Agenda 9.2.24:

- Hinweise:
  - Videoliste im aple-Kurs
  - Beispiele zu Stoppzeiten (2x), siehe auch Forumsfragen und -antworten
  - Ergänzung zur Frage zur starken Markoveigenschaft

  } bei den Unterlagen zur Online-Übung
  - Infos Klausur von Prof. Riedel ⇝ Ankündigungsforum
- heute letzter Übungstermin ⇝ Fragen zu Vorl./Übung gerne per Mail, im Forum, in Sprechstunde
- Klausur am 28. Februar, 10-12 Uhr
- Fragen ab 1. März an Prof. Riedel (nicht mehr an leonie.brinker@fernuni-hagen.de, da ich die FU Hagen verlasse)
- heute: Lösungen EA7 [insbes. irred.+aper., stat. Vt., 1, 2, 4] + allg. Fragen

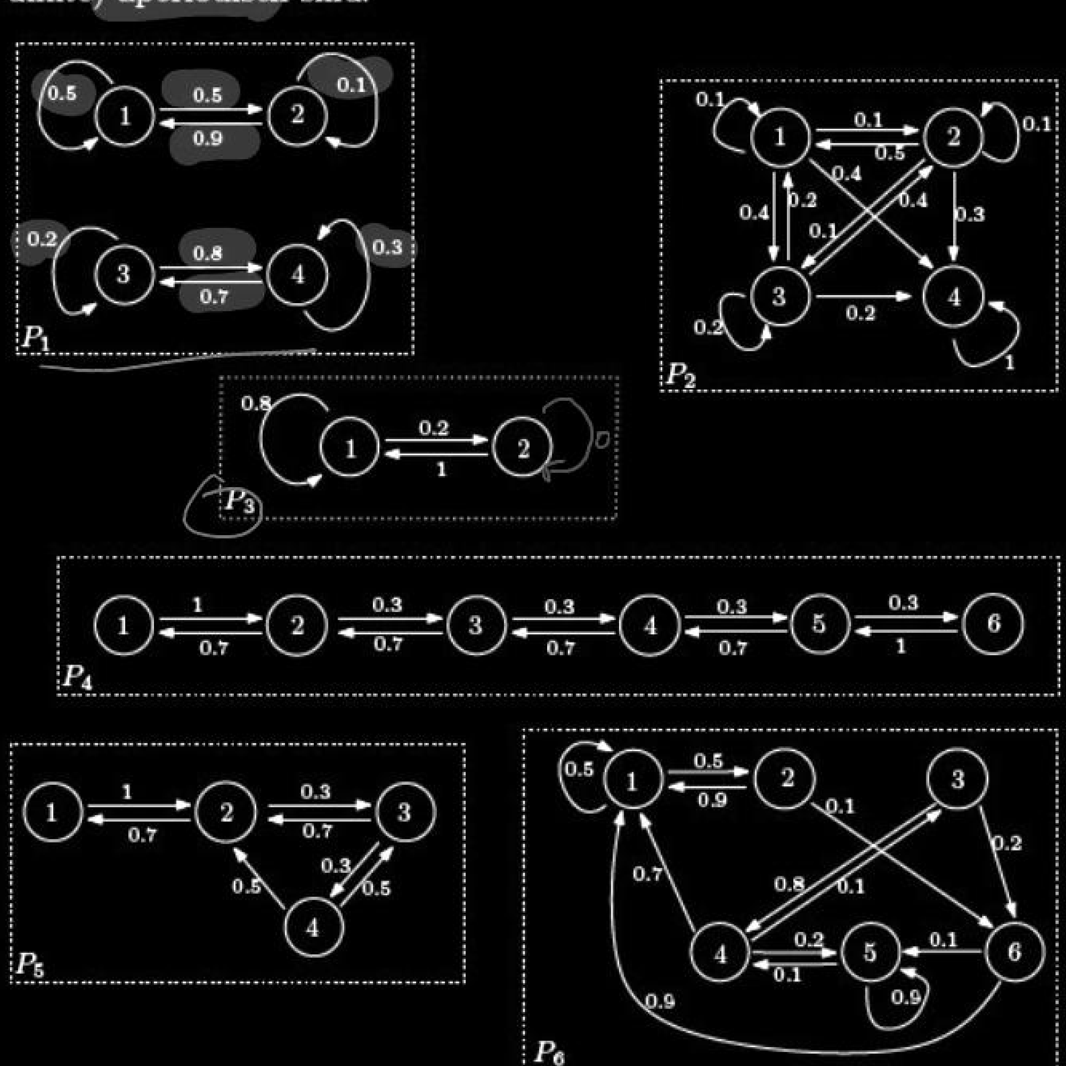
---

A1)

