เซต

บทที่ 1

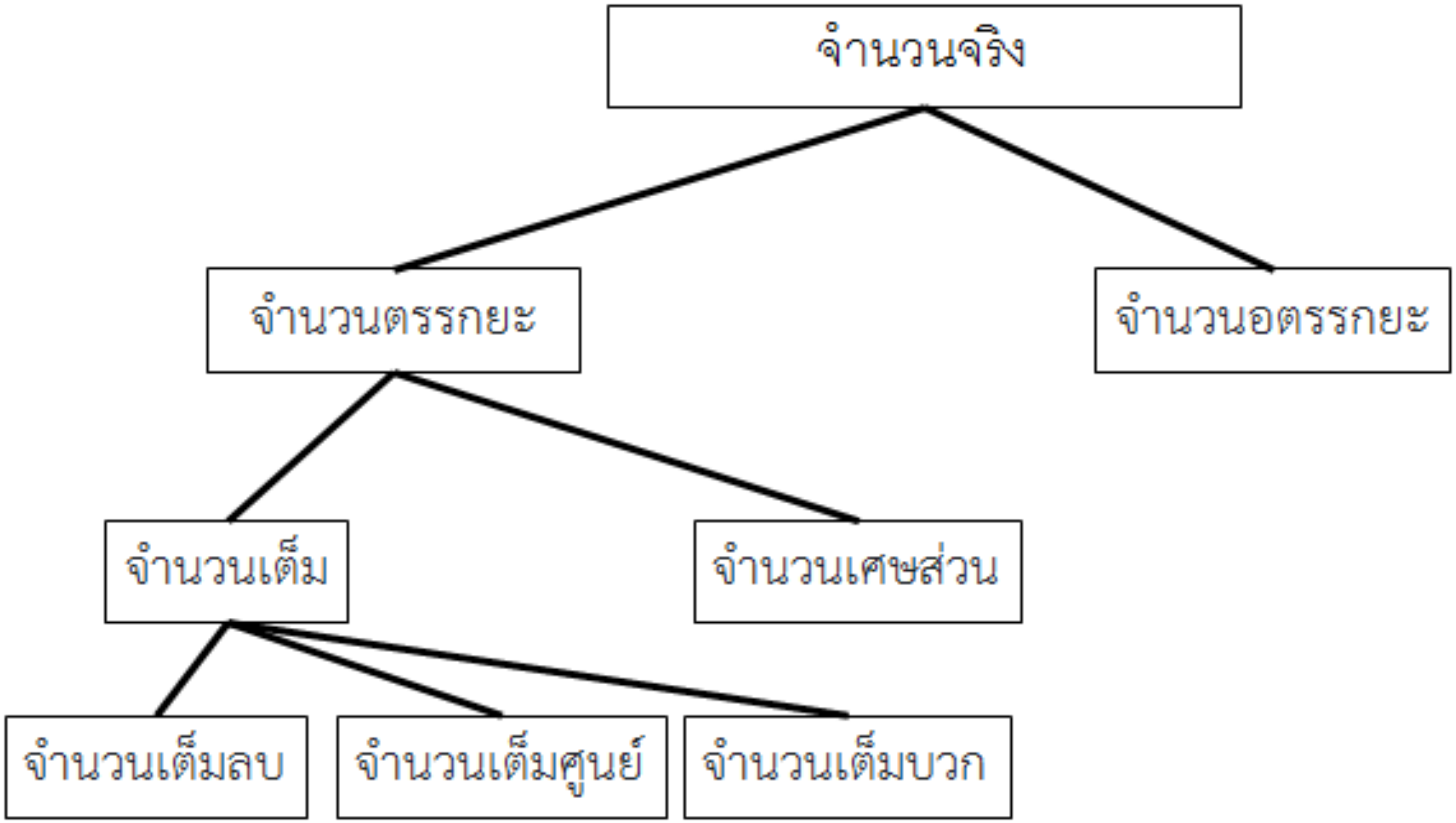
Discrete Mathematics for Computer Science

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่

https://bit.ly/Discrete-ENS

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ระบบจำนวนจริง



ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนเต็มบวก	I^+	1 2 3	**จำนวนเต็มบวก** คือ จำนวนที่นับสิ่งของต่างๆ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ จำนวนคู่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว เช่น 2, 4, ... จำนวนคี่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว เช่น 1, 3, 5, ...
จำนวนเต็มลบ	I^-	-1 -2 -3	
จำนวนเต็มศูนย์	I^0	0	
จำนวนเต็ม	I	-1 0 1	**จำนวนเต็ม** คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ โดยไม่ใช่เศษส่วนหรือทศนิยม เช่น 21, 4, −20 แต่จำนวนเหล่านี้ 9.75, $\frac{5}{2}$, $\sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม เซตของจำนวนเต็มเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...) จำนวนเต็มศูนย์ (0) และจำนวนเต็มลบ (−1, −2, −3, ...)

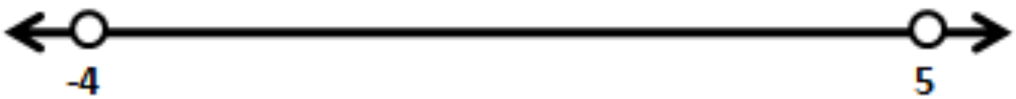
ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนตรรกยะ	Q	$\frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{49}, 5, 0.75$	**จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน จำนวนเต็ม ทศนิยมที่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{25}{10}, 0.5, -\frac{5}{1}$
จำนวนอตรรกยะ	Q’	$\sqrt{3}, \sqrt{7}$	**จำนวนอตรรกยะ** คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมที่ไม่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$
จำนวนจริง	R	จำนวนอตรรกยะ และ จำนวนตรรกยะ	**จำนวนจริง** คือ จำนวนที่สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับจุดบนเส้นจำนวนได้

ช่วงของจำนวนจริง

1) ช่วงเปิด

- (-4,5) = { x | -4 < x < 5 }

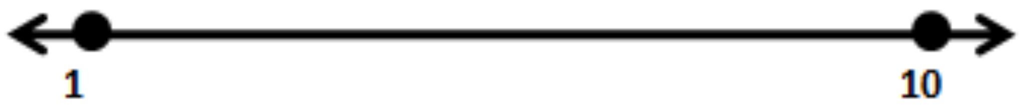


- โดยจุดที่เป็นวงกลมโปร่งใส เป็นจุดที่ไม่อยู่ในเซต ดังนั้น -4 และ 5 จึงไม่อยู่ในเซต และเทียบเท่ากับวงเล็บเปิด “(”,“)”

ช่วงของจำนวนจริง

2) ช่วงปิด

- $[1, 10] = \{ x \mid 1 \leq x \leq 10 \}$

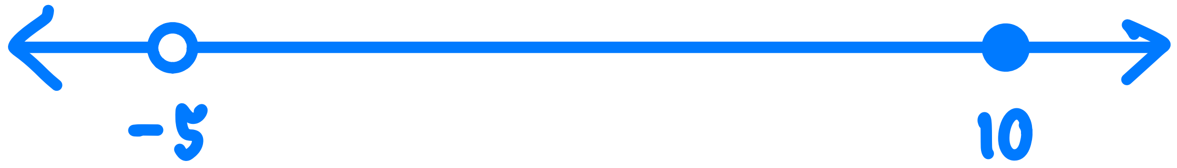


- โดยจุดที่เป็นวงกลมทึบ เป็นจุดที่อยู่ในเซต ดังนั้น 1 และ 10 จึงอยู่ในเซต และเทียบเท่ากับวงเล็บปิด “[”,“]”

ช่วงของจำนวนจริง

3) ช่วงกึ่งเปิดปิด

- (-5, 10] = { x | -5 < x ≤ 10 }



ช่วงของจำนวนจริง

4) ช่วงอนันต์

- $[1,\infty) = \{ x \mid x \geq 1 \}$

เซต

- **เซต** คือ กลุ่มของสิ่งต่างๆ ซึ่งต้องทราบแน่นอนว่ามีสิ่งใดอยู่ในกลุ่มบ้าง โดยสิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า “สมาชิก”
  - A = {1,2,3,4,5}
  - B = {2,1,1,3}

เซต

- **เซตว่าง** คือ ไม่มีสมาชิก (∅) หรือ {}
- **เซตจำกัด** (finite sets) คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกได้
  - เช่น A = { 1,2,3,4 ...., 100 }
- **เซตอนันต์** (infinite sets) คือ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้
  - เช่น A = { 1,2,3,4 .... }

เซตที่เท่ากัน

- **เซตที่เท่ากัน** คือ เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันหมด โดยไม่พิจารณาลำดับและสมาชิกสามารถซ้ำกัน
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in I^+ \mid 1 \leq x \leq 5\}$
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in I \mid 0 \leq x \leq 5\}$
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{1,2,3,4,5,5\}$

