

# 高等数学（下）期中考试试卷 1

(答卷时间为 120 分钟)

## 一. 填空题（每小题 6 分）

1. 有关多元函数的各性质：(A) 连续；(B) 可微分；(C) 可偏导；(D) 各偏导数连续，它们的关系是怎样的？若用记号“ $X \Rightarrow Y$ ”表示由  $X$  可推得  $Y$ ，则

$$( ) \Rightarrow ( ) \Rightarrow \begin{cases} ( ) \\ ( ) \end{cases}$$

2. 函数  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  在点  $(1, 1)$  处的梯度为 \_\_\_\_\_，该点处各方向导数中的最大值是 \_\_\_\_\_.

3. 设函数  $F(x, y)$  可微，则柱面  $F(x, y)=0$  在点  $(x, y, z)$  处的法向为 \_\_\_\_\_，平面曲线  $\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=0 \end{cases}$  在点  $(x, y)$  处的切向量为 \_\_\_\_\_.

4. 设函数  $f(x, y)$  连续，则二次积分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = _____$ .

(A)  $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ ;      (B)  $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ ;

(C)  $\int_0^1 dy \int_{\pi}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx$ ;      (D)  $\int_0^1 dy \int_{\pi}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx$ .

二. (6 分) 试就方程  $F(x, y, z)=0$  可确定有连续偏导的函数  $y = y(z, x)$ ，正确叙述隐函数存在定理。

## 三. 计算题（每小题 8 分）

1. 设  $z = z(x, y)$  是由方程  $f(x-z, y-z)=0$  所确定的隐函数，其中  $f(u, v)$  具有连续的偏导数且  $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$ ，求  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$  的值。

2. 设二元函数  $f(u, v)$  有连续的偏导数，且  $f_u(1,0) = f_v(1,0) = 1$ . 又函数  $u = u(x, y)$  与  $v = v(x, y)$  由方程组  $\begin{cases} x = au + bv \\ y = au - bv \end{cases}$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ) 确定，求复合函数  $z = f[u(x, y), v(x, y)]$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(a,a)}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(a,a)}$ .

3. 已知曲面  $z = 1 - x^2 - y^2$  上的点  $P$  处的切平面平行于平面  $2x + 2y + z = 1$ ，求点  $P$  处的切平面方程。

4. 计算二重积分： $\iint_D \sin \frac{x}{y} d\sigma$ ，其中  $D$  是以直线  $y = x$ ,  $y = 2$  和曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  为边界的曲边三角形区域。

5. 求曲线积分  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ ， $L$  为曲线  $y = 1 - |1-x|$  沿  $x$  从 0 增大到 2 的方向。

五. (10 分) 球面被一平面分割为两部分，面积小的那部分称为“球冠”；同时，垂直于平面的直径被该平面分割为两段，短的一段之长度称为球冠的高。证明：球半径为  $R$  高为  $h$  的球冠的面积与整

个球面面积之比为  $h:2R$ .

六.(10分) 设线材  $L$  的形状为锥面曲线, 其方程为:  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), 其线密度  $\rho(x, y, z) = z$ , 试求  $L$  的质量.

七. (10分) 求密度为  $\mu$  的均匀柱体  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , 对位于点  $M(0, 0, 2)$  的单位质点的引力.

## 高等数学(下)期中考试试卷2

(答卷时间为 120 分钟)

一. 简答题 (每小题 8 分)

1. 求曲线  $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = 3 + \sin 2t \\ z = 1 + \cos 3t \end{cases}$  在点  $\left(\frac{\pi}{2}, 3, 1\right)$  处的切线方程.

2. 方程  $xy - z \ln y + e^{xz} = 1$  在点  $(0, 1, 1)$  的某邻域内可否确定导数连续的隐函数  $z = z(x, y)$  或  $y = y(z, x)$  或  $x = x(y, z)$ ? 为什么?

3. 不需要具体求解, 指出解决下列问题的两条不同的解题思路:

设椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  与平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  没有交点, 求椭球面与平面之间的最小距离.

4. 设函数  $z = f(x, y)$  具有二阶连续的偏导数,  $y = x^3$  是  $f$  的一条等高线, 若  $f_y(1, 1) = -1$ , 求  $f_x(1, 1)$ .

二. (8分) 设函数  $f$  具有二阶连续的偏导数,  $u = f(xy, x+y)$  求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

三. (8分) 设变量  $x, y, z$  满足方程  $z = f(x, y)$  及  $g(x, y, z) = 0$ , 其中  $f$  与  $g$  均具有连续的偏导数, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

四. (8分) 求曲线  $\begin{cases} xyz = 0, \\ x - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$  在点  $(0, 1, 1)$  处的切线与法平面的方程.

五. (8分) 计算积分  $\iint_D e^{y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是顶点分别为  $(0, 0), (1, 1), (0, 1)$  的三角形区域.

六. (8分) 求函数  $z = x^2 + y^2$  在圆  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$  上的最大值和最小值.

七. (14分) 设一座山的方程为  $z = 1000 - 2x^2 - y^2$ ,  $M(x, y)$  是山脚  $z = 0$  即等量线  $2x^2 + y^2 = 1000$  上的点.

(1) 问:  $z$  在点  $M(x, y)$  处沿什么方向的增长率最大, 并求出此增长率;

(2) 攀岩活动要山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点, 即在该等量线上找一点  $M$  使得上述增长率最大, 请写出该点的坐标.

