

Détection de fraudes et loi de probabilité de Newcomb-Benford

FERNANDEZ Christelle PONCHEELE Clément EL KAÏM Laura
Encadré par M.DUCHARME

5 mars 2021

RESUME DU PROJET EN QLQ LIGNES
REMERCIEMENTS

Table des matières

Introduction.	2
Naissance de la loi de Newcomb-Benford.	3
Expérimentation sur différents jeux de données.	4
La suite de Fibonacci.	4
Nombres extraits d’un magazine et d’un journal.	5
Population des villes de France.	6
Passage journalier de vélos dans l’allée Beracasa à Montpellier.	7
Nombres générés par les humains.	7
Tests	8
Application des tests	8
Application a des données fiscales italiennes	8
CAS COVID	8
Bibliographie	8

Introduction.

La fraude est une pratique répandue dans de nombreux domaines comme par exemple la finance, le secteur social ou médical. Il peut être tentant pour un être humain ou une société de tricher si cela peut impliquer pour lui une position plus confortable dans la société, telle qu'une réduction de charges, ou même un avantage sur un de ses concurrents. Il semblerait donc logique que des personnes cherchent à déceler ces fraudes.

Les données transmises par un individu ou un organisme peuvent faire l'objet de modifications, c'est de ce type de fraudes auquel nous nous intéresserons ici, et plus particulièrement la modification du premier chiffre significatif (le premier chiffre d'un nombre qui n'est pas un zéro) de nombres pris dans un certain ensemble de données.

De telles modifications entraînent un changement de la répartition des chiffres présents naturellement¹. Si nous connaissons la répartition des chiffres présentés dans un ensemble de données arbitraires, il est donc techniquement possible de savoir si un nombre a été modifié ou non.

Il nous vient donc les questions suivantes : *Qu'elle est cette répartition ? Est-il possible de la connaître et si oui, dans quels cas ?*

De manière intuitive nous pourrions penser que les nombres sont répartis de manière uniforme. Qu'en est-il vraiment ?

La première partie de notre projet consistera à **répondre à ces questions**, nous nous appuierons sur les travaux de Simon Newcomb et Frank Benford, qui ont théorisé la **loi de Newcomb-Benford**, plus communément appelée loi de Benford. Cette loi nous dit que, dans une liste de données dites naturelles, la probabilité d'avoir le chiffre i comme premier chiffre significatif est de $\log_{10}(1 + \frac{1}{i})$.

Par exemple, le chiffre 1 en tant que premier chiffre significatif serait présent à hauteur de 30% alors que le 9 à seulement 4,6%.

Dans la suite **nous mettrons en œuvre une série d'expérimentation** pour constater ou non la véracité de cette loi, pour ce faire dans un premier temps nous récolterons des nombres pris dans des milieux sensés satisfaire la loi de Newcomb-Benford et observerons la répartition du premier chiffre significatif. Puis nous répliquerons une version simplifiée de l'expérience de Hill (1988), qui consiste à observer la répartition du premier chiffre significatif d'une liste de nombre donnée au hasard par des êtres humains, en l'occurrence ses élèves.

Cette expérience est à la base des méthodes de détection de fraudes par la loi de Newcomb-Benford. Si un fraudeur modifie un jeu de données, ce jeu est donc influencé par la pensée humaine, il ne suit donc plus la loi de Newcomb-Benford. Pour détecter la fraude il suffit donc de comparer les premiers chiffres significatifs. Cependant ces comparaisons doivent se faire de manière rigoureuses et scientifiques. Pour cela il existe des test statistiques, dont le plus connu, le test du χ^2 , ou bien celui de Ducharme et collab. (2020).

Il nous vient donc les questions suivantes : *Ces tests sont-ils fiables ? Existe-t-il un test significativement meilleur que les autres ? Vont-ils dans le même sens ? Et sinon que faire ?*

La réponse à ces question constituera donc la deuxième partie de ce projet, pour ce faire nous mettrons en œuvre différents tests sur des jeux de données comme la fiscalité italienne.

1. Les données dites naturelles sont celles qui n'ont pas été influencé par la pensée de l'homme.

Naissance de la loi de Newcomb-Benford.