1. Übergangswahrscheinlichkeiten (10 Punkte). Die abgebildeten Graphen $P_1, \dots P_6$ gehören zu Markovketten.

a) (4 Punkte) Schreiben Sie die Übergangsmatrizen auf und begründen Sie, warum diese in der Tat Übergangsmatrizen von Markovketten sind.

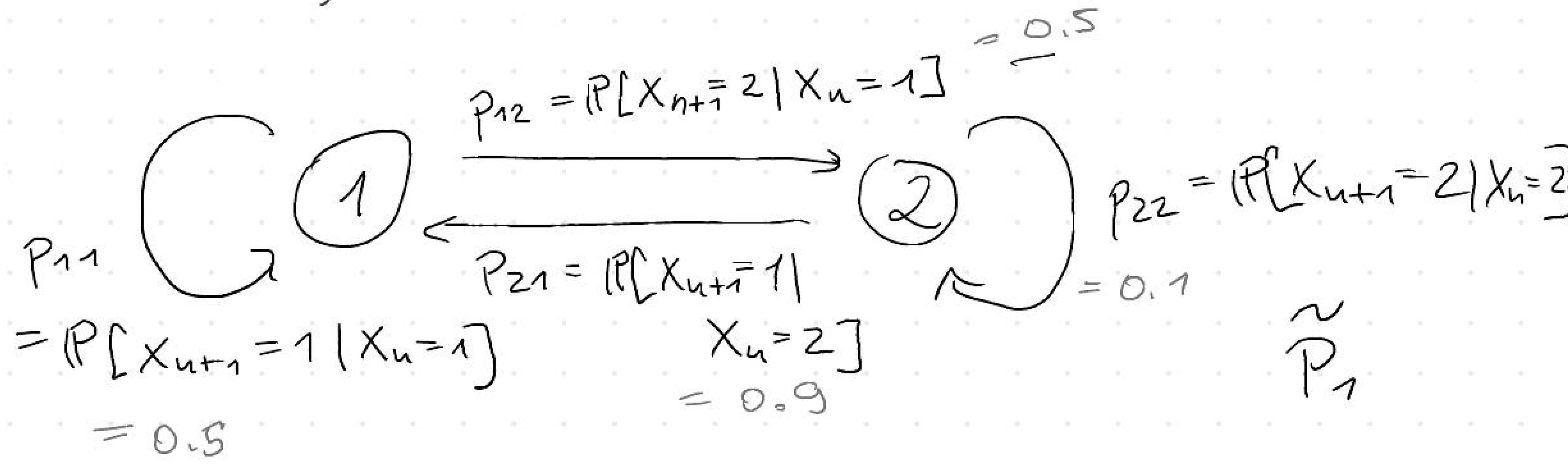
b) Prüfen sie für alle Graphen, ob die zugehörigen Markovketten
  i) (3 Punkte) irreduzibel und/oder
  ii) (3 Punkte) aperiodisch sind.



a) Wir müssen überprüfen, ob

I) $p_{ij} \in [0,1] \quad \forall i,j$

II) $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad \forall i$



$p_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$

= "Wkeit von i nach j (in einem Schritt) zu kommen"

$$\tilde{P}_1 = \begin{array}{c} \text{von 1 nach 1} \quad \text{von 1 nach 2} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \\ \text{von 2 nach 1} \quad \text{von 2 nach 2} \end{array}$$

I) ok!

II) $0.5 + 0.5 = 1$ ✓

$0.9 + 0.1 = 1$ ✓

ok!

