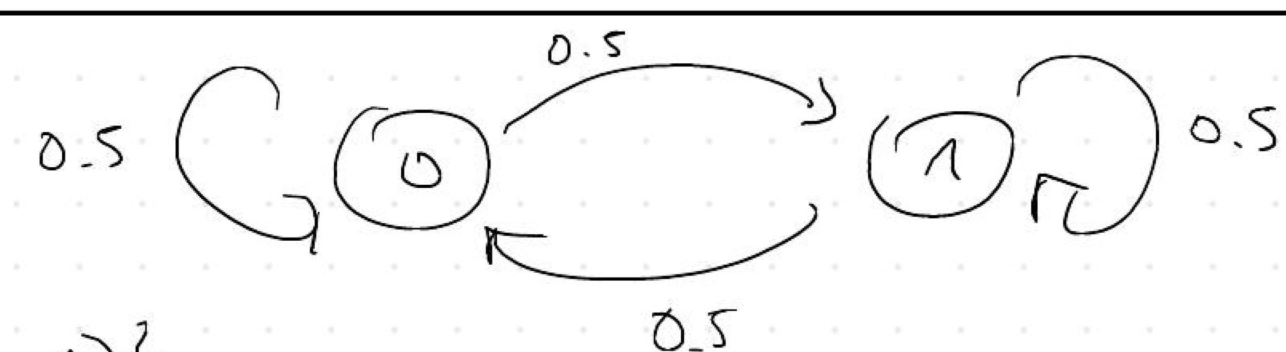
- einen W'Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- eine homogene MK $(X_n)_{n\geq 0}$ mit abzählbarem Zustandsraum
  Zustandsraum $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots\}$, d.h. für jedes i ist X_i eine Abbildung
  $X_i : \Omega \to \mathcal{Z}$, wobei $X_i(\omega) \in \mathcal{Z} \quad \forall\, \omega \in \Omega$
- die Mengen $\mathcal{Z}^n = \underbrace{\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \times \dots \times \mathcal{Z}}_{n\text{-mal}}$
  $= \{ y \in \mathbb{R}^n : \; y = (y_1, \dots, y_n),\; y_i \in \mathcal{Z}\}$, z.B. $(z_1, z_1, z_2) \in \mathcal{Z}^3$
- die Potenzmengen $\mathcal{P}(\mathcal{Z}), \mathcal{P}(\mathcal{Z}^2), \dots \mathcal{P}(\mathcal{Z}^n)$ für alle n

Eine <u>Stoppzeit</u> N ist eine Abbildung $N : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, sodass es für alle n ein $B_n \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}^{n+1})$ gibt, sodass

$$\{N = n\} \underset{\text{Def.}}{=} \{\omega \in \Omega : \; N(\omega) = n\} = \{\omega \in \Omega : \; (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B_n\}$$
$$= \{(X_1, \dots, X_n) \in B_n\}.$$

---

z.B. $(X_n)_{n \geq 1}$ Markovkette mit $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$.



$\mathcal{Z} = \{0, 1\}$ $\qquad \mathcal{Z}^2 = \{0,1\}^2 = \{(0,0), (1,0) (0,1), (1,1)\}$

$\mathcal{Z}^3 = \{(0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), \dots\}$

Wir haben $X_i \in \mathcal{Z}$, $\quad (X_i, X_j) \in \mathcal{Z}^2$, $\quad (X_i, X_j, X_k) \in \mathcal{Z}^3$. Insbesondere

$$\underbrace{(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)}_{\text{„Verlauf" bis zur Zeit } n} \in \mathcal{Z}^{n+1}.$$

$\mathcal{P}(\mathcal{Z}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, $\quad \mathcal{P}(\mathcal{Z}^2) = \{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0),(1,0)\},$
$\{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(1,0),(0,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(0,1)\},$
$\{(0,0),(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}$
usw.

---

d.h. wenn wir $\{(X_0, X_1) \in B_2\}$ schreiben, ist B_2 eine Menge aus $\mathcal{P}(\mathcal{Z}^2)$.

z.B. sind hier folgende Abbildungen Stoppzeiten:

$\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \qquad \tau(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) = 1\}$ "erstes Mal eine 1"

$\tilde{\tau} : \Omega \to \mathbb{N}_0 \qquad \tilde{\tau}(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1}(\omega) = 0,\; X_n(\omega) = 0,\; n \geq 1\}$
"erstes Mal zwei Nullen hintereinander"

$\tilde{\tilde{\tau}} : \Omega \to \mathbb{N}_0 \qquad \tilde{\tilde{\tau}}(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega),\; n \geq 1\}$
"erstes Mal zwei gleiche Zahlen hintereinander"

Die Stoppzeiten haben hier die Form $f((X_n)_{n\geq 1})$, wobei $f : \mathcal{Z}^\infty \to \mathbb{N}_0$
und $(X_n)_{n \geq 1} : \Omega \to \mathcal{Z}^\infty$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Z}^\infty \arrow[dr, "f"] & \\
\Omega \arrow[ur, "(X_n)_{n\geq 1}"] \arrow[rr, "\tau"'] & & \mathbb{N}_0
\end{tikzcd}$$

z.B. $f((x_0, x_1, \dots))$
$= \min\{n \in \mathbb{N}_0 : x_n = 1\}$ mit bspw.
$f((0,0,0,1,\dots)) = 3$ für τ.
Damit $\tau(\omega) = f((X_0(\omega), X_1(\omega), \dots))$.

