

一、选择题(每小题 3 分, 共 12 分)

1. 函数  $f(x)$  在  $x=x_0$  处存在极限是它在该点左右极限存在的( ).  
A. 充分条件    B. 必要条件    C. 充要条件    D. 无关条件.
2. 设曲线  $y=x^2+x-2$  在点 M 处的切线与直线  $y+x+1=0$  垂直, 则该曲线在点 M 处的切线方程是( ).  
A.  $x-y-2=0$     B.  $x-y+2=0$     C.  $x+y+3=0$     D.  $x+y-3=0$ .
3. 下列曲线中既有水平渐近线, 又有铅直渐近线的是( ).  
A.  $y=\frac{\sin(2x)}{x}$     B.  $y=\frac{x^2}{2x-1}$     C.  $y=\ln x$     D.  $y=\ln\left(2-\frac{e}{x}\right)$ .
4. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续且为奇函数,  $F(x)$  是它的一个原函数, 则 ( ).  
A.  $F(x)=-F(-x)$     B.  $F(-x)=F(x)$   
C.  $F(-x)=F(x)+C$     D.  $F(-x)=-F(x)+C$ .

二、填空题(每小题 3 分, 共 12 分)

1.  $f(\cos \frac{x}{2})=1+\cos x$ , 则  $f(x)=$  \_\_\_\_\_.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}) =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $y = \ln \cos x$ , 则  $y'' =$  \_\_\_\_\_.
4. 函数  $y = \frac{2 \ln x}{x}$  的极大值为 \_\_\_\_\_.

三、解答下列各题(每小题 5 分, 共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2}$ .    2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{2}{x}}$ .

$\beta^{-1}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}.$$

$$4. \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx.$$

$$5. \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx.$$

四、计算反常积分的值(每小题 7 分, 共 14 分).

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}.$$

$$2. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

五、计算题(每小题 9 分, 共 27 分)

$$1. \begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y - e^y \sin t = 1, \end{cases} \text{求 } \frac{dy}{dx}.$$

2. 计算曲线  $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$  上相应于  $3 \leq x \leq 8$  的一段弧的长度.

3. 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.

六、证明题 (本题 5 分)

证明当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

一、选择题(每小题 3 分, 共 12 分)

1. A 2. A 3. D 4. C

二、填空题(每小题 3 分, 共 12 分)

1.  $2x^2$ ; 2.  $\frac{1}{2}$ ; 3.  $-\sec^2 x$ ; 4.  $-\frac{2}{e}$ .

三、解答下列各题(每小题 5 分, 共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-x-1-x}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} \quad \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}. \quad \dots$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{2}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (1-3x)^{-\frac{1}{3x} \cdot 3x^2} \quad \dots$$

$$= e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x}} \quad \dots$$

$$= e^{-6}. \quad \dots$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 x} \quad \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \quad (\text{由罗比达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec x \sec x \tan x}{6x} \quad \dots$$

$$= \frac{1}{3}. \quad \dots$$

$$4. \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int \sec^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= 2 \int \sec^2 \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} + C$$

$$5. \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{7}{12}\pi$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= - \frac{\cos^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}$$

四、计算反常积分的值(每小题 7 分, 共 14 分).

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$$

解 被积函数  $f(x) = \frac{1}{x^4}$  是无穷积分,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \dots \dots \dots \quad 7$$

$$2. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$$

解:  $x=1$  是被积函数  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$  的瑕点,

$$\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} = 2 \int_1^2 x d\sqrt{x-1}$$

$$= 2x\sqrt{x-1} \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \sqrt{x-1} dx$$

$$= 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \quad \dots \dots \dots \quad 7$$

五、计算题(每小题 9 分, 共 27 分)

$$1. \begin{cases} x = \ln \sin t, \\ y - e^y \sin t = 1, \end{cases} \text{求 } \frac{dy}{dx}.$$

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}, \dots$

$\frac{dx}{dt} = \cot t \text{ 且} \dots$

$y' - e^y y' \sin t - e^y \cos t = 0 \dots$

可知:  $\frac{dy}{dt} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t} \dots$

故  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y \sin t}{1 - e^y \sin t} \dots$

2. 计算曲线  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  上相应于  $3 \leq x \leq 8$  的一段弧的长度.

解:  $s = \int_3^8 \sqrt{1 + y'^2} dx \dots$

$= \int_3^8 \sqrt{1 + x} dx \dots$

$= \frac{38}{3}. \dots$

3. 求微分方程  $y'' - 2y' - 3y = 0$  的通解.

解: 其特征方程为  $r^2 - 2r - 3 = 0, \dots$

其根是  $r_1 = 3, r_2 = -1, \dots$

通解为:  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \dots$

## 六、证明题 (本题 5 分)

证明当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$

证明: 当  $x > 0$  时, 由 Lagrange 中值定理

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{\xi}, \quad 1 < \xi < 1+x.$$

从而  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$