⋮

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

usw.

b)

Definition 7.3.24. Eine homogene Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ heißt *irreduzibel*, falls es für alle Zustände $z, \tilde{z} \in \mathcal{Z}$ Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = \tilde{z} \mid X_n = z) > 0.$$

Nach Lemma (7.3.23) ist dies ~~äquivalent dazu, dass für alle~~ $z, \tilde{z} \in \mathcal{Z}$ ein $k \geq 1$ existiert, so dass $(P^k)_{z,\tilde{z}} > 0$ ist.

irreduzibel $\hat{=}$ für alle Zustände $z, \tilde{z}$ gibt es im Graph einen Weg von z nach $\tilde{z}$ (dieser hat Länge k für irgendein k)

$(P^k)_{z,z} = \mathbb{P}[X_k = z \mid X_0 = z] > 0$

Definition 7.3.29. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P. Die *Periode* eines Zustands $z \in \mathcal{Z}$ ist dann definiert duch

$$d(z) := \text{ggT}\{k \geq 1 : (P^k)_{z,z} > 0\}.$$

Gilt $d(z) = 1$ für alle $z \in \mathcal{Z}$, so nennt man $(X_n)_{n\geq 0}$ *aperiodisch.*

aperiodisch $\hat{=}$ für jeden Zustand z ist der ggT der Längen der möglichen Wege von z nach z gleich 1

→ z.B. wenn es einen Weg der Länge 1 von z nach z gibt gilt $d(z) = 1$ oder wenn es Wege d. L. 2 & 3 ist.

Erinnerung: ggT - größter gemeinsamer Teiler

Betrachten wir eine Menge A (z.B. $A = \{4, 16, 24\}$), dann ist der $\operatorname{ggT} A$ die größte Zahl, durch die wir die Elemente von A jeweils „ohne Rest" teilen können. Hier:

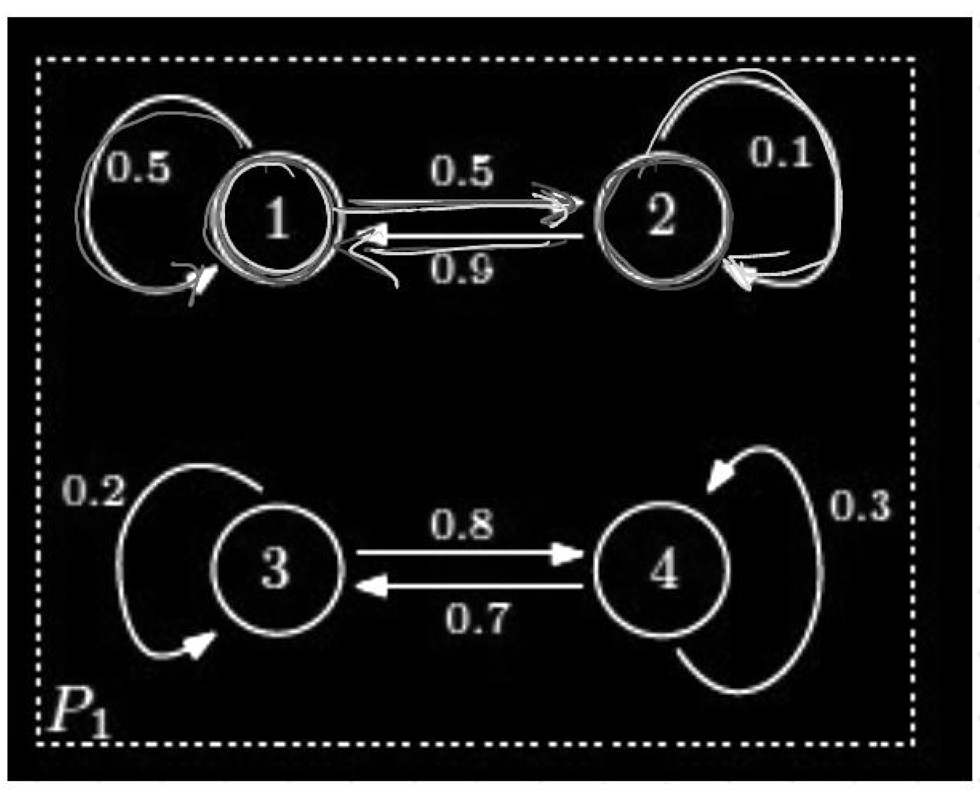
4, 16, 24 sind alle ohne Rest durch 1 teilbar (4, 16, 24)
4, 16, 24 sind alle ohne Rest durch 2 teilbar (2, 8, 12)
4, 16, 24 sind nicht alle ohne Rest durch 3 teilbar ($4/3, \dots$)
4, 16, 24 sind alle ohne Rest durch 4 teilbar (1, 4, 6)

Da $4 \in A$ müssen wir uns größere Kandidaten für Teiler (5, 6, ...) nicht ansehen; es wird immer ein Rest bleiben.