เซตที่เท่ากัน

- A = {1,2,3} B = {2,1,1,3}
- A = {1,2,3,4,5} B = $\{x \in R \mid 1 \leq x \leq 5\}$
- A = {แดง, เหลือง, ชมพู, เขียว, แสด}
- B = {เงาะ, ลำไย, มะม่วง, ชมพู่, แตงโม}

เซตที่เทียบเท่ากัน

- **เซตที่เทียบเท่ากัน** คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
  - A = {1,2,3,4,5} B = {1,2,3,4,5,5}
  - A = {แดง,เหลือง,ชมพู,เขียว,แสด}
  - B = {เงาะ,ลำไย, มะม่วง,ชมพู่, แตงโม}
  - A = {1,2,3,4,5} B = $\{x \in I^+ \mid 1 \leq x \leq 5\}$

สมาชิก

- **สมาชิก** ถ้าเซต A คือ {1, 2, 3} แล้ว $1 \in A$

$\in$ (epsilon) = เป็นสมาชิก, $\notin$ = ไม่เป็นสมาชิก, | = โดยที่

- A = {1, 2, 3} แล้ว $2 \in A$
- $A = \{x \in I^+ \mid 0 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ แล้ว $0 \in A$
- A = {1, 2, 3} แล้ว $4 \notin A$ และ $\{1\} \notin A$

สับเซต

- **สับเซต (SUBSET)** คือ ทั้งหมดของเซต A อยู่ใน B
- หรือ A เป็นสับเซตของ B ($A \subset B$)
  - B = {1,2,3} A = {1,2} สรุป $A \subset B$
  - B = {1,2,3} C = {1,4} สรุป $C \not\subset B$

เพาเวอร์เซต

- **เพาเวอร์เซต (POWERSET)** P(A) คือเซตเป็นไปได้ทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A
  - $A = \{1, 2\}$ $P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$ = จำนวนคือ 2^n
  - $B = \{1,2,3\}$
  - $P(B) =$

Cartesian Product

- **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$
- คือ เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมดที่ $a \in A$ และ $b \in B$
- โดย $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A$ และ $b \in B \}$
  - $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x, y\}$
  - $A \times B =$

เอกภพสัมพันธ์

- **เอกภพสัมพันธ์ (Universal)** หรือ U คือ ขอบเขตทั้งหมดที่พิจารณา
- เช่น U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
- เซต A คือ {1,2,3,4}

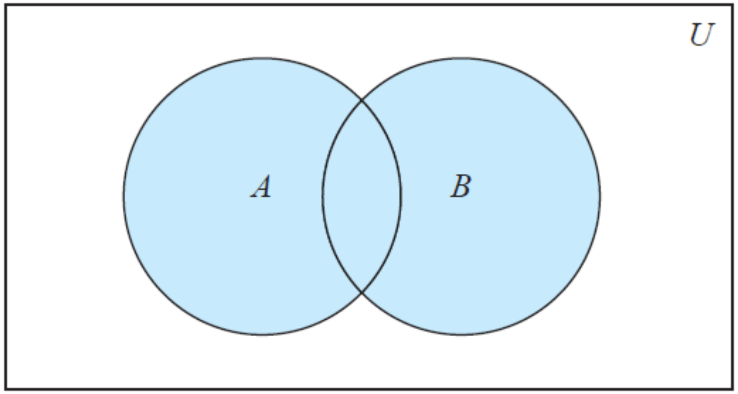
Quiz

- A = [1, 2, 3, x] แล้ว A เป็นเซต หรือไม่
- A = {-1, 0, {1,2} } จงหา P(A)
- A = {∅, 0, {∅} } จงหา P(A)

Union

- **Union** (∪) สำหรับยูเนียนระหว่างเซตสองเซต คือ การเอาเซตทั้งสองเซตมารวมกันเป็นเซตเดียว นั้นคือ การเอาสมาชิกมารวมกัน
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่ายูเนียน คือ ∪ ตัวอย่างเช่น

A = {1,2}   B ={2,3}   ➔ A∪B = {1,2,3}

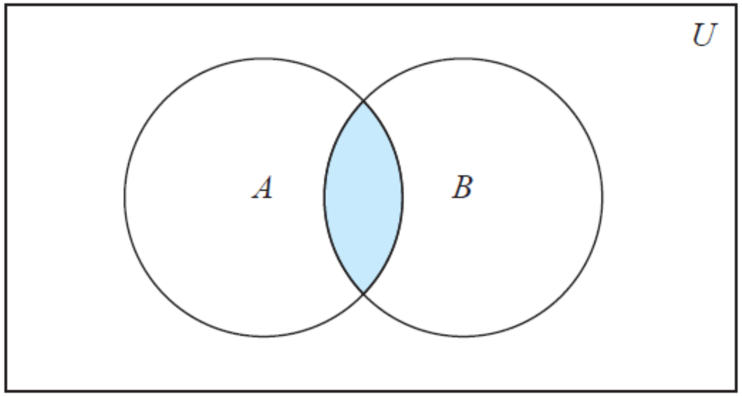


$A \cup B$ is shaded.

Intersection

- **Intersection** (∩) สำหรับอินเตอร์เซกกันของเซตสองเซต คือ การหาสมาชิกส่วนที่ซ้ำกันจากสองเซตมาเขียนเป็นอีกเซตหนึ่ง
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่าอินเตอร์เซก คือ ∩ ตัวอย่างเช่น

A = {1,2}   B ={2,3}   ➔ A∩B = {2}

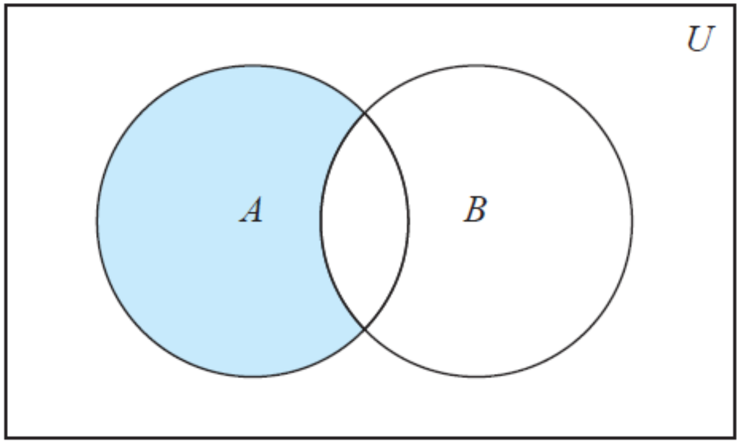


A ∩ *B* is shaded.

Difference

- **Difference** (-) สำหรับการหาผลต่างระหว่างเซตหรือจับเซตสองเซตมาลบกัน ให้คิดว่าเอาเซตข้างหน้าเป็นตัวตั้ง จากนั้นถ้าหากมีสมาชิกตัวไหนซ้ำกับในเซตด้านหลังให้ตัดออก
- สัญลักษณ์แทนการลบ คือ เครื่องหมายลบ – ตัวอย่างเช่น

A = {1,2} B= {2,3} ➔ A - B = {1}

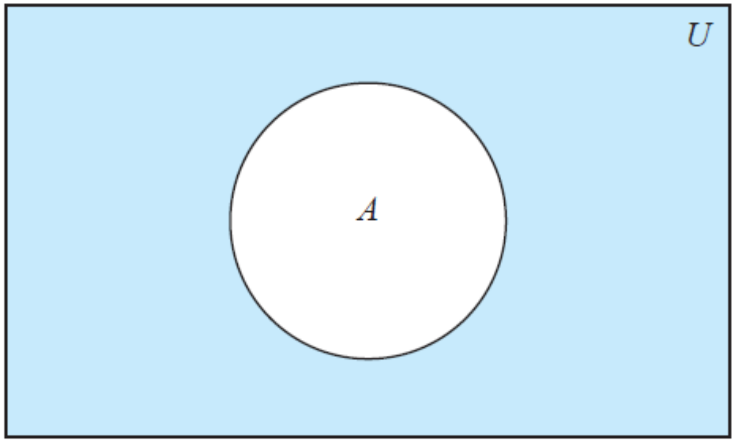


$A - B$ is shaded.

