

第一节 常数项级数

一 常数项级数的概念及基本性质

二 正项级数及判别

三 任意项级数



§ 1.1 常数项级数的概念及基本性质

定义1 设有 $\{u_n\}$, 称

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (11-1)$$

为(常数项)无穷级数,简称(常数项)级数,记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中第 n 项 u_n 称为级数(11-1)的一般项或通项.

级数(11-1)的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

称为级数(11-1)的部分和.

部分和数列:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$



定义2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, S 称为级数

的和, 也称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = S$$

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称该级数发散.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 称 $r_n = S - S_n$ 为级数的余项.

例1 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

$$\begin{aligned} \text{证: } S_n &= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \ln(n+1) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

级数发散



例2 讨论几何级数(等比级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性,若收敛,求其和.

解: ①当 $q = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 级数发散;

②当 $q = -1$ 时, $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 级数发散;

③其它, $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

当 $|q| > 1$ 时, $S_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 级数发散;

当 $|q| < 1$ 时, $S_n \rightarrow \frac{a}{1-q} (n \rightarrow \infty)$, 级数收敛.

例3 判别无穷级数

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

解: $\because u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

故级数收敛.

基本性质

1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

注 ①若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 不一定发散.

②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 且 $\beta \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$

一定发散.

2 在一个级数前去掉或加上有限项, 所得新级数与原级数有相同的敛散性. 和改变



3 收敛级数加括弧后, 所得新级数仍收敛, 且与原级数有相同的和.

注 ①发散级数加括弧后, 所得级数**不一定**发散.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots + (1 - 1) + \cdots$$

②级数加括弧后所得新级数发散, 则原级数也发散.

4 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则通项 $u_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, $r_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$

注 ①若 $u_n \not\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

②若 $u_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛.

例4 判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{收敛}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+100n}$$

$$u_n = \frac{n}{1+100n} \rightarrow \frac{1}{100} (n \rightarrow \infty) \quad \text{发散}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{6} \quad u_n = \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$u_{12k+3} = \sin \frac{(12k+3)\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) \quad \text{发散}$$

§ 1.2 正项级数及其判敛法

定义3 若 $u_n > 0$, 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

命题 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 \Leftrightarrow 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

$$\text{证: } S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \cdots \leq S_n \quad \text{即 } \{S_n\} \text{ 递增.}$$

$$\Rightarrow \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \text{ 故 } \{S_n\} \text{ 有界.}$$

$$\Leftarrow \text{设 } \{S_n\} \text{ 有界, 又 } \{S_n\} \text{ 递增, 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.}$$

定理1 (比较判别法)若 $0 \leq u_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则

①当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

②当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 记 $A_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $B_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

①当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\{B_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, 使得对一切 n ,

都有 $0 \leq B_n \leq M$, 从而,

$$0 \leq A_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq B_n \leq M.$$

即 $\{A_n\}$ 有界, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

②反证.



推论 1 若 $0 \leq u_n \leq c v_n$ ($n = N + 1, N + 2, \dots$), N 为某一正整数, c 为正常数, 则

① 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

② 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例5 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证: 令 $f(x) = \ln(1+x) - x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0 (x > 0)$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

$$f(x) < f(0) = 0 (x > 0)$$

$$0 < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

由例1 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$ 发散,

故调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.



例6证明: ①当 $p < 1$ 时, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散;

②当 $p > 1$ 时, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

证: ①当 $p < 1$ 时, $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{发散}, \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{发散.} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

②当 $p > 1$ 时, $0 < \frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx < \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx = v_n$

$$v_2 + v_3 + \dots + v_{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \left[1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right] \rightarrow \frac{1}{p-1}$$

即 $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛. $(n \rightarrow \infty)$



常用的参考级数：几何级数，调和级数， p -级数。

例7证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散。

证 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1} > 0,$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散。

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{n} \quad ?$$



例8证明: ① 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散;

② 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

证: ① $\frac{1}{n \ln n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{n \ln n} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = v_n (n = 2, 3, \dots)$

$$\begin{aligned} v_2 + v_3 + \cdots + v_{n+1} &= \int_2^{n+2} \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \ln[\ln(n+2)] - \ln \ln 2 \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

即 $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.



