

Задачи по Эконометрике временных рядов

Н.В. Артамонов

7 марта 2025 г.

Содержание

1 Работа с рядами в Python. Визуализация	1
2 ACF & PACF	4
3 Модель ARIMA	5
3.1 Спецификация и базовые свойства	5
3.2 ARIMA в Python	5
4 Модель (*)ARCH	11
5 Многомерные ряды. Модель VAR/VECM. Коинтеграция	14
A Библиотеки Python	21

1 Работа с рядами в Python. Визуализация

№1. Рассмотрим **квартальные** данные по ВВП США с 1990 Q1 по н.в. (ряд gdp) и пусть $y = \log(gdp)$

1. Задайте временной индекс
2. Визуализируйте ряд $gdp_t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
3. Визуализируйте ряд $\Delta^{1/2} y_t, \Delta^{3/2} y_t$ (ширина временного окна 5)
4. Постройте диаграмму рассеяния y_t vs y_{t-1}

5. Постройте диаграмму рассеяния Δy_t vs Δy_{t-1}

№2. Рассмотрим **месячные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в. (ряд $m2$) и пусть $y = \log(m2)$

1. Задайте временной индекс

2. Визуализируйте ряд $m2, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$

3. Визуализируйте ряд $\Delta^{1/2} y_t, \Delta^{3/2} y_t$ (ширина временного окна 7)

4. Постройте диаграмму рассеяния y_t vs y_{t-1}

5. Постройте диаграмму рассеяния Δy_t vs Δy_{t-1}

№3. Рассмотрим **недельные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в.

1. агрегируйте их в квартальные наблюдения (через усреднение)

2. задайте временной индекс

3. визуализируйте полученные наблюдения

№4. Рассмотрим месячные данные краткосрочной (3-х мес, $rate1$) и долгосрочной (10-ти лет., $rate2$)) ставкам для США с 1990-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд $rates$.

1. Задайте временной индекс

2. Визуализируйте ряд $rates$ двумя способами

- отдельные графики
- общий график (два ряда на одном графике)

3. Визуализируйте ряд $\Delta rates$ двумя способами

4. Визуализируйте ряд $\Delta^2 rates$ двумя способами

5. Постройте гистограммы для $rates, \Delta rates, \Delta^2 rates$ двумя способами

6. Постройте диаграмму рассеяния $rate1$ vs $rate2$

7. Постройте диаграмму рассеяния $\Delta rate1$ vs $\Delta rate2$

№5. Рассмотрим месячные данные по США

- краткосрочная (3-х мес) ставка
- долгосрочная (10-ти лет) ставка
- логарифм денежной массы M2

с 2000-01-01 по н.в. как многомерный временной ряд

1. задайте временной индекс
2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую разность

№6. Из finance.yahoo.com загрузите данные по S&P500 с 2005-01-01 по н.в.

1. Сформируйте месячный временной ряд из цены закрытия на последний день каждого месяца
2. Задайте для него временной индекс
3. Визуализируйте ряд
4. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности

№7. Из finance.yahoo.com загрузите данные с 2005-01-01 по н.в. по ценам закрытия S&P500, Apple, Google

1. Сформируйте многомерный ряд из цен закрытия на последний день каждого месяца
2. Визуализируйте многомерный ряд
3. Визуализируйте первую и вторую логарифмические разности

2 ACF & PACF

Во всех задачах по умолчанию уровень значимости 5%.

№1. Рассмотрим **квартальные** данные по ВВП США с 1990 Q1 по н.в. (ряд gdp) и пусть $y = \log(gdp)$

1. Постройте графики ACF и PACF для $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Значимы ли $r(3), r_{part}(3)$ для Δy_t ?
3. Вычислите $\{r(h)\}_{h=1}^3$ и $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$ для Δy_t

№2. Рассмотрим **месячные** данные по М2 США с 1990-01-01 по н.в. (ряд $m2$) и пусть $y = \log(m2)$

