2020 年高等代数考研辅导

《线性方程组》精讲

欧阳锋

朝闻道教育

2019 年 3 月 21 日

Foreword

1. 请自己先做，再参照解答 (仅供参考，解法不止一种)!!!
2. 如果你发现有任何问题，请你好心地告诉我
3. 该文档会持续更新，请及时获取最新版本 $\longrightarrow$perfect

“我们都在朝闻道等你”

如何理解:

1. 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表示??

2. 向量组的秩为什么是唯一确定的??

3. $Ax = b$ 有解 $\iff \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A, b)$??

教材习题

证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ **(**$\alpha_1 \neq 0$**)** 线性相关的充要条件是：至少有一个 α_i $(i > 1)$ 可以被它前面的向量线性表示。

教材习题 ★

证明：如果向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，并且表法唯一。

教材习题

假设向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，证明：表法唯一 $\Longleftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

设 $\alpha_i = [a_{i1}, \cdots, a_{in}]$，$i = 1, \cdots, n$，证明：如果 $|A| = |a_{ij}| \neq 0$，那么 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。

教材习题

设 $t_1, \cdots, t_r$ 是互不相同的数，$r \leq n$，证明：

$$\alpha_i = [1, t_i, \cdots, t_i^{n-1}], \ \ i = 1, \cdots, r$$

线性无关。

教材习题

设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n = a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nn}\alpha_n$$

证明：$\beta_1, \cdots, \beta_n$ 线性无关当且仅当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

教材习题

设 α_1，α_2，α_3 线性无关，证明：$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

证明：向量组的任何一个部分无关组都可以扩充成极大无关组。

教材习题

设 $\alpha_1=[1,-1,2,4]$，$\alpha_2=[0,3,1,2]$，$\alpha_3=[3,0,7,14]$，$\alpha_4=[1,-1,2,0]$，$\alpha_5=[2,1,5,6]$，

(1) 证明：α_1，α_2 线性无关；

(2) 把 α_1，α_2 扩充成一个极大无关组。

教材习题

设

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$
$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1},$$

证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 有相同的秩。

教材习题

已知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩是 r，证明：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都是它的一个极大无关组。

已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是其中的 r 个向量，使得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 中的任一向量可被它们线性表示，证明：$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是一个极大无关组。

教材习题

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量，且 $\mathrm{e}_1, \cdots, \mathrm{e}_n$ 可由它们线性表示，证明：$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。

教材习题

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件任一 n 维向量可由它们线性表示。

教材习题

证明：如果

$$\mathrm{r}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = \mathrm{r}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_t\},$$

那么 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_t$ 等价。

已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表示，证明二者等价。

教材习题

设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩为 r，在其中任取 k 个向量 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}$，证明：此向量组的秩 $\geq r+k-s$。

教材习题

设向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 的秩分别是 r_1，r_2，证明：

$$\max\{r_1, r_2\} \leq \mathrm{r}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s;\ \beta_1, \cdots, \beta_t\} \leq r_1 + r_2.$$

(武汉大学，2017 年)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times p$ 矩阵，证明：

(1) $\mathrm{r}(A)\geq\mathrm{r}(AB)$；

(2) **(河南师大，2018 年)** $\mathrm{r}(AB)\geq\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)-n$；

(3) 记 C 是 A 的一个 $s\times t$ 子矩阵，证明：$\mathrm{r}(C)\geq\mathrm{r}(A)+s+t-m-n$。

(厦门大学，2018 年)

设 A，B 是 n 阶方阵，且 $A^2=A$，$B^2=B$，证明：

$$\mathrm{r}(A-B)=\mathrm{r}(A-AB)+\mathrm{r}(B-AB).$$

(华南理工，2017 年)

设 $f(x)$，$g(x) \in \mathbb{K}[x]$，$(f(x), g(x)) = 1$，A 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶方阵，证明：

$$f(A)g(A) = 0 \iff \mathrm{r}(f(A)) + \mathrm{r}(g(A)) = n.$$

(华南理工，2016 年)

设 A 是 n 阶方阵，$A^2 = A$，证明：

(1) $\mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A - E) = n$；

(2) 对任意的正整数 k，m，都有 $\mathrm{r}[A^k] + \mathrm{r}[(A - E)^m] = n$。

(华南理工，2015 年)

(1) 设 A, B 是 n 阶方阵，证明：

$$\mathrm{r}(E-AB) \le \mathrm{r}(E-A) + \mathrm{r}(E-B);$$

(2) 设 B_i, $1 \le i \le k$ 是幂等矩阵，$A = B_1 \cdots B_k$，证明：

$$\mathrm{r}(E-A) \le k(n - \mathrm{r}(A)).$$

考研真题

(中科院，2017 年)

已知 A 是 n 阶可逆的反对称矩阵，$B=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$，其中 α 是 n 维列向量，求 $\mathrm{r}(B)$。

(四川大学，2017 年)

设数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m\times n$ 矩阵 M 和 $p\times q$ 矩阵 N 的秩分别是 n，p，证明：矩阵方程 $MXN=0$ 只有零解 $X=0$。

(四川师大，2018 年)

设 A, B 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的 $s\times n$ 和 $l\times m$ 矩阵，如果 $\mathrm{r}(A)=s$, $\mathrm{r}(B)=l$，证明：$\mathrm{r}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(B)$。

(中山大学，2018 年)

在空间直角坐标系下求过点 $[1,1,1]$，$[1,1,-1]$，$[1,-1,1]$，$[-1,0,0]$ 的球面方程。

证明：与基础解系等价的线性无关的向量组也是基础解系。

教材习题

设 $Ax = 0$ 是齐次方程组，A 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A) = r$，证明：方程组的任意 $n - r$ 个线性无关的解向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r}$ 都是一个基础解系。

教材习题

证明：线性方程组 $Ax = b$ 对任意的 b 都有解 $\iff |A| \neq 0$。

教材习题

证明：如果 $\eta_1, \cdots, \eta_t$ 是一个线性方程组的解，则 $k_1\eta_1 + \cdots + k_t\eta_t$ 也是方程组的解，其中 $k_1 + \cdots + k_t = 1$。

重要习题 ★

设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ $(b \neq 0)$ 的一个特解，$\eta_1, \cdots, \eta_t$ 是导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系。令

$$\gamma_0 = \eta_0$$

$$\gamma_1 = \eta_1 + \eta_0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\gamma_t = \eta_t + \eta_0$$

证明：(1) $\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_t$ 线性无关；

(2) $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_t$ 线性无关；

(3) α 为 $Ax = b$ 的解 $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \sum_{i=0}^{t} k_i \gamma_i$, $\sum_{i=0}^{t} k_i = 1$。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

设 M_j, $j = 1, \cdots, n$ 是从系数矩阵中划去第 j 列所得的 $n-1$ 阶子式，证明：

(1) $[M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n]$ 是方程组的一个解；

(2) 如果 $\mathrm{r}(A) = n-1$，则方程组的解是 $k[M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n]$, $k \in \mathbb{K}$。

设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实矩阵，证明：

(1) 如果

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ \ i=1,\cdots,n,$$

称 A 为严格对角占优矩阵，则 $|A|\neq 0$；

(2) 如果

$$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\ \ i=1,\cdots,n,$$

则 $|A|>0$。

教材习题

设 $\alpha_i = [a_{i1}, \cdots, a_{in}]$，$i = 1, \cdots, m$，$\beta = [b_1, \cdots, b_m]$，证明：如果方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

的解都是方程 $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$ 的解，那么 β 可以由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示。

Wish you a brilliant future!!