Complement

- Complement (′) สำหรับคอมพลีเมนต์ของเซต เป็นการดำเนินการบนเซตเซตเดียว ทำได้โดยการเอายูนิเวอร์สหรือเอกภพสัมพัทธ์เป็นตัวตั้งแล้วลบออกด้วยเซตนั้นๆ หรือ การหาสมาชิกทั้งหมดที่ไม่อยู่ในเซตนั้น แต่อยู่ในยูนิเวอร์ส
- สัญลักษณ์ของคอมพลีเมนต์ คือ ′ ตัวอย่างเช่น

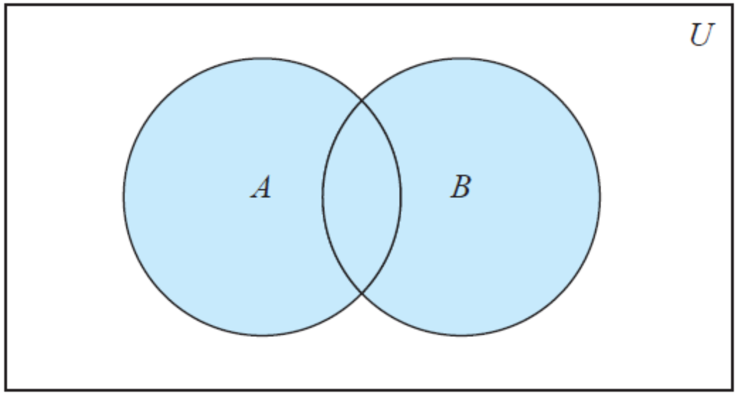
U = {1,2,3,4} ➔ A = { 1,2} สำหรับ A′ = {3,4}



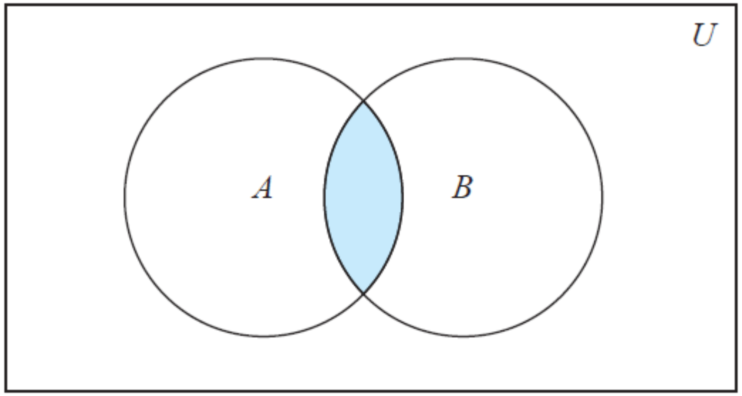
$\overline{A}$ is shaded.

Euler diagram

- แผนภาพออยเลอร์ (Euler diagram) เป็นแผนภาพที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของเซตต่างๆ โดยให้วงกลมแต่ละวงแทนแต่ละเซต และแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละเซตด้วย การครอบซึ่งแสดงความเป็นสับเซต การทับซ้อนกันหรือการไม่ทับซ้อนกัน ซึ่งแสดงว่าทั้งสองเซตไม่มีความสัมพันธ์กัน



$A \cup B$ is shaded.



$A \cap B$ is shaded.

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 1. จงพิสูจน์ ถ้า $3x - 15 = 0$ แล้ว $x = 5$
  - แก้สมการ $x = 15 / 3 = 5$ เป็นจริง
  - สรุปข้อความนี้ เป็นจริง

- 2. จงพิสูจน์ $23 \in A$ โดย
  $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x = 3k+5$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม $\}$
  - กรณีนี้คือ $x = 23$ โดยเงื่อนไขคือ x และ k เป็นจำนวนเต็ม
  - แก้สมการ $23 = 3k + 5$ ได้ผลลัพธ์คือ $k = 6$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม
  - สรุป $23 \in A$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 3. จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด

  $A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$
  - $A = \{ 2^i \mid i \in \{1,2,3,\dots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \dots\dots \}$
  - $B = \{ 2j \mid j \in \{1,2,3,\dots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots\dots \}$
  - วิเคราะห์ $A \subset B$ คือ ทุกอย่างใน A ต้องอยู่ใน B ถ้ามีเพียงกรณีเดี่ยวที่ A ไม่อยู่ใน B แสดงว่า $A \not\subset B$
  - พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต A เป็นจำนวนคู่เท่านั้น ซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B
  - สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 4. จากข้อ 3 จงพิสูจน์ว่า B $\not\subset$ A

  $A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

  - $B = \{ 2j \mid j \in \{1,2,3,\ldots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots \}$
  - $A = \{ 2^i \mid i \in \{1,2,3,\ldots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots \}$
  - วิเคราะห์ B $\subset$ A คือ ทุกอย่างใน B ต้องอยู่ใน A ถ้ามีเพียงกรณีเดียวที่ B ไม่อยู่ใน A แสดงว่า B $\not\subset$ A
  - พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต B คือ 6 ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต A
  - สรุป B $\not\subset$ A

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 5. $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ $B = \{2, -3\}$
- จงพิสูจน์ว่า $A = B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 6. $A = \{ x \mid x = 2j$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

  $B = \{ x \mid x = 2k+2$ เมื่อ $k \in I$ และ $k > -1 \}$

- จงพิสูจน์ว่า $A = B$ โดยที่ A จะเท่ากับ B ได้ก็ต้องเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
  - พิสูจน์ $A \subset B$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

$B = A$

$2k+2 = 2j$

$2k+2 = 2j-2 + 2$

$2k+2 = 2(j-1) + 2$

$k = j - 1$ j มีค่าต่ำสุดคือ 1 ดังนั้น k มีค่าเป็น 0 แต่ k สามารถมีค่าเป็น 0 ได้ $k > -1$

  - สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- (ต่อ) $A = \{ x \mid x = 2j$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

  $B = \{ x \mid x = 2k+2$ เมื่อ $k \in I$ และ $k > -1 \}$

  - พิสูจน์ $B \subset A$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

    $A = B$

    $2j = 2(k+1)$

    $j = k+1$ k มีค่าต่ำสุดคือ 0 ดังนั้น j มีค่าเป็น 1 ซึ่ง $j \in I^+$

    สรุป $B \subset A$

  - ดังนั้น $A = B$

แบบฝึกหัด 1

	I^+	I^-	I^0	Q	Q’
-555					
7.2121…					
$\frac{1}{2}$					
96					
$\sqrt{7}$					
0.51					
9					
$\sqrt{7} \text{ x } \sqrt{343}$					
$(\sqrt{6})^2$					
1.234852793…..					
$\sqrt{3} \text{ x } \sqrt{9}$					
0					

แบบฝึกหัด 2

- $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 2 = 0\}$
- $B = \{0,1,2,\ldots\}$

จงพิสูจน์ว่า $A \neq B$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงว่า 30 $\notin$ A
- โดย A = {x | x เป็นจำนวนเต็ม และ x = 3k+5 เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม}

แบบฝึกหัด 4

- จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5$ เมื่อ $k \in I^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

แบบฝึกหัด 5

- จงพิสูจน์ว่า $B \not\subset A$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5$ เมื่อ $k \in I^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

คุณสมบัติของเซต

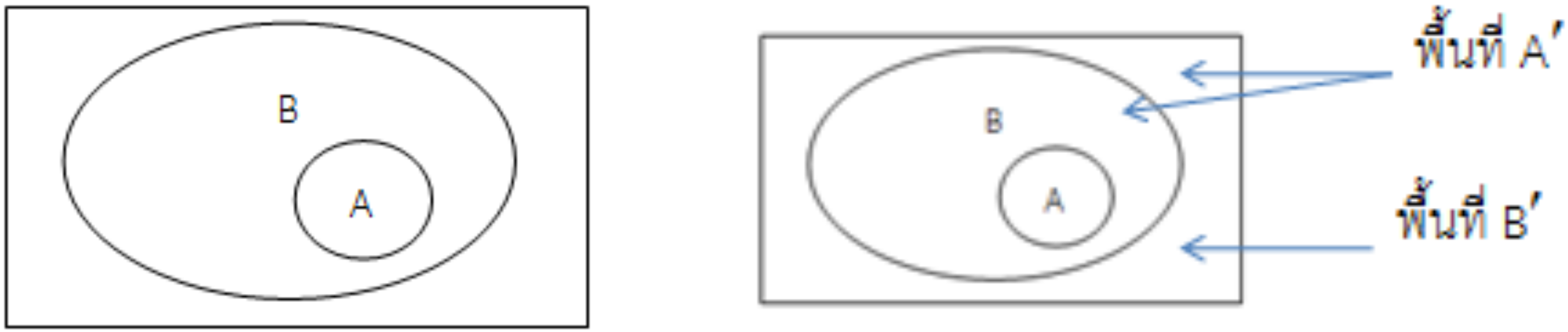
1) $A \subset A$ $\varnothing \subset A$	2) $A \in P(A)$ $\varnothing \in P(A)$ $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$	3) $U' = \varnothing$ $\varnothing' = U$ $A \cup A' = U$ $A \cap A' = \varnothing$
4) $A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$	5) $A \subset A \cup B$ $B \subset A \cup B$	6) $A \cup B = B \cup A$ (กฎการสลับที่)
7) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (กฎการเปลี่ยนหมู่)	8) $A \cap A = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	9) $A \cap B \subset A$ $A \cap B \subset B$
10) $A\cap B = B\cap A$ (กฎการสลับที่)	11) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ (กฎการเปลี่ยนหมู่)	12) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (กฎการกระจาย)

