离散数学期末复习要点与重点

离散数学课程的主要内容包括：集合论、数理逻辑共 2 篇.

下面按章给出复习要点与重点.

第 1 章　集合

复习要点

1．理解集合、元素、集合的包含、子集、相等，以及全集、空集和幂集等概念，熟练掌握集合的表示方法.

具有确定的，可以区分的若干事物的全体称为**集合**，其中的事物叫元素..

集合的表示方法：列举法和描述法.

注意：集合的表示中元素不能重复出现，集合中的元素无顺序之分.

掌握集合包含(子集)、真子集、集合相等等概念.

注意：元素与集合，集合与子集，子集与幂集，$\in$与$\subset$($\subseteq$), 空集$\varnothing$与所有集合等的关系.

空集$\varnothing$，是惟一的，它是任何集合的子集.

集合 A 的幂集 $P(A)=\{x|x\subseteq A\}$， A 的所有子集构成的集合. 若$|A|=n$，则$|P(A)|=2^n$.

2．熟练掌握集合 A 和 B 的并 $A\cup B$，交 $A\cap B$，补集$\sim A$($\sim A$ 补集总相对于一个全集).差集 $A-B$，对称差$\oplus$，$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$，或 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$ 等运算，并会用文氏图表示.

掌握集合运算(运算的性质).

3．掌握用集合运算基本规律证明集合恒等式的方法.

集合的运算问题：其一是进行集合运算；其二是运算式的化简；其三是恒等式证明.

证明方法有二：(1)基于定义的证明方法:要证明 $A=B$，只需证明 $A\subseteq B$，又 $A\supseteq B$；

(2)等值演算证明法:通过运算律进行等式推导.

重点：集合概念，集合的运算，集合恒等式的证明.

第 2 章　关系

复习要点

1．了解有序对和笛卡儿积的概念，掌握笛卡儿积的运算.

有序对就是有顺序二元组，如$<x, y>$，x, y 的位置是确定的，不能随意放置.

注意：有序对$<a，b>\neq<b, a>$，以 a, b 为元素的集合$\{a, b\}=\{b, a\}$；有序对(a, a)有意义，而集合$\{a, a\}$是单元素集合，应记作$\{a\}$.

集合 A，B 的笛卡儿积 $A\times B$ 是一个集合，规定 $A\times B=\{<x,y>|x\in A,y\in B\}$，是有序对的集合. 笛卡儿积也可以多个集合合成，$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

2．理解关系的概念：二元关系、空关系、全关系、恒等关系.掌握关系的集合表示、关系矩阵和关系图，掌握关系的集合运算和求复合关系、逆关系的方法.

二元关系是一个有序对集合， $R=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$，记作 xRy.

关系的表示方法有三种：集合表示法，

关系矩阵：$R\subseteq A\times B$，R 的矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times n}, r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not R b_j\end{cases}\begin{pmatrix}i=1,2...,m,\\ j=1,2,...,n\end{pmatrix}$.

关系图：R 是集合上的二元关系，若$<a_i, b_j>\in R$，由结点 a_i 画有向弧到 b_j 构成的图形.

空关系$\varnothing$是唯一、是任何关系的子集的关系；

全关系 $E_A=\{<a,b>|a,b\in A\}\equiv A\times A$；

恒等关系 $I_A=\{<a,a>\mid a\in A\}$，恒等关系的矩阵 M_I 是单位矩阵.

关系的集合运算有并、交、补、差和对称差.

复合关系；

复合关系矩阵：$M_R=M_{R_1}\times M_{R_2}$ (按布尔运算)；

逆关系

3．理解关系的性质(自反性和反自反性、对称性和反对称性、传递性的定义以及矩阵表示或关系图表示)，掌握其判别方法(利用定义、矩阵或图，充分条件)，知道关系闭包的定义和求法.

4．理解等价关系和偏序关系概念，掌握等价类、商集、划分的求法和作偏序集哈斯图的方法．知道极大(小)元，最大(小)元的概念，会求极大(小)元、最大(小)元、最小上界和最大下界.

等价关系和偏序关系是具有不同性质的两个关系.

$$\text{自反性}+\left\{\begin{array}{c}\text{对称性}\\ \text{反对称性}\end{array}\right\}+\text{传递性}\left\{\begin{array}{l}=\text{等价关系}\\ =\text{偏序关系}\end{array}\right.$$

知道等价关系图的特点和等价类定义，会求等价类、商集、划分.

第 3 章　函数

1．理解函数概念：函数(映射)，函数相等，复合函数和反函数．理解单射、满射和双射等概念，掌握其判别方法.

设 f 是集合 A 到 B 的二元关系，$\forall a\in A$，存在惟一 $b\in B$，使得 $<a, b>\in f$，且 $\mathrm{Dom}(f)=A$，f 是一个函数(映射)．函数是一种特殊的关系.

集合 $A\times B$ 的任何子集都是关系，但不一定是函数．函数要求对于定义域 A 中每一个元素 a，B 中有且仅有一个元素与 a 对应，而关系没有这个限制.

