笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

高数上第一课

一、直接代入型

例 1：已知 $f(x)=x^2-\frac{3}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$。

将 x=3 代入 $f(x)=x^2-\frac{3}{x}$，得：

$f(3)=3^2-\frac{3}{3}=8$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)=8$

例 2：已知 $f(x)=\sin x+e^x$，求 $\lim\limits_{x\to \pi} f(x)$。

将 x=π 代入 $f(x)=\sin x+e^x$，得：

$f(\pi)=\sin\pi+e^\pi=e^\pi$

$\therefore \lim\limits_{x\to \pi} f(x)=e^\pi$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型

例 1：已知 $f(x)=\frac{7x^8+x^6+9x^4}{6x^5+4x^3+2x}$，$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=$ __∞__

$f(\infty)=\frac{7\infty^8+\infty^6+9\infty^4}{6\infty^5+4\infty^3+2\infty}=\frac{\infty}{\infty}$

例 2：已知 $\mathbf{f(x)=\frac{8x^5+4x^3+x}{x^9+x^3+x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ __0__

$$f(\infty)=\frac{8\infty^5+4\infty^3+\infty}{\infty^9+\infty^3+\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

例 3：已知 $\mathbf{f(x)=\frac{5x^2-4x+3}{2x^2+6x-1}}$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ __$\frac{5}{2}$__

$$f(\infty)=\frac{5\infty^2-4\infty+3}{2\infty^2+6\infty-1}=\frac{\infty}{\infty}$$

三、$\frac{0}{0}$型

例 1：已知 $\mathbf{f(x)=\frac{\sin x}{x}}$，求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$f(0)=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=\frac{1}{1}=1$$

例 2：已知 $\mathbf{f(x)=\frac{4x}{e^x-1}}$，求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$f(0)=\frac{4\cdot 0}{e^0-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(4x)'}{(e^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{e^x}=\frac{4}{e^0}=\frac{4}{1}=4$$

例 3：已知 $\mathbf{f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}}$，求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$。

$$f(0)=\frac{1-\cos 0}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{\sin 0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2}$$

四、底数和指数都有 x

例 1：已知 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e=e$$

例 2：已知 $f(x)=(1+\frac{x-2}{3})^{\frac{3}{x-2}}$，求 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$。

$$\lim_{x\to 2}(1+\frac{x-2}{3})^{\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e=e$$

例 3：已知 $f(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^2=\lim_{x\to 0}[e]^2=\lim_{x\to 0}e^2=e^2$$

例 4：已知 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}+2}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1+x)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}e\cdot(1+x)^2$$

$$=e\cdot(1+0)^2$$

$$= e$$

例 5：已知 $f(x)=\left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{3}{x-2}}$，求$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{3}{x-2}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{3}\right)^{\frac{3}{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} e$$

$$= e$$

思考题：已知 $f(x)=\left(\frac{x+1}{3}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}}$，求$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。