$\Rightarrow \operatorname{ggT} A = 4$. Anderes Bsp: $\operatorname{ggT} \{4, 14, 24\} = 2$.

Wir bemerken:

- Es gilt immer $\operatorname{ggT} A \geq 1$ (für alle Mengen A).
- Wenn $2, 3 \in A$, gilt $\operatorname{ggT} A = 1$.



irreduzibel? $z = 1, \hat{z} = 1$

$1 \to 1$ ok

$z = 1 \quad \hat{z} = 2$

$1 \to 2$ ok

$z = 1 \quad \hat{z} = 3$ kein Weg

$\Rightarrow$ reduzibel

irreduzibel $\hat{=}$ für alle Zustände $z, \hat{z}$ gibt es einen Weg von z nach $\hat{z}$ im Graph (dieser hat Länge k für irgendein k)

aperiodisch?

aperiodisch $\hat{=}$ für jeden Zustand z ist der ggT der Längen der möglichen Wege von z nach z gleich 1

$\underline{z=1}$: Wege von 1 nach 1

$1 \to 1$ Länge 1

$1 \to 2 \to 1$ Länge 2

$1 \to 2 \to 2 \to 1$ Länge 3

$\Rightarrow 1, 2, 3 \in \{k \geq 1 : \underbrace{(P^k)_{1,1} > 0}_{\mathbb{P}[X_{n+k}=1 \mid X_n = 1] > 0}\} =: A_1$

$\Rightarrow \operatorname{ggT} A_1 = 1$

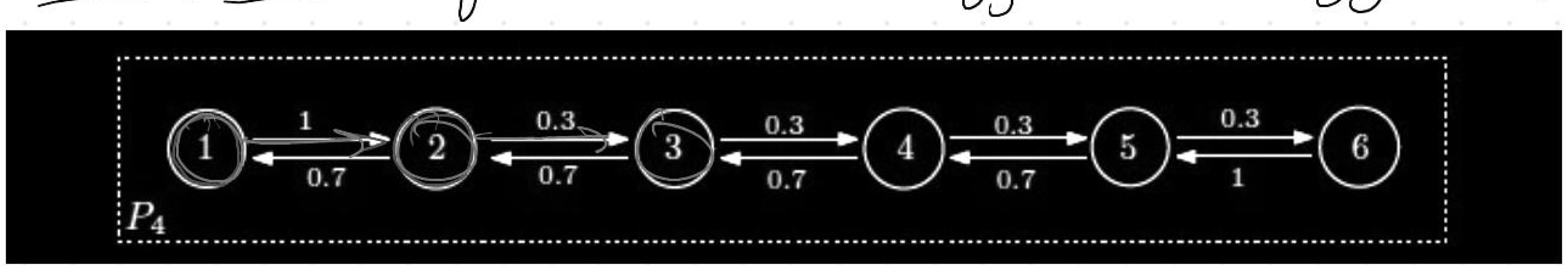
$\underline{z=2}$ Wege von 2 nach 2

$2 \to 1 \to 2$ Länge 2

$2 \to 1 \to 1 \to 2$ Länge 3

$\Rightarrow \operatorname{ggT} A_2 = 1$

$\underline{z=3}, \underline{z=4}$ genauso $\Rightarrow \operatorname{ggT} A_3 = \operatorname{ggT} A_4 = 1$ $\Rightarrow$ aperiodisch!



irreduzibel $\hat{=}$ für alle Zustände $z, \hat{z}$ gibt es einen Weg von z nach $\hat{z}$ im Graph (dieser hat Länge k für irgendein k)

irreduzibel?

$z = 1 \to 2 = \hat{z}$ ✓

$z = 1 \to 2 \to 3 = \hat{z}$ ✓

$1 \to 2 \to 3 \to 4$ ✓

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ ✓

usw.