二函数相等是指：定义域相同，对应关系相同，而且定义域内的每个元素的对应值都相同.

函数有：单射——若 $a_1\neq a_2\Rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$；

满射——$f(A)=B$ 或 $\forall y\in B,\exists x\in A,$ 使得 $y=f(x)$；

双射——单射且满射.

复合函数 $f:A\to B, g:B\to C,$ 则$f\circ g:A\to C,$ 即 $g\circ f(x)=f(g(x))$.

复合成立的条件是：$\mathrm{Ran}(f)\subseteq\mathrm{Dom}(g)$．一般 $g\circ f\neq f\circ g$，但 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

反函数——若 f：$A\to B$ 是双射，则有反函数 f^{-1}：$B\to A$，

$f^{-1}=\{<b,a>\mid b\in B, f(a)=b, a\in A\}$，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$，$(f^{-1})^{-1}=f$

重点：关系概念与其性质，等价关系和偏序关系，函数.

第 4 章　命题逻辑

复习要点

1．理解命题概念，会判别语句是不是命题．理解五个联结词：否定$\neg P$、析取$\vee$、合取$\wedge$、条件$\to$、和双条件$\leftrightarrow$及其真值表，会将简单命题符号化.

具有确定真假意义的陈述句称为命题.

命题必须具备：其一，语句是陈述句；其二，语句有唯一确定的真假意义.

2．了解公式的概念(公式、赋值、成真赋值和成假赋值)和公式真值表的构造方法．能熟练地作公式真值表．理解永真公式，可满足公式和永假公式概念，掌握其判别方法.

判定命题公式类型的方法：其一是真值表法，其二是等值演算法，其三是主范式法.

3．了解公式等值概念，掌握命题公式的基本等值式和判断两个公式是否等值的有效方法：等值演算法、列真值表法和主范式方法.

4．理解析取范式和合取范式、极大项和极小项、主析取范式和主合取范式的概念，熟练掌握它们的求法.

求主范式的方法：其一是等值演算法，其二是真值表法

求命题公式 A 的析取(合取)范式的步骤

求命题公式 A 的主析取(合取)范式的步骤

5．要理解并掌握推理的基本概念、重言蕴含式和等价式，掌握命题公式的证明方法：简单证明推理，构造证明推理（直接构造证明，间接构造证明（附加前提引入法、归谬法））.

重点：命题与联结词，公式与解释，真值表，公式的类型及判定，等值演算，主析取(合取)范式，命题逻辑推理.

第 5 章　谓词逻辑

复习要点

1．理解谓词、量词、个体词、个体域，会将简单命题符号化.

原子命题分成个体词和谓词，个体词可以是具体事物或抽象的概念，分个体常项和个体变项．谓词用来刻划个体词的性质或之间的关系.

量词分全称量词$\forall$，存在量词$\exists$.

命题符号化注意：使用全称量词$\forall$，特性谓词后用$\rightarrow$；使用存在量词$\exists$，特性谓词后用$\wedge$.

2．了解原子公式、谓词公式、变元(约束变元和自由变元)与辖域等概念．掌握在有限个体域下消去公式的量词和求公式在给定解释下真值的方法.

由原子公式、联结词和量词构成谓词公式．谓词公式具有真值时，才是命题.

在谓词公式$\forall xA$ 或$\exists xA$ 中，x 是指导变元，A 是量词的辖域．会区分约束变元和自由变元.

在非空集合 D(个体域)上谓词公式 A 的一个解释或赋值有 3 个条件.

在任何解释下，谓词公式 A 取真值 1，A 为逻辑有效式(永真式)；公式 A 取真值 0，A 为永假式；至少有一个解释使公式 A 取真值 1，A 称为可满足式.

在有限个体域下，消除量词的规则为：设 $D=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$$

会求谓词公式的真值，量词的辖域，自由变元、约束变元，以及换名规则、代入规则等.

掌握谓词演算的等价式和重言蕴含式．并进行谓词公式的等价演算.

3．了解前束范式的概念，会求公式的前束范式的方法.

若一个谓词公式 F 等价地转化成 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$，那么 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$ 就是 F 的前束范式，其中 Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_k 只能是$\forall$或$\exists$，而 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是个体变元，B 是不含量词的谓词公式．前束范式仍然是谓词公式.

4．了解谓词逻辑推理的四个规则．会给出推理证明.

谓词演算的推理是命题演算推理的推广和扩充，命题演算中基本等价式，重言蕴含式以及 *P*，*T*，*CP* 规则在谓词演算中仍然使用．谓词逻辑的推理演算引入了 ***US* 规则**(全称量词指定规则)，***UG* 规则**(全称量词推广规则)，***ES* 规则**(存在量词指定规则)，***EG* 规则**(存在量词推广规则)等.

重点：谓词与量词，公式与解释，谓词公式的分类，谓词公式的等值式，谓词的前束范式，谓词逻辑推理.