参考答案与评分标准

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1．$F(x)+C$， $f(x)dx$；　　2．$xf'(x)-f(x)+C$；

3. $\frac{1}{2}F(x^2+1)+C$；　　4. $\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)+C$.

二、单项选择（每小题 4 分，共 16 分）：C，C，B，B.

三、计算下列各题（每小题 8 分，共 56 分）

（1）解：$\int \sin 5x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int[\sin 8x+\sin 2x]dx=-\frac{1}{16}(\cos 8x+4\cos 2x)+C$；

（2）解：$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2)=-\sqrt{a^2-x^2}+C$；

（3）解：设 $x=2\tan t$，则 $dx=2\sec^2 tdt$，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int \sec tdt=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln(\sqrt{x^2+4}+x)+C；$$

（4）解：设 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$， $dx=2tdt$，

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{2t}{t+1}dt=2\int(1-\frac{1}{t+1})dt=2(t-\ln|t+1|)+C$$

$$=2[\sqrt{x-1}-\ln(\sqrt{x-1}+1)]+C；$$

（5）解：$\int x\ln(x+1)dx=\frac{1}{2}[x^2(\ln x)^2-\int 2x\ln xdx]=\frac{1}{2}[x^2(\ln x)^2-x^2\ln x+\int xdx]$

$$=\frac{1}{2}[x^2(\ln x)^2-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2]+C；$$

(6)解：$\int x\sin 2xdx=-\frac{1}{2}[x\cos 2x-\int\cos 2xdx]=-\frac{1}{2}[x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x]+C$；

（7）解：$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$　令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(t^2+1)$

得 $\int \frac{\ln(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\ln(t^2+1)dt=2t\ln(t^2+1)-2\int\frac{2t^2}{t^2+1}dt$

$$=2t\ln(t^2+1)-4(t-\arctan t)+C$$

$$=2\sqrt{e^x-1}\cdot x-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C\ .$$

四、（6 分）**解：**由 $F(x)=xf(x)+x^2$ 得 $F'(x)=f(x)+xf'(x)+2x$，从而有

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x \text{，化简得 } f'(x)=-2\text{，}$$

得 $f(x)=-2x+C$；再由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，故而 $f(x)=-2x+1$.

五、（6 分）解：设 $f'(x)=ax^2+bx+c \quad (a<0)$

由 $f'(0)=0$，$\Rightarrow c=0$. 由 $f'(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0 \Rightarrow b=-2a$

$\therefore f'(x)=ax^2-2ax$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow$ 驻点 $x_1=0$，$x_2=2$

又 $f''(x)=2ax-2a$

因为 $f''(0)=-2a>0$，$\therefore x=0$ 为极小值点，$\therefore f(0)=2$

又因为 $f''(2)=2a<0$，$\therefore x=2$ 为极大值点，$\therefore f(2)=6$

而 $f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2ax)dx=\dfrac{a}{3}x^3-ax^2+c$

由 $\begin{cases}\dfrac{a}{3}\cdot 8-4a+c=b \\ c=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-3 \\ c=2\end{cases}$

$\therefore f(x)=-x^3+3x^2+2$.