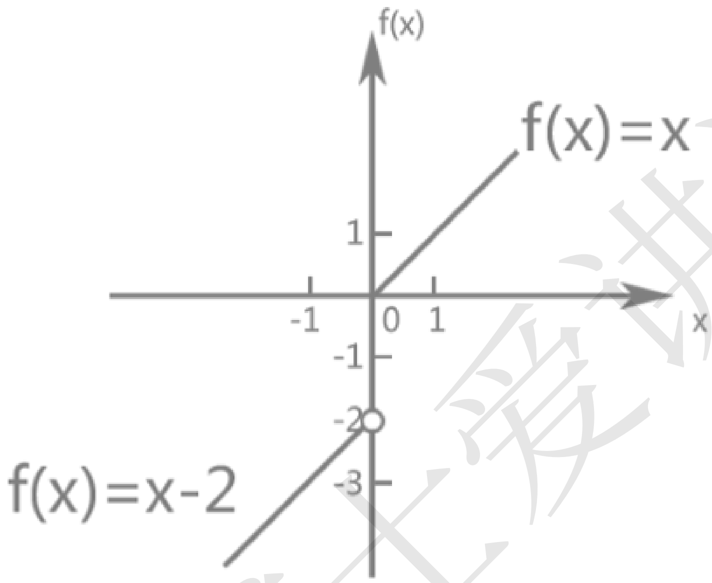
常用求导公式表

公式	例子
$(常数)'=0$	$(5)'=0$　　$(10)'=0$
$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(x^3)'=3x^2$　　$(x^5)'=5x^4$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(2^x)'=2^x\ln 2$　　$(7^x)'=7^x\ln 7$
$(e^x)'=e^x$	$(e^x)'=e^x$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_{10} x)'=\frac{1}{x\ln 10}$　　$(\log_6 x)'=\frac{1}{x\ln 6}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$[\mathrm{u}(x)\pm \mathrm{v}(x)]'=\mathrm{u}'(x)\pm \mathrm{v}'(x)$	$(e^x+4\ln x)'=(e^x)'+(4\ln x)'=e^x+\frac{4}{x}$
$[\mathrm{u}(x)\cdot \mathrm{v}(x)]'=\mathrm{u}'(x)\cdot \mathrm{v}(x)+\mathrm{u}(x)\cdot \mathrm{v}'(x)$	$(\sin x\cdot\ln x)'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$
$\left[\frac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)}\right]'=\frac{\mathrm{u}'(x)\cdot \mathrm{v}(x)-\mathrm{u}(x)\cdot \mathrm{v}'(x)}{\mathrm{v}^2(x)}$	$\left(\frac{e^x}{\cos x}\right)'=\frac{(e^x)'\cdot\cos x-e^x\cdot(\cos x)'}{\cos^2(x)}=\frac{e^x\cdot\cos x-e^x\cdot(-\sin x)}{\cos^2(x)}$
$\{\mathrm{g}[\mathrm{h}(x)]\}'=\mathrm{g}'(\mathrm{h})\cdot \mathrm{h}'(x)$	$(e^{2x})'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$　　$(sin2x)'=cos2x\cdot(2x)'=2cos2x$

高数上第二课

一、求左极限、右极限

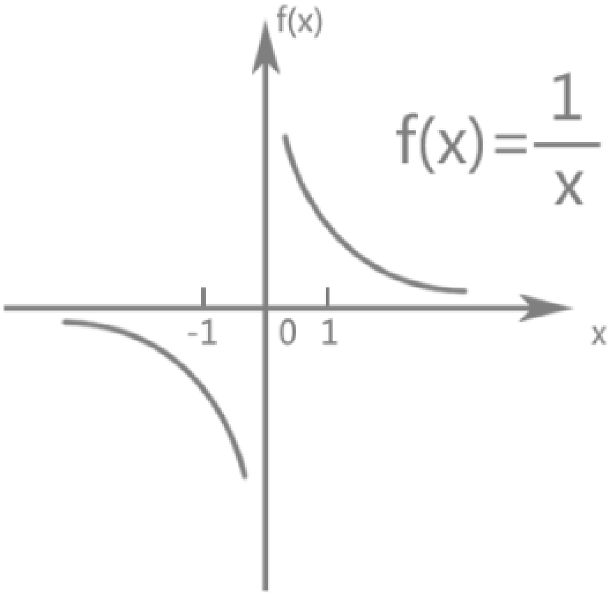
例 1：求 f(x)=$\begin{cases} x-2，x<0 \\ x\ \ \ ，x\geq 0 \end{cases}$ 在 x=0 处的左极限$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$。



左极限：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -2$

右极限：$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

例 2：求 f(x)=$\frac{1}{x}$ 在 x=0 处的左极限$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$。



左极限：$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

右极限：$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

例 3：求 f(x)=$\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{2+2^{\frac{1}{x}}}$ 在 x=0 处的左极限$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$与右极限$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$。

“例 2”已经求出：$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

左极限：$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \frac{1+2^{-\infty}}{2+2^{-\infty}} \Rightarrow \frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$

右极限：$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \frac{1+2^{+\infty}}{2+2^{+\infty}} \Rightarrow \frac{2^{+\infty}}{2^{+\infty}}=1$

二、已知函数表达式，判断是否连续

例 1：判断 f(x)=$\begin{cases} x-2, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 x=0 处是否连续。

“题型一的例 1”已经求出左极限和右极限：

左极限 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$

右极限 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

函数值 f(0)=0

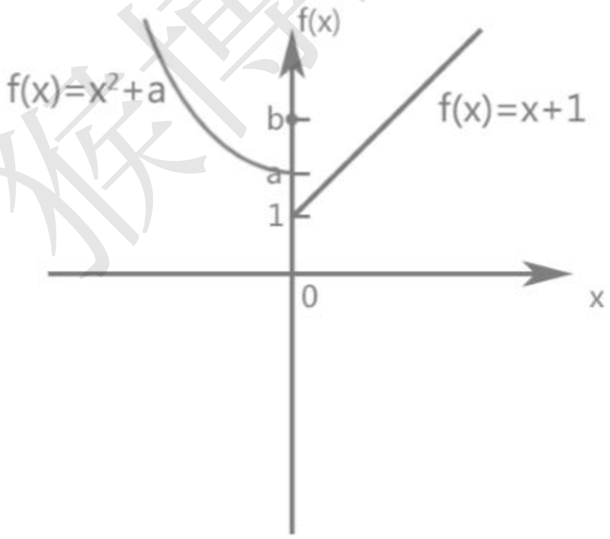
$\because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore$ 该函数在 x=0 处不连续

三、已知函数连续，求未知参数

例 1：已知 f(x)=$\begin{cases} x^2 + a，x < 0 \\ b，x = 0 \\ x + 1，x > 0 \end{cases}$ 连续，求 a、b。