Il serait tentant de penser que les nombres sont répartis de manière uniforme, cela viendrait du biais d'équiprobabilité². Ce dernier consiste à “penser qu'en l'absence d'information, tous les cas ont la même probabilité de se produire et que le hasard implique nécessairement l'uniformité”.

Néanmoins cette hypothèse sera contredite une première fois par l'astronome, mathématicien, économiste et statisticien canadien Simon Newcomb. Ce dernier fournira en 1881 une première approche au principe statistique, qui se fera injustement appeler *Loi de Benford*. Celui-ci remarquera que les premières pages des tables logarithmiques sont plus utilisées que les pages suivantes. Il publiera sa découverte dans un article de l'*“American Journal of Mathematics”*.

Cette découverte mise de côté pendant plusieurs années, ce n'est qu'en 1938 que l'ingénieur et physicien américain Frank Benford arrivera au même résultat après avoir répertorié des dizaines de milliers de données. Celui-ci pensera être le premier à l'initiative de cette loi, et c'est pour cette raison que la *loi de Newcomb-Benford* se fera plus généralement appelée *loi de Benford*.

Cette loi nous dit que, dans une liste de données arbitraires, la probabilité d'avoir le chiffre i comme premier chiffre significatif est de $\log_{10}(1 + \frac{1}{i})$.

PCS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Benford	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Tableau 1 : Répartition du premier chiffre significatif selon la loi de Newcomb-Benford.

Nous retrouvons cette loi dans énormément de domaines comme les mathématiques, l'environnement, la finance, la physique, etc, plus précisément sur des données telles que la longueur des fleuves, la population des villes dans un pays, des déclarations de revenus, etc.

Notons cependant qu'il existe des cas où les données ne suivent pas cette loi, notamment des données dites non naturelles qui seraient influencé par la pensée humaine (nombres premiers, nombres générés par des humains, etc).

2. Défini en 1985 par Marie-Paule Lecoutre (*source*).

Expérimentation sur différents jeux de données.

Après avoir pris connaissance de la **loi de Newcomb-Benford**, il serait intéressant de la mettre en pratique sur différents jeux de données.

La suite de Fibonacci.

Intéressons-nous dans un premier temps à la suite de Fibonacci.

Cette suite est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Sa formulation est la suivante :

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{ et } \forall n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Nous commençons par recueillir les 1000 premiers termes de la suite de Fibonacci, pour extraire le premier chiffre significatif de chacun de ces nombres.

Par la suite nous calculons la répartition de chaque chiffre significatif et obtenons l'histogramme suivant :