$2 \to 1$ ✓

$2 \to 1 \to 2$ ✓

$2 \to 3$ ✓

usw.

$3 \to$

... usw.

Wege „von überall nach überall"

$\Rightarrow$ irreduzibel

aperiodisch?

$\underline{z=1}$ Wege von 1 zu 1

$1 \to 2 \to 1$ Länge 2

$1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ Länge 4

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
$1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ } Länge 6

usw.

Beobachtung:

$A_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Wir können immer nur nach einer geraden Anzahl Schritte zu 1 zurück.

Insbesondere

$ggT\, A_1 = 2.$

$\Rightarrow$ es gibt ein z $(z=1)$, sodass $ggT\, A_z > 1$ $\Rightarrow$ periodisch.

---

2. Stationäre Verteilung I (10 Punkte). Wir betrachten eine Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie den zugehörigen Graph und zeigen Sie, dass diese Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nach drei Schritten in Zustand 3 zu sein, falls man in Zustand 1 gestartet ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nach zwei Schritten in Zustand 3 zu sein, falls die Wahrscheinlichkeit in Zustand 1 zu starten $\frac{1}{4}$ ist und in Zustand 3 zu starten $\frac{3}{4}$.

c) (3 Punkte) Wir wollen nun das Langzeitverhalten der Markovkette betrachten.

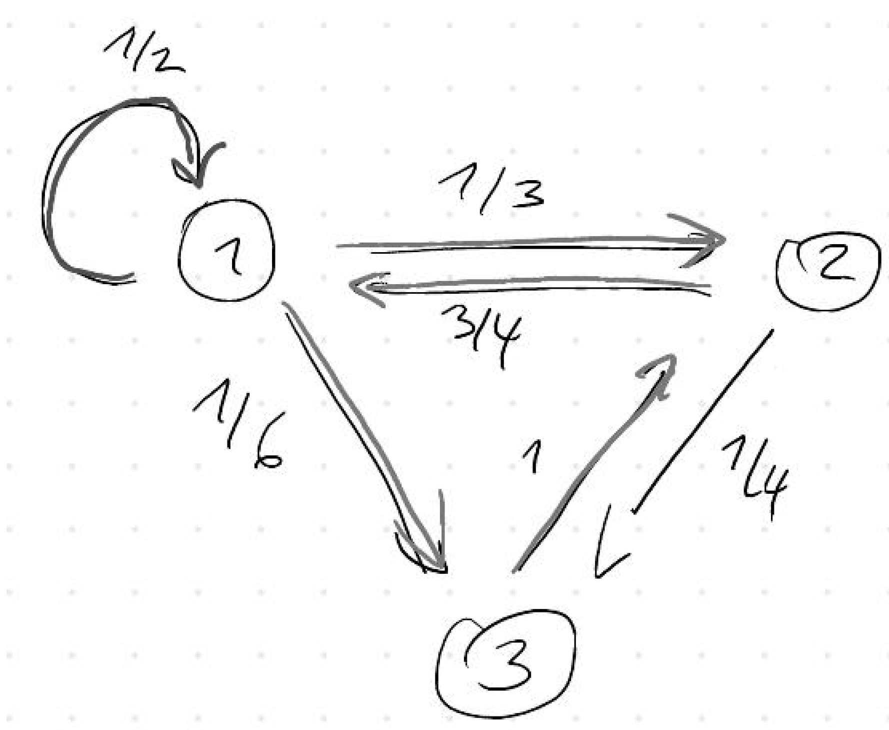
i) Finden Sie eine Lösung π für die Gleichung $\pi P = \pi$, wobei $\pi \in \mathbb{R}^3$ ein Wahrscheinlichkeits(zeilen)vektor ist.

ii) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Tipps:

1. Für c): $\lim_{n\to\infty} P^n = Q$ bedeutet, dass alle Einträge konvergieren, d.h. $\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = Q_{ij}$ für alle i, j. Man kann die Aufgabe mit Satz 7.3.31 lösen.

a)



irreduzibel:

von\nach	1	2	3
1	1-1	1-2	1-3
2	2-1	2-1-2	2-3
3	3-2-1	3-2	3-2-1-3

aperiodisch:

