“高等数学 AI”第三章单元测验

参 考 答 案

一、填空题：（每小题 4 分，共 20 分）

1．3　（1,2），（2,3），（3,5）　2．-1　-4　3．增加　4．3　0　5．$\frac{1}{3}$　3

二、选择题（每小题 3 分，共 12 分）：　C　A　C　B

三、计算下列极限：（每小题 6 分，共 42 分）

1．解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}.$

2．解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\right]}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\tan x\bullet\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-\tan x\bullet\ln x)}$，

$$\lim_{x\to 0^+}(-\tan x\ln x)=-\lim_{x\to 0^+}x\ln x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^0=1.$

3．求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

解：$f(x)=\frac{1}{x}=-\frac{1}{1-(x+1)}$

由 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)$ 可得：

$$f(x)=-\frac{1}{1-(x+1)}=-1-(x+1)-(x+1)^2-\ldots-(x+1)^n+o((x+1)^n)$$

4．求曲线 $y=(2x-5)\bullet\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间与拐点.

解：$f(x)=(2x-5)\bullet\sqrt[3]{x^2}=(2x-5)\bullet x^{\frac{2}{3}}$，　$x\in(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{10}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}},\qquad f''(x)=\frac{10}{9}\frac{2x+1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 时，　$f''(x)<0$，故曲线 $y=f''(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 上是凸的；

当 $x\in(-\frac{1}{2},0),(0,+\infty)$ 时， $f''(x)>0$, 故曲线 $y=f''(x)$ 在 $[-\frac{1}{2},+\infty)$ 上是凹的.

5．求函数 $y=x^3-3x^2-9x+3$ 的极值.

解： $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

函数有驻点： $x=-1,\quad x=3$

$f''(x)=6x-6$， $f''(-1)=-12<0,\ f''(3)=12>0$

故函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=8$，极小值 $f(-3)=30$.

6．求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $(0,b)$ 的曲率.

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\frac{b}{a}\cot t$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'\frac{1}{(a\cos t)'}=\frac{b}{a^2}\csc^3 t$.

点 $(0,b)$ 处的 $t=\frac{\pi}{2}$， $\frac{dy}{dx}_{t=\frac{\pi}{2}}=0$， $\frac{d^2y}{dx^2}_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{b}{a^2}$.

椭圆在点 $(0,b)$ 处的曲率 $k=\frac{\left|\frac{b}{a^2}\right|}{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{b}{a^2}$.

四、（每小题 8 分，共 18 分）

1．设 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 的极值点，则 a 为何值？此时的极值点是极大值还是极小值？并求出极值.

解： $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 可导的极值点，故 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的驻点， $f'(\frac{\pi}{3})=0$.

$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$， $f'(\frac{\pi}{3})=\frac{a}{2}-1=0$， $a=2.$

又 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$， $f''(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0,$ 故 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，此时极大值为 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}.$

2．证明： $\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2}.$

解：令 $f(x)=\arctan e^x+\arctan e^{-x}$，则

$$f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^x}{1+e^{2x}}=0,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

故 $f(x)=C$. 又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$, 故 $C=\frac{\pi}{2}.$

3. 证明：当$x>1$时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$

证明: 当$x>1$时， $x+1>0$, 故原不等式等价于$(x+1)\ln x-2(x-1)>0$.

令 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，则 $f(1)=0.$

$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，则 $f'(1)=0.$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，当$x>1$时， $f''(x)>0$, 故 $f'(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加，从而当$x>1$时， $f'(x)>f'(1)=0$

故 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加，从而当$x>1$时， $f(x)>f(1)$, 即

$$(x+1)\ln x-2(x-1)>0.$$

五、证明题：（8 分）

已知函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导.证明存在$\xi\in(0,\pi)$，使得

$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\cot\xi.$

证明：$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\cot\xi$可化为$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$

令$F(x)=f(x)\sin x$, 则$F(x)$在$[0,\pi]$上连续, 在$(0,\pi)$内可导, 且$F(0)=F(\pi)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,\pi)$，使得$F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$$