คุณสมบัติของเซต

13) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (กฎการกระจาย)	14) $(A')' = A$	15) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (กฎเดอมอร์แกน)
16) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (กฎเดอมอร์แกน)	17) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$	18) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
19) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$	20) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$	21) $(A-B) \cap (B-A) = \varnothing$
22) $(A-B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ หรือ $(B-A) \cap (A \cap B) = \varnothing$	23) $A - B = A \cap B' = B' - A'$	24) $A \cap B = A - B'$
25) $A \cup (A \cap B) = A$ (กฎการดูดกลืน)		

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

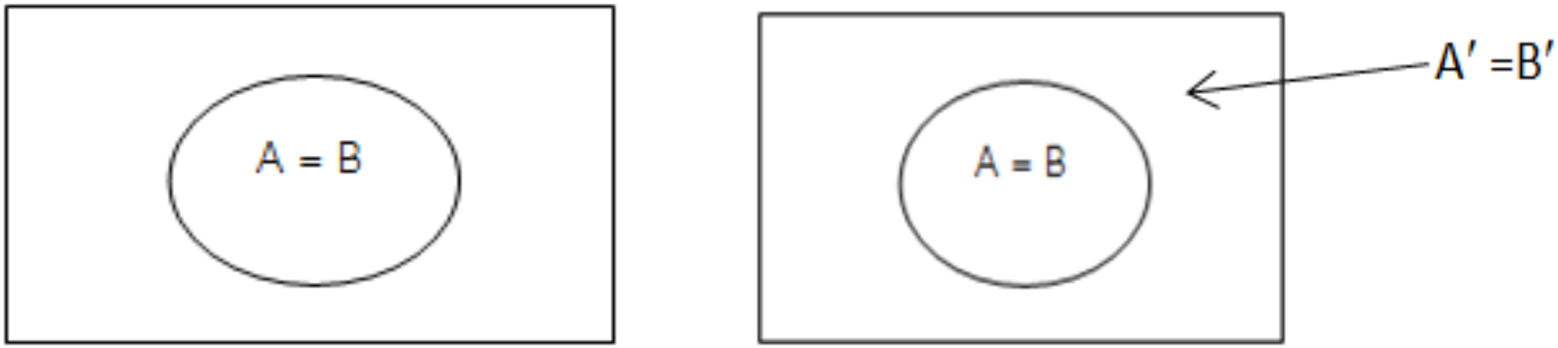
- 1. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$



- ดังนั้น $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

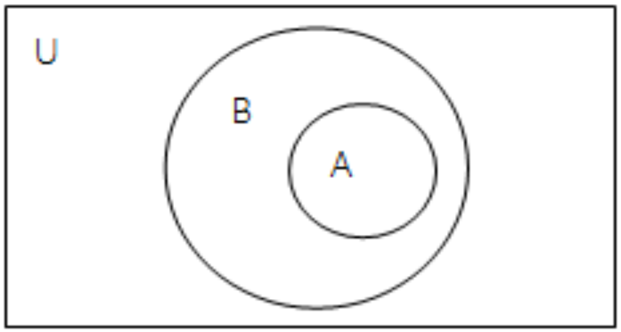
- 2. A = B ก็ต่อเมื่อ A′ = B′

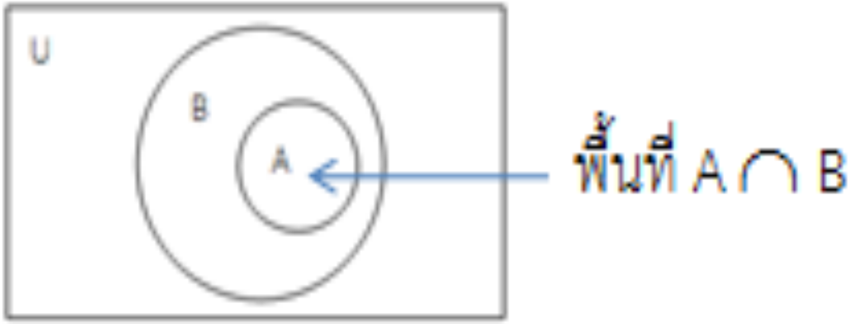


- ดังนั้น A = B ก็ต่อเมื่อ A′ = B′ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 3. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

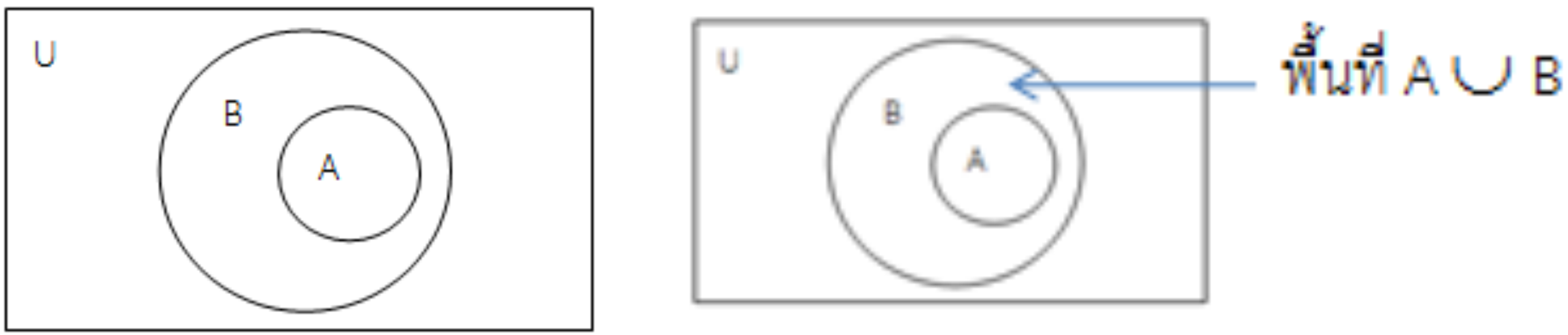




- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

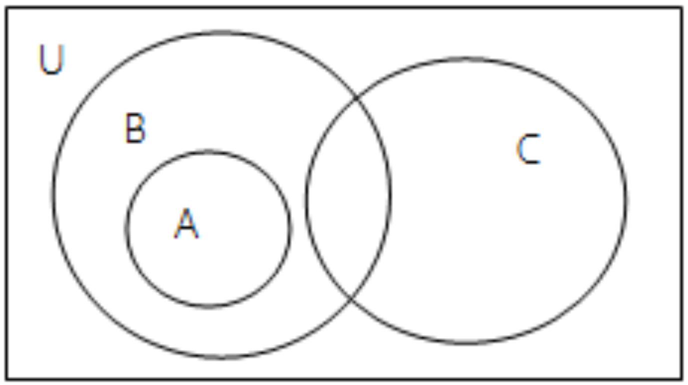
- 4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

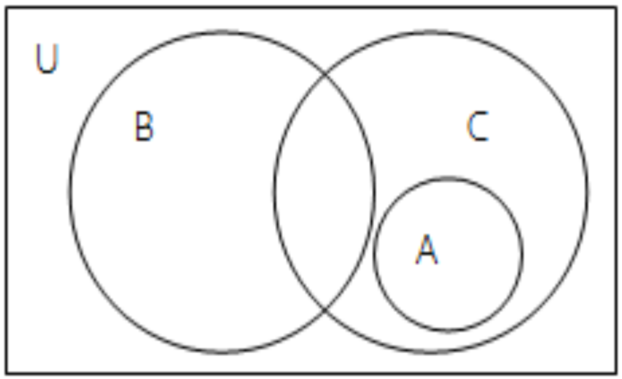


- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 5. ถ้า $A \subset B$ **หรือ** $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cup C$

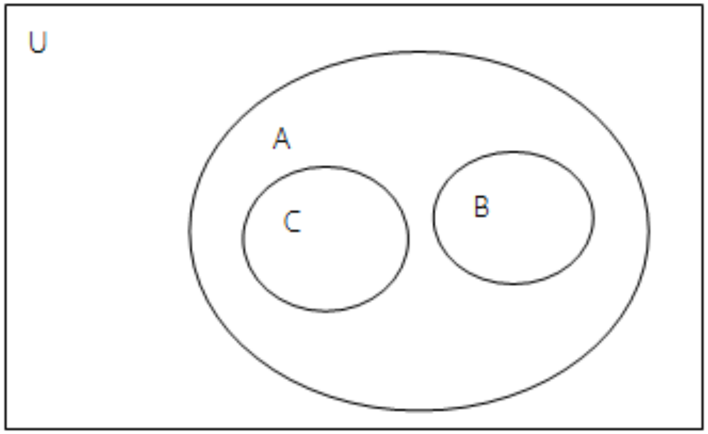




- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ **หรือ** $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cup C$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