② 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛.

$$\text{证: ② } 0 < \frac{1}{n(\ln n)^2} = \int_{n-1}^n \frac{dx}{n \ln^2 n}$$

$$< \int_{n-1}^n \frac{dx}{x \ln^2 x} = v_n \quad (n = 3, 4, \dots)$$

$$\begin{aligned} v_3 + v_4 + \dots + v_{n+2} &= \int_2^{n+2} \frac{dx}{x \ln^2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+2)} \rightarrow \frac{1}{\ln 2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

即 $\sum_{n=3}^{\infty} v_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛.



定理2(比较判别法的极限形式)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,

①若 $0 < l < +\infty$, 则这两个级数有相同的敛散性;

②若 $l = 0$, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

推论(极限判别法) 设 $u_n > 0$,

①若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = l (0 < l \leq +\infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

②若 $\exists p > 1$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l (0 \leq l < +\infty)$, 即极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.



证:① 对于 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$l - \frac{l}{2} < \frac{u_n}{v_n} < l + \frac{l}{2}$$

$$\text{即 } \frac{l}{2}v_n < u_n < \frac{3l}{2}v_n \quad (n > N)$$

由比较判别法的推论即得.

② 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{u_n}{v_n} < 1, \quad 0 < u_n < v_n \quad (n > N)$$



例9 判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4 + n + 1}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

解:(1)取 $p = 2$, 则 $n^2 u_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (n \rightarrow \infty)$, 级数收敛.

$$(2) \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} (n \rightarrow \infty), \quad \text{取 } p = 1,$$

则 $n u_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 级数发散.

$$(3) \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} (n \rightarrow \infty), \quad \text{取 } p = 2,$$

则 $n^2 u_n \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 级数收敛.

定理3(比值判别法)设 $u_n > 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

①当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

②当 $1 < \rho \leq +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

③当 $\rho = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛, 也可能发散.

证: ①当 $\rho < 1$ 时, 取 $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2}$,

$\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = \frac{1+\rho}{2} \triangleq r < 1$$

$$u_{N+1} < r u_N$$

$$u_{N+2} < r u_{N+1} < r^2 u_N$$

$$\dots$$

$$u_{N+n} < r^n u_N$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n u_N$ 收敛,

故 $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.



②当 $1 < \rho \leq +\infty$ 时, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,
 $u_{n+1} > u_n > 0$, $u_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

说明:

①比值判别法的优点: 不必找参考级数.

②当 $\rho = 1$ 时, 比值判别法失效,

③条件是充分的, 而非必要.

例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ 收敛, 但 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2(2 + (-1)^n)} = a_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 不存在.}$$



例10 判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

解:(1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} (n \rightarrow \infty), \quad \text{级数收敛.}$$

$$(2) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10} \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty),$$

级数发散.

定理4(根值判别法)设 $u_n \geq 0$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

①当 $\rho < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

②当 $1 < \rho \leq +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

③当 $\rho = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛, 也可能发散.

证: ①当 $\rho < 1$ 时, 取 $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2}$,

$\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = \frac{1+\rho}{2} \triangleq r < 1$$

$0 \leq u_n < r^n$ 而 $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ 收敛,

故 $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

②当 $1 < \rho \leq +\infty$ 时,

$$\text{取 } \varepsilon = \frac{\rho-1}{2},$$

$\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon = \frac{1+\rho}{2} > 1$$

$u_n > 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.



(1)以上三种判别法(比较、比值、根值)只能用来判别正项级数,不能判别一般项级数.

(2)正项级数的主要特征: $\{S_n\}$ 单调递增,验证 $\{S_n\}$ 是否有上界,不一定能求出极限 S .

(3)判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性的一般步骤:

①若 $u_n \not\rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 则级数发散;

②若 $u_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 则用比值或根值,含 $n!$ 时, 只能用比值,不能用根值;

③若无法判别,则用比较法(几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$),否则用定义求 S 或判别 $\{S_n\}$ 有界.



