线代复习提纲

- 线代复习提纲
  - 《线性代数》复习提纲
    - 第一部分：基本要求（计算方面）
      - 行列式
      - 矩阵运算
      - 线性方程组的解
      - 特征值和特征向量
- 第二部分：基本知识
  - 一、行列式
    - 1．行列式的定义
    - 2．行列式的计算
      - （1）一阶$|\alpha| = \alpha$行列式，二、三阶行列式有对角线法则；
      - （2）行列式值为0的几种情况：
      - (3) 行列式性质
      - 对于齐次线性方程组
  - 二．矩阵
    - 1．矩阵的基本概念
    - 2．矩阵的运算
      - （1）加减（对应位置元素相加）、数乘(所有行列都要乘)、乘法运算的条件(A_{n*m}, B_{k*l} 当m=k时可以乘，结果矩阵大小为n*l)
      - （2）关于乘法的几个结论：
    - 3.对称矩阵
      - （1）$A = A^T$:对称矩阵
      - （2）$A = -A^T$:反对称矩阵
    - 4.矩阵的行列式性质
    - 5.伴随矩阵
    - 3．矩阵的秩（无关组，向量组）
      - (1）定义　非零子式的最大阶数称为矩阵的秩；
      - （2）秩的求法　　一般不用定义求，而用下面结论：
        - （3）性质：
    - 4．逆矩阵
      - （1）定义：A、B为n阶方阵，若AB＝BA＝E，称A可逆，B是A的逆矩阵（满足半边也成立）；
      - （2） 性质：
      - （3）可逆的条件：

《线性代数》复习提纲

第一部分：基本要求（计算方面）

行列式

四阶行列式的计算
N阶特殊行列式的计算（如有行和、列和相等）；

矩阵运算

1.矩阵的运算（包括加、减、数乘、乘法、转置、逆等的混合运算）；

注：无零因子律

无消去律（在$B\ne0$时或其中一个矩阵可逆时才有消去律）

无交换律，AB=BA才可以交换

矩阵乘法算高次的技巧：

(AB)^k=(AB)(AB)(AB)(AB)···(AB)(AB)

=A(BA)(BA)(BA)(BA)···(BA)B

=A[(BA)^(k-1)]B

2.矩阵多项式

注：矩阵因式分解与实数类似，但注意提取公因式1要变成E因为矩阵多项式不会出现数字

求矩阵的秩、逆（两种方法）；解矩阵方程；

线性方程组的解

含参数的线性方程组解的情况的讨论

（看秩，增广矩阵和系数矩阵，以及未知量个数）

齐次、非齐次线性方程组的求解（包括唯一、无穷多解）；

讨论一个向量能否用和向量组线性表示；

讨论或证明向量组的相关性；

求向量组的极大无关组，并将多余向量用极大无关组线性表示；

将无关组正交化、单位化；

特征值和特征向量

求方阵的特征值和特征向量；

讨论方阵能否对角化，如能，要能写出相似变换的矩阵及对角阵；

通过正交相似变换（正交矩阵）将对称矩阵对角化；

写出二次型的矩阵，并将二次型标准化，写出变换矩阵；

判定二次型或对称矩阵的正定性。

第二部分：基本知识

一、行列式

1．行列式的定义

用n^2个元素a_{ij}组成的记号称为n阶行列式。

（1）它表示所有可能的取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和；

（2）展开式共有$n!$项，其中符号正负各半；

2. 行列式的计算

（1）一阶$|\alpha|=\alpha$行列式，二、三阶行列式有对角线法则；

N阶（n>=3）行列式的计算：降阶法

定理：n阶行列式的值等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积的和。

方法：选取比较简单的一行（列），保保留一个非零元素，其余元素化为0，利用定理展开降阶。
尽量找或凑0多的一行或一列进行展开
特殊情况

> 上、下三角形行列式、对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积；

> 箭型行列式
> 把第2，第3…第n列或行加到第1列或行，提取公因式（使第一列除a_{11}外其他元素变成0）

> 范德蒙行列式：
> 用一次项的数分别作差再相乘
> tips：从右往左看

（2）行列式值为0的几种情况：

- I　行列式某行（列）元素全为0；
- II　行列式某行（列）的对应元素相同；
- III　行列式某行（列）的元素对应成比例；
- IV　奇数阶的反对称行列式。
- 概念：$|A|=0$奇异，$|A|\neq 0$非奇异