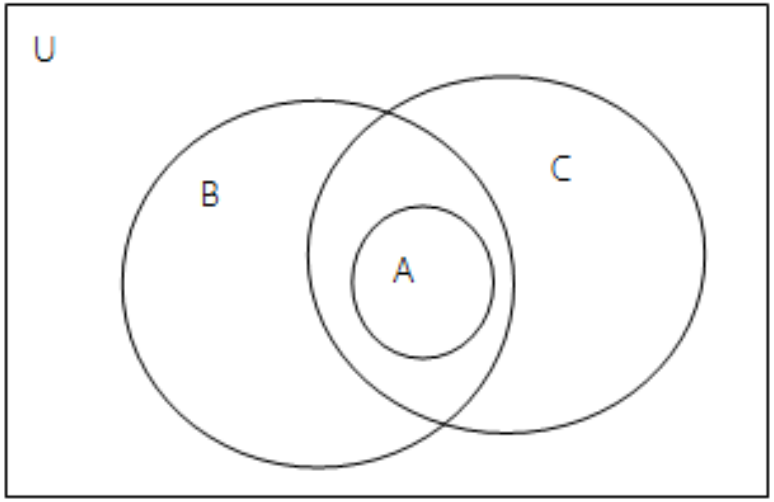
- 6. ถ้า $B \subset A$ **และ** $C \subset A$ แล้ว $B \cup C \subset A$



- ดังนั้น ถ้า $B \subset A$ **และ** $C \subset A$ แล้ว $B \cup C \subset A$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 7. ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$

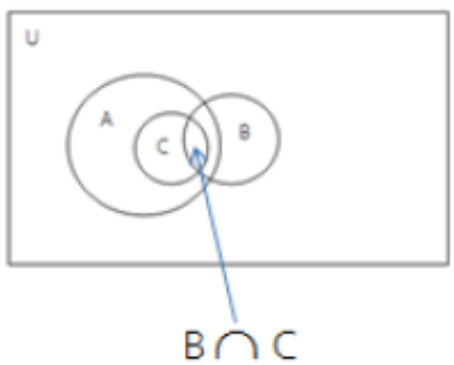


- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ **และ** $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$ เป็นจริง

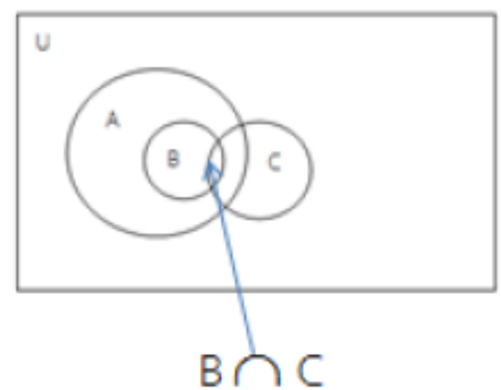
การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- ถ้า $B \subset A$ **หรือ** $C \subset A$ แล้ว $B \cap C \subset A$

ถ้ากรณีทั้งหมดของ C อยู่ใน A โดย B ∩ C ก็จะเป็นพื้นที่อยู่ใน A สามารถเขียนแผนภาพออยเลอร์ ได้ดังนี้



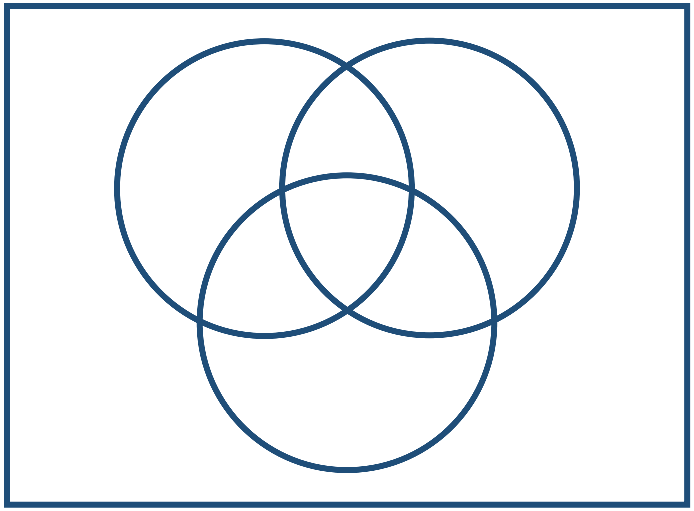
ถ้ากรณีทั้งหมดของ B อยู่ใน A โดย B ∩ C ก็จะเป็นพื้นที่อยู่ใน A สามารถเขียนแผนภาพออยเลอร์ ได้ดังนี้

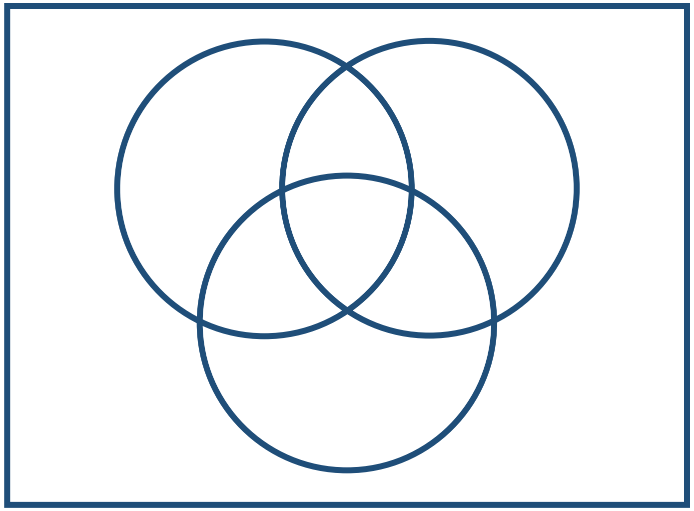


- ดังนั้น ถ้า $B \subset A$ **หรือ** $C \subset A$ แล้ว $B \cap C \subset A$ เป็นจริง

แผนภาพออยเลอร์

- C - (A ∩ B) = (C - A) ∪ (C - B)





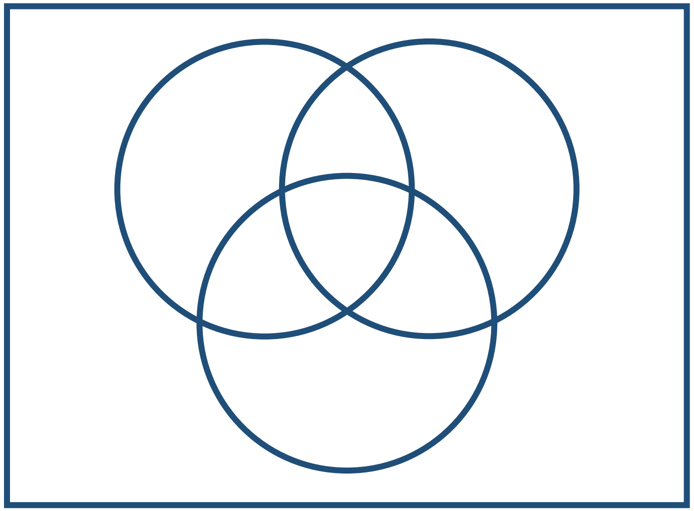
แบบฝึกหัด 6

- ให้ A, B, C เป็นเซต จงหา $n(A' \cap B \cap C)$ มีค่าเท่าไร

$n(B) = 42$ **$n(C) = 28$** **$n(A \cap C) = 8$**

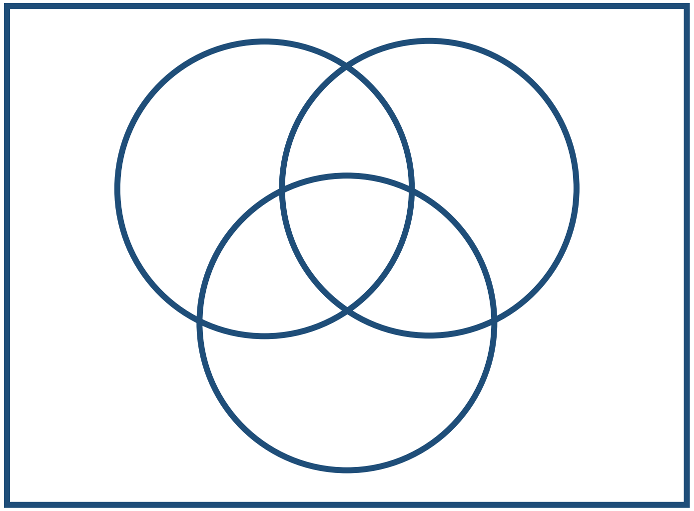
$n(A \cap B \cap C) = 3$ **$n(A \cap B \cap C') = 2$** **$n(A \cap B' \cap C') = 20$**

$n(A \cup B \cup C) = 80$



แบบฝึกหัด 7

- ข้อกำหนดว่า
  - รับประทานเนื้อ 10 คน รับประทานหมู 14 คน รับประทานไก่ 16 คน
  - รับประทานทั้งเนื้อและหมู 7 คน รับประทานทั้งเนื้อและไก่ 5 คน
  - รับประทานทั้งหมูและไก่ 5 คน
  - รับประทานทั้ง 3 อย่าง 3 คน
  - ถ้าทุกคนต้องรับประทานอาหารอย่างน้อย 1 ชนิดจงหาว่าหอพักนี้มีผู้อาศัยอยู่กี่คน



