2015-2016 学年第一学期《高等数学A1》期末试卷（B）

授课班号______ 年级专业______ 学号______ 姓名______

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审 核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\geq 0 \\ a+x & x<0 \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __1__.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=$ __$\frac{1}{2}$__.

3. 设 $f(x)=(k-1)x^3-3(k-1)x^2+1$，当 $x>2$ 时，$f(x)$ 为严格单调递增函数，则 k 的范围是 __$k>1$__.

4. 设 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\arctan\frac{x}{2}+\arcsin 2x$，则 $y'(0)=$ __$\frac{5}{2}$__.

5. 将多项式 $f(x)=(4+x)^5$ 按5阶麦克劳林展开式展开，则其余项 $R_5(x)=$ __0__.

6. 设 $f'(\ln x)=x$，其中 $1<x<+\infty$，及 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ __$e^x-1\ (x\geq 0)$__.

7. 设 $f'(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，则 $\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=$ __$\arctan f(3)-\arctan f(1)$__.

8. 曲线 $y=\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{2},2\pi]$ 上的弧段与 x 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成所围成图形的面积 $A=$ __3__.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 研究 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右连续性.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1\neq f(0)$ ∴ 不左连续 (3')

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ ∴ 右连续 (3')

2. 设方程 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x+2}}+xe^{y}=\operatorname{arctg}y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$.

令 $x=0$，得 $y=1$ (1')

又 $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x+2)^{-\frac{3}{2}}+e^{y}+xe^{y}\cdot y'=\frac{y'}{1+y^2}$ (4')

令 $x=0$, $y=1$，得: $y'(0)=2\left(e-\frac{1}{4}\right)$ (1')

3. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=3+f'(t)\\ y=2+f(t)-tf'(t)\end{cases}$ 所确定，$f''(t)$ 存在且不为零，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)-f'(t)-tf''(t)}{f''(t)}=-t$ (3')

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{f''(t)}$ (3')

4. 求 $\int\frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x$.

原式 $=\int\frac{dx}{x(x+1)(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx$ (3')

$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$ (3')

法二：令 $x=\frac{1}{t}$. 原式 $=\int\frac{t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x^2}-1\right|+C$

(3') (3')

$e^x, \quad x\in[0,1]$

原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx + \int_0^1 e^x\,dx$ (2')

$= \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x \Big|_0^1$

$= 1 + (e-1)$

$= e$ (4')

6. 求由曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x=0$, $x=1$ 及 x 轴所成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

$V = \int_0^1 \pi \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx$ (3')

$= \pi \int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$

$= \pi \arctan x \Big|_0^1$

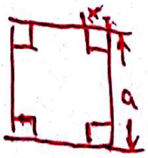
$= \dfrac{\pi^2}{4}$ (3')

三、综合题(每小题 8 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 设有一块边长为 a 的正方形铁皮，从四个角截去同样的小方块，作成一个无盖的方盒子，问小方块的边长为多少才使盒子的容积最大?

设小方块边长为 x.



则 $V=(a-2x)^2\cdot x \quad (0<x<\frac{a}{2})$ (3')

$V' = -4(a-2x)\cdot x + (a-2x)^2 = (a-2x)(a-6x)$

令 $V'=0$ 得唯一驻点 $x=\frac{a}{6}$

∴ 小方块边长为 $\frac{a}{6}$ 时，容积最大 (5')

存在 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

设 $F(x)=xf(x)$. (3')

则 $F(0)=F(a)=0$，$F'(x)=f(x)+xf'(x)$，$0<x<a$

由 Rolle Th，$\exists\xi$ s.t. $F'(\xi)=0$

i.e. $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. (5')

3. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\le M$，$f(a)=0$，试证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}M(b-a)^2.$$

$\forall x\in(a,b]$. 由 Lagrange 中值 Th，$\exists\xi\in(a,x)$ s.t.

$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$ (3') 又 $f(a)=0$. $f'(x)\le M$.

$\therefore$ $f(x)=f'(\xi)(x-a)\le M(x-a)$，$x\in[a,b]$.

从而 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M(x-a)\,dx=\frac{M}{2}(b-a)^2$ (5')

4. 求曲线 $r=1$，$r=2\cos\theta$ 围成公共部分的面积.

由对称性，$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\cdot1^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot(2\cos\theta)^2d\theta\right]$ (4')

$=2\left[\frac{\pi}{6}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta\right]$

$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4')

2012-2013学年第一学期《高等数学

授课班号________ 年级专业________ 学号________ 姓名________

题型	选择题	填空题	计算题	综合题	总 分	审 核
得分						

一、填空题(每小题 4 分，共 28 分)

得分	阅卷人

1. 已知当 $x\to 0$ 时，$1-\sqrt{1+ax^2}$ 与 x^2 是等价无穷小，则 $a=$ $\underline{-2}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} e^x \\ a+x \end{cases}$，要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{1}$.

3. 设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'(0)=$ $\underline{\frac{1}{3}}$.

4. 曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 的拐点为 $\underline{(\pm1,\ln2)}$.

