__2016—2017__学年第__1__学期　高等数学 AI 第三章单元测验

考试时间__120__分钟　　班级__________　　学号____________　　姓名_________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	成绩
满　分	20	20	30	30							100
得　分											

一、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1.　$x^2y^{(3)}+(y')^4+y^2=0$ 为_____阶微分方程.

2. 微分方程 $y'-2y=3$ 通解为________________

3. 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解为________________

4. 以 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 为特征根的阶数最低的常系数线性齐次微分方程是__________________

5. $y=e^x, y=xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该方程是__________________

二、选择题：（每小题 4 分，共 20 分）

1.　C 是任意常数，则微分方程 $y'=3y^{\frac{2}{3}}$ 的一个特解是__________

A. $y=(x+2)^3$　　B. $y=x^3+1$　　C. $y=(x+c)^3$　　D. $y=c(x+1)^3$

2．下列方程中可利用 $p=y', p'=y''$ 降为 p 的一阶微分方程的是_____

A.　$(y'')^2+xy'-x=0$　　B.　$y''+yy'+y^2=0$

C.　$y''+y^2y'-y^2x=0$　　D.　$y''+yy'+x=0$

3. 常微分方程 $y''+(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0$，（其中 λ_1,λ_2 是不等的系数），在初始条

$y(0)=0, y'(0)=0$ 特解是_______

A.　$y=0$　　B. $y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$　　C.　$y=\lambda_1\lambda_2x^2$　　D. $y=(\lambda_1+\lambda_2)x^2$

4.微分方程 $y''+6y'+9y=xe^{3x}$ 特解应具有形式________

A. $x^2(Ax+B)e^{3x}$　　B. $x(Ax+B)e^{3x}$　　C.（$Ax+B$）e^{3x}　　D.Ax^3e^{3x}

5. 函数 $f(x)$满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+1n2$，则$f(x)=$______

A. $1n2\cdot e^x$　　B. $1n2\cdot e^{2x}$　　C. e^x+ln2　　D. $e^{2x}+ln2$

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1.　求方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解

2. 求方程 $xy' + y = x^2 + 3x + 2$ 的通解

3. 求方程 $y'' = x + \sin x$ 的通解.

4. 求方程 $y^3 y'' + 1 = 0$ 满足初值条件 $y(1) = 1, y'(1) = 0$ 的特解.

5. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = x$ 的通解

四、（每小题 10 分，共 30 分）

1. $f(x) = x + \int_0^x f(t)dt$， $f(x)$ 是可微函数，求 $f(x)$

2. 已知曲线通过点（0.1），且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线，求该曲线方程.

3. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求该微分方程.

“高等数学 AI”第七章单元测验

参　考　答　案

一、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1．3.　　2．$\frac{-3}{2}+Ce^{-2x}$．3．$C_1e^x+C_2e^{-2x}$．4．$y''-4y'+4y=0$　　5．$y''-2y'+y=0$

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

ABACB

三、计算下列极限：（每小题 6 分，共 30 分）

1. 求方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解

解： $x\frac{dy}{dx}=y\ln y$,　　$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{1}{x}dx$,　　$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{1}{x}dx$,

$\ln|\ln y|=\ln|x|+C_1$，则 $y=e^{C_2x}$，其中 C_2 为任意非零常数；

又 $y=1$ 也是方程的解，故方程的通解为 $y=e^{Cx}$，其中 C 为任意常数.

2. 求方程 $xy'+y=x^2+3x+2$ 的通解

解： $y'+\frac{1}{x}y=x+3+\frac{2}{x}$

$y'+\frac{1}{x}y=0$ 的通解为 $y=\frac{C}{x}$, 其中 C 为任意常数.

令 $y=\frac{C(x)}{x}$, 代入非齐次方程得：$\frac{C'(x)}{x}=x+3+\frac{2}{x}$, $C'(x)=x^2+3x+2$,

可得：$C(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C$, 其中 C 为任意常数.

故非齐次方程的通解为：$y=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+C\right)$.

3. 求方程 $y''=x+\sin x$ 的通解.

解： $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1$

$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$.

4. 求方程 $y^3y''-1=0$ 的通解.

解：令 $y'=P$, 则 $y''=\frac{dP}{dx}=\frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx}=P\frac{dP}{dy}$, 方程可化为：$y^3P\frac{dP}{dy}-1=0$

$PdP=\frac{1}{y^3}dy$，$\int PdP=\int\frac{1}{y^3}dy$， $P^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$. 即$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{C_1y^2-1}{y^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}$，解得：$C_1y^2-1=\left(C_1x+C_2\right)^2$

5. 求方程$y''-3y'+2y=x$的通解

解： $y''-3y'+2y=0$的通解为： $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设原方程的特解为$y^*=Ax+B$，将y^*代入原方程得：

$$-3A+2\left(Ax+B\right)=x$$

可得$A=\frac{1}{2},B=\frac{3}{4}$.从而原方程的通解为： $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+C_1e^x+C_2e^{2x}$, C_1,C_2为任意常数.

四、(每小题 10 分，共 30 分)

1. $f\left(x\right)=x+\int_0^x f\left(t\right)dt$, $f\left(x\right)$是可微函数，求$f\left(x\right)$.

解： $f'\left(x\right)=1+f\left(x\right)$，记$y=f\left(x\right)$,即有： $\frac{dy}{dx}=1+y$

$\int\frac{dy}{1+y}=\int 1dx$，解得： $y=Ce^x-1$, C为任意常数.

2. 已知曲线通过点（0.1），且曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线，求该曲线方程.

解：设曲线方程为$y=f\left(x\right)$,由曲线上任一点处的切线垂直于此点与原点的连线得：

$$\left(1,y'\right)\bullet\left(x,y\right)=0$$

即： $x+yy'=0$，解之得$y=\sqrt{C-x^2}$.曲线过点（0.1），故 C=1，曲线方程为$y=\sqrt{1-x^2}$.

3. 已知$y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，求该微分方程.

解：由已知$y_1=e^{2x},y_2=e^{-x}$是相应的齐次方程的两个线性无关的解，故齐次方程为：

$$y''-y'-2y=0$$

设非齐次方程为： $y''-y'-2y=f\left(x\right)$

将$y=xe^x$代入非齐次方程可得： $f\left(x\right)=\left(xe^x\right)''-\left(xe^x\right)'-2\left(xe^x\right)=e^x\left(1-2x\right)$

故该微分方程为$y''-y'-2y=e^x\left(1-2x\right)$.