$\underline{z=1}$: $1 \to 1$ $\leadsto$ Länge 1 $\Rightarrow 1 \in A_1 \Rightarrow ggT\, A_1 = 1$

$\underline{z=2}$: $2 \to 1 \to 2$ $\leadsto$ Länge 2
$2 \to 1 \to 1 \to 2$ $\leadsto$ Länge 3 } $\Rightarrow 2, 3 \in A_2 \Rightarrow ggT\, A_2 = 1$

$\underline{z=3}$: $3 \to 2 \to 1 \to 3$ $\leadsto$ Länge 3
$3 \to 2 \to 1 \to 1 \to 3$ $\leadsto$ Länge 4 } $\Rightarrow 3, 4 \in A_3$, $ggT\{3,4\} = 1$ $\Rightarrow ggT\, A_3 = 1$

$\Rightarrow$ aperiodisch

b) gesucht: W'keit nach 3 Schritten in Zustand 3 zu sein, wenn wir in Zustand 1 gestartet sind

Satz 7.3.8. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P und Zustandsraum $\mathcal{Z}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit $\mu^{(n)}$ den Wahrscheinlichkeitsvektor, der eindeutig durch die Verteilung von X_n bestimmt ist. Insbesondere bezeichnet $\mu^{(0)}$ also die Startverteilung der Markovkette. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle $n, k \in N_0$ ist

$$\mu^{(n+k)} = \mu^{(n)} P^k.$$

$\mu^{(k)} = \mu^{(0)} P^k$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $z_0, \dots, z_n \in \mathcal{Z}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_0 = z_0, \dots, X_n = z_n) = \mu^{(0)}_{z_0} p_{z_0,z_1} \cdots p_{z_{n-1},z_n}.$$

$\mu^{(0)}$ Startverteilung $\to$ bei uns

$\mu^{(0)} = (\mathbb{P}[X_0 = 1], \mathbb{P}[X_0 = 2], \mathbb{P}[X_0 = 3])$
$= (1, 0, 0)$

$\mu^{(k)}$ Vt. von X_k $\to$ $\underline{\mu^{(k)}} = \underset{\text{Startvt.}}{\underline{\mu^{(0)}}}\, P^k$ $\leftarrow$ k Übergänge

$\mu^{(k)} = (\mathbb{P}_{\mu_0}[X_k = 1], \mathbb{P}_{\mu_0}[X_k = 2], \mathbb{P}_{\mu_0}[X_k = 3])$ ($\to$ siehe Bsp. von letztem Mal)

Hier: $k = 3$.

$$\mu^{(0)} P^3 = (1,0,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = (1,0,0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 9/16 & 1/4 & 3/16 \\ 3/8 & 1/2 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$= (1/2,\ 1/3,\ 1/6) = \mu^{(3)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[X_k = 3 \mid X_0 = 1] = (\mu^{(0)} P^3)_3 = 1/6.$$

Für den zweiten Teil betrachten wir $\mu^{(0)} = (1/4,\ 0,\ 3/4)$ und berechnen $\mu^{(2)} = \mu^{(0)} P^2 = (4/16,\ 1/12,\ 11/48)$. Die gesuchte W'keit ist der dritte Eintrag: $11/48$.

$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)} P$$
$$\mu^{(2)} = \underline{\mu^{(1)} P} = \mu^{(0)} P \cdot P = \mu^{(0)} P^2$$

---

c) i) gesucht: π sodass $\underline{\pi = \pi P}$ (Idee: Ein "Übergang", MK-Schritt ändert nichts an der Verteilung)

$$\underline{(\pi_1, \pi_2, \pi_3)} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\left(\tfrac12 \pi_1 + \tfrac34 \pi_2,\ \tfrac13 \pi_1 + \pi_3,\ \tfrac16 \pi_1 + \tfrac14 \pi_2\right)}$$

LGS:
$$\begin{cases} \pi_1 = \tfrac12 \pi_1 + \tfrac34 \pi_2 \\ \pi_2 = \tfrac13 \pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = \tfrac16 \pi_1 + \tfrac14 \pi_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{lösen}} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (1/2,\ 1/3,\ 1/6).$$

---

ii) $\lim_{n \to \infty} P^n$? gesucht: $\lim_{n\to\infty} (P^n)_{ij}$ für alle i, j.