การพิสูจน์

บทที่ 2

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

- **การให้เหตุผลแบบนิรนัย** (Deductive Reasoning) คือ การนำความรู้พื้นฐาน หรือนิยามซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อน และยอมรับเป็นจริงนำไปสู่ข้อสรุป
  - เช่น จำนวนคู่ คือจำนวนที่หาร 2 ลงตัว ความรู้คือ 10 หาร 2 ลงตัว ดังนั้น 10 คือ จำนวนคู่ เป็นต้น
- การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็น **สิ่งที่รู้มาก่อน และยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป**
- เป็นการอ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปตามเนื้อหาสาระที่อยู่ภายในขอบเขตของข้ออ้างที่กำหนด

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ตัวอย่างที่ 1 เหตุ 1. สัตว์เลี้ยงทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย

2. แมวทุกตัวเป็นสัตว์เลี้ยง

ผล แมวทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย

ตัวอย่างที่ 2 เหตุ 1. นักเรียน ม.4 ทุกคนแต่งกายถูกระเบียบ

2. สมชายเป็นนักเรียนชั้น ม.4

ผล สมชายแต่งกายถูกระเบียบ

ตัวอย่างที่ 3 เหตุ 1. วันที่มีฝนตกทั้งวันจะมีท้องฟ้ามืดครึ้มทุกวัน

2. วันนี้ท้องฟ้ามืดครึ้ม

ผล วันนี้ฝนตกทั้งวัน

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- **การให้เหตุผลแบบอุปนัย** (Inductive Reasoning) คือ วิธีการสรุปเกิดจาก **ค้นคว้า สังเกต หรือ ทดลองหลายครั้ง** แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป
  - เช่น สังเกตพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออกทุกวัน จึงสรุปว่าพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
- การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นวิธีการสรุปผลมาจากการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลายครั้งจากกรณีย่อยๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- การหาข้อสรุปหรือความจริงโดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น **ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง** เนื่องจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลเกิดจากหลักฐานข้อเท็จจริงที่มีอยู่ ดังนั้นข้อสรุปจะเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูล หลักฐานและข้อเท็จจริงที่นำมาอ้างซึ่งได้แก่
- 1. จำนวนข้อมูล
- 2. ข้อมูล

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- **1. จำนวนข้อมูล** หลักฐานหรือข้อเท็จจริงที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างมีมากพอกับการสรุปความหรือไม่
  - เช่น ถ้าไปทานส้มตำที่ร้านอาหารแห่งหนึ่งแล้วท้องเสีย แล้วสรุปว่า ส้มตำนั้นทำให้ท้องเสีย
  - การสรุปเหตุการณ์นั้นอาจเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียว ย่อมเชื่อถือได้น้อยกว่าการที่ไปรับประทานส้มตำบ่อยๆ แล้วท้องเสียเกือบทุกครั้ง

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- **2. ข้อมูล** หลักฐานหรือข้อเท็จจริง เป็นตัวแทนที่ดีในการให้ข้อสรุปหรือไม่
  - เช่น ถ้าอยากรู้ว่าคนไทยชอบกินข้าวเจ้าหรือข้าวเหนียวมากกว่ากัน ถ้าถามจากคนที่อาศัยอยู่ในภาคเหนือหรือภาค-อีสาน คำตอบที่ตอบว่าชอบกินข้าวเหนียวอาจจะมีมากกว่าชอบกินข้าวจ้าว
  - แต่ถ้าถามคนที่อาศัยอยู่ในภาคกลางหรือภาคใต้ คำตอบอาจจะเป็นในลักษณะตรงกันข้าม

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- ตัวอย่างที่ 1 จงหาว่า ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่
  - โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย วิธีทำ ลองหาผลคูณของจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนคี่หลาย ๆ จำนวนดังนี้

$1 \times 3 = 3$	$3 \times 5 = 15$	$5 \times 7 = 35$	$7 \times 9 = 63$
$1 \times 5 = 5$	$3 \times 7 = 21$	$5 \times 9 = 45$	$7 \times 11 = 77$
$1 \times 7 = 7$	$3 \times 9 = 27$	$5 \times 11 = 55$	$7 \times 13 = 91$
$1 \times 9 = 9$	$3 \times 11 = 33$	$5 \times 13 = 65$	$7 \times 15 = 105$

  - จากการหาผลคูณดังกล่าว โดยการ**อุปนัย** จะพบว่า ผลคูณที่ได้เป็นจำนวนคี่ สรุป ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคี่ โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ที่อยู่ถัดไปอีก 3 พจน์

1) 1, 3, 5, 7, 9, …

- วิธีทำ จากการ**สังเกต**พบว่าแต่ละพจน์มีผลต่างอยู่ 2

(3 – 1 = 2, 5 – 3 = 2, 9 - 7 = 2) ดังนั้น อีก 3 จำนวน คือ 11, 13, 15

2) 2, 4, 8, 16, 32, …

- วิธีทำ จากการ**สังเกต**พบว่าแต่ละพจน์จะมีการไล่ลำดับขึ้นไป ถ้าลองสังเกตดู จะอยู่ในรูปแบบ 2×2^n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่เริ่มตั้งแต่ 0 ดังนั้น พจน์ที่ 6 คือ $2\times 32 = 64$, พจน์ที่ 7 คือ 128 และพจน์ที่ 8 คือ 256 จำนวนแต่ละจำนวนจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ 2 เท่าก็ได้

การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

- การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction Proof) ใช้สำหรับการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม โดยหลักการคือการแทนค่าแล้วพิจารณาว่าจริง
- โดยนิยามมีดังนี้

ให้ P(n) แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n

ถ้า P(1) เป็นจริง : ขั้นพื้นฐาน (Base Step)

ถ้า P(k) เป็นจริง

แล้ว P(k+1) เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ : ขั้นอุปนัย (Inductive step)

จะได้ว่า P(n) เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตสาสตร์

1. **Base case:** แสดงว่า p(1) เป็นจริง
   - (แทนค่า n = 1 แล้วเป็นจริง)
2. **Inductive step 1**: **แสดงว่า P(k) เป็นจริง** ทุกจำนวนเต็มบวก k ใดๆ
   - (แทนค่า n = k แล้วเป็นจริง)
3. **Inductive step 2**: **แสดงว่า p(k+1) เป็นจริง**
   - (แทนค่า n = k+1 แล้วเป็นจริง)

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

1) กรณีแรกคือ p(1) เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $\frac{1}{2}(1+1) = 1$ ซึ่งเป็นจริง
2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด
   ถ้ากำหนดให้ p(k) คือ $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k}{2}(k+1)$ ซึ่งเป็นจริง
3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง p(k+1) คือ $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k+1}{2}(k+2)$
   แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป
   ผลลัพธ์ที่ได้คือ $\frac{k}{2}(k+1) + (k+1) = \frac{k+1}{2}(k+2)$
   $= \frac{k^2+3k+2}{2}$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เป็นจริง

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2

- **จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n**

1) กรณีแรกคือ p(1) เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $1 = 1^2$ ซึ่งเป็นจริง
2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด

   ถ้ากำหนดให้ p(k) คือ $1 + 3 + ... +2k-1 = k^2$ ซึ่งเป็นจริง
3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง p(k+1) คือ $1 + 3 + ... + 2k-1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$

   แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป

   ผลลัพธ์ที่ได้คือ $k^2 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$

   $= k^2 + 2k + 1$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เป็นจริง

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 3

- **จงพิสูจน์ว่า $2^0+2^1+2^2+...+2^n = 2^{n+1}-1$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม**

1) กรณีแรกคือ p(0) เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $2^0 = 2^{0+1} -1 = 1$ ซึ่งเป็นจริง
2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด

   ถ้ากำหนดให้ p(k) คือ $2^0+2^1+.....+2^k = 2^{k+1} -1$ ซึ่งเป็นจริง
3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง p(k+1) คือ $2^0+2^1+2^k+.......+2^{k+1} = 2^{k+2} -1$

   แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป

   ผลลัพธ์ที่ได้คือ $2^{k+1} -1 +2^{k+1} = 2^{k+2} -1$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $2^0+2^1+2^2+...+2^n = 2^{n+1} -1$ เมื่อ $n \geq 0$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ว่า $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1

- n^3+2n หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อ $n \geq 0$

แบบฝึกหัด 2

- n^3-n หารด้วย 6 ลงตัว เมื่อ $n \geq 0$

แบบฝึกหัด 3

- $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เมื่อ $n \geq 1$

แบบฝึกหัด 4

- $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$ เมื่อ $n \geq 1$

แบบฝึกหัด 5

- $\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\mathrm{n}}{n+1}$ เมื่อ $n \geq 1$

แบบฝึกหัด 6

- $(1-x)(1+x^1+x^2+\ldots+x^n) = 1- x^{n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ≥ 0
- และ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 7