间断点：x=0



由图像知：

左极限 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = a$

右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

函数值 f(0)=b

令 a=1=b $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

高数上第三课

一、一般函数求导

公式	例子
$(常数)'=0$	$(5)'=0$　　$(10)'=0$
$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(x^3)'=3x^2$　　$(x^5)'=5x^4$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(2^x)'=2^x\ln 2$　　$(7^x)'=7^x\ln 7$
$(e^x)'=e^x$	$(e^x)'=e^x$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_{10} x)'=\frac{1}{x\ln 10}$　　$(\log_6 x)'=\frac{1}{x\ln 6}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$	$(e^x+4\ln x)'=(e^x)'+(4\ln x)'=e^x+\frac{4}{x}$
$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$	$(\sin x\cdot\ln x)'=(\sin x)'\cdot\ln x+\sin x\cdot(\ln x)'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$
$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$	$\left(\frac{e^x}{\cos x}\right)'=\frac{(e^x)'\cdot\cos x-e^x\cdot(\cos x)'}{\cos^2(x)}=\frac{e^x\cdot\cos x-e^x\cdot(-\sin x)}{\cos^2(x)}$
$\{g[h(x)]\}'=g'(h)\cdot h'(x)$	$(e^{2x})'=e^{2x}\cdot(2x)'=2e^{2x}$　　$(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$

例 1：求 $y=x^3-2x^2+\sin x$ 的导数。

$$y'=(x^3-2x^2+\sin x)'$$

$$=(x^3)'-(2x^2)'+(\sin x)'$$

$$=3x^2-4x+\cos x$$

例 2：已知 f(x)=sinx · lnx，求$f'(x)$。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\sin x \cdot \ln x)' \\
&= (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' \\
&= \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

例 3：已知 y=ln(sinx)，求$\frac{dy}{dx}$。

$$\frac{dy}{dx} = [\ln(\sin x)]' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

二、隐函数求导

例 1：已知函数 y=y(x)且 ylny=xlnx，求y'。

$$(y\ln y)' = (x\ln x)'$$

$$y' \cdot \ln y + y \cdot (\ln y)' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' \cdot \ln y + y' = \ln x + 1$$

$$y' \cdot (1 + \ln y) = \ln x + 1$$

$$y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$$

三、底数、指数均含未知数的函数求导

例 1：已知函数 $y=f(x)$ 且 $y^y=x^x$，求 y'。

$\ln y^y=\ln x^x$

$y\ln y=x\ln x$

$$(y\ln y)' = (x\ln x)'$$

$$y'\cdot\ln y + y\cdot(\ln y)' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'$$

$$y'\cdot\ln y + y\cdot\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'\cdot\ln y + y' = \ln x + 1$$

$$y'\cdot(1+\ln y) = \ln x + 1$$

$$y' = \frac{\ln x + 1}{\ln y + 1}$$

四、参数方程求导

例 1：求曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的导数 $\frac{dy}{dx}$。

$\frac{dx}{dt} = (t-\sin t)'_t = 1-\cos t$

$\frac{dy}{dt} = (1-\cos t)'_t = \sin t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1-0} = 1$

五、已知函数连续可导，求未知参数

例 1：求 a、b 的值，使函数 f(x)=$\begin{cases} \mathbf{ax+b}，\mathbf{x<1} \\ \frac{1}{2}(\mathbf{a+b+1})，\mathbf{x=1} \\ \mathbf{x^2}，\mathbf{x>1} \end{cases}$

在任意点处连续可导。

间断点：x=1

将 x=1 代入$\begin{cases} ax+b \\ \frac{1}{2}(a+b+1) \\ x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \\ \frac{1}{2}(a+b+1) \\ 1 \end{cases}$

x<1 时，f(x)=ax+b，$f'(x)=a$

x>1 时，$f(x)=x^2$，$f'(x)=2x$

将 x=1 代入$\begin{cases} a \\ 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ 2 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=\frac{1}{2}(a+b+1)=1 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

六、已知导数值，求极限

例 1：已知$\mathbf{f'(x_0)=m}$**，求**$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot 3$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\cdot 3=f'(x_0)\cdot 3=\lim\limits_{\Delta x\to 0}m\cdot 3=3m$

例 2：已知$f'(x_0)=a$，求$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)}{h}$。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)-f(x_0)+f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{-2}\cdot(-2)-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{-1}\cdot(-1)$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\cdot(-1)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}\cdot(-2)-\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\cdot(-1)$$

$$=\lim_{h\to0}a\cdot(-2)-\lim_{h\to0}a\cdot(-1)$$

$$=-2a-(-a)$$

$$=-a$$

高数上第四课

一、用罗尔中值定理证明等式

例 1：设$f(x)$在$[0,1]$上连续且在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$，试证明至少有一个点 $\xi\epsilon(0,1)$，使 $f'(\xi)=\frac{-2f(\xi)}{\xi}$。

$f'(\xi)=\frac{-2f(\xi)}{\xi} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2f(x)}{x} \Rightarrow \frac{2}{x}f(x)+f'(x)=0$

$\frac{2}{x}f(x)+f'(x)=0 \begin{cases} f(x)\text{前 } x \text{ 的次方数：} -1 \\ f'(x)\text{前 } x \text{ 的次方数：} 0 \end{cases}$

