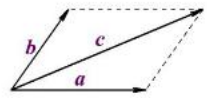
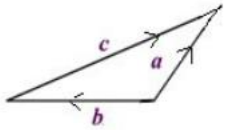
第八章 向量与解析几何

向量代数		
定义	**定义与运算的几何表达**	**在直角坐标系下的表示**
向量	有大小、有方向．记作 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$	$\boldsymbol{a}=a_x i+a_y j+a_z k=(a_x,a_y,a_z)$ $a_x=prj_x\vec{a},a_y=prj_y\vec{a},a_z=prj_z\vec{a}$
模	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
和差	  $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$
单位向量	$\boldsymbol{a}\neq 0$，则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}$	$\boldsymbol{e}_a=\dfrac{(a_x,a_y,a_z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
方向余弦	设 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴的夹角分别为 α，β，γ，则方向余弦分别为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$	$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{\lvert\vec{a}\rvert}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
点乘（数量积）	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$， θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
叉乘（向量积） $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	$\lvert\boldsymbol{c}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\theta$ θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$
定理与公式		
垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0}$
平行	$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{\boldsymbol{a_x}}{\boldsymbol{b_x}}=\dfrac{\boldsymbol{a_y}}{\boldsymbol{b_y}}=\dfrac{\boldsymbol{a_z}}{\boldsymbol{b_z}}$
交角余弦	两向量夹角余弦 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}}{\sqrt{\boldsymbol{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$
投影	向量 $\boldsymbol{a}$ 在非零向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\boldsymbol{prj_ba}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos(\boldsymbol{a}\hat{\ }\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	$\boldsymbol{prj_ba}=\dfrac{\boldsymbol{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}}{\sqrt{\boldsymbol{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$

平面		**直线**	
法向量 $\boldsymbol{n}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$　点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$		方向向量 $\boldsymbol{T}=\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\}$　点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$	
方程名称	方程形式及特征	方程名称	方程形式及特征
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	一般式	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	点向式	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$
三点式	$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{z}_3-\boldsymbol{z}_1 \end{vmatrix}=0$	参数式	$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$
截距式	$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}=1$	两点式	$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0}{\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_0}=\frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0}{\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_0}$
面面垂直	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$	线线垂直	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
面面平行	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	线线平行	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
线面垂直	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$	线面平行	$Am+Bn+Cp=0$

点面距离	面面距离
$M_0(x_0,y_0,z_0)$　　$Ax+By+Cz+D=0$	$Ax+By+Cz+D_1=0$　　$Ax+By+Cz+D_2=0$
$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	$d=\frac{\lvert D_1-D_2\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

面面夹角	线线夹角	线面夹角
$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$	$\mathbf{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$　$\mathbf{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$	$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$　$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$
$\cos\theta=\frac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	$\cos\varphi=\frac{\lvert m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	$\sin\varphi=\frac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

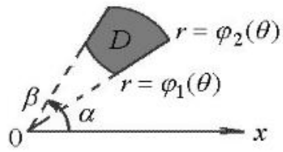
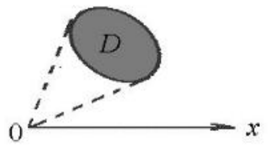
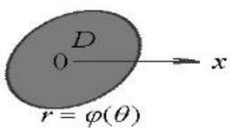
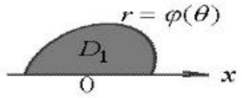
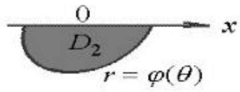
空间曲线 Γ：	$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$	切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$	切“线”方程：$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ 法平“面”方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$
	$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$	切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x),\psi'(x))$	切“线”方程：$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$ 法平“面”方程：$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$
空间曲面 Σ：	$F(x,y,z)=0$	法向量 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),$ $F_y(x_0,y_0,z_0),$ $F_z(x_0,y_0,z_0))$	切平“面”方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_x(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$ $+F_x(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ 法“线“方程：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$
	$z=f(x,y)$	$\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),$ $-f_y(x_0,y_0),1)$	切平“面”方程：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

<table>
<tr><td></td><td></td><td>或
$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0),-1)$</td><td>法“线“方程：
$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$</td></tr>
</table>

第十章 重积分

<table>
<tr><th colspan="3">重积分</th></tr>
<tr><th>积分类型</th><th>计算方法</th><th>典型例题</th></tr>
<tr><td rowspan="4">二重积分
$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