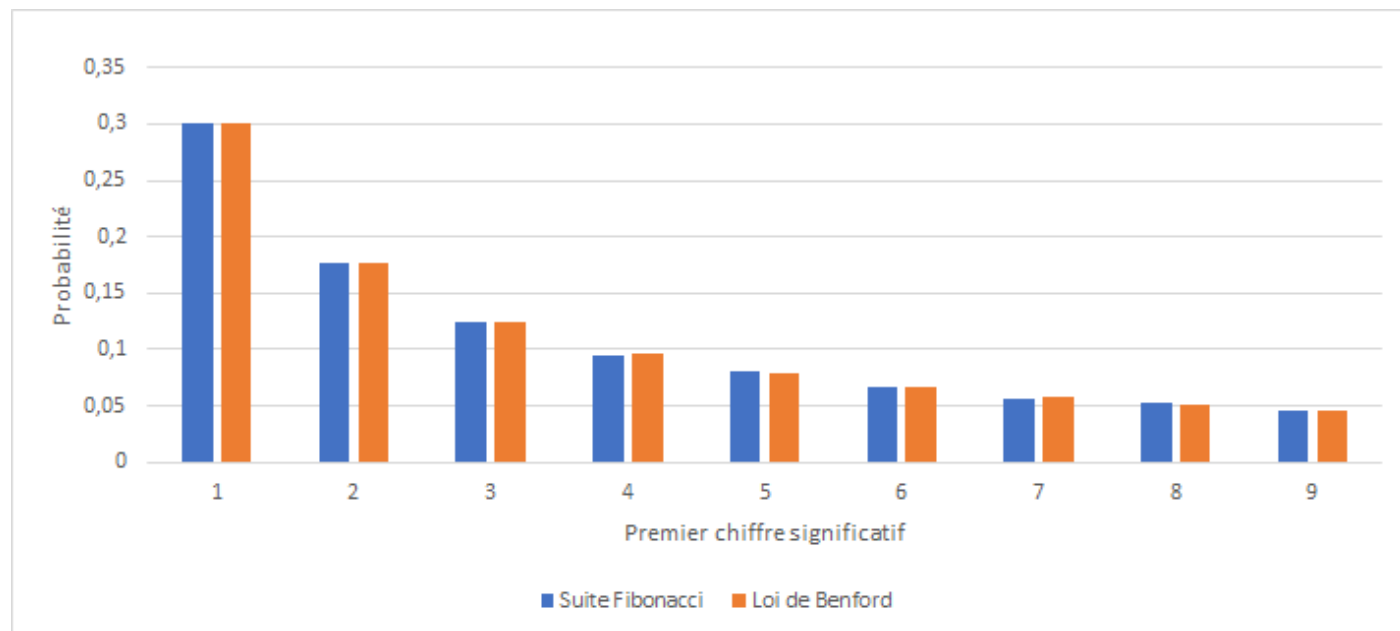


Figure 1 : Histogramme de la répartition du 1er chiffre significatif de la suite de Fibonacci en comparaison avec la loi de Benford.

Il semblerait que la répartition des chiffres significatifs des 300 premiers nombres de la suite de Fibonacci suive la **loi de Newcomb-Benford**.

Nombres extraits d'un magazine et d'un journal.

Dans un second temps, nous relevons les prix présents dans un magazine de mobilier de la marque *AMPM*, ainsi que tous les nombres répertoriés dans un journal *Les ECHOS*. Nous récoltons environ 300 nombres par magazine et, de la même façon qu'énoncé précédemment, calculons la répartition des chiffres significatifs de ces nombres.

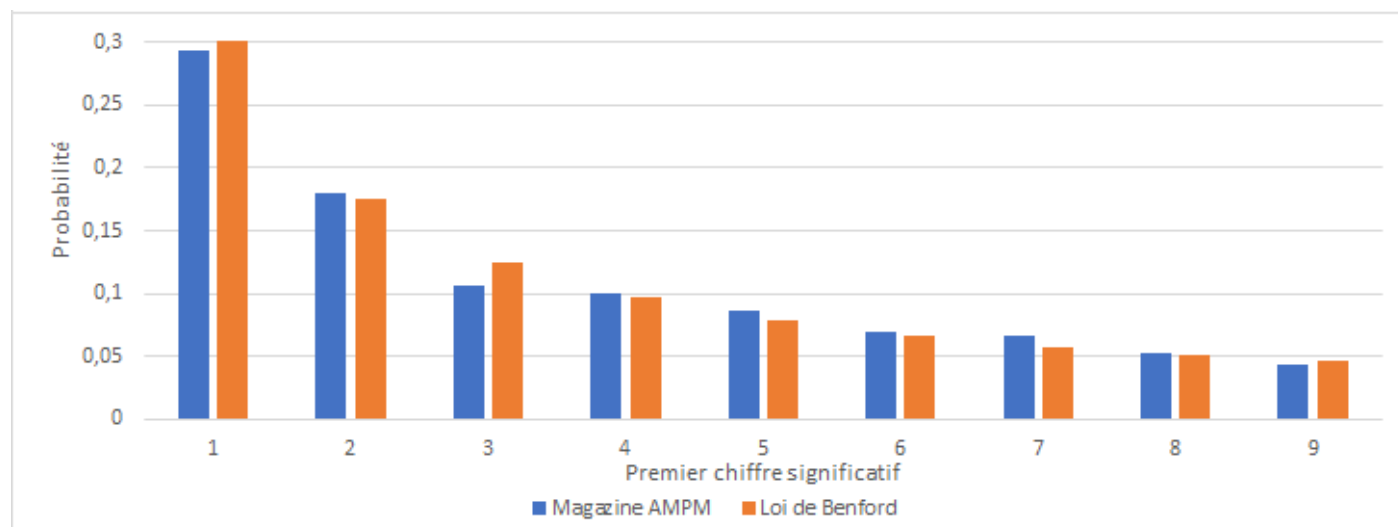


Figure 2 : Histogramme de la répartition du 1er chiffre significatif des prix du magazine AMPM en comparaison avec la loi de Benford.

