

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $y = \sqrt{3-x} + \ln(3+x)$ 的定义域为_____.
2. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件（在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确地填入）.
3. $\cos 2x dx = \underline{\hspace{2cm}} d(\sin 2x)$ （在下划线中填入适当的常数）.
4. 微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为_____.
5. 已知 $f(x) = 4x - \int_0^1 f(x) dx$ ，则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列极限不正确的是（ ）.

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 1$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \dots 9}_{n \uparrow} = 1$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时，（ ）是比 x 高阶的无穷小量

A. $x + \sin x$

B. $2x$

C. $x \sin x$

D. $x - \cos x$

3. 设 $f'(x) = 2x - 1$ ，则在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内（ ）

A. $y = f(x)$ 单调增加，曲线 $y = f(x)$ 为凹的

B. $y = f(x)$ 单调减少，曲线 $y = f(x)$ 为凹的

C. $y = f(x)$ 单调增加，曲线 $y = f(x)$ 为凸的

D. $y = f(x)$ 单调减少，曲线 $y = f(x)$ 为凸的

4. 下列反常积分收敛的是（ ）.

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$

B. $\int_0^{+\infty} e^x dx$

C. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

5. 已知 y_1, y_2 是微分方程 $y'' + 2y' + 3y = e^x \sin x$ 的两个特解，则下列正确的是（ ）

A. $y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = e^x \sin x$ 的解

B. $y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的解

C. $y_1 - y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = e^x \sin x$ 的解

D. $y_1 - y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的解

三、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 已知 $y = e^{2x} \sin x$, 求 y' 和 y''

2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)}$

3. 求由方程 $e^{xy} = \sin y + y$ 确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. $\int_0^1 x e^x dx$ 2. $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

五、应用题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 计算由 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x$ 所围成的图形的面积.

2. 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + \sin t \\ y = 1 - t \end{cases}$ 在参数 $t = 0$ 处的切线和法线方程.

六、(共 5 分) 利用函数 $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$ ($x > 0$) 的极值来确定数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项, 这里 $e = 2.71828\ldots$ 为自然对数的底.

七、证明题 (每小题 3 分, 共 6 分)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的和可导的.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 又

$$F(x) = (x-1)^2 f(x),$$

证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$.

参考答案与评分标准

一、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. $[-3, 3]$; 2. 充分必要; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$; 5. 1.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分): ACADD

三、计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 已知 $y = e^{2x} \sin x$, 求 y' 和 y'' .

$$\begin{aligned}\text{解: } y' &= 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2\sin x + \cos x), \\ y'' &= 2e^{2x}(2\sin x + \cos x) + e^{2x}(2\cos x - \sin x) \\ &= e^{2x}(3\sin x + 4\cos x).\end{aligned}$$

2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)}$.

解: 因为当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x$, $\ln(1+x^2) \sim x^2$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

3. 求由方程 $e^{xy} = \sin y + y$ 确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解: 方程两边对 x 求导, 得

$$e^{xy}(y+xy') = \cos y \cdot y' + y',$$

整理得

$$y' = \frac{ye^{xy}}{1+\cos y - ye^{xy}}.$$

四、计算题 (每小题 7 分, 共 14 分)

1. $\int_0^1 x e^x dx$.

$$\text{解: } \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

2. $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

解: 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 当 $x = 1$ 时 $t = 1$, 当 $x = 4$ 时 $t = 2$, 从而有

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{1+t} dt = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2 - 2 \ln(1+t) \Big|_1^2 = 2 - 2 \ln \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

五、应用题 (每小题 8 分, 共 16 分)

1. 计算由 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x$ 所围成的图形的面积.

$$\text{解: 所求面积 } S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + \sin t \\ y = 1 - t \end{cases}$ 在参数 $t = 0$ 处的切线和法线方程.

解: $t = 0$ 处点的坐标为 $(0, 1)$,

$$\text{又 } y' = \frac{(1-t)'}{(\frac{t^2}{2} + \sin t)'} = \frac{-1}{t + \cos t}, \quad y'|_{t=0} = -1,$$

所以切线方程为 $y - 1 = -(x - 0)$, 即 $y + x - 1 = 0$.

法线方程为 $y - 1 = x - 0$, 即 $y - x - 1 = 0$.

六、(共 5 分) 利用函数 $y = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ ($x > 0$) 的极值来确定数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项, 这

里 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底.

解: 由 $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ 的导数 $y' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得驻点 $x = e$,

当 $0 < x < e$ 时 $y' > 0$, $y = x^{\frac{1}{x}}$ 单增,

当 $x > e$ 时 $y' < 0$, $y = x^{\frac{1}{x}}$ 单减,

所以 $x = e$ 是函数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 的唯一极大值点, 从而也是最大值点,

故数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值在 $x = e$ 附近取得,

由于 $2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}}$, $3^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{1}{6}}$, 而 $8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$,

所以的最大项为 $n = 3$.

七、证明题 (每小题 3 分, 共 6 分)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的和可导的.

证明: 因为 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 - 0}{x} = 1$,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1,$$

即 $f'_-(0) = f'_+(0)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,

又因为函数可导必连续, 故函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 又

$$F(x) = (x-1)^2 f(x),$$

证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $F''(\xi) = 0$ 。

证明：由于 $F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2f'(x)$ ，易知 $F(1) = F'(1) = 0$ ，
由泰勒公式，

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(\eta)}{2!}(x-1)^2 = \frac{F''(\eta)}{2!}(x-1)^2,$$

其中 η 介于 x 与 1 之间（与 x 有关），

特别地，取 $x = 0$ ，则存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得

$$F(0) = \frac{F''(\xi)}{2!}(0-1)^2 = \frac{F''(\xi)}{2},$$

但由已知我们有 $F(0) = 0$ ，从而 $\frac{F''(\xi)}{2} = 0$ ，即 $F''(\xi) = 0$ 。