(3) 行列式性质

- I 转置行列式值不变
- II 提公因子只提一行或一列
- III 交换行列就变号
- IV 某行（列）乘k加到另一行（列），行列式值不变

对于齐次线性方程组

齐次线性方程组的系数行列式$D\neq 0$,则该方程组只有零解
齐次线性方程组的系数行列式$D=0$,则该方程组有非零解

二．矩阵

1．矩阵的基本概念

（表示符号、一些特殊矩阵——如单位矩阵、对角、对称矩阵等）

2．矩阵的运算

（1）加减（对应位置元素相加）、数乘(所有行列都要乘)、乘法运算的条件(A_{n*m}, B_{k*l} 当m=k时可以乘，结果矩阵大小为n*l)

（2）关于乘法的几个结论：

3.对称矩阵

（1）$A=A^T$:对称矩阵

（2）$A=-A^T$:反对称矩阵

①矩阵乘法一般不满足交换律（若AB＝BA，称A、B是可交换矩阵）；
②矩阵乘法一般不满足消去律、零因式不存在；
③若A、B为同阶方阵，则$|AB|=|A|*|B|$；
④$|kA|=k^n|A|$（从n行中提出来n个k相乘）
⑤ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$（矩阵逆的行列式等于矩阵行列式的倒数）
⑥ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$(矩阵的逆的转置等于转置的逆)

4.矩阵的行列式性质

> - （1）$|A^T|=|A|$
> - （2）$|kA|=k^nA$
> - （3）$|AB|=|A||B|$
> - 注：$|A+B|\neq|A|+|B|$！

5.伴随矩阵

> - 定义式：$AA^*=|A|E ==> |A^*|=|A|^{n-1}$
> - 结论:
> - $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$
> - $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$
> - $(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}=(A^*)^{-1}$
> - $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

3．矩阵的秩（无关组，向量组）

(1）定义　非零子式的最大阶数称为矩阵的秩；

（2）秩的求法　　一般不用定义求，而用下面结论：

> 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；阶梯形矩阵的秩等于非零行的个数（每行的第一个非零元所在列，从此元开始往下全为0的矩阵称为行阶梯阵）。
> **求秩：利用初等变换将矩阵化为行阶梯型矩阵。**
> **R(A)=非零行行数**

（3）性质：

> 1. $A_{s*m}, B_{s*n}, maxR(A), R(B) <= R(A, B) <= R(A) + R(B)$
> 2. $A_{m*n}, B_{m*n}, R(A+B) <= R(A) + R(B)$
> 3. $A_{m*s}, B_{s*n}, R(A) + R(B) - s <= R(AB) <= minR(A), R(B)$ 特别的，$AB = 0$ 有R(A)+R(B)<=s

4．逆矩阵

（1）定义：A、B为n阶方阵，若AB＝BA＝E，称A可逆，B是A的逆矩阵（满足半边也成立）；

（2） 性质：

> - $(A^{-1})^{-}1 = A$
> - $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$
> - $(kA)^{-1} = \frac{\geq}{1} kA^{-1}$
> - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
>
>   (A B的逆矩阵，你懂的)（注意顺序）

（3）可逆的条件：

> **1.R(A)=n,**
> **2.A的所有特征值都不为0,**
> **3.列向量，行向量组线性无关，**
> **4.|A|**$\neq 0$

（4）逆的求解

> ①伴随矩阵法　$A^{-1} = (\frac{1}{|A|})A^{*}$；$(A*$ 为A的伴随矩阵$)$
> ②初等变换法（$A|E$）$->$ (施行初等变换)（$E|A^{-1}$）

（5）用逆矩阵求解矩阵方程：(只能用初等行变换，用了列变换就不同解了)