La répartition des chiffres significatifs des prix du magazine *AMPM* paraît fortement similaire à celle de la **loi de Newcomb-Benford**. Nous constatons tout de même une légère différence pour le chiffre 3.

Observons maintenant la répartition des données issues du journal *Les ECHOS*.

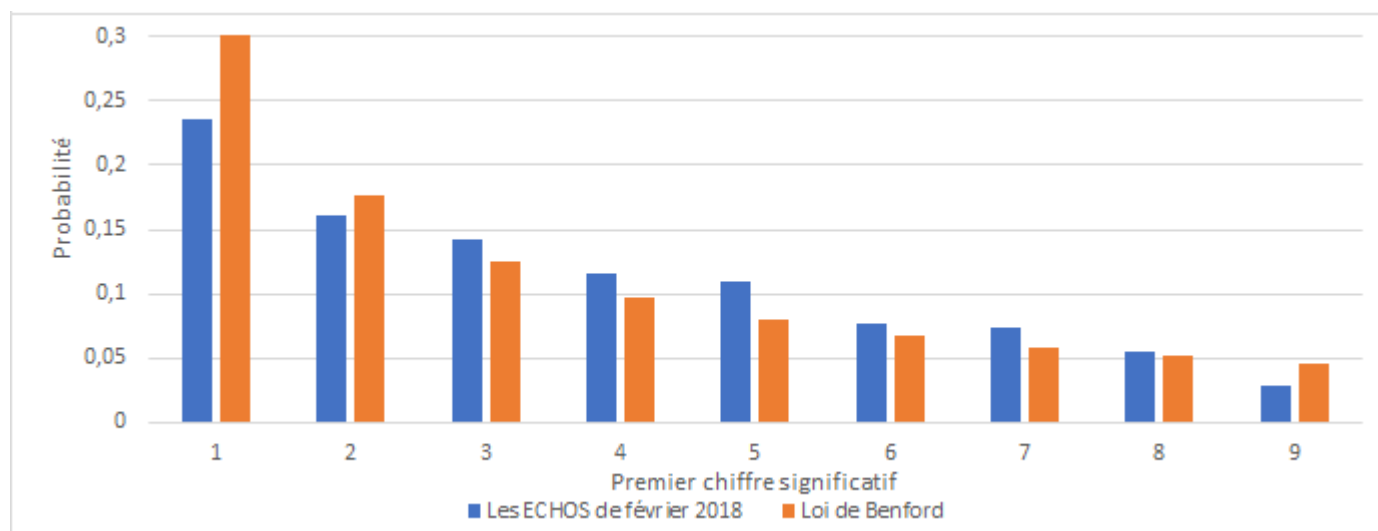


Figure 3 : Histogramme de la répartition du 1er chiffre significatif des nombres du journal LES ECHOS en comparaison avec la loi de Benford.

Nous remarquons ici la même tendance décroissante. Cependant les proportions des chiffres significatifs entre les données du journal et celles de la **loi de Newcomb-Benford** sont relativement différentes.

Population des villes de France.

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à la population des villes françaises. À l'aide des données de l'*INSEE*, nous répertorions environ 35000 premiers chiffres significatifs et regardons leur répartition.

