高数 A1 期末自测卷 3

一、选择题

1．函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x-1)}}$ 的定义域为（　　）.

A．$(1,\ 2)$ 和 $(2,\ +\infty)$　　B．$(2,\ +\infty)$　　C．$(1,\ +\infty)$　　D．$[1,\ +\infty)$

2．微分方程 $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$（其中 λ_1 和 λ_2 为实数，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$）的通解是（　　）.

A．$C_1e^{x}+C_2e^{\lambda_1 x}$　　B．$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{2x}$

C．$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$　　D．$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_2 x}$

3．当 $x\to 0$ 时，不是与 x 等价无穷小的是（　　）.

A．$\sin x$　　B．$\tan x$　　C．$\ln(1+x^2)$　　D．e^x-1

4．下列各式中，当 $x>0$ 时成立的是（　　）.

A．$e^x<xe$　　B．$\ln(1+x)>x$　　C．$x<1-\cos x$　　D．$x>\sin x$

二、填空题

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$______________.

2．设 $f'(a)=a^2$，且 $b>a>0$，则 $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=$______________.

3．曲线 $y=(x-1)e^{\frac{1}{x^2}}$ 的铅直渐近线为______________.

4．设 $f(x)=-e^{-x}$，则 $\int x^2 f(\ln x)dx=$______________.

三、解答下列各题

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.　　2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\tan x}$.　　3．$\int\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$.

4．$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}dx$.　　5．$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt\ \ (p>0)$.　　6．$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx$

四、计算题一

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt$.

2．求椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(1,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 的切线方程.

3．设确定a,b的值，使函数$f(x)=\frac{a}{x}+bx^2$的极小值为$f(-1)=3$.

五、计算题二

1．计算抛物线$y^2=2x$与直线$y=x-4$所围成的图形的面积.

2．求微分方程$y''-3y'+2y=x$的通解.

3. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ a+bx, & x\geq 0\end{cases}$处处可导，求$a,b$的值

六、证明题

设$a_i\in\mathbf{R}$（$i=0,\ 1,\ldots,\ n$），并且满足$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=0$，证明：方程

$$a_0+2a_1x+3a_2x^2+\ldots+(n+1)a_nx^n=0$$

在$(0,\ 1)$内至少有一个实根.

参考答案

一、选择题　BCCD

二、填空题　1. $\frac{1}{2}$　2. a^3　3. $x=0$　4. $-\frac{1}{2}x^2+C$

三、解答下列各题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{n-1}\cdot n}=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}\cdot n}=e^2$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2\tan x}\overset{\text{无穷小代换}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2\cdot x}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\overset{\text{无穷小代换}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$

3. $\int\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=2\int\sin\sqrt{t}d\sqrt{t}=-2\cos\sqrt{t}+C$

4. $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}$

5. $\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=-\left[\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}=-\left(\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1}{p}e^{-pt}-\frac{1}{p}e^0\right)=-\left(0-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}$

6. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx=\left[x\cdot\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}xd\arcsin x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

解法二： 令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}td\sin t=\left[t\cdot\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin tdt=\frac{\pi}{12}+\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

四、计算题一

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot\left(\cos x\right)'}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\cos^2 x}\cdot\sin x}{2x}=\frac{1}{2e}$

2. 在 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 两边同时对 x 求导

$$\frac{2x}{4}+\frac{2y\cdot y'}{9}=0\Rightarrow y'=\frac{9x}{4y}$$

代入点 $\left(1,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，得 $y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则切线方程为 $y-\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-1\right)$

3. 解：因为 $x=1$ 是函数的极值点，则 $x=1$ 是 $f'(x)$ 的零点

而 $f'(x)=-\frac{a}{x^2}+2bx$ ，于是有 $a+2b=0$，

又因为 $f(-1)=3$，于是有 $b-a=3$，

综上，有 $a=-2,\ b=1$

五、计算题二

1. 解：见课本第六章第 2 节，例 2

2. 解：这是一个二阶常系数非齐次线性方程，先求它对应的二阶常系数齐次线性方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解

特征方程为 $r^2-3r+2=0\Rightarrow r_1=1,\quad r_2=2$

所以方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

第二步，假设方程 $y''-3y'+2y=x$ 的特解为 $y^*=ax+b$，

代入原方程得 $(ax+b)''-(3ax+b)'+2(ax+b)=x$

化简，得 $-3a+2(ax+b)=x \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{4}$

因此方程的特解为 $y^*=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

于是原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

3.解：由于函数在 $x=0$ 连续，则

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-(1-x)}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+bx)=a$$

从而有 $a=\frac{1}{2}$

由于函数在 $x=0$ 可导，则

左导数 $f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-a}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\frac{1}{2}}{x}=\frac{1}{8}$

右导数 $f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(a+bx)-a}{x}=b$

左右导数相等，则 $b=\frac{1}{8}$

六、证明题

证明：构造函数 $f(x)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1}, x\in[0,1]$

显然 $f(0)=f(1)=0$，根据罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)=a_0+2a_1\xi+3a_2\xi^2+\cdots+(n+1)a_n\xi^n=0$$

从而方程 $a_0+2a_1x+3a_2x^2+...+(n+1)a_nx^n=0$ 在 $(0,\ 1)$ 内至少有一个实根.