特点	化简目标	$F'(x)$	$F(x)$
无 $f(x)$	$f'(x)+C$	$f'(x)+C$	$f(x)+Cx$
$f(x)$与$f'(x)$前x次方数相同	$f(x)+f'(x)+C$	$e^x[f(x)+f'(x)+C]$	$e^xf(x)+Ce^x$
	$f(x)-f'(x)+C$	$-e^{-x}[f(x)-f'(x)+C]$	$e^{-x}f(x)+Ce^{-x}$
$f(x)$与$f'(x)$前x次方数不同	$af(x)+xf'(x)+C$	$x^{a-1}[af(x)+xf'(x)+C]$	$x^af(x)+\frac{C}{a}x^a$

$x\cdot[\frac{2}{x}f(x)+f'(x)]=x\cdot 0 \Rightarrow 2f(x)+xf'(x)=0 \begin{cases} a=2 \\ C=0 \end{cases}$

$F'(x)=x^{2-1}[2f(x)+xf'(x)+0]=2xf(x)+x^2f'(x)$

$F(x)=x^2\cdot f(x)+\frac{0}{2}x^2=x^2f(x)$

$F(0)=0^2\cdot f(0)=0$

$F(1)=1^2\cdot f(1)=0$

$F(0)=F(1)$

$F(x)$在$(0,1)$上满足罗尔中值定理，则至少有一点 $\xi\epsilon(0,1)$

满足$F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=0$，可推出$f'(\xi)=\frac{-2f(\xi)}{\xi}$，

原等式得证。

例 2：设 $f(x)$在(a,b)上连续可导，证明存在一点 $\xi\epsilon(a,b)$，满足 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$=$f(\xi)+\xi f'(\xi)$。

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(x)+xf'(x) \Rightarrow f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=0$$

$$f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=0 \begin{cases} f(x)\text{前 } x \text{ 的次方数：} 0 \\ f'(x)\text{前 } x \text{ 的次方数：} 1 \end{cases}$$

特点	化简目标	$F'(x)$	$F(x)$
无 $f(x)$	$f'(x)+C$	$f'(x)+C$	$f(x)+Cx$
$f(x)$与$f'(x)$前x次方数相同	$f(x)+f'(x)+C$	$e^x[f(x)+f'(x)+C]$	$e^xf(x)+Ce^x$
	$f(x)-f'(x)+C$	$-e^{-x}[f(x)-f'(x)+C]$	$e^{-x}f(x)+Ce^{-x}$
$f(x)$与$f'(x)$前x次方数不同	$af(x)+xf'(x)+C$	$x^{a-1}[af(x)+xf'(x)+C]$	$x^af(x)+\frac{C}{a}x^a$

$$f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=0 \begin{cases} a=1 \\ C=-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} \end{cases}$$

$$F'(x)=x^{1-1}[1f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}]=f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}$$

$$F(x)=x^1f(x)+\frac{-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}}{1}\cdot x^1=xf(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}\cdot x$$

$$F(a)=af(a)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}\cdot a=\frac{ab[f(a)-f(b)]}{b-a}$$

$$F(b)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}\cdot b=\frac{ab[f(a)-f(b)]}{b-a}$$

$$F(a)=F(b)$$

$F(x)$在(a,b)上满足罗尔中值定理，则至少有一点 $\xi\epsilon(a,b)$

满足$F'(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=0$，

可推出$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$，原等式得证。

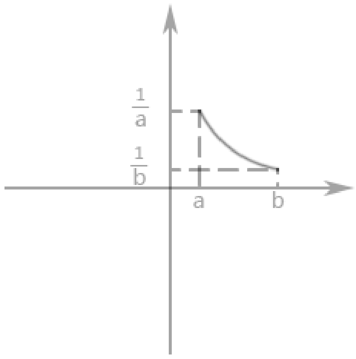
二、用拉格朗日中值定理证明关于 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 的不等式

例 1：利用拉格朗日中值定理证明不等式 $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$ (b>a>0)

$f(x)=\ln x$

$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$x_1=a$，$x_2=b$，$f'(x)=\frac{1}{x}$



$\frac{1}{b}<\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$，即$\frac{1}{b}<f'(x)<\frac{1}{a}$

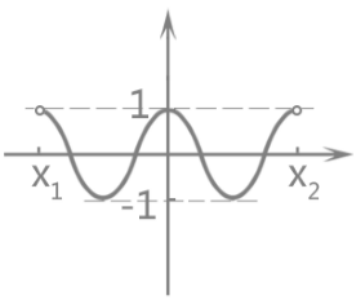
$\therefore\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$

例 2：利用拉格朗日中值定理证明不等式$-2\le\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}\le 2(x_2>x_1)$

$f(x)=\sin x$

$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$

$f'(x)=\cos x$ 的图像如下：



$-1 \le \cos x \le 1$，即$-1 \le f'(x) \le 1$

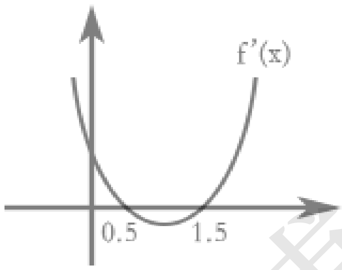
$\therefore\ -1 \le \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \le 1$