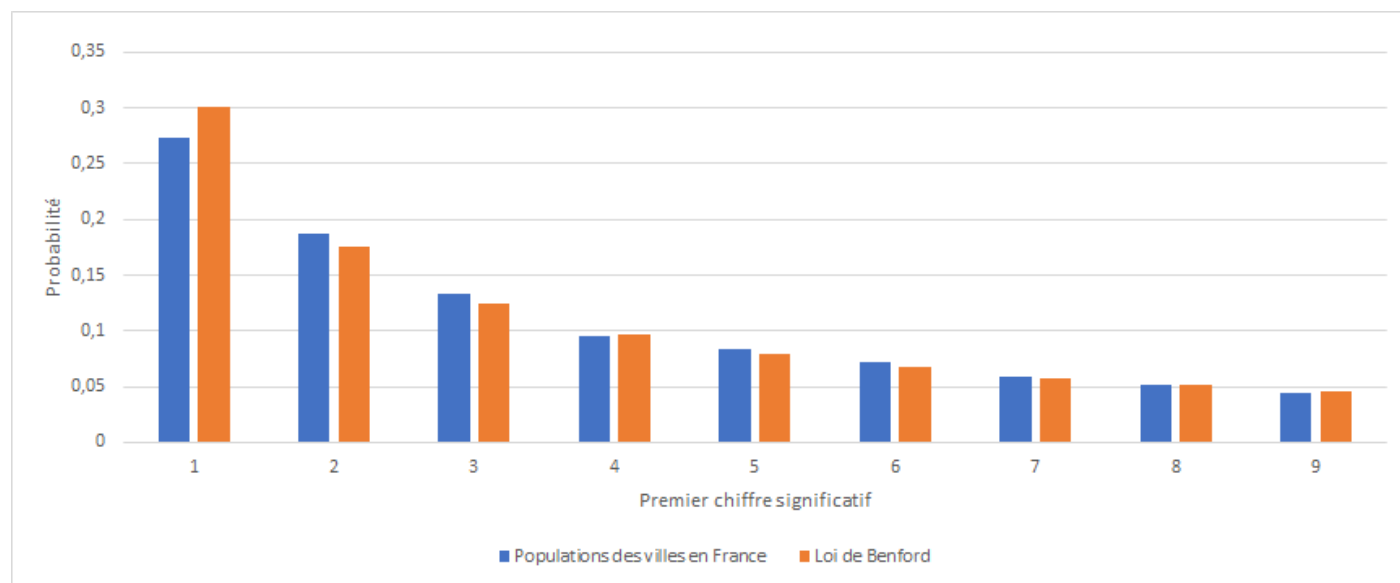


Figure 4 : Histogramme de la répartition du 1er chiffre significatif de la population française en comparaison avec la loi de Benford.

Ici les répartitions sont fortement ressemblantes, c'est aussi le cas pour de nombreuses données démographiques naturelles. Nous aurions pu également analyser les codes postaux, la longueur des rivières ou encore la distance des villes de France à Paris.

Passage journalier de vélos dans l'allée Beracasa à Montpellier.

La ville de Montpellier étant en pleine transition écologique, elle ouvre de plus en plus l'accès aux vélos sur ces routes. Pour en mesurer l'impact, elle a mis en place des éco-compteurs dans plusieurs rues. Les données issues de ces compteurs sont en libre accès, nous nous sommes donc intéressés au nombre de passages journaliers de vélos dans l'allée Beracasa sur une année.

Nous obtenons la répartition suivante :