例11 判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

解:(1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{3n^n}{(n+1)^n}$

$$= \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{3}{e} (n \rightarrow \infty), \quad \text{级数发散.}$$

$$(2) \sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} (n \rightarrow \infty), \quad \text{级数收敛.}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n - n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{3^n}} = 1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ 收敛，故级数收敛。

$$(4) \sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n}, \quad \text{取 } p = 1,$$

则 $nu_n = \ln n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 级数发散。

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$$

$$(5) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

级数收敛.

$$(6) 1 - \cos \frac{\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}, \quad \text{取} p = \frac{3}{2},$$

$$\text{则 } n^{3/2} u_n \rightarrow \frac{\pi^2}{2} \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{级数收敛.}$$



$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} \quad \because 0 < \frac{\sqrt{x}}{1+x} < \sqrt{x}$$

$$\therefore 0 < \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} < \int_0^{1/n} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3n^{3/2}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^{3/2}}$ 收敛，故级数收敛。

$$(8) \quad 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} + \cdots$$

$$u_n = \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)} < \frac{2}{n^2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛，故级数收敛。



利用正项级数的收敛性求极限：

设 $u_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 则

①通项 $u_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$,

②余项 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$

例12 求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad \text{由例11(5), } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \text{ 收敛, 故原式} = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right] (p > 1)$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 1) \text{ 收敛, } \therefore \text{原式} = S_{2n} - S_n = 0$$



§ 1.3 任意项级数

1 交错级数

定义4 设 $u_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 的级数称为交错级数.

Leibniz定理 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0, n = 1, 2, \dots)$ 满足: (1) $u_n > u_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ $\{u_n\}$ 单调递减;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 余项的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.



$$\begin{aligned} \text{证: } S_{2(n+1)} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \\ &= S_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) > S_{2n} \end{aligned}$$

故 $\{S_{2n}\}$ 单调递增.

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

故 $\{S_{2n}\}$ 有上界.

因此极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在, 设其极限为 S , 则 $S \leq u_1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S \quad \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

$$|r_n| = \left| (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + \cdots \right| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$$

也是一个交错级数, 满足收敛条件, 因此 $|r_n| \leq u_{n+1}$.



例12 判别下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

解:(1) $u_n > u_{n+1}$, $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 级数收敛

(2) 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 (x > 3)$$

$f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 单调递减, $u_n > u_{n+1}$,

$u_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 级数收敛.



2 绝对收敛与条件收敛

定义5 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \quad \text{条件收敛}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n} \quad \text{绝对收敛}$$



定理6 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

$$\text{证: } 0 \leq \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \leq |u_n|$$

$$0 \leq \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \leq |u_n|$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 故正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \text{ 均收敛,}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) - \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

注: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定发散.



判别一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛性的一般步骤：

- ① 若 $u_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则级数发散;
- ② 若 $u_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 则判别 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的收敛性;
- ③ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.
- ④ 否则, 用莱布尼兹公式判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛或用

定义求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

例13 判别下列级数的敛散性, 若收敛, 指出是绝对还是条件收敛.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{\pi}{n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \sin \frac{\pi}{n+1}$$

解:(1) $|u_n| = \tan \frac{\pi}{n}$, $n \tan \frac{\pi}{n} \rightarrow \pi (n \rightarrow \infty)$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{n}$ 发散. $\tan \frac{\pi}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

$\tan \frac{\pi}{n} > \tan \frac{\pi}{n+1} > 0 (n > 3)$, 条件收敛.

(2) $u_n \rightarrow (-1)^{n-1} \pi (n \rightarrow \infty)$, 发散.



$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos n\pi \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^{3/2}} \quad (5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\sqrt[n]{n}}}$$

(3) $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos n\pi \quad \cos n\pi = (-1)^n,$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad n|u_n| \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty),$$

$|u_n| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且单调递减, 故级数条件收敛.

$$(4) |u_n| = \left| \frac{\cos n\alpha}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \text{故级数绝对收敛.}$$

(5) 条件收敛



p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ①当 $p > 1$ 时, 收敛;

②当 $p \leq 1$ 时, 发散。

交错 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$:

①当 $p > 1$ 时, 绝对收敛;

②当 $0 < p \leq 1$ 时, 条件收敛;

③当 $p \leq 0$ 时, 发散。

例14 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛, $a_n \leq b_n \leq c_n (n = 1, 2, \dots)$,

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

证: 由 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 得 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$,

又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛,

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛,

而 $b_n = a_n + (b_n - a_n)$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