则 $-2 \le \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} \le 2$

三、求极值与最值

例 1：求函数$f(x)=4x^3-12x^2+9x$的极大值、极小值及在$[0, 1.5]$内的最大值。

$f'(x)=(4x^3-12x^2+9x)'=12x^2-24x+9=3(2x-1)(2x-3)$



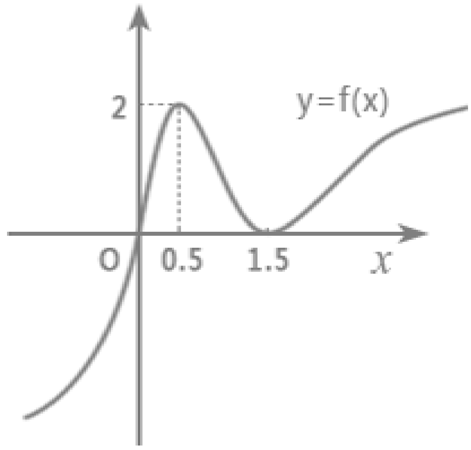
x	$(-\infty, 0.5)$	0.5	$(0.5, 1.5)$	1.5	$(1.5, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

$f(0.5)=4\times0.5^3-12\times0.5^2+9\times0.5=2$

$f(1.5)=4\times1.5^3-12\times1.5^2+9\times1.5=0$

$\therefore$ 极大值为 2，极小值为 0

根据表格可以大体画出 f(x)的图像，如下：



函数在$[0, 1.5]$内的最大值为 2

例 2：有一块边长为 3 的正方形铁片，在每一个角上各剪去一个边长为 x 的小正方形，用剩下的部分做成开口盒子，当剪去小正方形的边长 x 为多大时，盒子的容积最大？

$V=(3-2x)\cdot(3-2x)\cdot x=4x^3-12x^2+9x$

$$\begin{cases}3-2x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}$$

即 $x\in[0, 1.5]$

$x=0.5$ 时，容积最大

高数上第五课

一、直接套公式算不定积分

常用公式：

① $\int kdx = kx + C$

② $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$

③ $\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$

④ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C$

⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C$

⑦ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$

⑧ $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

⑨ $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

⑩ $\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$

⑪ $\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$

⑫ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

⑬ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

⑭ $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C$

⑮ $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\sin x} + C$

⑯ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

⑰ $\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

⑱ $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

⑲ $\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

⑳ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

例 1：求$\int x^2\sqrt{x}dx$

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x}dx &= \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}dx \\ &= \frac{x^{\left(\frac{5}{2}+1\right)}}{\frac{5}{2}+1} + C \\ &= \frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

例 2：求$\int 2^x e^x dx$

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x \, dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2e} \cdot (2e)^x + C$$

$$= \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$$

二、设一部分再算的不定积分

例 1：求$\int 2xe^{x^2} dx$

设 $x^2 = a$

$da = (x^2)' dx = 2xdx$

$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} 2xdx = \int e^a da = e^a + C$

$\int 2xe^{x^2} dx = e^a + C = e^{x^2} + C$

例 2：求$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

设 $\sqrt{x} = a$

$da = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \sin\sqrt{x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \sin a \cdot 2 \cdot da = -2\cos a + C$

$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2\cos a + C = -2\cos\sqrt{x} + C$

三、多项相加的不定积分

例 1：求$\int(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})dx$

$$\int(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})dx=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{5}{x^2}dx$$

$$=2\ln|x|+C_1-\frac{5}{x}+C_2$$

$$=2\ln|x|-\frac{5}{x}+C$$

例 2：求$\int[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx$

$$\int[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln|x+1|+C_1-(-\frac{1}{x+1}+C_2)$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

例 3：求$\int\frac{x}{x^2+2x+1}dx$

$$\int\frac{x}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{x}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int\frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int\left[\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=\int[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx$$

$$=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln|x+1|+C_1-(-\frac{1}{x+1}+C_2)$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

四、两项相乘的不定积分

例 1：求$\int x\ln x dx$

设 $x=v'(x) \Rightarrow v(x)=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$

$\ln x=u(x) \Rightarrow u'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

$$\int x\ln xdx=\int u(x)v'(x)dx$$
$$=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx+C$$
$$=\ln x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2dx+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}xdx+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

例 2：求$\int 2x\cdot e^x dx$

设 $e^x=v'(x) \Rightarrow v(x)=\int e^xdx=e^x$

$2x=u(x) \Rightarrow u'(x)=(2x)'=2$

$$\int 2x\cdot e^xdx=2x\cdot e^x-\int 2\cdot e^xdx+C$$
$$=2xe^x-2e^x+C$$

例 3：求$\int \ln x dx$

$$\int\ln xdx=\int 1\cdot\ln xdx=\int x^0\cdot\ln xdx$$

设 $x^0=v'(x) \Rightarrow v(x)=\int x^0dx=x$

$\ln x = u(x) \Rightarrow u'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\int \ln x dx = \int x^0 \cdot \ln x dx$

$= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx + C$

$= x\ln x - \int 1 dx + C$

$= x\ln x - x + C$

五、sin、cos 相乘的不定积分

例 1：求$\int \sin 3x \cdot \sin x dx$

$\sin 3x \cdot \sin x = -\frac{1}{2}[\cos(3x + x) - \cos(3x - x)]$

$= -\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\int \sin 3x \cdot \sin x dx = \int [-\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x] dx$

