実データで学ぶ人工知能講座
演習課題：hoeffding_coins*

Matthew J. Holland†
大阪大学 産業科学研究所

実験条件の説明

この簡易な実験では，スライド中に見た「壺」が複数ある状況を考える．基本的な要素は以下の通りである．

- コインが 1000 枚ある
- 各コインを 10 回ずつ独立に投げて,「表」か「裏」か記録しておく

コイン自体はスライド中の「壺」に相当し,「コインを投げること」は，講義中の「壺から玉を取ること」に相当する．コインを投げた結果,「表」か「裏」かの 2 通りしかない．

- 「表」ならば $c = 1$
- 「裏」ならば $c = 0$

上記の具合に一つのコインの表裏の成否を表記する．また，コインは 1000 枚もあるので，コインごとの表裏については，$c_1, c_2, \ldots, c_{1000}$ という形式で表わすことにする．実験条件としては，各コインを何度も投げて，標本データを集めることになっている．標本数を n と表わすと，

- 1 番目のコイン：$c_1(1), \ldots, c_1(n)$
- 2 番目のコイン：$c_2(1), \ldots, c_2(n)$
- $\vdots$
- 1000 番目のコイン：$c_{1000}(1), \ldots, c_{1000}(n)$

10 回投げるのであれば，$n = 10$ である．最後に，コインごとに，投げた回数に占める「表」の割合を以下のように書くことにする．

$$\widehat{c}_j := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_j(i) \tag{1}$$

上記のように，すべてのコインをひと通り 10 回ずつ投げるまでの一連の作業を，この実験の「1 試行」とする．次の節では演習課題の内容を説明する．

---

* この実験条件は Abu-Mostafa et al. [1, 2] の事例に基づくものである．

† 作者の連絡先：matthew-h@ar.sanken.osaka-u.ac.jp.

演習課題の内容

問題 1. 乱数を発生させて，先述の実験を 10 万試行分，実施すること (`numpy` の `random.binomial` を使うと便利).

問題 2. 試行ごとに，次の 3 種類のコインの表の割合（$\widehat{c}$）を記録しておくこと.

- c_1：1 番目のコイン
- c_{rand}：無作為に選んだコイン
- c_{min}：全コインのなかで，表の数がもっとも少なかったコイン

問題 3. 上記の結果として，$\widehat{c}_1$ と $\widehat{c}_{\text{rand}}$ と $\widehat{c}_{\text{min}}$ それぞれ，10 万点からなるデータセットが得られる．その分布をヒストグラムで可視化すること (`matplotlib.pyplot` の `hist` を使うと便利).

問題 4. この 3 種類のコインそれぞれに対して：

A. $\mathbf{P}\{|\widehat{c} - \mathbf{E}\, c| > \varepsilon\}$ を近似し，ε の関数としてそのグラフを描くこと.

B. 同じプロットにおいて，Hoeffding の上界である $2e^{-2\varepsilon^2 n}$ のグラフも併せて表示すること.

C. Hoeffding の不等式に従うコインと従わないコインはどれか．従わないコインはなぜ従わないか自分の言葉で説明すること.

問題 5. 標本数 n(コインを投げる回数) を大幅に増やしてみること ($n = 500$ など)．$\widehat{c}_{\text{min}}$ の分布が $n = 10$ のときと比べて，どのように変わるか．それはなぜか.

おまけ：学習との関係

たとえばモデル $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ を検討しているとする．各々の候補に対して，その標本内誤差を求めることができる．すると

$$\widehat{R}(h_1), \widehat{R}(h_2), \ldots, \widehat{R}(h_k)$$

を観測することができるので，当然その値がもっとも小さくなるような $h \in \mathcal{H}$ を突き止めることもできる．この候補を $\widehat{h}_{\text{min}}$ と書く.

対応関係は以下のようになる：

- コインの 1 試行は学習用のデータ $(\boldsymbol{x}_1, y_1), \ldots, (\boldsymbol{x}_n, y_n)$ 一回分を得ることに相当する.
- $\widehat{c}_j$ は $\widehat{R}(h_j)$ に相当する.
- $\widehat{c}_{\text{min}}$ は $\widehat{R}(\widehat{h}_{\text{min}})$ に相当する.
- $\widehat{c}_{\text{min}}$ が本当の表が出る確率よりも小さく偏るように，$\widehat{R}(\widehat{h}_{\text{min}})$ が標本外誤差よりも小さく偏る.

したがって，$|\widehat{c}_{\text{min}} - \mathbf{E}\, c|$ が Hoeffding の不等式に従わず，誤差がより大きいのと同様に，汎化誤差 $|\widehat{R}(\widehat{h}_{\text{min}}) - R(\widehat{h}_{\text{min}})|$ も Hoeffding の不等式ほどタイトな上界には従わない.

参考文献

[1] Abu-Mostafa, Y., Song, X., Nicholson, A., and Magdon-Ismail, M. (2004). The bin model. Technical report, California Institute of Technology.

[2] Abu-Mostafa, Y. S., Magdon-Ismail, M., and Lin, H.-T. (2012). *Learning From Data.*