Часть 1. СЛАУ

1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение:

В первую очередь, переведём СЛАУ в матрицу, где элементами будут коэффициенты неизвестных, и последний столбец – свободные члены системы. То есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Далее, потребуется преобразовать полученную матрицу в ступенчатую (треугольную), для этого вычитаем из третьей строки первую, а из второй тоже вычитаем первую, но умножив предварительно на два. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Так как у нас остаётся несколько неизвестных переменных в последней строчке системы, уравнение будет иметь бесконечное количество решений. Допустим, $x_4 = c$, тогда решение будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{(4-3c)}{-2} - 2c = 0 \\ -x_2 + \frac{(4-3c)}{-2} + 5c = -2 \\ x_3 = \frac{(4-3c)}{-2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 + x_2 - 1,5c + 2 - 2c = 0 \\ -x_2 + 1,5c - 2 + 5c = -2 \\ x_3 = 1,5c - 2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -3c - 2 \\ x_2 = 6,5c \\ x_3 = 1,5c - 2 \end{cases}$$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

Решение.

а) Представим систему в виде матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & |-17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Мы можем увидеть, что количество уравнений равно количеству неизвестных, а столбцы матрицы (векторы коэффициентов по каждой неизвестной) не зависимы линейно, и матрица невырождена (определитель равен 32). Вектор свободных членов можно представить в виде суммы векторов коэффициентов (например, если умножить второй вектор на 2, а третий вектор умножить на

3), из всего вышеперечисленного следует, что система совместна и решение единственно.

б) По аналогии с предыдущим заданием взглянем на матрицу векторов коэффициентов $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. Можно заметить, что все вектора матрицы линейно зависимы, но вектор свободных членов $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ не лежит на этой прямой (не принадлежит подпространству векторов коэффициентов), а это значит что такая система решений не имеет, она несовместна.

в) В данной системе $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$ количество неизвестных больше количества уравнений, а значит, что такая система неопределена. Векторы коэффициентов не зависимы линейно, следовательно такая система будет иметь бесконечное количество решений.