$= \int -\frac{1}{2}\cos 4x dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x dx$

$= -\frac{1}{8}\sin 4x + C_1 + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$

$= -\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

例 2：求 $\int \sin^2 x dx$

$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$

$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x dx$

$= \frac{1}{2}x + C_1 - \left(\frac{1}{4}\sin 2x + C_2\right)$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x+C$

六、x^2加减常数项的不定积分

做法：

x^2加常数项　x^2+a^2	设 x=atant　$dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$
x^2减常数项　x^2-a^2	设 $x=\frac{a}{\cos t}$　$dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$
常数项减 x^2　a^2-x^2	设 x=asint　dx=acostdt

例 1：求$\int\frac{1}{4-x^2}dx$

①判断属于表中的哪种类型，并写出 a

$a^2=4\Rightarrow a=2$

②根据表格写出 t 与 dt

设 x=asint=2sint

dx=acostdt=2costdt

③用 t 与 dt 替换 x 与 dx，算出积分

$\int\frac{1}{4-x^2}dx=\int\frac{1}{4-(2\sin t)^2}\cdot2\cos tdt$

$=\int\frac{1}{4-4\sin^2 t}\cdot2\cos tdt$

$=\int\frac{1}{4(1-\sin^2 t)}\cdot2\cos tdt$

$=\int\frac{1}{4\cos^2 t}\cdot2\cos tdt$

$=\int\frac{1}{2\cos t}dt$

$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos t}dt$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C$$

④用 x 替换 t

$$x=2\sin t \Rightarrow \ \sin t=\frac{x}{2}$$

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1 \ \Rightarrow \ \cos^2 t=1-\sin^2 t=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\therefore \cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}\ =\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$\therefore \ \tan t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int\frac{1}{4-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+x}{\sqrt{(2+x)(2-x)}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{2+x}{2-x}+C$$

高数上第六课

一、定积分的计算

例 1：求$\int_1^3(1-x^2)dx$

$\int(1-x^2)dx=x-\frac{1}{3}x^3+C$

将 x=3 代入 $x-\frac{1}{3}x^3$中，结果为 $3-\frac{1}{3}\times3^3=-6$

将 x=1 代入 $x-\frac{1}{3}x^3$中，结果为 $1-\frac{1}{3}\times1^3=\frac{2}{3}$

$-6-\frac{2}{3}=-\frac{20}{3}$

写成标准步骤：

$$\int_1^3(1-x^2)dx=(x-\frac{1}{3}x^3)|_1^3=-6-\frac{2}{3}=-\frac{20}{3}$$

例 2：求$\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$

$\int\sqrt{1-x}\,dx=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$

将 x=1 代入$-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$中，结果为 0

将 x=0 代入$-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$中，结果为$-\frac{2}{3}$

$0-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$

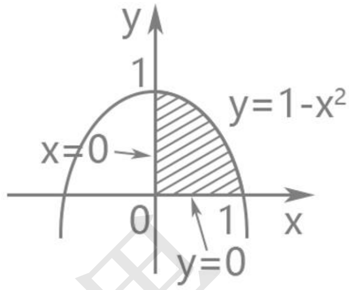
写成标准步骤：

$$\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}|_0^1=0-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$$

二、用定积分求面积

例 1：求 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴围成区域的面积。

① 在坐标系中画出所求区域



② 找出 x 的最大值 $x_{大}$、最小值 $x_{小}$

$x_{大}=1$ $x_{小}=0$

③ 写出上边的方程 $y_{上}$、下边的方程 $y_{下}$

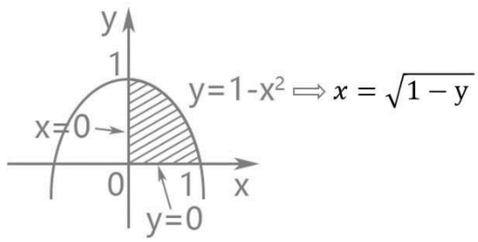
$y_{上}=1-x^2$ $y_{下}=0$

④ 所求面积 $=\int_{x_{小}}^{x_{大}}(y_{上}-y_{下})\,dx$

所求面积 $=\int_0^1(1-x^2-0)dx$

$=\int_0^1(1-x^2)dx=(x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$

① 在坐标系中画出所求区域



② 找出 y 的最大值 $y_{大}$、最小值 $y_{小}$

$y_{大}=1$ $y_{小}=0$

③ 写出左边的方程 $x_{左}$、右边的方程 $x_{右}$

$x_{左}=0$ $x_{右}=\sqrt{1-y}$

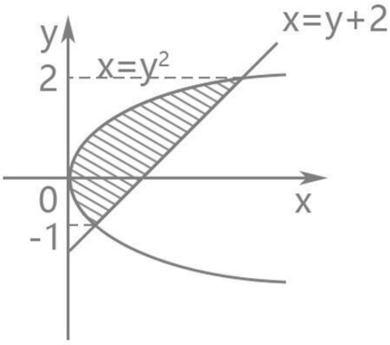
④ 所求面积 $=\int_{y_{小}}^{y_{大}}(x_{右}-x_{左})dy$