八. (14分) 设曲面  $\Sigma$  是双曲线  $z^2 - 4y^2 = 2$  ( $z > 0$  的一支) 绕  $z$  轴旋转而成, 曲面上一点  $M$  处的切平面  $\Pi$  与平面  $x + y + z = 0$  平行.

(1) 写出曲面  $\Sigma$  的方程并求出点  $M$  的坐标;

(2) 若  $\Omega$  是  $\Sigma$ ,  $\Pi$  和柱面  $x^2 + y^2 = 1$  围成的立体, 求  $\Omega$  的体积.

# 高等数学(下)期末考试试卷1

(答卷时间为120分钟)

一. 简答题(每小题5分, 要求: 简洁. 明确)

1. 函数  $z = y^2 - x^2$  在点  $(1, 1)$  处沿什么方向有最大的增长率, 该增长率为多少?

2. 设函数  $F(x, y, z) = (z+1)\ln y + e^{xz} - 1$ , 为什么方程  $F(x, y, z) = 0$  在点  $M(1, 1, 0)$  的某个邻域内可以确定一个可微的二元函数  $z = z(x, y)$ ?

3. 曲线  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t + 1$ ,  $z = t^3$  在点  $P(0, 2, 1)$  处的切线方程是什么?

4. 设平面区域  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$ , 积分  $\iint_D (ax^3 + by^5 + c) dx dy$  是多少?

5. 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} x^n$  的收敛域是什么?

6. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ e^{-x} - 1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$  的傅里叶系数为  $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 问级数  $a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的和是多少?

二. 计算积分

1. (8分)  $I = \int_{-\pi}^{2\pi} dy \int_{y-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

2. (8分)  $I = \int_L (x+y)dx + (y-x)dy$ ,  $L$  为上半椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (y \geq 0)$  取逆时针方向.

三. (12分) 设  $\Sigma$  是由曲线  $\begin{cases} z = y^2, & (0 \leq z \leq 2) \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转而成的曲面.

(1) 写出  $\Sigma$  的方程和  $\Sigma$  取外侧(即朝着  $z$  轴负方向的一侧)的单位法向量;

(2) 对(1)中的定向曲面  $\Sigma$ , 求积分  $I = \iint_{\Sigma} 4(1-y^2)dz dx + (8y+1)z dx dy$ .

四. (10分) 求微分方程  $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$  的通解

五. (10分) 把函数  $f(x) = \frac{\pi-x}{2} (0 \leq x \leq \pi)$  展成正弦级数.

六. 应用题

1. (10分) 求曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$  在第一卦限的切平面, 使该切平面与三个坐标面围成的四面体的体积为最小, 并写出该四面体的体积.

2. (12分) 设  $\Omega$  是由曲面  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  与平面  $z = 0, z = 1$  所围成的立体. 求:

(1)  $\Omega$  的体积  $V$ ; (2)  $\Omega$  的表面积  $A$ .

## 高等数学（下）期末考试试卷 2

(答卷时间为 120 分钟)

一. 填空题 (每小题 4 分)

1. 函数  $z = f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial z}{\partial y}$  在区域  $D$  内连续是  $z = f(x, y)$  在  $D$  内可微的

\_\_\_\_\_ 条件. (充分, 必要, 充要)

2. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处沿  $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$  的方向导数可以用公式

$\frac{\partial f}{\partial l} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$  来计算的充分条件为  $z = f(x, y)$  在点

$(x_0, y_0)$  处 \_\_\_\_\_. (连续, 偏导数存在, 可微分)

3. 若三阶常系数齐次线性微分方程有解  $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}, y_3 = e^x$ , 则该微分方程  
为 \_\_\_\_\_.

4. 周期为 2 的函数  $f(x)$  在一个周期内的表达式为  $\begin{cases} x & 0.5 < x < 1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$ , 则它的傅里叶  
级数在  $x = -3.5$  处的和为 \_\_\_\_\_.

5. 幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$  的收敛域是 \_\_\_\_\_.

二. (8 分) 设函数  $f(u, v)$  有二阶连续的偏导数, 且  $f_u(0, 0) = 1, f_v(0, 0) = -1$ . 函数  
 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ , 求  $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x, y)=(0, 1)}$ .

三. (8 分) 求抛物面  $z = x^2 + y^2$  到平面  $x + y + z + 1 = 0$  的最近距离.

四. 计算下列积分: (每题 8 分)

1.  $\iint_D e^{x^2} d\sigma$ , 其中  $D$  为三直线  $y = 0, y = x$  与  $x = 1$  所围成的平面区域.

2.  $\iint_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zx dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是平面  $x = 0, y = 0, z = 0$  及  $x + y + z = 1$  所  
围成的四面体的边界面的外侧.

3.  $\oint_{\Gamma} xyz dz$ , 其中  $\Gamma$  是曲线  $\begin{cases} y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ , 从  $z$  轴正向看去, 沿逆时针方向.

五. 级数

1. (8 分) 设  $a_n$  是等差数列, 公差  $d \neq 0$ ,  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . 问: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{s_n}$

是绝对收敛还是条件收敛或是发散的? 说明理由.

2. (12 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域与和函数  $s(x)$ .

六. 微分方程

1. (8 分) 求微分方程  $xy' + y = x \ln x$  的通解.

2. (12 分) 设函数  $f(x)$  有二阶连续的导数且  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ . 如果积分

$$\int_L [x^2 - f(x)]y \, dx + [f'(x) + y] \, dy$$

与  $L$  的路径无关, 求  $f(x)$ .