第九章 多元函数微分学模拟题

一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ = ______0______.

2. 二元函极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{1+x^2+y^2}=$ ______0______ 。

3. 已知三元函数 $u=x^2+y^2+z^2-2z$，则该函数的全微分 $du=$ ________ 。

$\underline{2xdx+2ydy+2(z-1)dz}$

4. 数 $z=x^2+y$ 在点 P(1, 0) 处沿从点 P(1, 0) 到点 Q(2, -1) 的方向的方向导数为

$\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

5. 已知 $z=x^2+4xy+y^2$，偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______. $2x+4y$

6. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=$ ______. $\dfrac{1}{2}$

7. 设 $f(x)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值则常数 a = ______。−5

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$ ______。1

9. 若 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$，则 $f(5,4)=$ ______ 。20

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)}(1+x)^{\frac{x+y}{x}}=$ ______ 。e^5

11. 已知函数 $f(x,y)=2\ln(x^2+xy^2)+x^2\arctan^2 y$，则 $f_x(x,0)=$ ______。$\dfrac{4}{x}$

二、选择题

1. $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微是函数在该点处偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在的（B ）条件.

(A)充要 (B)充分 (C)必要 (D)无关

2.函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数为（D）

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.　函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微是函数在点 (x_0,y_0) 处连续的（B）条件

A.　充要　　B. 充分　　C. 必要　　D. 无关

4.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶和二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=\mathrm{A}$，$f_{xy}(x_0,y_0)=\mathrm{B}$，$f_{yy}(x_0,y_0)=\mathrm{C}$，则下列结论正确的是（C）

A. 当 $A>0$ 且 $AC-B^2>0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大值

B. 当 $A>0$ 且 $AC-B^2<0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值

C.　当 $A<0$ 且 $AC-B^2>0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大值

D.　当 $A<0$ 且 $AC-B^2<0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值

5. 函数$z=\ln(1-x^2-y^2)$的定义域为（）答案：C

A. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\right\}$　　B. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1\right\}$

C. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\right\}$　　D. $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\right\}$

6.函数$z=\arctan(xy)$在点（1,-1）处的全微分为（）答案：D

A.$\frac{1}{2}$（$dx-dy$）　　B.$\frac{1}{2}$（$dx+dy$）

C. $dx+dy$　　D.$\frac{1}{2}$（$dy-dx$）

7. 函数$f(x,y,z)=2x^2+y^2+3z^2+xyz$在点（0，1，0）处的梯度$\mathrm{grad}f(0,1,0)$为（）

A.（4,2,0）　B.（0,2,6）　C.（0,0,0）　D.（0,2,0）

答案：D

8.设 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，则在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)}=$（B）

A. $\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$；　B.$\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$　C.$\frac{2}{3}dx-\frac{1}{3}dy$　D.$\frac{2}{3}dx+\frac{1}{3}dy$

9.　极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy-\pi)+e^{x+y+1}}{x^4+y^4+1}=$（B）

A. -e　B .e　C .-1　D. 0

10.设 $z=2x^3-3xy-y^3$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（C）：

A.12x　B.-6y　C.-3　D.0

11. 若 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是（D　）.

（A）连续且可微；　　（B）连续但不一定可微；

（C）可微但不一定连续；　　（D）不一定连续，也不一定可微。

12.函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $M(1,2,3)$ 处方向导数取最大值的方向（A）

A. $(1,2,3)$　B. $(-2,-4,-6)$　C. $(2,2,2)$　D. $(2,4,8)$

13.函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 一阶偏导数存在是该函数在 P_0 处连续的（D）

A.　充分非必要条件　B.必要非充分条件　C.充要条件　D.既非充分条件又非必要条件

三、计算题

1. 已知二元函数 $z=x^2\sin y+\cos(2x)$, 计算偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解答】根据偏导数的定义，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y\text{-}2\sin(2x)$, ………………………… 3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y$, ………………………… 6 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cos y$. ………………………… 8 分

2.已知 $y+x-\dfrac{1}{3}\sin y=0$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解答：（方法一）

方程两边同时关于 x 求导数，则 ………………………… 2 分

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1-\dfrac{1}{3}\cos y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$ ………………………… 6 分

从而，

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}\cos y-1}=\dfrac{3}{\cos y-3}.$ ………………………… 8 分

（方法二）

设 $F(x,y)=y+x-\frac{1}{3}\sin y$, ………………………… 2 分

则我们可知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$=-\frac{1}{1-\frac{1}{3}\cos y}$$

$$=\frac{3}{\cos y-3}. \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

3.求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 $(-1,1,2)$ 处的切平面及法线方程。

1. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$,

$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)$, $\vec{n}\big|_{(-1,1,2)}=(-2,2,4)$ ……… 3 分

所以在点(-1,1,2)处的切平面为

$-2(x+1)+2(y-1)+4(z-2)=0$, 即 $x-y-2z+6=0$. …… 5 分

法线方程为

$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$, 即 $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$ ………… 7 分

4. 设 $z=(x^2+y^2)^2-4xy$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=2(x^2+y^2)\cdot 2x-4y=4x^3+4xy^2-4y$ …………… 3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=2(x^2+y^2)\cdot 2y-4x=4x^2y+4y^3-4x$ ………… 6 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8xy-4$ ………………………………… 7 分

5. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 沿 $P(1,0)$ 到 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数。

3. $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=e^{2y}\Big|_{(1,0)}=1;$ ……………………………2

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,0)}=2xe^{2y}\Big|_{(1,0)}=2$ ……………………………4

故 $\frac{\partial z}{\partial PQ}\Big|_{(1,0)}=1\cos\alpha+2\cos\beta=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………6

6. 设 $z=f(xy,x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，分别求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + f_2'$, ...4

$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + f_2'$, ...7

7. 设 $z = f(x^2 + xy, y^2)$，其中 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

2. 解：$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x+y)f_1'$，（3 分）

$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + 2yf_2'$（5 分）

8.设方程组 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$。

1. 解：方程两边求关于 x 的导数，得

$$\begin{cases} 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \\ x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$$（4 分）

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}$，$\frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y}$（8 分）

9.求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点，使得该点处的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

2. 解：由题意知，曲线的切向量为

$$s = \{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\} = \{1, 2t, 3t^2\}$$（3 分）

平面 $x+2y+z=4$ 的法向量为 $n = \{1,2,1\}$

那么由 $s \perp n$ 可得 $s \cdot n = 1 + 4t + 3t^2 = 0$

解得 $t_1 = -1, t_2 = -\frac{1}{3}$（6 分）

所以在曲线上，点 $(-1,1,-1)$ 与 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$ 处的切线与已知平面平行.（8 分）

10.求函数 $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ 的极值。

3. 解：令 $\begin{cases} f_x = 4-2x=0 \\ f_y = -4-2y=0 \end{cases}$，得驻点为 $(2,-2)$（3 分）

又由 $f_{xx} = -2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -2$，故 $AC - B^2 = 4 > 0, A = -2 < 0,$（6 分）

故有极大值 $f(2,-2) = 8.$（8 分）

四、解答题

1. 某工厂要用铁板做成一个体积为 $1m^3$ 的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取怎

样的尺寸时，才能使用料最省.

【解答】设有盖长方体水箱长、宽分别为x,y米，则高为$h=\dfrac{1}{xy}$米. ………………………… 2 分

表面积

$$S(x,y)=2(xy+x\frac{1}{xy}+y\frac{1}{xy})=2(xy+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}) \text{ ……………………… 4 分}$$

令 $\dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y)=2(y-\dfrac{1}{x^2})=0$，$\dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y)=2(x-\dfrac{1}{y^2})=0$

$x=y=1$ ……………………………………………………………………… 5 分

根据实际问题，最小值一定存在，而只有唯一的驻点$x=y=1$

故当$x=y=1$时，$h=1$，$S(x,y)$有最小值$S(1,1)$=6. ……………………………………… 6 分

五、证明题

1．已知$F(u,v)=0$连续可微函数. 函数$z=z(x,y)$由方程$F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$所确定，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

【解答】首先，对方程$F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$两边分别关于$x,y$求偏导，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\left(1+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \quad (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial u}\left(-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(1+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad (2)\end{cases}$$ ……………………………………………… 2 分

利用 $(1)\times x^2y$，我们可知

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(x^2y+xx\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(-zy+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0.$$

故可知 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial v}zy-\dfrac{\partial F}{\partial u}x^2y}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}$. ……………………………………………… 3 分

利用 $(1)\times y^2x$，我们可知

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(-xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(xy^2+yy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

故可知 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u}zx-\dfrac{\partial F}{\partial v}xy^2}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}$.

因此，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial v}zy-\dfrac{\partial F}{\partial u}x^2y}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}+\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial u}zx-\dfrac{\partial F}{\partial v}xy^2}{x\dfrac{\partial F}{\partial u}+y\dfrac{\partial F}{\partial v}}=z-xy.$ ……………………………………………… 4 分

2. 证明：通过变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+3y\end{cases}$，可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$。

【解答】首先，计算 $\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u}$. 两边对方程 $u=x-2y, v=x+3y$ 两边分别关于 u 求偏导，

$\begin{cases}1=\dfrac{\partial x}{\partial u}-2\dfrac{\partial y}{\partial u},\\ 0=\dfrac{\partial x}{\partial u}+3\dfrac{\partial y}{\partial u}\end{cases}$ 从而，我们可知 $\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{3}{5},\dfrac{\partial y}{\partial u}=-\dfrac{1}{5}$. ……………………………… 1 分

其次，计算 $\dfrac{\partial x}{\partial v},\dfrac{\partial y}{\partial v}$. 两边对方程 $u=x+2y, v=x+3y$ 两边分别关于 v 求偏导，

$\begin{cases}0=\dfrac{\partial x}{\partial v}-2\dfrac{\partial y}{\partial v},\\ 1=\dfrac{\partial x}{\partial v}+3\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$ 从而，我们可知 $\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{2}{5},\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………… 2 分

最后，计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{3}{5}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial z}{\partial y},$$ ……………………………… 3 分

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{3}{5}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{5}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=\frac{3}{5}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=\frac{3}{5}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\ &=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &=\frac{1}{25}\left(6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0.\end{aligned}$$ ……………………………… 4 分