1. Постройте графики ACF и PACF для $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Значимы ли $r(4), r_{part}(4)$ для Δy_t ?
3. Вычислите $\{r(h)\}_{h=1}^3$ и $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$ для Δy_t

№3. Рассмотрим месячные данные по 3-х месячной ставке США с 2000-01 по н.в. (ряд y)

1. Постройте графики ACF и PACF для $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Значимы ли $r(3), r_{part}(3)$ для Δy_t ?
3. Вычислите $\{r(h)\}_{h=1}^3$ и $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$ для Δy_t

№4. Рассмотрим данные по S&P500 с 2000-01 по н.в. (ряд $sp500$) и пусть $y = \log(sp200)$

1. Постройте графики ACF и PACF для $y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t$
2. Значимы ли $r(5), r_{part}(5)$ для Δy_t ?
3. Вычислите $\{r(h)\}_{h=1}^3$ и $\{r_{part}(h)\}_{h=1}^3$ для Δy_t

3 Модель ARIMA

3.1 Спецификация и базовые свойства

№1. Рассмотрим модель ARIMA

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)u_t \quad u_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

для следующих многочленов

№	d	$\phi(z)$	$\theta(z)$
1	0	$1 - z + 0.25z^2$	$1 + 0.8z$
2	0	$1 + 0.8z - 0.7z^2$	$1 + 0.5z - 0.8z^2$
3	1	$1 - 0.2z + 0.08z^2$	$1 - 0.3z - 0.88z^2$
4	2	$1 + 1.9z - 0.2z^2$	$1 - 1.6z - 0.36z^2$

Для каждого случая проверьте условия стационарности и обратимости. Запишите спецификацию модели без использования лагового оператор.

3.2 ARIMA в Python

№1. Пусть y_t – логарифм US GDP (квартальные данные) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/trend	спецификация
ARIMA(1,0,1)	+	$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,1,0)	+	$\Delta y_t = \alpha_0 + \phi \Delta y_{t-1} + u_t$
ARIMA(1,1,1)	-	$\Delta y_t = \phi \Delta y_{t-1} + u_t + \theta u_{t-1}$
ARIMA(1,2,0)	-	$\Delta^2 y_t = \phi \Delta^2 y_{t-1} + u_t$

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№2. Пусть y_t – логарифм US M2 (**месячные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(1,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№3. Пусть y_t – логарифм US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/trend
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/тренд?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .

3. Подгонка «оптимальной модели»

- (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
- (b) проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№4. Пусть y_t – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity **месячные данные**) с 2000 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

- (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
- (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .
3. Подгонка «оптимальной модели»
 - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
 - (b) проведите её диагностику
 - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№5. Пусть y_t – 10-летняя ставка (treasury securities with constant maturity) (**дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка
 - (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
 - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .
3. Подгонка «оптимальной модели»
 - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
 - (b) проведите её диагностику
 - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№6. Пусть y_t – 3-месячная ставки (treasury bill, **месячные данные**) с 2000 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

(b) Проведите диагностику каждой модели.

(c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?

2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .

3. Подгонка «оптимальной модели»

(a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA

(b) проведите её диагностику

(c) Постройте прогноз на 10 периодов

№7. Пусть y_t – 3-месячная ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка

(a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(3,0,2)	-
ARIMA(3,0,2)	+
ARIMA(3,1,0)	+
ARIMA(3,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
 - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .
 3. Подгонка «оптимальной модели»
 - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
 - (b) проведите её диагностику
 - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№8. Пусть y_t – логарифм S&P500 (**дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгонка модели заданного порядка
 - (a) Подгоните модели

Модель	drift/const
ARIMA(2,0,2)	-
ARIMA(2,0,2)	+
ARIMA(2,1,0)	+
ARIMA(2,1,1)	-
ARIMA(2,2,0)	-

и постройте прогноз на 10 периодов. Значим ли снос/const?

