

高等数学(下)期中考试试卷 1

(答卷时间为 120 分钟)

一.填空题(每小题 6 分)

1.有关多元函数的各性质:(A)连续;(B)可微分;(C)可偏导;(D)各偏导数连续,它们的关系是怎样的?若用记号“ $X \Rightarrow Y$ ”表示由 X 可推得 Y ,则

$$(\quad) \Rightarrow (\quad) \Rightarrow \begin{cases} (\quad) \\ (\quad) \end{cases}.$$

2.函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度为_____, 该点处各方向导数中的最大值是_____.

3.设函数 $F(x, y)$ 可微, 则柱面 $F(x, y) = 0$ 在点 (x, y, z) 处的法向为_____, 平面曲线 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 在点 (x, y) 处的切向量为_____.

4.设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy =$ _____.

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx;$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx;$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\pi}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx;$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\pi}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

二.(6 分) 试就方程 $F(x, y, z) = 0$ 可确定有连续偏导的函数 $y = y(z, x)$, 正确叙述隐函数存在定理.

三.计算题(每小题 8 分)

1.设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $f(x - z, y - z) = 0$ 所确定的隐函数, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的偏导数且 $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

2.设二元函数 $f(u, v)$ 有连续的偏导数, 且 $f_u(1, 0) = f_v(1, 0) = 1$. 又函数 $u = u(x, y)$ 与 $v = v(x, y)$ 由方程组 $\begin{cases} x = au + bv \\ y = au - bv \end{cases} (a^2 + b^2 \neq 0)$ 确定, 求复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x, y) = (a, a)}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(x, y) = (a, a)}.$

3.已知曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 上的点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z = 1$, 求点 P 处的切平面方程.

4.计算二重积分: $\iint_D \sin \frac{x}{y} d\sigma$, 其中 D 是以直线 $y = x$, $y = 2$ 和曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 为边界的曲边三角形区域.

5.求曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, L 为曲线 $y = 1 - |1 - x|$ 沿 x 从 0 增大到 2 的方向.

五.(10 分) 球面被一平面分割为两部分, 面积小的那部分称为“球冠”; 同时, 垂直于平面的直径被该平面分割为两段, 短的一段之长度称为球冠的高. 证明: 球半径为 R 高为 h 的球冠的面积与整

个球面面积之比为 $h:2R$.

六.(10分) 设线材 L 的形状为锥面曲线, 其方程为: $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t (0 \leq t \leq 2\pi)$, 其线密度 $\rho(x, y, z) = z$, 试求 L 的质量.

七.(10分) 求密度为 μ 的均匀柱体 $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 对位于点 $M(0, 0, 2)$ 的单位质点的引力.

高等数学(下) 期中考试试卷 2

(答卷时间为 120 分钟)

一. 简答题 (每小题 8 分)

1. 求曲线 $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = 3 + \sin 2t \\ z = 1 + \cos 3t \end{cases}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$ 处的切线方程.

2. 方程 $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$ 在点 $(0, 1, 1)$ 的某邻域内可否确定导数连续的隐函数 $z = z(x, y)$ 或 $y = y(z, x)$ 或 $x = x(y, z)$? 为什么?

3. 不需要具体求解, 指出解决下列问题的两条不同的解题思路:

设椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 与平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 没有交点, 求椭球面与平面之间的最小距离.

4. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续的偏导数, $y = x^3$ 是 f 的一条等高线, 若 $f_y(1, 1) = -1$, 求 $f_x(1, 1)$.

二.(8分) 设函数 f 具有二阶连续的偏导数, $u = f(xy, x + y)$ 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

三.(8分) 设变量 x, y, z 满足方程 $z = f(x, y)$ 及 $g(x, y, z) = 0$, 其中 f 与 g 均具有连续的偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

四.(8分) 求曲线 $\begin{cases} xyz = 0, \\ x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处的切线与法平面的方程.

五.(8分) 计算积分 $\iint_D e^{y^2} dx dy$, 其中 D 是顶点分别为 $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$ 的三角形区域.

六.(8分) 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在圆 $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$ 上的最大值和最小值.

七.(14分) 设一座山的方程为 $z = 1000 - 2x^2 - y^2$, $M(x, y)$ 是山脚 $z = 0$ 即等量线 $2x^2 + y^2 = 1000$ 上的点.

(1) 问: z 在点 $M(x, y)$ 处沿什么方向的增长率最大, 并求出此增长率;

(2) 攀岩活动要山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点, 即在该等量线上找一点 M 使得上述增长率最大, 请写出该点的坐标.

