

课程名称 高等数学 A1 (A 卷 闭卷) 适用班级 (或学号、学号) 2018 级

考试时间 120 分钟 题级

学号

姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
满分	24	12	18	10	10	12	10	4			
得分											
评卷人											

一、填空题 (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 函数 $f(x+1)$ 的定义域为 _____.
2. 已知函数 $y = x \cos 2x$, 微分 $dy =$ _____.
3. 已知函数 $g(x) = \int_0^x \sin^5 t dt$, 则 $g'(x) =$ _____.
4. 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ 所围平面图形的面积为 _____.
5. 微分方程 $y' = e^{x-2y}$, 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解为 _____.
6. 已知 $f'(e^x) = x$, 且 $f(1) = -1$, 则 $f(x) =$ _____.

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 12 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$ 为 ().
 (A) 1 (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 2
2. 曲线 $y = \cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 处的切线方程为 ().
 (A) $-\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ (B) $\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
 (C) $\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ (D) $-\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
3. 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ ($x \geq 0$) 的极值点和极值分别是 ().
 (A) 1 和 1 (B) 0 和 0 (C) 1 和 2 (D) 0 和 1

4. 不定积分 $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx$ 为 ().

- (A) $\arccos f(x) + C$ (B) $\ln(f(x)) + C$ (C) $\arcsin f(x) + C$ (D) $\arctan f(x) + C$

三、计算题一 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.
2. 计算函数 $y = x \arctan x$ 的一阶和二阶导数.
3. 求微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解.

四、计算题二 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 计算不定积分 $\int x \ln(1+x) dx$.

$$2. \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(x^2) + \cos x - 1}{x^4}.$$

五、计算题三 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} (x + \sqrt{3-x^2}) dx$.
2. 求由抛物线 $y^2 = 4x$ 和直线 $x = 1$ 所围平面图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

六、解答题一 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 求由方程 $x^3 + y^4 - 3xy = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

$$2. \text{ 求定积分 } \int_1^e \sin(\ln x) dx.$$

七、解答题二 (每小题 5 分, 共 10 分)

1. 计算无穷积分 $\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ 的值.
2. 利用数列极限存在准则, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$.

八、证明题 (4 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$. 试证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c ,

$$f(c) = \frac{f(1)}{1-c}.$$