平面薄片的质量

质量=面密度×面积</td><td>（1） 利用直角坐标系
X—型 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$
Y—型 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$</td><td></td></tr>
<tr><td>（2）利用极坐标系
使用原则
(1) 积分区域的边界曲线易于用极坐标方程表示（ 含圆弧,直线段 ）；
(2) 被积函数用极坐标变量表示较简单（ 含$(x^2+y^2)^\alpha$， α 为实数 ）

$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta$
$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\, d\rho$

$0\le\theta\le2\pi$ $\quad 0\le\theta\le\pi$ $\quad \pi\le\theta\le2\pi$</td><td></td></tr>
<tr><td>（3）利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性
当D关于y轴对称时，（关于x轴对称时，有类似结论）
$I=\begin{cases}0 & f(x,y)\text{对于}x\text{是奇函数，}\\ & \text{即}f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy & f(x,y)\text{对于}x\text{是偶函数，}\\ & \text{即}f(-x,y)=f(x,y)\\ & D_1\text{是}D\text{的右半部分}\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>计算步骤及注意事项
1. 画出积分区域
2. 选择坐标系 标准：域边界应尽量多为坐标轴，被积函数关于坐标变量易分离
3. 确定积分次序 原则：积分区域分块少，累次积分好算为妙</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>4. 确定积分限　　方法：图示法 先积一条线，后扫积分域
5. 计算要简便　　注意：充分利用对称性，奇偶性</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">三重积分
$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

空间立体物的质量

质量=密度×面积</td><td>(1) 利用直角坐标$\begin{cases}\text{投影法}\\ \text{截面法}\end{cases}$
投影$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$</td><td></td></tr>
<tr><td>（2） 利用柱面坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$
相当于在投影法的基础上直角坐标转换成极坐标
适用范围:
①积分区域表面用柱面坐标表示时方程简单；如 旋转体
②被积函数用柱面坐标表示时变量易分离. 如 $f(x^2+y^2)f(x^2+z^2)$
$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_a^b \mathrm{d}z\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho$</td><td></td></tr>
<tr><td>（3）利用球面坐标 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$
$$dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
适用范围:
①积分域表面用球面坐标表示时方程简单;如，球体，锥体.
②被积函数用球面坐标表示时变量易分离. 如，$f(x^2+y^2+z^2)$
$I=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\beta_1}^{\beta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$</td><td></td></tr>
<tr><td>（4）利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性</td><td></td></tr>
</table>

第十一章曲线积分与曲面积分

曲线积分与曲面积分		
积分类型	**计算方法**	**典型例题**
第一类曲线积分 $I=\int_L f(x,y)ds$ 曲形构件的质量 质量=线密度×弧长	*参数法*（转化为定积分） （1）$L: y=\varphi(x)$　　$I=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\varphi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ （2）$L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$　$(\alpha\le t\le\beta)$　$I=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ （3）$r=r(\theta)$　$(\alpha\le\theta\le\beta)$ $L:\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}$ $I=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$	
平面第二类曲线积分 $I=\int_L Pdx+Qdy$ 变力沿曲线所做的功	**（1）** *参数法*（转化为定积分） $L:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$　（t单调地从α到β） $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$	
	（2） *利用格林公式*（转化为二重积分） 条件：①L 封闭，分段光滑，有向（左手法则围成平面区域 D） ②P，Q 具有一阶连续偏导数 结论：$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$ 应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\ \text{有瑕点，挖洞}\\ \text{不是封闭曲线，添加辅助线}\end{cases}$	
	（3） *利用路径无关定理*（特殊路径法） 等价条件：①$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　　②$\oint_L Pdx+Qdy=0$ ③$\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关，与起点、终点有关 ④$Pdx+Qdy$ 具有原函数$u(x,y)$ （特殊路径法，偏积分法，凑微分法）	
	（4） *两类曲线积分的联系* $I=\int_L Pdx+Qdy=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$	
空间第二类曲线积分 $I=\int_L Pdx+Qdy+Rd$	**（1）** *参数法*（转化为定积分） $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$ $+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$ **（2）** *利用斯托克斯公式*（转化第二类曲面积分） 条件：①L 封闭，分段光滑，有向 ②P，Q，R 具有一阶连续偏导数	