Keine Stoppzeit ist z.B.

$$\hat{\tau} : \Omega \to \mathbb{N}_0 \qquad \hat{\tau}(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) = 0,\ X_{n+1}(\omega) = 1\}$$

"der Zeitpunkt mit der letzten Null".

Für die Fälle $n=0,1$ können wir das alles direkt prüfen:

$$\{\tau = 0\} = \{\omega \in \Omega : \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) = 1\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = 1\} = \{X_0 = 1\} = \{X_0 \in \underbrace{\{1\}}_{B_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})}\} \checkmark$$

$$\{\tau = 1\} = \{\omega \in \Omega : \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) = 1\} = 1\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = 0,\ X_1(\omega) = 1\} = \{X_0 = 0,\ X_1 = 1\} = \{(X_0, X_1) \in \underbrace{\{(0,1)\}}_{B_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)}\} \checkmark$$

$$\{\tau = n\} = \ldots = \{X_0 = 0, X_1 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\} = \{(X_0, X_1, \ldots X_n) \in \{(0,0,0,\ldots,0,1)\}\}.$$

$$\{\tilde{\tau} = 0\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1} = 0,\ X_n = 0,\ n \geq 1\} = 0\} = \emptyset = \{X_0 \in \underbrace{\emptyset}_{B_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})}\}$$

$$\{\tilde{\tau} = 1\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1} = 0,\ X_n = 0,\ n \geq 1\} = 1\}$$

$$= \{(X_0, X_1) \in \underbrace{\{(0,0)\}}_{B_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)}\}$$

$$\{\tilde{\tau} = 2\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1} = 0,\ X_n = 0,\ n \geq 1\} = 2\} = \{(X_0, X_1, X_2) \in \underbrace{\{(1,0,0)\}}_{B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^3)}\}$$

Achtung, ab $n=3$ kann B_n hier mehr als ein Element haben:

$$\{\tilde{\tau} = 3\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1} = 0,\ X_n = 0,\ n \geq 1\} = 3\}$$

$$= \{(X_0, X_1, X_2, X_3) \in \underbrace{\{(0,1,0,0),\ (1,1,0,0)\}}_{= B_3 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^4)}\}$$

usw.

$\{\tilde{\tilde{\tau}} = 0\}$ wie oben

$$\{\tilde{\tilde{\tau}} = 1\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_{n-1}(\omega) = X_n(\omega),\ n \geq 1\} = 1\}$$

$$= \{(X_0, X_1) \in \underbrace{\{(0,0),\ (1,1)\}}_{B_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)}\}$$

$$\{\tilde{\tilde{\tau}} = 2\} = \{(X_0, X_1, X_2) \in \underbrace{\{(0,1,1),\ (1,0,0)\}}_{B_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^3)}\}$$

usw.

ABER

$$\{\hat{\tau} = 0\} = \{\min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 0,\ X_{n+1} = 1\} = 0\} = \{(X_0, X_1) = (0,1)\}$$

kann für kein $B_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ als $\{X_0 \in B_0\}$ geschrieben werden:

Für $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ haben wir

$\{X_0 \in \emptyset\} = \emptyset$

$\{X_0 \in \{0\}\} = \{X_0 = 0\} = \{\omega \in \Omega : X_0(\omega) = 0,\ X_1(\omega) \in \{0,1\}\} \neq \{(X_0, X_1) = (0,1)\}$

$\{X_0 \in \{1\}\} = \{X_0 = 1\} \neq \{(X_0, X_1) = (0,1)\}$

$\{X_0 \in \{0,1\}\} \neq \{(X_0, X_1) = (0,1)\}$.

Ergänzung Potenzmengen: Allgemein gilt

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}) = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \subset \mathbb{Z}\} = \{\emptyset, \underbrace{\{z_1\}, \{z_2\}, \dots}_{\text{Teilmengen A mit einem Element}}, \underbrace{\{z_1, z_2\}, \{z_1, z_3\}, \dots}_{\text{Teilmengen A mit zwei Elementen}}, \underbrace{\{z_1, z_2, z_3\}, \dots}_{\dots}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) = \{A \subset \mathbb{R}^2 \mid A \subset \mathbb{Z}^2\} = \{\emptyset, \underbrace{\{(z_1,z_1)\}, \{(z_1,z_2)\}, \{(z_1,z_3)\}, \dots}_{\text{Teilmengen mit einem Element}}$$

$$\vdots \qquad \underbrace{\{(z_2,z_1)\}, \{(z_2,z_2)\}, \dots}, \underbrace{\{(z_1,z_1), (z_1,z_2)\}, \dots}_{\text{Teilmengen mit zwei Elementen}}, \underbrace{\dots}_{\dots}\}$$

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \subset \mathbb{Z}^n\} = \{\emptyset, \{(\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{n \text{ Einträge}})\}, \dots\}$$

für alle n.