所求面积 $=\int_0^1(\sqrt{1-y}-0)dy$

$=\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy=-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}|_0^1=0-(-\frac{2}{3})=\frac{2}{3}$

例 2：求y^2=x 与 y=x−2 围成区域的面积。

① 在坐标系中画出所求区域



② 找出 y 的最大值 $y_大$、最小值 $y_小$

$y_大=2$　　　$y_小=-1$

③ 写出左边的方程 $x_左$、右边的方程 $x_右$

$x_左=y^2$　　　$x_右=y+2$

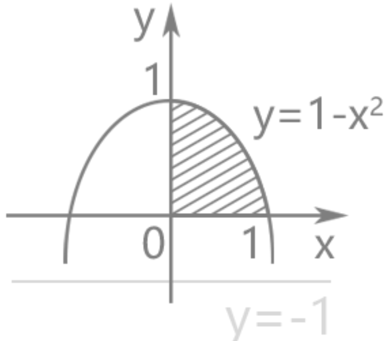
④ 所求面积 $=\int_{y_小}^{y_大}(x_右-x_左)dy$

所求面积 $=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy$

$=(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3})|_{-1}^{2}=\frac{10}{3}-(-\frac{7}{6})=\frac{27}{6}$

三、用定积分求体积

例 1：由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 y=−1 旋转一周生成一个旋转体，求其体积。

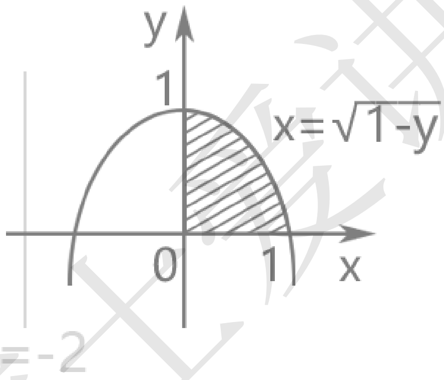


$a=-1$，$c=0$，$d=1$，$f(x)=1-x^2$，$g(x)=0$

$$V=\int_c^d \pi[f(x)-a]^2\,dx-\int_c^d \pi[g(x)-a]^2\,dx$$

$$=\int_0^1 \pi[1-x^2-(-1)]^2\,dx-\int_0^1 \pi[0-(-1)]^2\,dx$$

例 2：由 $y=1-x^2$ 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴所围成区域的图形，绕 $x=-2$ 旋转一周生成一个旋转体，求其体积。



$a=-2$，$c=0$，$d=1$，$f(y)=\sqrt{1-y}$，$g(y)=0$

$$V=\int_c^d \pi[f(y)-a]^2\,dy-\int_c^d \pi[g(y)-a]^2\,dy$$

$$=\int_0^1 \pi[\sqrt{1-y}-(-2)]^2\,dy-\int_0^1 \pi[0-(-2)]^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1\left(\sqrt{1-y}+2\right)^2dy-\int_0^1 4\pi dy$$

$$=\pi\int_0^1\left(5-y+4\sqrt{1-y}\right)dy-4\pi$$

令 $u=\sqrt{1-y}$，则 y：$0\to1$，则 $y=1-u^2$，$dy=-2udu$

$\Rightarrow u$：$1\to0$

$$原式=\pi\int_1^0[5-(1-u^2)+4u]\cdot(-2u)du-4\pi$$

$$=\pi\int_1^0(-u^2+4u+4)\cdot(-2u)du-4\pi$$

$$=\pi\int_1^0(-2u^3-8u^2-8u)du-4\pi$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{u^4}{2}-\frac{8u^3}{3}-4u^2\right)\Big|_1^0-4\pi$$

$$=\frac{19}{6}\pi$$

高数上第七课

一、符合$\mathbf{y'+P(x)y=Q(x)}$的格式，求通解

例 1：已知微分方程 $\mathbf{y'+xy=3x}$，求通解。

$$P(x)=x \qquad Q(x)=3x$$

$$y=e^{-\int xdx}\left[\int 3xe^{\int xdx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\int 3xe^{\frac{1}{2}x^2}dx+C\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(3e^{\frac{1}{2}x^2}+C\right)$$

$$=3+Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

二、可将 x、y 拆到等号两边的题目，求通解

例 1：已知微分方程$\mathbf{y'=\frac{2x}{y}}$，求通解。

$$\mathrm{y'}=\frac{\mathrm{2x}}{\mathrm{y}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{2x}}{\mathrm{y}}$$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\mathrm{2x}}{\mathrm{y}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\cdot \mathrm{ydx}=\frac{\mathrm{2x}}{\mathrm{y}}\cdot \mathrm{ydx} \Longrightarrow \mathrm{ydy}=\mathrm{2xdx}$$

$$\int \mathrm{ydy}=\int \mathrm{2xdx}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{y}^2+\mathrm{C}_1=\mathrm{x}^2+\mathrm{C}_2 \Longrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{y}^2=\mathrm{x}^2+\mathrm{C} \Longrightarrow \mathrm{y}=\pm\sqrt{2\mathrm{x}^2+\mathrm{C}}$$