Beobachtung:

Definition 7.3.20. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P. Ein Wahrscheinlichkeitsvektor π heißt *stationäre Verteilung* der Markovkette, falls

$$\pi P = \pi \tag{7.12}$$

ist.

Es gilt der folgende Zusammenhang:

Satz 7.3.21. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P und sei π eine stationäre Verteilung. Ist π die Anfangsverteilung der Markovkette, so ist die Markovkette stationär. Insbesondere ist jede Zufallsvariable X_n gemäß π verteilt.*

Satz 7.3.31. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene, irreduzible und aperiodische Markovkette. Dann konvergiert diese in ihr statistisches Gleichgewicht. Genauer: Ist μ eine beliebige Startverteilung der Markovkette und $\mu^{(n)}$ die Verteilung von X_n, so gilt*

$$\mu^{(n)} \to \pi$$

für $n \to \infty$, wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der Markovkette bezeichnet.

- π aus i) ist die eindeutige stationäre Vt. (da irred. + aper.)
- $\mu^{(0)} P^n = \mu^{(n)} \to \pi$ für $n \to \infty$

Also: für alle $\mu^{(0)}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{(0)} P^n = \underbrace{(1/2,\ 1/3,\ 1/6)}_{\pi}$$

Wir setzen nun einfache $\mu^{(0)}$ ein.

Beachte: Für $\mu^{(0)} = (1,0,0)$ und P^n gilt (für alle n):

$$\mu^{(0)} P^n = (1,0,0) \begin{pmatrix} (P^n)_{11} & (P^n)_{12} & (P^n)_{13} \\ (P^n)_{21} & (P^n)_{22} & (P^n)_{23} \\ (P^n)_{31} & (P^n)_{32} & (P^n)_{33} \end{pmatrix} = \left((P^n)_{11}, (P^n)_{12}, (P^n)_{13} \right)$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} (P^n)_{1,1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu^{(0)} P^n)_1 = \pi_1 = 1/2$

$\lim\limits_{n\to\infty} (P^n)_{1,2} = \pi_2 = 1/3$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} (P^n)_{1,3} = \pi_3 = 1/6.$

Für $\mu^{(0)} = (0,1,0)$ erhalten wir die zweite Zeile von P^n als Ergebnis von $\mu^{(0)} P^n = (0,1,0) P^n = \left((P^n)_{21}, (P^n)_{22}, (P^n)_{23} \right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi$.
Für $\mu^{(0)} = (0,0,1)$ erhalten wir die zweite Zeile von P^n als Ergebnis von $\mu^{(0)} P^n = (0,0,1) P^n = \left((P^n)_{31}, (P^n)_{32}, (P^n)_{33} \right) \xrightarrow{n\to\infty} \pi$.

Insgesamt:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} (P^n)_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

A3) siehe Lösungsskizze; Idee wie bei P_3.

4. Stationäre Verteilung II (10 Punkte). Wir wollen nun betrachten, was bei der Konvergenz zur stationären Verteilung 'schief gehen' kann, falls die Kette nicht irreduzibel ist. Wir betrachten eine Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Begründen Sie, dass die betrachtete Markovkette reduzibel ist. Zeigen Sie, dass diese Markovkette keine eindeutige stationäre Verteilung besitzt.

b) (6 Punkte) Zeigen Sie:

$$\text{falls } P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{dann folgt } P^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) & \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} P^n$.

Tipps:

1. 'Keine eindeutige stationäre Verteilung' kann entweder heißen, dass es gar keine stationäre Verteilung gibt oder dass es gleich mehrere gibt.
2. Auf die Form in ii) kommt man, indem man P^1, P^2, P^3 „zu Fuß" berechnet und versucht ein Muster zu erkennen. Dann kann man mit Induktion beweisen, dass P^n eine bestimmte Form hat und dadurch auf den Grenzwert schließen.