> $AX = B$，则$X = A^{-1}B$
> $XB = A$，则$X = BA^{-1}$
> $AXB = C$，则$X = A^{-1}CB^{-1}$

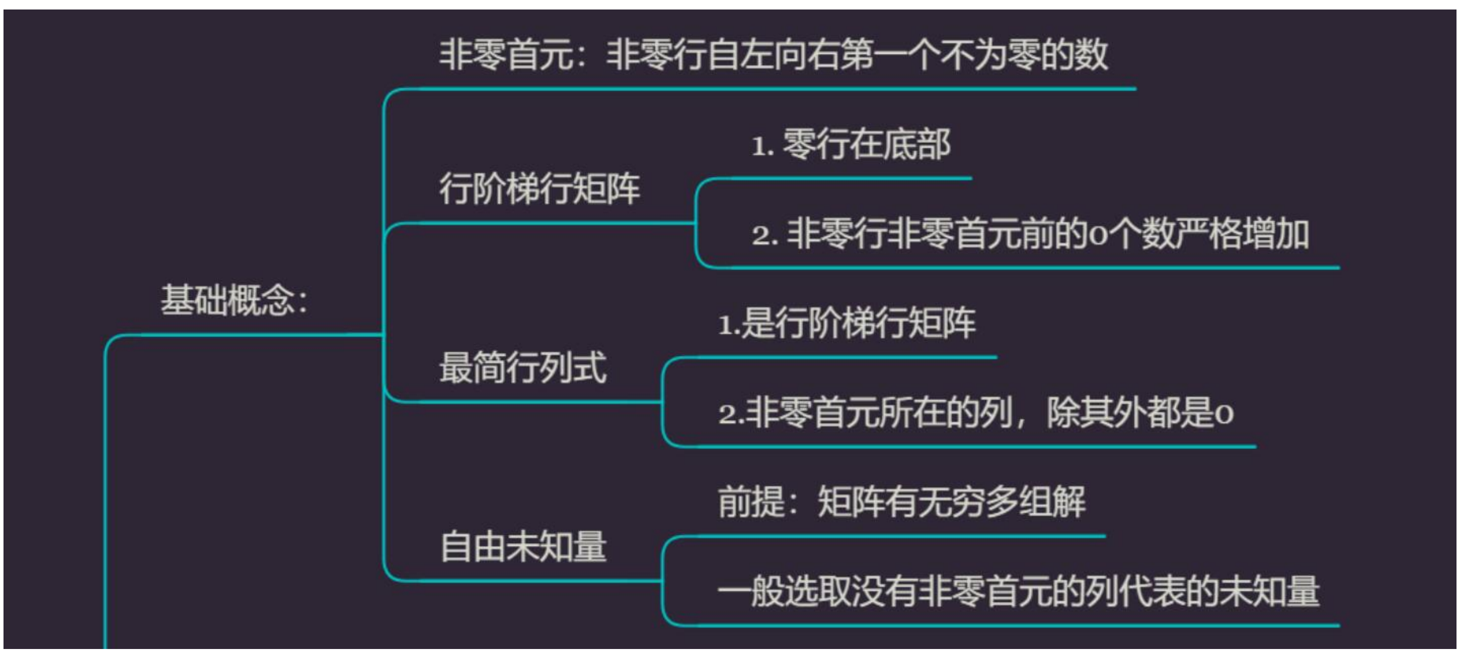
三、线性方程组

1．线性方程组解判定（判断增广矩阵和系数矩阵的秩是否相等以及未知量数量）

结论：$AX=B-->(A|B)-->(E|A^{-1}B)$

> 定理：
> $(1)r(A,b)\neq r(A)$无解；$r(A,b)=r(A)$有解
> $(2)r(A,b)=r(A)=n$有唯一解；
> $(3)r(A,b)=r(A)<n$有无穷多组解；
> 特别地：对齐次线性方程组AX=0（齐次线性方程组一定有解）
> $(1)r(A)=n$只有零解；
> $(2)r(A)<n$有非零解；
> 再特别，若为方阵，
> $(1)|A|\neq 0$只有零解
> $(2)|A|=0$有非零解

基础概念：



2．齐次线性方程组

> （1）解的情况：
> r(A)=n，（或系数行列式D\ne 0）只有零解；
> r(A)< n，（或系数行列式D＝0）有无穷多组非零解。
> （2）解的结构：
> $X=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+...+C_{n-r}\alpha_{n-r}$
> （3）求解的方法和步骤：

> ①将增广矩阵通过行初等变换化为最简阶梯阵；
> ②写出对应同解方程组；
> ③移项，利用自由未知数表示所有未知数；
> ④表示出基础解系；
> ⑤写出通解。

3．非齐次线性方程组

> （1）解的情况：
> 利用判定定理。
> （2）解的结构：
> $X = u + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_{n-r}\alpha_{n-r}$
> （3）无穷多组解的求解方法和步骤
> 与齐次线性方程组相同。
> （4）唯一解的解法：
> 有克莱姆法则、逆矩阵法、消元法（初等变换法）。

