2. Задание.

Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Сумма матриц A и B вычисляется следующим образом:

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+(-1) \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Произведение:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*4+(-2*0) & 1*(-1)+(-2*5) \\ 3*4+0*0 & 3*(-1)+0*5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$

3. Задание.

Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию 3A−2B+4C для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$3A - 2B + 4C = 3 * \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+8 & 21-10-16 \\ 9-4+4 & -18+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

4. Задание.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить AA^Tи $A^T A$.

Решение.

$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Следовательно, $AA^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+1 & 20-2 & 8+3 \\ 20-2 & 25+4 & 10-6 \\ 8+3 & 10-6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$

Теперь, $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2+5^2+2^2 & 4-10+6 \\ 4-10+6 & 1+(-2)^2+3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$

5. Задание.

Написать на Python функцию для перемножения двух произвольных матриц, не используя NumPy.

Решение.

def Matrix_multiplication(Matrix_1, Matrix_2):

Matrix_2_transposed = list(zip(*Matrix_2))

Resulted_Matrix = [[sum(row_elem*col_elem for row_elem, col_elem in zip(row, col)) for col in Matrix_2_transposed]for row in Matrix_1]

return Resulted_Matrix

6. Задание.

(Вычислить определитель (используйте любой удобный для вас способ вычисления определителя: через миноры, через перестановки или другой):

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$

Решение:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 8*5*9+0+0-0-0-0 = 360$

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 2*6*10+3*7*8+4*5*9-4*6*8-7*9*2-3*5*10 = 120+168+180-192-126-150 = 0$

7. Задание.

Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $\det(A^2)$;

б) $\det(A^T)$;

в) $\det(2A)$.

Решение.

а) Из св-в определителя мы знаем, что для двух квадратных матриц одинакового размера det(AB) = det(A) * det(B)

Следовательно, если det(A) = 4, то $\det(A^2)$ = 4^2= 16

б) Определитель транспонированной матрице равен определителю исходной. Значит, $\det(A^T)$ = 4

в) Умножение строки или столбца матрицы на число приведет к умножению определителя матрицы на то же число. Значит, $\det(2A)$ = 2det(A) = 4*2 = 8

8. Задание.

Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ вырожденная.

Решение. Вырожденная матрица - это матрица, определитель которой равен нулю. Из свойств определителя мы знаем, что если две строки(столбца) матрицы линейно зависимы, то определитель равен нулю. В данной матрице первая и вторая строки линейно зависимы, так как при умножении элементов первой строки на -2 мы получим элементы второй строки.

9. Задание.

Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Решение.

а) Третья строчка является суммой первых двух, отбрасываем её. Получаем $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы равен двум.

б) Третья строка - сумма первых двух (как и в предыдущем примере). Получаем $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы равен трём.