- (b) Проведите диагностику каждой модели.
 - (c) Проведите кросс-валидацию каждой модели. Какая предпочтительней?
2. Примените тесты единичного корня и найдите порядок интегрирования для y_t .
 3. Подгонка «оптимальной модели»
 - (a) Подгоните «оптимальную» модель ARIMA
 - (b) проведите её диагностику
 - (c) Постройте прогноз на 10 периодов

№9. Запишите спецификации следующих моделей

1. ARIMA(0,1,1) без сноса и со сномом
2. ARIMA(0,1,2) без сноса и со сномом
3. ARIMA(1,1,0) без сноса и со сномом
4. ARIMA(2,1,0) без сноса и со сномом
5. ARIMA(0,2,0) без сноса и со сномом
6. ARIMA(1,2,0) без сноса и со сномом
7. ARIMA(0,2,1) без сноса и со сномом

4 Модель (*)ARCH

№1. Пусть y_t – лог-доходность US M2 (**недельные данные**) с 1995 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	λ
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(2)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(2)-GARCH(1,1)	x
AR(2)-GARCH(1,1)	\sqrt{x}

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

№2. Пусть ряд y_t – первая разность 3-месячной ставки (treasury bill, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	λ
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

2. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	x
AR(1)-GARCH(1,1)	\sqrt{x}

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

№3. Пусть ряд y_t – первая разность 10-летней ставки (treasury securities with constant maturity, **дневные данные**) с 2010 по н.в.

1. Подгоните модели AR-GARCH(p,o,q)

Модель	λ
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(2)-GARCH(1,0,1)	2
AR(2)-GARCH(1,0,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?
- Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
- Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	x
AR(1)-GARCH(1,1)	\sqrt{x}

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

№4. Пусть ряд y_t – лог-доходность S&P500 (дневные данные) с 2010 по н.в.

- Подгоните модели

Модель	λ
AR(1)-GARCH(1,0,1)	2
AR(1)-GARCH(1,0,1)	1
AR(1)-GARCH(1,1,1)	2
AR(1)-GARCH(1,1,1)	1

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

- Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

3. Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
4. Подгоните модели GARCH-in-Mean

Модель	$f(x)$
AR(1)-GARCH(1,1)	$\log x$
AR(1)-GARCH(1,1)	x
AR(1)-GARCH(1,1)	\sqrt{x}

и постройте прогноз на 10 периодов для ряда и его волатильности.

5. Сравните модели по информационным критериям. Какая предпочтительней?

5 Многомерные ряды. Модель VAR/VECM. Коинтеграция

№1. Рассмотрим **недельные** данные с 2000 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)
- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок
 - (a) Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
 - (b) постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
 - (c) Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?
2. «Оптимизация» порядка
 - (a) Подгоните модель VAR «оптимального» порядка

- (b) Проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- (d) Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- (e) Проведите тест Гренджера на причинность

№2. Рассмотрим **дневные** данные с 2000 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)
- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок

- (a) Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
- (b) постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
- (c) Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

2. «Оптимизация» порядка

- (a) Подгоните модель VAR «оптимального» порядка
- (b) Проведите её диагностику
- (c) Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- (d) Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- (e) Проведите тест Гренджера на причинность

№3. Рассмотрим **месячные** данные с 1995 г по н.в. по следующим переменными

- первая разность 3-месячной ставки (3-Month Treasury Bill)

- первая разность 6-месячной ставки (6-Month Treasury Bill)
- первая разность 10-летней ставки (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)
- лог-доходность US M2

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Фиксированный порядок

- Подгоните модели VAR(1), VAR(2), VAR(3)
- постройте прогноз на 10 периодов по каждой модели
- Проведите кросс-валидацию моделей. Какая предпочтительней?

2. «Оптимизация» порядка

- Подгоните модель VAR «оптимального» порядка
- Проведите её диагностику
- Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
- Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
- Проведите тест Гренджера на причинность

№4 (VECM). Рассмотрим **недельные** данные с 2005 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

- Найдите ранг коинтеграции
- Оцените модель VECM «оптимального» порядка

3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

№5 (VECM). Рассмотрим **месячные** данные с 2005 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Найдите ранг коинтеграции
2. Оцените модель VECM «оптимального» порядка
3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

№6 (VECM). Рассмотрим **месячные** данные с 1995 г по н.в. по следующим переменными

- 3-месячная ставки (3-Month Treasury Bill)
- 6-месячная ставки (6-Month Treasury Bill)
- 1-летняя ставка (Treasury Securities at 1-Year Constant Maturity)
- 10-летняя ставка (Treasury Securities at 10-Year Constant Maturity)
- лог-M2

Сформируйте многомерный ряд и визуализируйте его.