4.等价标准型求法：

等价就是两个向量组之间可以相互表示

> $A-->$ 行阶梯形矩阵 $-->$ 最简行阶梯型矩阵 $-->$
> 列变换化成左上角元素为E的分块矩阵

5.基础解系

齐次：对齐次线性方程组进行初等行变换化成最简行阶梯型矩阵，求同解的方程组，再找自由未知量
非齐次：对非齐次线性方程组进行初等行变换化成最简行阶梯型矩阵，求特解，再对导出方程组进行初等行变换化成最简行阶梯型矩阵，求同解的方程组，再找自由未知量
基础解系的个数=自由未知量的个数

四、向量组

1．N维向量的定义

注：向量实际上就是特殊的矩阵（行矩阵和列矩阵）。

2．向量的运算：

> （1）加减、数乘运算（与矩阵运算相同）；
> （2）向量内积　（α，β）$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$

（3）向量长度

$|\alpha| = \sqrt{\alpha}$，$\alpha = \sqrt{}(\alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{n2})$(√根号)

（4）向量单位化 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$

（5）向量组的正交化（施密特方法）

设α_1，α_2，…，α_n线性无关，则

$\beta_1 = \alpha_1$，

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{（\alpha_2，\beta_1）}{（\beta_1，\beta_1）}\beta_1$，

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{（\alpha_3，\beta_2）}{（\beta_2，\beta_2）} * \beta_2 - \frac{（\alpha_2，\beta_1）}{（\beta_1，\beta_1）}\beta_1$，………。

3．线性表示和线性组合

（1）定义 若$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n$，则称β是向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的一个线性组合，或称β可以用向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的一个线性表示。

（2）判别方法 将向量组合成矩阵，

记 A=$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，$B = (\alpha_1，\alpha_2，\ldots，\alpha_n, \beta)$

若 $r(A) = r(B)$，则β可以用向量组α_1，α_2，…，α_n的一个线性表示；

1. R(A,B)=n-->唯一表出
2. R(A,B)不唯一标出

   若 $r(A) \neq r(B)$，则β不可以用向量组α_1，α_2，…，α_n的一个线性表示。（无法表出）

   （3）求线性表示表达式的方法：

   将矩阵B施行行初等变换化为最简阶梯阵，则最后一列元素就是表示的系数

   tip:能否线性表示-->是否存在$k_1, k_2 \cdots k_n$-->线性方程组有解AK=b[解该齐次线性方程组$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(k_1, k_2 \cdots k_n)^T = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$]

   表示唯一：唯一解，表示不唯一：无穷多解

   表示系数就是解

   （4）一个向量组内分量可以相互表示，则表示系数一定不是0，如果哪个表示系数≠0则这个对应的分量可以被其他分量表示。（移项即可）

4．向量组的线性相关性

（1）线性相关与线性无关的定义

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_n\alpha_n = 0$

若$k_1, k_2, \ldots$，k_n不全为0，称线性相关；（即有非零解）

若$k_1, k_2, \ldots$，k_n全为0，称线性无关。（即只有零解）

（2）判别方法：

① $r(\alpha_1，\alpha_2 \ldots \alpha_n) < n$ 线性相关；

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(k_1, k_2, \ldots，k_n)^T = 0$有非零解

> $r(\alpha_1，\alpha_2...\alpha_n)=n$ 线性无关。
> $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)(k_1,k_2,...，k_n)^T=0$只有零解
> $|\alpha_1，\alpha_2\cdots\alpha_n|=0 ==>$ 有零行 $==> R(A)<n ==>$ 线性相关
> $|\alpha_1，\alpha_2\cdots\alpha_n|\neq 0 ==>$ 有零行 $==> R(A)=n ==>$ 线性无关
> ② 若向量个数>维数==>线性相关（向量个数=未知量的个数n，即：R(A)< n，有非零解==>系数不全为0）
> ③若向量个数=维数==>线性无关（即：R(A)=n,只有零解（唯一解）==>系数全为0）
> **tip:是否线性相关-->$k_1,k_2\cdots k_n$的值是否都=0-->齐次线性方程组有零解还是无穷解**
> ②若有n个n维向量，可用行列式判别：
> n阶行列式a_{ij}＝0，线性相关（$|a_{ij}|\neq 0$无关）(行列式太不好打了)
> （3）向量组等价：R(A)=R(B)=R(A,B)
> （4）性质：
> 1.一个向量线性相关 则α为零向量（因为线性相关$k\neq 0$）
> 2.两个向量构成的向量线性相关 则分量对应成比例，反之无关。
> 3.包含零向量一定线性相关
> 4.部分相关，向量组相关，整体无关，部分也无关
> （5）判定：
> 1.向量组线性相关则有一个分量能由其他n-1个分量表示。
> 2.R（A）< n 则向量组线性相关 R(A)=n向量组线性无关。（向量组可逆）
> 3.向量组线性无关，添加向量仍然无关

