

高数 A1 期末自测卷 (一)

一、选择题

1、已知函数 $f(x) = \begin{cases} a+x^2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \ln(b+x+x^2), & x > 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 a,b 的值为

()

- (A) $a=0, b=0$ (B) $a=1, b=1$ (C) $a=1, b=e$ (D) $a=e, b=0$

2、设 $y = x \cos x - \ln a^x + \sin e$, 则 $y' =$ ()

- (A) $\cos x - x \sin x - a^{-x} + \cos e$ (B) $\cos x + x \sin x - a^{-x}$

- (C) $\cos x - x \sin x - a^{-x}$ (D) $\cos x - x \sin x - \ln a$

3、若 $\int_0^1 (2x+k)dx = 2$, 则 $k =$ ()

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

4、数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) =$ ()

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

二、填空题

1、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1} =$ _____

2、 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t^2 dt =$ _____

3、微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解为 _____

4、已知 $y = \frac{\ln x}{x}$, 则 $y' =$ _____

5、 $\int_0^4 |x-1| dx =$ _____

三、计算题

1、求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{\cos x-1}$

2、求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2+1}$

3、设 $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, 求 dy

4、求由方程 $y^2 \cos x = 5 \sin(3xy)$ 所确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 y'

5、计算 $\int x \cos 3x dx$

6、求 $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$

7、计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0 \leq x \leq 1$ 的一段弧长

8、求方程 $(x^2 - 1)y' + 2xy = \cos x$ 的通解

四、解答题

1、求函数 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的极值

2、曲线 $y = y(x)$ 满足 $y^2 y'' + 1 = 0$, 通过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且在该点处的切线斜率为 2,

求这个曲线方程

五、证明题

设 $F(x) = (x-1)f(x)$, 其中 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1,2)$ 二阶可导, 且

$f(1) = f(2) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (1,2)$, 使得 $F''(\xi) = 0$

参考答案

一、选择题:

1、解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + x^2) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(b + x + x^2) = \ln b$,

连续则极限存在, 故有 $a = \ln b$,

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, $f(0) = 1$, 则 $a = \ln b = 1 \Rightarrow a = 1, b = e$

2、解:

$$\begin{aligned} y &= x \cos x - \ln a^x + \sin x \Rightarrow y' = x' \cos x + x (\cos x)' - \frac{1}{a^x} (a^x)' + 0 \\ &= \cos x - x \sin x - \frac{1}{a^x} a^x \ln a \\ &= \cos x - x \sin x - \ln a \end{aligned}$$

3、解：

$$\int_0^1 (2x+k)dx = [x^2 + kx]_0^1 = 1 + k \quad \text{故 } k=1$$

4、解：进行分子有理化： $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{2}$

二、填空题：

1、 3 2、 解答： $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t^2 dt = \cos x^4 \cdot (x^2)' = 2x \cos x^4$

3、特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = -1$ ，通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

4、 $y' = \frac{(\ln x)' x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

5、 $\int_0^4 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^4 (x-1) dx = 5$

三、计算题：

1、解：此为 $\frac{0}{0}$ 型极限，利用洛必达法则求导

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-(1+x)\sin x} \quad (\text{利用无穷小代换 } \sin x \sim x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-(1+x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \end{aligned}$$

2、解： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = e \cdot 1 = e$

3、解：

$$y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{(1 - \sqrt{x})'(1 + \sqrt{x}) - (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})'}{(1 + \sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1 + \sqrt{x})^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$$

$$\text{则 } dy = -\frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx$$

4、解：方程两边同时对 x 求导

$$2yy' \cos x + y^2(-\sin x) = 5 \cos(3xy) \cdot 3(y + xy')$$

$$\text{解得 } y' = \frac{y^2 \sin x + 15y \cos(3xy)}{2y \cos x - 15x \cos(3xy)}$$

5、解：利用分部积分公式

$$\int x \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int x d(\sin 3x) = \frac{1}{3} \left(x \sin x - \int \sin 3x dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(x \sin x + \frac{1}{3} \cos 3x \right) + C$$

6、解：令 $\sqrt{5-4x} = t$ ， 则 $x = \frac{5-t^2}{4}$, $dx = -\frac{t}{2} dt$.

当 $x = -1$ 时, $t = 3$, 当 $x = 1$ 时, $t = 1$

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{\frac{5-t^2}{4} \left(-\frac{t}{2} \right) dt}{t} = \frac{1}{8} \int_1^3 (5-t^2) dt = \frac{1}{6}$$

7、解： $s = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+(x^2)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

8、解：方程可化为 $y' + \frac{2x}{x^2-1} y = \frac{\cos x}{x^2-1}$, 是一阶线性方程

$$P(x) = \frac{2x}{x^2-1}, Q(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$$

$$\begin{aligned} \text{则通解为 } y &= e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\ln(x^2-1)} \left(\int \frac{\cos x}{x^2-1} e^{-\ln(x^2-1)} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x^2-1} (\int \cos x dx + C) = \frac{1}{x^2-1} (\sin x + C) \end{aligned}$$

四、解答题

1、解：定义域 $(0, +\infty)$, $y' = \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$

驻点： $x_1 = 1$, $x_2 = e^2$

x	(0,1)	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	↓		↑		↓

$$\therefore \text{函数有极小值 } y(1) = 0, \text{ 极大值 } y(e^2) = \frac{4}{e^2}$$

2、解：依题意，有 $\begin{cases} y^2 y'' + 1 = 0 \\ y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 2 \end{cases}$.

令 $p = y'$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为 $y^2 p \frac{dp}{dy} = -y^{-2}$

解得 $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{y} + C_1$, 代入初始条件, 解得 $C_1 = 0$

故 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2}}$, 解得 $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}x + C_2$

代入初始条件, 解得 $C_2 = \frac{2}{3} (\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}$

所求曲线方程为 $y^3 = \frac{1}{2} (3x + \frac{1}{2})^2$

五、证明题

证明: 因 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1, 2)$ 内二阶可导,

则 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 具有一阶连续导数, 在 $(1, 2)$ 内二阶可导,

因 $F(1) = F(2) = 0$ (因 $f(2) = 0$).

则 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上满足罗尔定理条件

则至少存在 $\xi_1 \in (1, 2)$ 使 $F'(\xi_1) = 0$

又 $F'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$, 而 $f(1) = 0$, 则 $F'(1) = 0$

$F'(x)$ 在 $[1, \xi_1]$ 上满足罗尔定理条件

则至少存在 $\xi \in (1, \xi_1) \subset (1, 2)$ 使 $F''(\xi) = 0$

即存在 $\xi \in (1, 2)$ 使 $F''(\xi) = 0$.