八.(14分) 设曲面 Σ 是双曲线 $z^2 - 4y^2 = 2 (z > 0 \text{ 的一支})$ 绕 z 轴旋转而成, 曲面上一点 M 处的切平面 Π 与平面 $x + y + z = 0$ 平行.

(1) 写出曲面 Σ 的方程并求出点 M 的坐标;

(2) 若 Ω 是 Σ 、 Π 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 围成的立体，求 Ω 的体积.

高等数学（下）期末考试试卷 1

（答卷时间为 120 分钟）

一. 简答题（每小题 5 分，要求：简洁、明确）

1. 函数 $z = y^2 - x^2$ 在点 $(1, 1)$ 处沿什么方向有最大的增长率，该增长率为多少？

2. 设函数 $F(x, y, z) = (z+1)\ln y + e^{xz} - 1$ ，为什么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $M(1, 1, 0)$ 的某个邻域内可以确定一个可微的二元函数 $z = z(x, y)$ ？

3. 曲线 $x = t^2 - 1, y = t + 1, z = t^3$ 在点 $P(0, 2, 1)$ 处的切线方程是什么？

4. 设平面区域 $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$ ，积分 $\iint_D (ax^3 + by^5 + c) dx dy$ 是多少？

5. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n$ 的收敛域是什么？

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ e^{-x} - 1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ 的傅里叶系数为 $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ ，问级

数 $a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和是多少？

二. 计算积分

1. (8 分) $I = \int_{-\pi}^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

2. (8 分) $I = \int_L (x+y)dx + (y-x)dy$ ， L 为上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (y \geq 0)$ 取逆时针方向。

三. (12 分) 设 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0 \end{cases} (0 \leq z \leq 2)$ 绕 z 轴旋转而成的曲面。

(1) 写出 Σ 的方程和 Σ 取外侧（即朝着 z 轴负方向的一侧）的单位法向量；

(2) 对 (1) 中的定向曲面 Σ ，求积分 $I = \iint_{\Sigma} 4(1-y^2)dzdx + (8y+1)zdx dy$ 。

~~四. (10 分) 求微分方程 $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$ 的通解~~

五. (10 分) 把函数 $f(x) = \frac{\pi-x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$ 展成正弦级数。

六. 应用题

1. (10 分) 求曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$ 在第一卦限的切平面，使该切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为最小，并写出该四面体的体积。

2. (12 分) 设 Ω 是由曲面 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体。求：

(1) Ω 的体积 V ；(2) Ω 的表面积 A 。

高等数学（下）期末考试试卷 2

（答卷时间为 120 分钟）

一. 填空题（每小题 4 分）

1. 函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在区域 D 内连续是 $z = f(x, y)$ 在 D 内可微的 _____ 条件. (充分, 必要, 充要)

2. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿 $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ 的方向导数可以用公式 $\frac{\partial f}{\partial l} = f_x(x_0, y_0)\cos \alpha + f_y(x_0, y_0)\cos \beta$ 来计算的充分条件为 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处 _____ . (连续, 偏导数存在, 可微分)

~~3. 若三阶常系数齐次线性微分方程有解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = e^x$, 则该微分方程为 _____ .~~

4. 周期为 2 的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $\begin{cases} x & 0.5 < x < 1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$, 则它的傅里叶级数在 $x = -3.5$ 处的和为 _____ .

5. 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ 的收敛域是 _____ .

二. (8 分) 设函数 $f(u, v)$ 有二阶连续的偏导数, 且 $f_u(0, 0) = 1$, $f_v(0, 0) = -1$. 函数

$$z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right), \text{ 求 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(x, y) = (0, 1)}.$$

三. (8 分) 求抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到平面 $x + y + z + 1 = 0$ 的最近距离.

四. 计算下列积分: (每题 8 分)

1. $\iint_D e^{x^2} d\sigma$, 其中 D 为三直线 $y = 0$, $y = x$ 与 $x = 1$ 所围成的平面区域.

2. $\oint_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$, 其中 Σ 是平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 及 $x + y + z = 1$ 所围成的四面体的边界面的外侧.

3. $\oint_{\Gamma} xyz dz$, 其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$, 从 z 轴正向看去, 沿逆时针方向.

五. 级数

1. (8 分) 设 a_n 是等差数列, 公差 $d \neq 0$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 问: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{s_n}$ 是绝对收敛还是条件收敛或是发散的? 说明理由.

2. (12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $s(x)$.

六. 微分方程

~~1. (8 分) 求微分方程 $xy' + y = x \ln x$ 的通解.~~

2. (12 分) 设函数 $f(x)$ 有二阶连续的导数且 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. 如果积分

$$\int_L [x^2 - f(x)]y dx + [f'(x) + y] dy$$

与 L 的路径无关, 求 $f(x)$.