Erinnerung:

Satz 7.3.31. *Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine homogene, irreduzible und aperiodische Markovkette. Dann konvergiert diese in ihr statistisches Gleichgewicht. Genauer: Ist μ eine beliebige Startverteilung der Markovkette und $\mu^{(n)}$ die Verteilung von X_n, so gilt*

$$\mu^{(n)} \to \pi$$

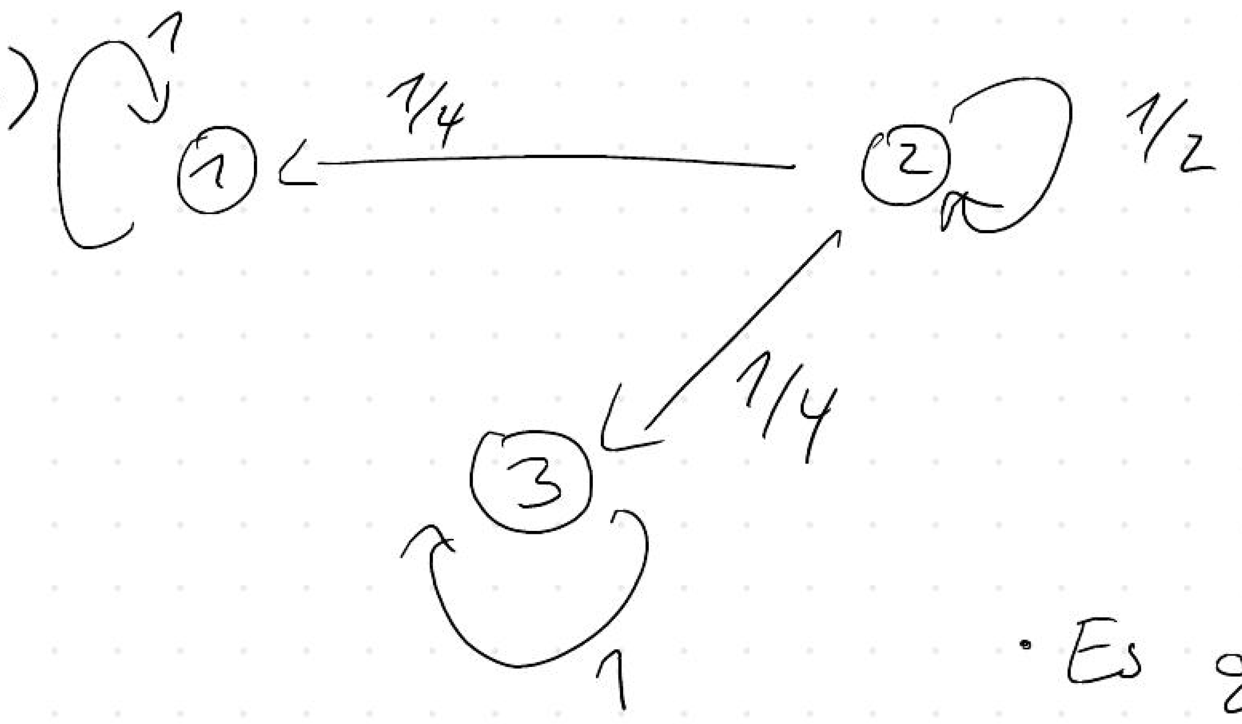
für $n \to \infty$, wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der Markovkette bezeichnet.

Irred. + aperiodisch

$\Rightarrow$ Es gibt eine eind. stat. Vt. und die Vt. $\mu^{(n)}$ von X_n konvergiert gegen diese ($\rightsquigarrow$ PageRank-Beispiel)

Hier: Reduzibel, daher Vorauss. nicht erfüllt!

a)



irreduzibel $\hat{=}$ für alle Zustände $z, \tilde{z}$ gibt es einen Weg von z nach $\tilde{z}$ im Graph (dieser hat Länge k für irgendein k)

- Es gibt von 1 aus <u>keine</u> Wege zu 2 oder 3
  $\Rightarrow$ reduzibel

- Es gibt mehr als eine VE π mit $\pi P = \pi$:
  $\pi = (1, 0, 0)$ und $\tilde{\pi} = (0, 0, 1)$, sowie auch <u>$\hat{\pi} = (p, 0, 1-p)$</u> für alle $p \in [0, 1]$ (kann man nachrechnen, indem man das LGS $\pi = \pi P$ löst).

b) $$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$