5. 设 $\int f(x)\,dx=e^{-x^2}+C$，则 $f'(x)$ 为 $\underline{(4x^2-2)e^{-x^2}}$.

6. $\int_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{e-e^{\frac{1}{2}}}$.

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}x\cos(t^2)\mathrm{d}t=$ $\underline{-\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt-2x^2\cos x^4}$.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

L'Hospital法则 3′ 过程 2′

结果 1′

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

$$=2$$

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ 的 n 阶导数的一般表达式.

分解法 3′

过程+结果 3′

$$y=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}$$

$$=(-1)^n\cdot n!\cdot\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{(n+1)}}\right]$$

3. 设 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=2t^3+3t^2\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t^2+6t}{2t+2}=3t \qquad (3')$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{2t+2} \qquad (3')$$

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续．$\varphi(x)=(x-a)f(x)$，求 $\varphi'(a)$.

$$\varphi'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)f(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}f(x) \qquad (4')$$

$\because f(x)$ 在 $x=a$ 处连续 $\therefore \varphi'(a)=f(a)$ (2′)

由 扫描全能王 扫描创建

5. 求不定积分 $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$.

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} - \int \frac{-\frac{1}{8}d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C$$

(4′) (2′)

6. 计算积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}\mathrm{d}x$.

$$\text{原式} = \int_{-2}^{2}|x|\cdot e^{-|x|}dx + \int_{-2}^{2}x e^{-|x|}dx$$

奇偶性

$$= 2\int_0^2 x e^{-x}dx + 0 \quad (3') \quad = -2\int_0^2 e^{-x}d(-x)$$

$$= 2\int_0^2 -x\,d(e^{-x}) = -2xe^{-x}\Big|_0^2 - 2\int_0^2 e^{-x}d(-x) = 2-6e^{-2} \quad (3')$$

$$= -4e^{-2} - 2e^{-x}\Big|_0^2$$

或：$\text{原式} = \int_{-2}^{0}(-x+x)e^{x}dx + \int_0^2 (x+x)e^{-x}dx = \int_0^2 2xe^{-x}dx$ (3′)

三、综合题(满分 36 分)

得分	阅卷人

1. (7 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geq 0,\end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

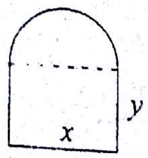
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x - 0}{x} = 1 \quad (3')$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1 \quad (3')$$

$\because f'_-(0) = f'_+(0) = 1 \quad \therefore f'(0) = 1 \quad (1')$

f(x) 在 x=0 处可导

2. (7 分) 某地区防空洞的截面积建成如图矩形加半圆，截面的面积为5m²，问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？



由已知：$xy + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5$

$\therefore y = \frac{1}{x}\cdot\left(5-\frac{\pi}{8}x^2\right) \quad \therefore 0<x<\frac{2}{\pi}\sqrt{10\pi}$

从而周长 $C(x) = x + 2y + \pi\cdot\frac{x}{2} = \left(1+\frac{\pi}{4}\right)x + \frac{10}{x} \quad (3')$

$C'(x) = \left(1+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{10}{x^2}$

驻点 $x = 2\sqrt{\frac{10}{4+\pi}} =: x_0$

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, \frac{2}{\pi}\sqrt{10\pi})$
$C'(x)$	−	0	+
$C(x)$	↘	极小	↗

(3′)

$\therefore x = 2\sqrt{\frac{10}{4+\pi}}$ m 时最省. (1′)

3. (7分) 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $x>\sin x\cos x$.

设 $f(x)=x-\sin x\cos x=x-\frac{1}{2}\sin 2x$ (2')

$f'(x)=1-\cos 2x>0$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$ ∴ $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上 ↑

x	$(0,\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

又 $f(0)=0$

∴ $f(x)>f(0)$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$

即 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$x-\sin x\cos x>0$

∴结论成立. (5')

或 $f'(x)=1-\cos^2x+\sin^2x=2\sin^2x>0$

4. (7分) 设 $f(x)=\int_0^1\sin|x-t|\,dt$，求 $f'(x)$.

令 $x-t=u$. 从而 $f(x)=\int_x^{x-1}\sin|u|\cdot(-1)\,du$

$=\int_{x-1}^{x}\sin|u|\,du$ (4')

∴ $f'(x)=\sin|x|-\sin|x-1|$ (3')

较难

适当给分

5. (8分) 求曲线 $x=t^2+1$，$y=2t-t^2$ 与 x 轴所围成的封闭图形绕 x 轴旋转所得的立体的体积.

曲线与x轴交点，$t=0$时点 $(1,0)$

$t=2$时点 $(5,0)$

$V=\int_1^5\pi y^2(x)\,dx=\int_0^2\pi\cdot(2t-t^2)^2\cdot d(t^2+1)$

$=\int_0^2 2\pi\cdot(4t^3+t^5-4t^4)\,dt$

$=2\pi\left[t^4+\frac{1}{6}t^6-\frac{4}{5}t^5\right]_0^2$

$=\frac{32}{15}\pi$