

第九章 多元函数微分学模拟题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \arctan \frac{1}{1+x^2+y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 二元函数极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{1+x^2+y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 已知三元函数 $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2z$, 则该函数的全微分 $du = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 数 $z = x^2 + y$ 在点 $P(1, 0)$ 处沿从点 $P(1, 0)$ 到点 $Q(2, -1)$ 的方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 $z = x^2 + 4xy + y^2$, 偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $f(x) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1, -1)$ 取得极值则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 若 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2$, 则 $f(5, 4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} (1+x)^{\frac{x+y}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 已知函数 $f(x, y) = 2 \ln(x^2 + xy^2) + x^2 \arctan^2 y$, 则 $f_x(x, 0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

1. $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微是函数在该点处偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的()条件.

(A) 充要 (B) 充分 (C) 必要 (D) 无关

2. 函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 处从点 $P(1, 0)$ 到点 $Q(2, -1)$ 的方向的方向导数为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微是函数在点 (x_0, y_0) 处连续的()条件

A. 充要 B. 充分 C. 必要 D. 无关

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶和二阶连续偏导数, 又

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0, \quad \text{令 } f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则下列结论正确的是 ()

- A. 当 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极大值
- B. 当 $A > 0$ 且 $AC - B^2 < 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值
- C. 当 $A < 0$ 且 $AC - B^2 > 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极大值
- D. 当 $A < 0$ 且 $AC - B^2 < 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值

5. 函数 $z = \ln(1-x^2 - y^2)$ 的定义域为 ()

- A. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$
- B. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$
- C. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$
- D. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. 函数 $z = \arctan(xy)$ 在点 $(1, 1)$ 处的全微分为 ()

- A. $\frac{1}{2}(dx - dy)$
- B. $\frac{1}{2}(dx + dy)$
- C. $dx + dy$
- D. $\frac{1}{2}(dy - dx)$

7. 函数 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + xyz$ 在点 $(0, 1, 0)$ 处的梯度 $\nabla f(0, 1, 0)$ 为 ()

- A. $(4, 2, 0)$
- B. $(0, 2, 6)$
- C. $(0, 0, 0)$
- D. $(0, 2, 0)$

8. 设 $z = \ln(1+x^2 + y^2)$, 则在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = ()$

- A. $\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$
- B. $\frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy$
- C. $\frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dy$
- D. $\frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dy$

9. 极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy - \pi) + e^{x+y+1}}{x^4 + y^4 + 1} = ()$

- A. -e
- B. e
- C. -1
- D. 0

10. 设 $z = 2x^3 - 3xy - y^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ()$

- A. 12x
- B. -6y
- C. -3
- D. 0

11. 若 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 0$, 则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是 ().

- (A) 连续且可微;
- (B) 连续但不一定可微;
- (C) 可微但不一定连续;
- (D) 不一定连续, 也不一定可微。

12. 函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 $M(1, 2, 3)$ 处方向导数取最大值的方向 ()

- A. (1,2,3) B. (-2,-4,-6) C. (2,2,2) D. (2,4,8)

13. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 一阶偏导数存在是该函数在 P_0 处连续的 ()

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既非充分条件又非必要条件

三、计算题

1. 已知二元函数 $z = x^2 \sin y + \cos(2x)$, 计算偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 已知 $y + x - \frac{1}{3} \sin y = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

3. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 在点 $(-1, 1, 2)$ 处的切平面及法线方程。

4. 设 $z = (x^2 + y^2)^2 - 4xy$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5. 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 沿 $P(1, 0)$ 到 $Q(2, -1)$ 的方向的方向导数。

6. 设 $z = f(xy, x+y)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 分别求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z = f(x^2 + xy, y^2)$, 其中 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

8. 设方程组 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

9. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上的点, 使得该点处的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$ 。

10. 求函数 $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值。

四、解答题

1. 某工厂要用铁板做成一个体积为 $1m^3$ 的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省.

五、证明题

1. 已知 $F(u, v) = 0$ 连续可微函数. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定，证明：

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

2. 证明：通过变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$ ，可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ 。