三、有复合部分的题目，求通解

例 1：已知微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\sin\frac{y}{x}}$，求通解。

设 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux$

令$y'=u+x\cdot\frac{du}{dx}$，将 u 代入式子

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\sin\frac{y}{x}} \Rightarrow u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{1}{\sin\frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow u+x\cdot\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{\sin u} \Rightarrow x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sin u}$$

$$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sin u} \Rightarrow \sin u\cdot du=\frac{dx}{x}$$

$$\int \sin u\cdot du=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\cos u+C_1=\ln|x|+C_2$$

$$\Rightarrow \cos u=C-\ln|x|$$

$$\cos u=C-\ln|x| \Rightarrow \cos\frac{y}{x}=C-\ln|x|$$

四、含 y、y′、y″… 、不含 x 的题目，求通解

特征方程的根	通解
① 单实根 α	$C\cdot e^{\alpha x}$
② 一对单复根 $\alpha\pm\beta i$	$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
③ k重实根 α	$e^{\alpha x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
④ 一对k重复根 $\alpha+\beta i$	$e^{\alpha x}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cdot\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\cdot\sin\beta x\right]$

例 1：已知微分方程 $y''' + 2y'' + y' = 0$，求通解。

$r^3 + 2r^2 + r = 0$

$r(r+1)^2 = 0$

解为 $r = 0$ 或 $r = -1$

单实根 0　　二重实根 -1

对照表，写出通解：

单实根 $0 \Rightarrow \alpha = 0$，$C \cdot e^{0x}$=C

二重实根 $-1 \Rightarrow k = 2$，$\alpha = -1$，

$e^{-1x}(C_1 + C_2x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x}$

通解 $y = C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x}$

五、含 y、y′、y″… 、也含 x 的题目，求通解

例 1：已知微分方程 $y''' + 2y'' + y' = e^x$，求通解。

$y''' + 2y'' + y' = 0$

由“上个题型的例 1”可知，

$r^3 + 2r^2 + r = 0 \Rightarrow r \cdot (r+1)^2 = 0$

单实根 0　　二重实根 -1

通解 $\bar{y} = C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x}$

e^x=$x^0e^x \Rightarrow m = 0$，$\lambda = 1$

根据 λ 的值确定 k 的值，如下表：

λ 不是特征方程的根	k=0
λ 是特征方程的单根	k=1
λ 是特征方程的多重根	k=2

k=0

$y^* = x^k(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_mx^0)e^{\lambda x}$

$y^* = x^0(b_0x^0)e^{\lambda x} = b_0e^x$

$y''' + 2y'' + y' = 0$

$\Rightarrow\ (b_0e^x)''' + 2(b_0e^x)'' + (b_0e^x)' = e^x$

$\Rightarrow\ b_0e^x + 2b_0e^x + b_0e^x = e^x$

$\Rightarrow\ b_0 = \frac{1}{4}$

$y^* = b_0e^x = \frac{1}{4}e^x$

则通解 $y = \overline{y} + y^* = C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$

例 2：已知微分方程 $y''' + 2y'' + y' = 2x$，求通解。

$y''' + 2y'' + y' = 0$

由“上个题型的例 1”可知，

$r^3 + 2r^2 + r = 0\ \Rightarrow\ r \cdot (r+1)^2 = 0$

单实根 0　　二重实根 -1

通解 $\overline{y}$ $= C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x}$

$2x=2x^1e^{0\cdot x}\ \Rightarrow\ m = 1$，$\lambda = 0$

根据 λ 的值确定 k 的值，如下表：

λ 不是特征方程的根	k=0
λ 是特征方程的单根	k=1
λ 是特征方程的多重根	k=2

k=1

$y^* = x^k(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_mx^0)e^{\lambda x}$

$y^* = x^1(b_0x^1 + b_1)e^{0\cdot x} = b_0x^2 + b_1x$

$y''' + 2y'' + y' = 0$

$\Rightarrow \left(b_0x^2 + b_1x\right)''' + 2\left(b_0x^2 + b_1x\right)'' + \left(b_0x^2 + b_1x\right)' = 2x$

$\Rightarrow 0 + 4b_0 + (2b_0x + b_1) = 2x \Rightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y^* = b_0x^2 + b_1x = x^2 - 4x$

则通解 $y = \bar{y} + y^* = C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x} + x^2 - 4x$

例 3：已知微分方程 $y''' + 2y'' + y' = e^x + 2x$，求通解。

$y''' + 2y'' + y' = 0$

由“上个题型的例 1”可知，

$r^3 + 2r^2 + r = 0 \Rightarrow r \cdot (r+1)^2 = 0$

单实根 0　　二重实根 -1

通解 $\bar{y} = C + C_1 \cdot e^{-x} + C_2x \cdot e^{-x}$

$y_1^* = \frac{1}{4}e^x$

$y^* = x^2 - 4x.$

则通解

$$y=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=C+C_1\cdot e^{-x}+C_2x\cdot e^{-x}+\frac{1}{4}e^x+x^2-4x$$