5．极大无关组与向量组的秩

> （1）定义　极大无关组所含向量个数称为向量组的秩
> （2）求法　设A＝$(\alpha_1，\alpha_2...\alpha_n)$，将A化为行阶梯阵，则A的秩即为向量组的秩，而每行的第一个非零元所在列的向量就构成了极大无关组。
> 哪些向量是极大无关组：一列里面只有一个元素不是0

6.向量空间

（1）基变换公式

> 过渡矩阵：$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1，\alpha_2...\alpha_n)P$(P为过渡矩阵) P叫从$\alpha_i$到$\beta_i$的过渡矩阵
> (从哪个就是对这一个进行变换，也就是乘P得到另一个基)

（2）坐标变换公式

> P为过渡矩阵

五、矩阵的特征值和特征向量

1．定义　对方阵A，若存在非零向量X和数λ使$AX=\lambda X$，则称λ是矩阵A的特征值，向量X称为矩阵A的对应于特征值λ的特征向量。

(即A对X的作用效果与λ对X的作用效果一样)

2．特征值和特征向量的求解：

> 求出特征方程$|\lambda E-A|=0$的根即为特征值，将特征值λ代入对应齐次线性方程组$(\lambda E-A)X=0$中求出方程组的所有非零解即为特征向量。
> （特征向量即求基础解系）

3．重要结论：

> （1）A可逆的充要条件是A的特征值不等于0；
> （2）A与A^T有相同的特征值；
> （3）**不同特征值对应的特征向量线性无关。**

六、矩阵的相似

> 1．定义　对同阶方阵A、B，若存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，则称A与B相似。
> 2.矩阵相似的性质：
> 3．求A与对角矩阵$\bigwedge$相似的方法与步骤（求P和$\bigwedge$）：
> 求出所有特征值；
> 求出所有特征向量；
> 若所得线性无关特征向量个数与矩阵阶数相同，则A可对角化（否则不能对角化），将这n个线性无关特征向量组成矩阵即为相似变换的矩阵P，依次将对应特征值构成对角阵即为$\bigwedge$。
> **若特征值的重根数等于特征向量的个数（基础解系，自由未知量）**
> 4．求通过正交变换Q与实对称矩阵A相似的对角阵：
> 　方法与步骤和一般矩阵相同，只是第三步要将所得特征向量正交化且单位化。

七、二次型

> 1．定义　n元二次多项式f(x_1 ,x_2,...，x_n)=∑ aijxixj称为二次型,若$a_{ij}=0(i\neq j)$，则称为二交型的标准型。
> 2．二次型标准化
> 　配方法和正交变换法。正交变换法步骤与上面对角化完全相同，这是由于对正交矩阵Q，Q^{-1}=Q^T，即正交变换既是相似变换又是合同变换。
> 3．二次型或对称矩阵的正定性：
> （1）定义（略）；
> （2）正定的充要条件：

> ①A为正定的充要条件是A的所有特征值都大于0；
> ②A为正定的充要条件是A的所有顺序主子式都大于0；

> **求坐标就是求表示系数，怎么用一个基底表示出一个向量，转换成解线性方程组的问题。**

小总结：构造对角阵的方法：

1.分块矩阵对角阵 2.相似对角化 3.实对称矩阵相似对角化

第三部分：证明题思路

一般思路

抽象型矩阵：用定义证明
具体型矩阵：用具体计算方法来证明
例：特征值与特征向量：定义解决抽象，具体计算解决具体

典型例题：

例1.设α是一个n维实列向量，且$\alpha^T\alpha=1$,$B=E-2\alpha\alpha^T$

证明
(1)B是一个对称的正交矩阵
(2)B有一个特征值为-1,有一个代数重复度为$(n-1)$的特征值为1

解:(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$