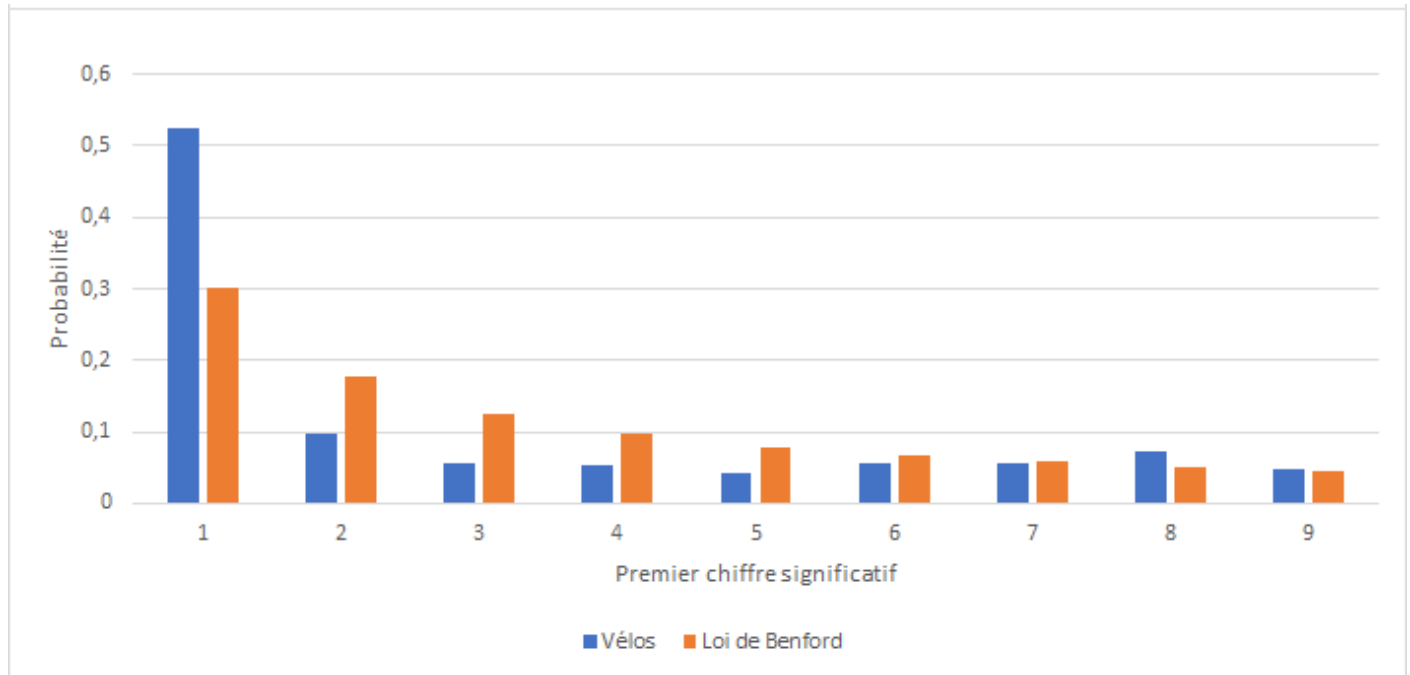


Figure 5 : Histogramme de la répartition du 1er chiffre significatif du passage journalier de vélos en comparaison avec la loi de Benford.

Dans ce cas la proportion du chiffre 1 est de plus de 50% contre 30% pour la **loi de Newcomb-Benford**. La différence de répartition des chiffres 2, 3, 4, 5 est aussi notable, elle est même environ 2 fois moins élevée.

Visuellement, nous pourrions penser que la répartition de ces données ne suit pas la **loi de Newcomb-Benford**.

PARLER DES DONNEES BRUTE (1ere et seconde génération) Les données brutes peuvent ne pas toujours suivre une loi de Benford

Nombres générés par les humains.

TRANSITION AVEC LES TESTS Une inspection visuelle ne suffit pas, l'outil pour ça c'est les tests d'adéquation à la loi de Benford. Erreur 1ère espèce : rejeter H_0 (c'est dire que c'est pas Benford alors que c'est, dire qu'il y a fraude alors que non). Erreur 2ème espèce : (ne pas rejeter H_0 à tort, laisser passer une fraude). En stat l'erreur de 1ère espèce est souvent plus présente. On se dit pas qu'il y a fraude, on suspecte la fraude, on lance une audit (ça coûte des sous). Dans tous les cas on risque de faire une erreur (mettre le tableau).

Tests

PARLER DES TESTS DE MANIERE GENERALE, plutot theorique

le test privilégié est le test de χ^2 quand c'est une problème qui a une certaine importance pleins d'autres tests qui existent (package R Benford test le seul test important dans ce package est celui du χ^2 , 2ème package Benford smooth test créé par samuel et credo plus spécifique au problème disponible sur le site CRAN) Les deuxièmes tests sont mieux car plus puissantes, cad qu'ils détectent plus de fraudes. On veut le test le plus puissant possible, a 5% faire une description des outils/tests

données fiscales sur plusieurs années de 20 régions italiennes, test de χ^2 (c'est pas un test très puissant, ne permet pas nécessairement de détecter les fraudes.) Il ont mis que la statistique de test mais pas la p-value

Application des tests

Application a des données fiscales italiennes

CAS COVID

Un chinois a affirmé qu'il n'y avait pas eu fraudes en Chine

Bibliographie