

考试时间	120 分钟	制题	审核	批阅
题号	一	二	三	四
满分	24	12	18	10
得分				
评卷人				

一、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 函数 $f(x+1)$ 的定义域为 _____.
2. 已知函数 $y = x \cos 2x$, 微分 $dy =$ _____.
3. 已知函数 $g(x) = \int_0^x \sin^5 t dt$, 则 $g'(x) =$ _____.
4. 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ 所围平面图形的面积为 _____.
5. 微分方程 $y' = e^{x-2y}$, 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解为 _____.
6. 已知 $f'(e^x) = x$, 且 $f(1) = -1$, 则 $f(x) =$ _____.

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ 为 ().
 (A) 1 (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 2
2. 曲线 $y = \cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 处的切线方程为 ().
 (A) $-\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ (B) $\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
 (C) $\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ (D) $-\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
3. 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 的极值点和极值分别是 ().
 (A) 1 和 1 (B) 0 和 0 (C) 1 和 2 (D) 0 和 1

4. 不定积分 $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$ 等于 () .

(A) $\arccos f(x)+C$ (B) $\ln(f(x))+C$ (C) $\arctan f(x)+C$ (D) $\arctan f(x)+C$

三、计算题一 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

2. 计算函数 $y = x \arctan x$ 的一阶和二阶导数.

3. 求微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解.

四、计算题二 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 计算不定积分 $\int x \ln(1+x) dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) + \cos x - 1}{x^4}$.

五、计算题三 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \left(x + \sqrt{3-x^2} \right) dx$.

2. 求由抛物线 $y^2 = 4x$ 和直线 $x=1$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

六、解答题一 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 求由方程 $x^3 + y^4 - 3xy = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

2. 求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

七、解答题二 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ 的值.

2. 利用数列极限存在准则, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$.

八、证明题 (4 分)

设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且 $f(0) = 0$. 试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 c ,

$$f'(c) = \frac{2f(1)}{1-c}$$