<table>
<tr><td>变力沿曲线所做的功</td><td>$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$
结论：
$$= \iint_\Sigma (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y})dxdy$$
应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\ \text{不是封闭曲线，添加辅　　助线}\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>第一类曲面积分
$I = \iint_\Sigma f(x,y,z)dv$
曲面薄片的质量
质量=面密度×面积</td><td>投影法
Σ：$z = z(x,y)$ 投影到 xoy 面
$I = \iint_\Sigma f(x,y,z)dv = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$
类似的还有投影到 yoz 面和 zox 面的公式</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">第二类曲面积分
$I = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx$
流体流向曲面一侧的流量</td><td>（1）投影法
① $\iint_\Sigma Pdydz = \pm\iint_{D_{yz}} p(x(y,z),y,z)dydz$
Σ：$z = z(x,y)$，γ 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角
前侧取“+”，$\cos\gamma > 0$；后侧取“－”，$\cos\gamma < 0$
② $\iint_\Sigma Qdzdx = \pm\iint_{D_{xz}} p(x,y(x,z),z)dzdx$
Σ：$y = y(x,z)$，β 为 Σ 的法向量与 y 轴的夹角
右侧取“+”，$\cos\beta > 0$；左侧取“－”，$\cos\beta < 0$
③ $\iint_\Sigma Qdxdy = \pm\iint_{D_{xy}} Q(x,y,z(x,y))dxdy$
Σ：$x = x(y,z)$，α 为 Σ 的法向量与 x 轴的夹角
上侧取“+”，$\cos\alpha > 0$；下侧取“－”，$\cos\alpha < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>（2）高斯公式　右手法则取定 Σ 的侧
条件：①Σ 封闭，分片光滑，是所围空间闭区域 Ω 的外侧
　　②P，Q，R 具有一阶连续偏导数
结论：$\oint\!\!\oint_\Sigma Pdydz + Qdzdz + Rdxdy = \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})$
应用：$\begin{cases}\text{满足条件直接应用}\\ \text{不是封闭曲面，添加辅　　助面}\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>（3）两类曲面积分之间的联系
$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$
转换投影法：$dydz = (-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy$　$dzdx = (-\frac{\partial z}{\partial y})dxdy$</td><td></td></tr>
</table>

所有类型的积分：

①定义：四步法——分割、代替、求和、取极限；

②性质：对积分的范围具有可加性，具有线性性；

③对坐标的积分，积分区域对称与被积函数的奇偶性。

第十二章 级数

- 无穷级数
  - 常数项级数
    - 一般项级数
      - 用收敛定义，$\lim_{n\to\infty} s_n$ 存在
      - 常数项级数的基本性质
        - ① 若级数收敛,各项同乘同一常数仍收敛.
        - ②两个收敛级数的和差仍收敛.
        - 注：一敛、一散之和必发散；两散和、差必发散.
        - ③去掉、加上或改变级数有限项, 不改变其收敛性.
        - ④若级数收敛, 则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。
        - 推论: 如果加括号后所成的级数发散, 则原来级数也发散. 注: 收敛级数去括号后未必收敛.
        - ⑤（必要条件） 如果级数收敛, 则 $\lim_{n\to 0} u_n = 0$
      - 常数项级数的基本性质
    - 交错级数
      - 莱布尼茨判别法：若 $u_n \geq u_{n+1}$ 且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛
    - 正项级数
      - 比较判别法：$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leq v_n$.若 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 也收敛；若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 也发散.
      - 比较判别法的极限形式：$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$，则①若 $0 < l < +\infty$,$\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 同敛或同散;②若 $l = 0$,$\sum v_n$ 收敛,$\sum u_n$ 也收敛；③如果 $l = +\infty$ ，$\sum v_n$ 发散，$\sum u_n$ 也发散。
      - 比值判别法 根值判别法：$\sum u_n$ 是正项级数,$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$,则$\rho < 1$ 时收敛；$\rho > 1$($\rho = +\infty$)时发散；$\rho = 1$ 时可能收敛也可能发散.
  - 幂级数
    - 收敛性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，$R = \frac{1}{\rho}$,$\rho \neq 0; R = +\infty$,$\rho = 0; R = 0$,$\rho = +\infty$.
      - 缺项级数用比值审敛法求收敛半径
    - 和函数：$s(x)$ 的性质①在收敛域 I 上连续;②在收敛域 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导;③和函数 $s(x)$ 在收敛域 I 上可积分，且可逐项积分.(R 不变,收敛域可能变化).
    - 展成幂级数：直接展开: 泰勒级数　间接展开: 六个常用展开式
      - $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (-1 < x < 1)$　$e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \ (-\infty < x < +\infty)$
  - 傅立叶级数
    - $T = 2\pi$ $T = 2l$
      - $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$　$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
      - $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$　$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$　收敛定理
      - x 是连续点, 收敛于 $f(x)$；x 是间断点, 收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$
    - 周期延拓
      - $f(x)$ 为奇函数，正弦级数，奇延拓；$f(x)$ 为偶函数，余弦级数、偶延拓.