课程名称 高等数学 AI （A 卷 闭卷） 适用班级（或年级、专业） 2017 级

考试时间 120 分钟 班级________ 学号________ 姓名________

| 题 号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满 分 | 20 | 15 | 24 | 14 | 16 | 5 | 6 | | | | 100 |
| 得 分 | | | | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | | | | |

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数极限 $y=\sqrt{3-x}+\ln(3+x)$ 的定义域为________.

2. 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可导是函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 可微的________条件（在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入).

3. $\cos 2x\mathrm{d}x=$____ $\mathrm{d}\left(\sin 2x\right)$（在下划线中填入适当的常数).

4. 微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的通解为____________.

5. 已知 $f(x)=4x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下面极限不正确的是（　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n=1$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1$

2. 当 $x\to0$ 时，（　　）是比 $x$ 的高阶无穷小.

(A) $x+\cos x$　(B) $2x$　(C) $x\sin x$　(D) $x-\cos x$

3. 设 $f'(x)=2x-1$, 则在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内（　　）.

A. $y=f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 为凹的

B. $y=f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 为凹的

C. $y=f(x)$ 单调增加，曲线 $y=f(x)$ 为凸的

D. $y=f(x)$ 单调减少，曲线 $y=f(x)$ 为凸的

4. 下列反常积分收敛的是（　　）.

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \mathrm{d}x$　　　B. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$　　　D. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$

5. 设知 $y_1, y_2$ 为方程 $y'' + 2y' + 3y = \mathrm{e}^x \sin x$ 的两个特解，则下列结论正确的是（　　）.

A. $y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = \mathrm{e}^x \sin x$ 的解

B. $y_1 + y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的解

C. $y_1 - y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = \mathrm{e}^x \sin x$ 的解

D. $y_1 - y_2$ 是方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的解

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 已知 $y = \mathrm{e}^{2x} \sin x$，求 $y'$ 和 $y''$.

2. 计算函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)}$.

3. 求由方程 $\mathrm{e}^{xy} = \sin y + y$ 确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四、计算下列积分（每小题 7 分，共 14 分）

1. $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

2. $\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

五、应用题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 计算由 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x$ 所围成的图形的面积.

2. 计算曲线 $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + \sin t, \\ y = 1 - t, \end{cases}$ 在参数 $t = 0$ 处的切线方程与法线方程.

六、利用函数 $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$ $(x > 0)$ 的极值来确定数列 $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ 的最大项，这里 e=2.71828⋯为自然对数的底.（共 5 分）

七、证明题（每小题 3 分，共 6 分）

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x < 0, \\ x, & x \ge 0, \end{cases}$ 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的和可导的.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导数，且 $f(0) = f(1) = 0$. 又

$$F(x) = (x-1)^2 f(x),$$

证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使 $F''(\xi) = 0$.