2016-2017 学年第一学期《高等数学 AI》试卷（A）

授课班号__________ 学院__________ 学号__________ 姓名__________

题型	填空题	计算题	综合题	总分	审　　核
得分					

一、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

得分	阅卷人

1. 当 $x\to -1$ 时，ax^2-x+b 相对 $x+1$ 为等价无穷小，则 $a=$ <u>-1</u>；$b=$ <u>0</u>.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ <u>e^6</u>.

3. 设 $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)$, $\varphi(x)=x^3$, 则 $\frac{d}{dx}f[\varphi(x)]=$ <u>$3x^2g(x^3)$</u>.

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x=y^y$ 确定，则 $dy=$ <u>$\frac{dx}{x(\ln y+1)}$</u> 或 $\frac{dx}{y^y(\ln y+1)}$

5. 设曲线 $y=ax^3+bx^2$ 以点 (1, 3) 为拐点，则数组 $(a,b)=$ <u>$(-\frac{3}{2},\frac{9}{2})$</u>

6. 设 $f(x)$ 有原函数 $x\ln x$，则

$$\int xf'(x)dx= \underline{x+C}.$$

7. 函数$f(x)$具有连续的导数，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=$ <u>$f(x)-f(0)$</u>

8. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x^3+1)\sin^2 x dx=$ <u>$\frac{\pi}{2}$</u>.

二、计算题(每小题 6 分，共 36 分)

得分	阅卷人

1. 已知曲线 $\begin{cases} x=f(t)-1 \\ y=f(e^{2t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，且 $f(0)=2$, $f'(0)\neq 0$，求 $t=0$ 处曲线的切线方程.

$t=0$ 对应点 $(1,2)$. (1')

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=0}=\left.\frac{f'(e^{2t}-1)\cdot 2e^{2t}}{f'(t)}\right|_{t=0}=\frac{2f'(0)}{f'(0)}=2.\quad (4')$$

$\therefore$ 切线：$y=2x$. (1')

由 扫描全能王 扫描创建

2.

设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2}f'(0)=1$.

(3′) (3′)

注：不可写 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2}=\dfrac{f'(0)}{2}$.

代入求值需要 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

题目无此条件.

3. 设函数 $y=y(x)$，由方程 $y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$ 所确定，且 $y(0)=2$，其中 $f(x)$ 是可导函数，$f'(2)=\frac{1}{2}$，$f'(4)=1$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 的值.

$y'=f'(x^2+y^2)\cdot(2x+2yy')+f'(x+y)\cdot(1+y')$ (3′)

令 $x=0$，上式化为：

$y'(0)=f'(4)\cdot 4y'(0)+f'(2)\cdot(1+y'(0))$

$\quad = 4y'(0)+\frac{1}{2}(1+y'(0))$

$\therefore\ y'(0)=-\frac{1}{7}$. (3′)

4. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

$f'(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\dfrac{2\sin x^2}{x}$ (2′)

$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)\,d\frac{x^2}{2}=\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)dx$ (2′)

$\quad =0-\int_0^1 x\sin x^2dx=\left[\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^1$

$\quad =\frac{1}{2}(\cos 1-1)$ (2′)

由 扫描全能王 扫描创建

5.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geq 0\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

令 $x-1=t$,

$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

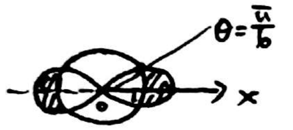
$=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{dx}{1+x}$ (2')

$=\int_{-1}^{0}(1-\frac{e^x}{1+e^x})dx+[\ln(1+x)]_0^1$

$=[x-\ln(1+e^x)]_{-1}^{0}+\ln 2$

$=\ln(e+1)$ (4')

6. 求由不等式 $r^2\leq 2\cos 2\theta$ 和 $r\geq 1$ 确定的平面图形的面积.



第一象限中

双纽线与圆交点 $(1,\frac{\pi}{6})$

利用对称性，可得：

$A=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\theta\, d\theta-\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{6}\right)$ (4')

$=4\left([\frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ (2')

三、综合题(满分 32 分)

1. (8 分) 在曲线 $y=1-x^2\ (x>0)$ 上求一点 P 的坐标，使曲线在该点处的切线与两坐标轴所围成的三角形面积最小.

得分	阅卷人

设切点 $P(a,1-a^2)$ $(a>0)$

切线：$y-(1-a^2)=-2a(x-a)$

切线与坐标轴交点：$(\frac{a^2+1}{2a},0)$, $(0,a^2+1)$

$\therefore S=\frac{(a^2+1)^2}{4a}$, $S'=\frac{(3a^2-1)(a^2+1)}{4a^2}$, $a>0$ (3') (3')

从而唯一驻点 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处 S 取最小值. (1')

$\therefore P(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3})$ (1')

由 扫描全能王 扫描创建

2. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{\pi}{4}$，试证明方程 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

法一，令 $F(x)=f(x)-\arctan x$ (3')

则 $F(x)\in C[0,1], D(0,1)$, $F(0)=F(1)=0$

且 $F'(x)=f'(x)-\frac{1}{1+x^2}$

由 Rolle th，$\exists\, \xi\in(0,1)$, s.t.

$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=0$. (5')

即 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根 $x=\xi$.

从而结论成立.

法二：令 $g(x)=\arctan x$，

由 Cauchy 中值 th，$\exists\, \xi\in(0,1)$ s.t.

$$\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{1+\xi^2}}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=1$$

法三：积分中值 th，$\exists\, \xi\in(0,1)$ s.t.

$$f'(\xi)-\frac{1}{1+\xi^2}=\int_0^1\left[f'(x)-\frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$=\left[f(x)-\arctan x\right]_0^1=0.$$

3. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单调增加，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

令 $F(x)=(a+x)\int_a^x f(t)dt-2\int_a^x tf(t)dt$, $x\in[a,b]$ (2')

则 $F'(x)=\int_a^x f(t)dt+(a+x)f(x)-2xf(x)$

$=f(\xi)(x-a)-f(x)(x-a)$

$=[f(\xi)-f(x)]\cdot(x-a)$, $a<\xi<x\le b$.

或 $F'(x)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f(x)dx=\int_a^x[f(t)-f(x)]dx<0$

注：无 $f(x)$ 可导条件，不可求 $F''(x)$.

由已知，$f(x)$ 严格单增 ∴ $f(\xi)<f(x)$，从而 $F'(x)<0$, $a<x\le b$.

∴ $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单减，$F(b)<F(a)=0$

即 $(a+b)\int_a^b f(x)dx-2\int_a^b xf(x)dx<0$ (6')

∴ 结论成立.

4. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2\ln x, & x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，其导函数在 $x=0$ 处是否连续？

1) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$ (4')

2) $f'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x\ln x+x, & x>0\end{cases}$ (2')

∵ $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x\ln x+x)=0=f'(0)$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 (2')

注：也可用 P_{109} 推论3 必须写清理由才给分

由 扫描全能王 扫描创建