1. Найдите ранг коинтеграции
2. Оцените модель VECM «оптимального» порядка
3. Проведите её диагностику
4. Постройте прогноз на 5 периодов. Постройте FEVD
5. Постройте IRF, используя исходное упорядочивание переменных
6. Проведите тест Гренджера на причинность

№7. Рассмотрим VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

где

$$\mathbf{u}_t \sim WN(0, \Sigma) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{pmatrix} > 0$$

т.е. $u_t \sim WN(0, \sigma_u^2)$, $v_t \sim WN(0, \sigma_v^2)$, $\text{cov}(u_t, v_t) = \sigma_{uv}$.

Проверить условие стационарности для следующих матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№8. Рассмотрим VAR-модели

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = y_{t-1} + v_t \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = cx_t + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = 3x_{t-1} - 7y_{t-1} + u_t \\ y_t = x_{t-1} - 2.5y_{t-1} + v_t \end{cases}$$

1. Запишите в матричном виде.
2. Проверить условие стационарности.
3. Какие ряды коинтегрированы?

- Если ряды коинтегрированы, то запишите VECM модель и найдите коинтеграционные соотношения
- Если ряды не коинтегрированы, то запишите VAR-модель для дифференцированных рядов.

№9. Рассмотрим VAR(1)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ w_t \end{pmatrix} \sim WN(0, \Sigma)$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

№10. Рассмотрим VAR(2)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{u}_t \quad \mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim WN(0, \Sigma)$$

Проверьте условие стационарности для матриц

$$\begin{aligned} 1) \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \\ 2) \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

№11. Рассмотрим модели

$$\begin{cases} x_t = 2x_{t-1} - x_{t-2} + u_t \\ y_t = 1.5y_{t-1} - 0.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = 1.5x_{t-1} + y_{t-1} - 0.5x_{t-2} - y_{t-2} + u_t \\ y_t = -x_{t-1} - 0.5y_{t-1} + x_{t-2} + 1.5y_{t-2} + v_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = x_{t-1} + u_t \\ y_t = x_t + x_{t-1} + v_t \\ z_t = x_t + y_{t-1} + w_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t = y_{t-1} + u_t \\ y_t = z_{t-1} + v_t \\ z_t = x_{t-1} + w_t \end{cases}$$

1. Запишите в матричном виде.
2. Проверить условие стационарности.
3. Какие ряды коинтегрированы?
 - Если ряды коинтегрированы, то запишите VECM модель и найдите коинтеграционные соотношения
 - Если ряды не коинтегрированы, то запишите VAR-модель для дифференцированных рядов.

А Библиотеки Python

Библиотека	Описание
<code>pandas</code>	Табличные данные (кросс-секции, панели, временные ряды)
<code>numpy</code>	Работа с массивами, преобразование данных
<code>yfinance</code>	Загрузка данных с finance.yahoo.com
<code>pandas-datareader</code>	Загрузка данных из внешних БД (FRED, finance.yahoo.com etc)
<code>statsmodels</code>	Регрессионный анализ, базовые модели временных рядов
<code>arch</code>	Тесты и модели временных рядов
<code>pmdarima</code>	ARIMA-модель
<code>scikit-learn</code>	Методы машинного обучения
<code>sktime</code>	анализ временных рядов и ML
<code>scipy.stats</code>	Статистические методы (распределения и др)
<code>seaborn</code>	Визуализация статистических данных
<code>matplotlib</code>	Визуализация данных
<code>plotly</code>	Визуализация данных

Таблица 1: Основные библиотеки Python для анализа временных рядов