

2015-2016 学年第一学期《高等数学AI》期末试卷 (A)

授课班号 _____ 年级专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审核
得分					

一、填空题(每小题 4 分, 共 32 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则

$$a = -\frac{3}{2}.$$

得分	阅卷人

2. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 则 $a = \ln 3$.

3. 设 $F(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, 其中 f 为可微函数, 则 $\frac{dF}{dx} = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - \cos(xy) = 0$ 确定, 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1.$$

5. 曲线 $y = \frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线为 $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$.

6. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx = \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C$ (积分常数扣1分)

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^x f(t) dt = x(1+\cos x)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

8. 曲线 $y = e^{-x} (x \geq 0)$ 与 x 轴, y 轴所围成的开口图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为 $\frac{\pi}{2}$.

二、计算题(每小题 6 分, 共 36 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (a^t - b^t) dt}{\int_0^{2x} \ln(1+t) dt} \quad (a > 0, b > 0).$ 洛必达法则

得分	阅卷人

$$\begin{aligned} \text{解: } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{2 \ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{4} \\ & = \frac{\ln a - \ln b}{4} \end{aligned}$$

(3分) (3分) 此步开始多种计算方法

2. 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2 , 试确定系数 a, b , 并求出 $y=f(x)$ 的所有极值点及拐点.

$$\textcircled{1} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases} \quad (2^-)$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \text{驻点 } x = \pm 1$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow 极大值 \searrow 极小值 \nearrow				

\therefore 极大值点 $x = -1$

极小值点 $x = 1 \quad (2^-)$

$$\textcircled{3} f''(x) = 6x, f'''(x) = 6 \Rightarrow f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$$

\therefore 拐点 $(0, 0)$

(2^-)

\triangle 无判定极值点

和拐点理由不给分

3. 设 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a(\cos t - \cos t + t \sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t \cos t)} = \tan t \quad (3^-)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{a + t \cos t} = \frac{\sec^3 t}{a + t} \quad (3^-)$$

4. 求 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$. <多种解法>

法三: 令 $x + \sqrt{x^2 - 1} = t, \dots$

法一: $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \int (x - \sqrt{x^2 - 1}) dx = \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{x^2 - 1} dx$

其中 $I = \int \sqrt{x^2 - 1} dx = x\sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = x\sqrt{x^2 - 1} - I - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(分部积分)

(积分方程)

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|) + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{2} (x^2 - x\sqrt{x^2 - 1} + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|) + C$$

上下同乘 $\cos t$

法二: 令 $x = \sec t, \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t + \tan t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos t (1 + \sin t)} dt$, 再令 $\sin t = u, \dots$

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{1+3x^2}, & x \leq 0 \\ \ln(1+x), & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

$\frac{1}{2} x-1=t$

$$\int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 \ln(1+x)dx \quad (2^-)$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{6} (1+3x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+3x^2) + \int_0^1 \ln(1+x) d(1+x) \quad (\text{此种方法分部积分更简单})$$

$$= \left[\frac{1}{6} \times \frac{2}{3} (1+3x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 + \left[(1+x)\ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= -\frac{7}{9} + 2\ln 2 - 1$$

$$= -\frac{16}{9} + 2\ln 2 \quad (4^-)$$

6. 求星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 围成图形的面积.



由对称性, $A = 4 \int_0^a y dx$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t d(a \cos^3 t) \quad \Delta \text{利用参数方程换元}$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot a \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \quad (\text{不是相互抵消!}) \quad (3^-)$$

$$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt$$

$$= 12a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right)$$

$$= 12a^2 \left(\frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{8} \quad (3^-)$$

三、综合题(每小题 8 分, 共 32 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导,

其导函数在 $x=0$ 处是否连续?

得分	阅卷

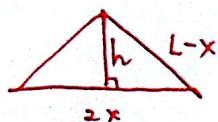
$$\textcircled{1} f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0, \quad f'_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\therefore f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = 0 \therefore f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处可导, 且 } f'(0) = 0. \quad (4^-)$$

$$\textcircled{2} f'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x \ln x + x, & x > 0 \end{cases} \quad \Delta \text{写错在右导数符号和分}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x \ln x + x) = 0 = f'(0) \therefore f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续} \quad (4^-)$$

2. 周长为 $2L$ 的等腰三角形, 绕其底边旋转一周, 求使这种旋转体体积最大的, 等腰三角形的底边之长. <多种设法>



设底边长为 $2x$, 则腰长 $L-x$, 底边上的高为 $\sqrt{L^2-2Lx}$

<圆锥体积公式> $V = \frac{\pi}{3} h^2 \cdot 2x = \frac{2\pi}{3} x (L^2 - 2Lx)$ (3')

$$V' = \frac{2\pi}{3} (L^2 - 4Lx)$$

令 $V' = 0$ 得驻点 $x = \frac{L}{4}$

\therefore 底边长为 $\frac{L}{2}$ 时, 体积最大. (5')

3. 设函数 f 在 $[0, 1]$ 内连续, $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$3 \int_{2/3}^1 f(x) dx = f(0),$$

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

由积分中值定理, $\exists \eta \in (\frac{2}{3}, 1)$ s.t. $\int_{2/3}^1 f(x) dx = f(\eta) \cdot (1 - \frac{2}{3})$

从而 $f(\eta) = f(0)$.

写开区间、闭区间皆可.

再由 Rolle Th, $\exists \xi \in (0, \eta)$ s.t. $f'(\xi) = 0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明: 当 $0 < \lambda < 1$ 时,

$$\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx. \quad <多种证法>$$

证: $\int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_0^1 f(x) dx = \int_0^\lambda f(x) dx - \lambda (\int_0^\lambda f(x) dx + \int_\lambda^1 f(x) dx)$

$$= (1-\lambda) \int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_\lambda^1 f(x) dx$$

$$= (1-\lambda) f(\xi_1) \cdot (\lambda-0) - \lambda f(\xi_2) \cdot (1-\lambda), \quad 0 < \xi_1 < \lambda < \xi_2 < 1$$

$$= \lambda(1-\lambda) [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geq 0 \quad (f \downarrow \Rightarrow f(\xi_1) \geq f(\xi_2))$$

证: $\int_0^\lambda f(x) dx$, 令 $x = \lambda t$ 换元 证: 构造 $F(\lambda) = \frac{\int_0^\lambda f(x) dx}{\lambda}$ 或 $\int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_0^1 f(x) dx$
单调性