一、选择题(每小题 3 分，共 12 分)

1. 设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为(　).

A. $[1,a+1]$　B. $[-1,a-1]$　C. $[a-1,0]$　D. $[a,a+1]$.

2. 曲线 $xy+e^{x+y}=1$ 在 $(0,0)$ 处的切线斜率为(　).

A. 1　B. -1　C. 0　D. e^{-1}.

3. 设 $f(x)$ 一阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1$,则 $f(0)$(　).

A. 一定是 $f(x)$ 的极大值　B. 一定是 $f(x)$ 的极小值

C. 可能是 $f(x)$ 的极值　D. 一定不是 $f(x)$ 的极值.

4. 设 $f(x)$ 有连续的导函数,则下列等式成立的是(　).

A. $\dfrac{d}{dt}\int_0^x f(x)dx=f(t)$　B. $\int df(x)=f(x)$

C. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　D. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$.

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

1. $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-4|}$ 的定义域是_____.

2. 数列有界是数列有极限的_______条件.

3. 设 $y=\sin(xy)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______.

4. 设 $y=x-\sin x$，则该函数在 $[0,2\pi]$ 上的最大值是_____.

三、解答下列各题(每小题 5 分，共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.　　4. $\int\ln x\mathrm{d}x$.

5. $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.　　6. $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

四、计算反常积分的值(每小题 7 分，共 14 分)。

1. $\int_0^1\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.　　2. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

五、计算题(每小题 9 分，共 27 分)

1．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0,\\ a+bx, & x\ge0\end{cases}$ 处处可导，求 a,b 的值.

2. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

3. 求微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解.

六、证明题(本题 5 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=1,f(1)=0$，求证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

一、选择题(每小题 3 分，共 12 分)

1. A　2. B　3. D　4. C

二、填空题(每小题 3 分，共 12 分)

1. $(-\infty,\overset{3}{\cancel{4}})\cup(3,4)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$；2. 必要；3. $\dfrac{\cos(xy)-y}{1-\cos(xy)x}$；4. 2π

三、解答下列各题(每小题 5 分，共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$.

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-1-1-x}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3x-1}+\sqrt{1+x})}$ ……

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{(x+1)(\sqrt{3x-1}+\sqrt{1+x})}$ ……

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ……

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{4x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{2}\frac{2}{x-2}4x}$ ……

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-2}4x}$ ……

$=e^{8}$. ……

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}}{3}$（由罗比达法则）……

$=\dfrac{2}{3}$. ……

4. $\int\ln x\mathrm{d}x$

$=x\ln x-\int x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ ……

$= x\ln x - x + C.$ ……………………………………

5. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\sqrt{4-4\sin^2 t}\mathrm{d}t$ （令 $x = 2\sin t(t \in [0,\frac{\pi}{2}])$ ）……

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t+1}{2}\mathrm{d}t$ ……………

$= 4[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}}] = \pi$. ……………

6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\mathrm{d}x$

$= x\arcsin x|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ……………………………

$= \frac{\pi}{12} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$ ……………………………

$= \frac{\pi}{12} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)|_0^{\frac{1}{2}}$ ……………………………

$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

四、计算反常积分的值(每小题 7 分，共 14 分)。

1. $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解：$x=1$ 是被积函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的瑕点， ………..

$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$ ……………………

$= -\sqrt{1-x^2}|_0^1$ ………………………

=1. ………………………

2. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解　被积函数 $f(x) = e^{-ax}$ 是无穷积分， ………………

$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}(-ax)$ ……………………

$= -\frac{1}{a}e^{-ax}|_0^{+\infty}$ ………………………

$=\frac{1}{a}$. ……………………………………

五、计算题(每小题 9 分，共 27 分)

1．设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0,\\ a+bx, & x\geq 0\end{cases}$ 处处可导，求 a,b 的值.

解：$f(x)$ 在 0 处必连续，又 ……………………………………

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{1}{2}$；$\lim\limits_{x\to 0^+}a+bx=a$，……………………………

可得 $a=\frac{1}{2}$. …………………………

同时 $f(x)$ 在 0 处可导，从而

$$f_-'(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\frac{1-\sqrt{1-\Delta x}}{\Delta x}-\frac{1}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-\Delta x}-\frac{1}{2}\Delta x}{(\Delta x)^2}$$

$=\frac{1}{8}$， ……………………………………

又 $f_+'(0)=b$，　因此 $b=\frac{1}{8}$. ……………………………………

2. 计算由椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解：$V=\int_{-3}^{3}\pi y^2 \mathrm{d}x=2\int_0^3\pi y^2\mathrm{d}x$ ………………………

$=2\pi\int_0^3(1-\frac{x^2}{9})\mathrm{d}x$ ……………………………

$=2\pi(x-\frac{x^3}{27})|_0^3$ ……………………………………

$=4\pi$. ……………………………………

3. 求微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解.

解：其可分离形式为 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{x}$，………………

积分可得：$\ln|\ln|y||=\ln|x|+C_1$ ………………

即 $\ln|y|=C_2x$（或 $y=e^{Cx}$）. ………………………

六、证明题(本题 5 分)

已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导,且 $f(0)=1, f(1)=0$,求证:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证明:令 $F(x)=xf(x), x\in[0,1]$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 上可导,...

且有 $F(0)=F(1)=0$,　　　　..........................

由罗尔定理可知:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使得,.

即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.　　.......................................

从而可得结论.