- $3^n > n^3$ เมื่อ $n \geq 4$

ความสัมพันธ์

บทที่ 3

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ความสัมพันธ์

- ในสาขาวิชาทางด้านคอมพิวเตอร์ ข้อมูลต่างๆ นั้น มีความสัมพันธ์กันซึ่งผู้เรียนต้องมีความรู้เรื่องพื้นฐานของสัมพันธ์ จึงสามารถวิเคราะห์และนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ได้
  - เช่น กรณีของการออกแบบฐานข้อมูล ต้องรู้จักความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรือแบบหนึ่งต่อหลายตัว เพื่อจะใช้ในการสร้างตารางฐานข้อมูลเป็นต้น
- ดังนั้นนักศึกษาจึงมีความจำเป็นต้อง เรียนเรื่องความสัมพันธ์ เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายของความสัมพันธ์

- **คู่อันดับ** (Ordered Pairs) คือ สัญลักษณ์ที่แสดงการจับคู่กันระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง
  - เช่น ระยะทางกับเวลา ถ้าเราจะแสดงการจับคู่ระยะทาง (กิโลเมตร) กับเวลา (ชั่วโมง) การเขียนระยะทางกับเวลาลงในวงเล็บ และคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค เช่น (200, 4) จะหมายถึง ระยะทาง 200 กิโลเมตร ต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมง เป็นต้น
- คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือ สมาชิกตัวหน้า และ สมาชิกตัวหลัง เขียนแทนในรูป (a, b)
  - โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง **ลำดับของคู่อันดับมีความสำคัญ** การสลับที่กันระหว่างสมาชิกทั้ง 2 ของคู่อันดับ ทำให้ความหมายเปลี่ยนไป

ตัวอย่างของคู่อันดับ

- **(a, b)** อ่านว่า คู่อันดับ เอบี
  - a เป็นสมาชิกตัวหน้าหรือสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่อันดับ (a, b)
  - b เป็นสมาชิกตัวหลังหรือสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับ (a, b)
- การเขียนคู่อันดับจะสลับที่สมาชิกไม่ได้ จะทำให้ความหมายเปลี่ยนไป เช่น (a, b) เป็น (b, a) โดยทั่วไป (a, b) ไม่เท่ากับ (b, a) ยกเว้น a = b

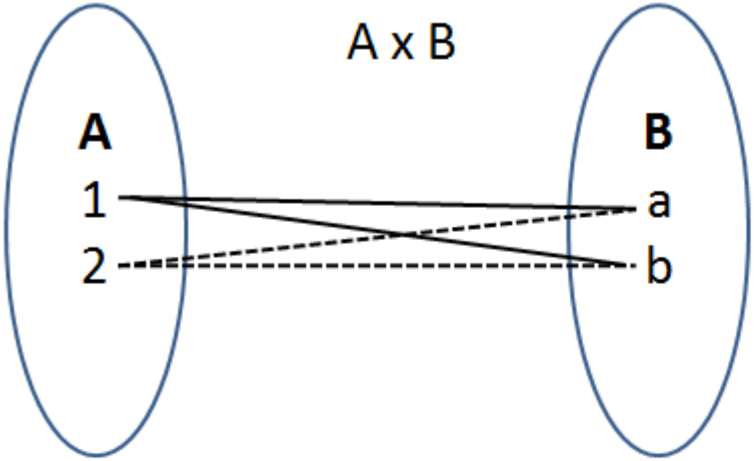
สมบัติของคู่อันดับ

- (a, b) = (b, a) ก็ต่อเมื่อ a = b
- ถ้า (a, b) = (c, d) แล้วจะได้ว่า a = c และ b = d
- ถ้า (a, b) $\neq$ (c, d) แล้วจะได้ว่า a $\neq$ c หรือ b $\neq$ d

ผลคูณคาร์ทีเชียน

- **ผลคูณคาร์ทีเชียน** ของเซต A และ B แทนสัญลักษณ์ด้วย **A x B**
- **A x B** = เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่เป็นไปได้ เมื่อสมาชิกตัวหน้าอยู่ในเซต A และ สมาชิกตัวหลังอยู่ในเซต B
  - ตัวอย่าง เช่น ถ้า A = {1, 2} และ B = {a, b}

    A x B = { (1,a), (1,b), (2,a), (2,b) }
  - สามารถเขียนแผนภาพการคูณคาร์ทีเชียนดังรูปข้างล่าง



สมบัติของผลคูณคาร์ทีเชียน

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$	2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$	4) $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$	

ความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์** เป็นเซตซึ่งสมาชิกในเซตคู่อันดับหรือความสัมพันธ์ เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต
- การเขียนแสดงความสัมพันธ์อาจเขียนในรูป แผนภาพ เซตสมการ ตาราง และกราฟก็ได้ โดยปกติจะเห็นความสัมพันธ์โดยทั่วไป
  - เช่น เป็นพ่อของ..., มากกว่า..., เป็นสมาชิกของ..., เป็นสับเซตของ...
- ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง **2 สิ่ง** เรียกว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค**

ความสัมพันธ์

- ถ้าให้ A = {3, 4} และ B = {3, 4, 5}
- จะได้ว่า A x B = {(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)}

- และถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่เกี่ยวข้องกันแบบน้อยกว่าจะได้
- r = {(3, 4), (3, 5), (4, 5)}
  - เราเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์แบบน้อยกว่าจาก A ไป B

ความสัมพันธ์

- ลักษณะของความสัมพันธ์ r นั้น ต้องเป็นเซตของคู่อันดับที่ได้มาจากสมาชิกใน A x B และมีความสัมพันธ์เงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งสามารถนิยามความสัมพันธ์ได้ดังนี้
- บทนิยามให้ A และ B เป็นเซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ A x B

ตัวอย่าง 1

- กำหนด A = {2, 3}, B = {4, 6, 9} และให้
  - r1 แทนความสัมพันธ์ เป็น สองเท่า จาก A ไป B
  - r2 แทนความสัมพันธ์ เป็น หารลงตัว จาก A ไป B
  - r3 แทนความสัมพันธ์ เป็น รากที่สอง จาก A ไป B
- วิธีทำ A x B = {(2, 4), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (3, 9)}
  - r1 = ∅
    - เพราะไม่มีสมาชิกของ A ที่มีค่าเท่าสมาชิก B คูณสอง
  - r2 = {(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9)}
    - เพราะสมาชิก A สามารถนำไปหารสมาชิก B ลงตัว
  - r3 = {(2, 4), (3, 9)}
    - เพราะสมาชิก A สามารถเป็นรากที่สองของสมาชิก B ได้

ความสัมพันธ์

- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ หรือ $r \subset A \times B$
  - ถ้า $(a, b) \in r$ จะกล่าวว่า a มีความสัมพันธ์ r กับ b
  - ถ้า $(a, b) \notin r$ จะกล่าวว่า a ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ b
- ถ้า $A = B$ จะกล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์บน A หรือ $r \subset A \times A$

ตัวอย่าง 2

- **จงหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A x B**

A = {1}

B = {2, 3}

A x B = { (1,2), (1,3) }

จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A x B คือ 2^{1x2} = 4 เซต ได้แก่

$r_1 = \varnothing$

r_2 = { (1,2) }

r_3 = { (1,3) }

r_4 = { (1,2), (1,3) }

ตัวอย่าง 3

- **จงพิจารณาว่า r_1 , r_2 , r_3 เป็นความสัมพันธ์ของ A x B**

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

โดยที่ $r_1 = \{ (1,2), (2,2), (1,4), (2,5) \}$

$r_2 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x+2 = y \} = \{ (1,3), (2,4), (3,5) \}$

$r_3 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \geq y \} = \{ (2,2), (3,2), (3,3) \}$

ตัวอย่าง 4

- **จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์ของ A x A**

  $A = \{ a, b, c, d \}$

  โดยที่ $r = \{ (x, y) \in A \times A \mid x=y \}$

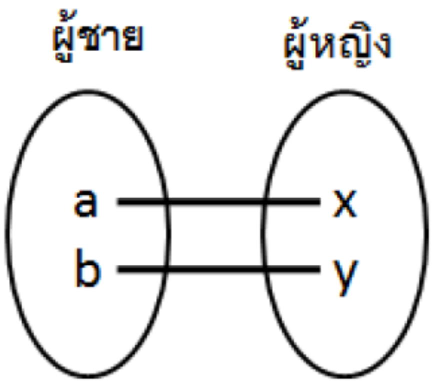
ลักษณะของความสัมพันธ์

1) หนึ่งต่อหนึ่ง (One to one)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน

เช่น a เชื่อมต่อกับ x เท่านั้น

b เชื่อมต่อกับ y เท่านั้น



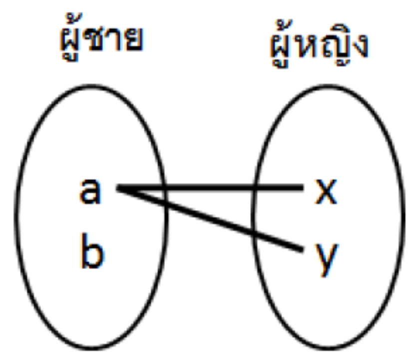
2) หนึ่งต่อหลากหลาย (One to many)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหลายคนได้

เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y

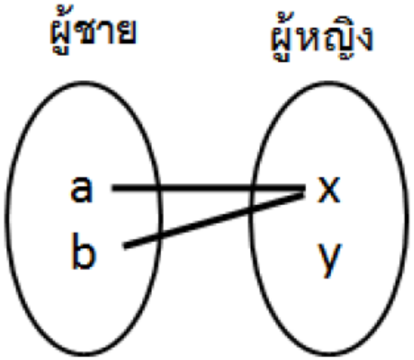
b ไม่ได้เชื่อมต่อกับใคร

ทั้ง x และ y เชื่อมต่อกับ a ตัวเดียว

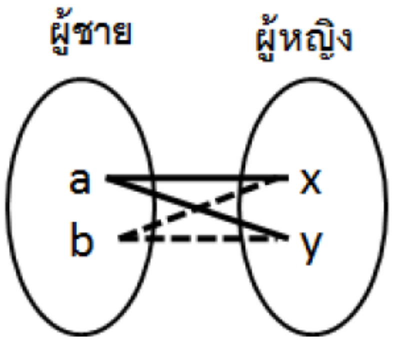


ลักษณะของความสัมพันธ์

3) หลากหลายต่อหนึ่ง (Many to one)
ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหลายคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน
เช่น a เชื่อมต่อกับ x
b เชื่อมต่อกับ x
ทั้ง a และ b เชื่อมต่อกับ x ตัวเดี่ยว



4) หลากหลายต่อหลากหลาย (Many to Many)
ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหลายคนต่อผู้หญิงหลายคนได้
เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y
b เชื่อมต่อกับ x และ y



ความสัมพันธ์ผกผัน

ความสัมพันธ์ผกผัน หรือ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ (Inverse of r)

- คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r
- ความผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A

เขียนแทนด้วย $r^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in r \}$

r^{-1} จะมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (y, x)

ตัวอย่าง 1

- **ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r**
- กำหนดให้ A = { 1, 2, 3, 4 } และ B = { a, b, c, d }
- สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้

  r = { (1,b), (1,d), (2,a), (4,a) }

  โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ A x B
- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

  r^{-1} = { (b,1), (d,1), (a,2), (a,4) }

ตัวอย่าง 2

- **ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r**
- กำหนดให้ความพันธ์ r มีดังนี้

$$r = \{ (1,2), (3,4), (5,6) \}$$

- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

$$r^{-1} = \{ (2,1), (4,3), (6,5) \}$$

โดเมนและพิสัย

- **โดเมน (Domain)** ของ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหน้าของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

  $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$ สำหรับตัวอย่างนี้ D_r คือ x

- **พิสัย (Range)** ของ r คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหลังของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

  $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$ สำหรับตัวอย่างนี้ R_r คือ y

ตัวอย่าง 3

ตัวอย่าง จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์ r

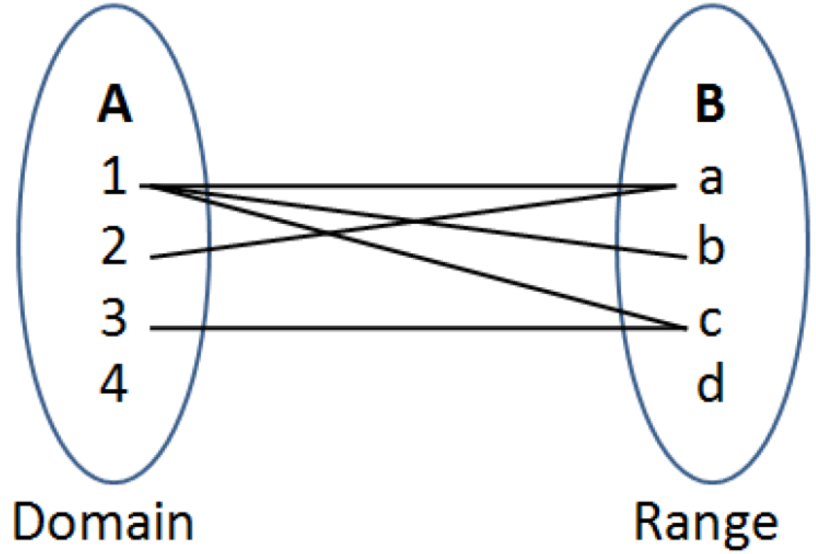
กำหนดให้ A = { 1, 2, 3, 4 } และ B = { a, b, c, d }

สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้ r = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (3,c) } โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ A x B

โดเมนของ r คือสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์ r คือ D_r = { 1, 2, 3 }

พิสัยของ r คือสมาชิกตัวหลังของความสัมพันธ์ r คือ R_r = { a, b, c }

สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์

- 1 หา y จัด x / หา x จัด y
  - หา Domain จัด y ในเทอมของ x
  - หา Range จัด x ในเทอมของ y
- 2 พิจารณาเงื่อนไข = root / เศษส่วน
  - root ≥ 0
  - เศษส่วน ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0
- 3 เขียนเส้นจำนวน และตอบ
  - ใช้วิธีแก้ อสการ

ตัวอย่าง 4

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{5}{2-x^2}\}$ จงหา R_r

วิธีทำ หา R_r จัด x ในเทอมของ y

$$2 - x^2 = \frac{5}{y}$$

$$x^2 = 2 - \frac{5}{y}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2y-5}{y}}$$ โดย $y \neq 0$

พิจารณา $\frac{2y-5}{y} \geq 0$ คูณ y ทั้งสองข้าง

$$2y - 5 \geq 0$$

ดังนั้น $R_r = (-\infty,0) \cup [\frac{5}{2},\infty)$

แบบฝึกหัด 1

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ r = { (x, y) | y = $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ } จงหา D_r

แบบฝึกหัด 2

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ r = { (x, y) $\in$ R x R | y =2 $- \frac{4}{(x-1)^2-4}$ } จงหา R_r

แบบฝึกหัด 3

- กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-3} \}$ จงหา r^{-1}

กฎของความสัมพันธ์

1. $(r^{-1})^{-1} = r$

ตัวอย่าง $(r^{-1})^{-1} \subset r$ และ $r \subset (r^{-1})^{-1}$

สมมุติ $r = \{ (1,2) , (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in r$

$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \}$ แล้ว $(y, x) \in r^{-1}$

$(r^{-1})^{-1} = \{ (1,2) , (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in (r^{-1})^{-1}$

กฎของความสัมพันธ์

2. $(r \cup s)^{-1} = r^{-1} \cup s^{-1}$

ตัวอย่าง $(r \cup s)^{-1} \subset r^{-1} \cup s^{-1}$ และ $r^{-1} \cup s^{-1} \subset (r \cup s)^{-1}$

สมมุติ $r = \{ (1,2) , (2,3) \}$

$s = \{ (2,3) , (4,5) \}$ $(x, y) \in r$ หรือ $(x, y) \in s$

$(r \cup s) = \{ (1,2) , (2,3) , (4,5) \}$ $(x, y) \in r \cup s$

$(r \cup s)^{-1} = \{ (2,1) , (3,2) , (5,4) \}$ $(y, x) \in (r \cup s)^{-1}$

$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \}$

$s^{-1} = \{ (3,2) , (5,4) \}$ $(y, x) \in r^{-1}$ หรือ $(y, x) \in s^{-1}$

$r^{-1} \cup s^{-1} = \{ (2,1) , (3,2) , (5,4) \}$ $(y, x) \in r^{-1} \cup s^{-1}$

กฎของความสัมพันธ์

3. ถ้า $s \subset r$ แล้ว $s^{-1} \subset r^{-1}$

ตัวอย่าง $r = \{ (1,2) , (2,3) \}$ $(x, y) \in r$

$s = \{ (2,3) \}$ $(x, y) \in s$

$s \subset r$

$r^{-1} = \{ (2,1) , (3,2) \}$ $(y, x) \in r^{-1}$

$s^{-1} = \{ (3,2) \}$ $(y, x) \in s^{-1}$

$s^{-1} \subset r^{-1}$

4. $D_{r^{-1}} = R_r$

$R_{r^{-1}} = D_r$

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติสะท้อน** $r = \{ (x, x) \in A \times A \mid x \in A \}$ ดังนั้น **r** ไม่มีสมบัติสะท้อน เมื่อมี $x \in A$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ $(x, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาต้องมีตัวที่ซ้ำกันระหว่าง x, y **ครบทุกตัว**

A = { 1, 2, 3 }

A X A = { **(1,1)**, (1,2), (1,3), (2,1), **(2,2)**, (2,3), (3,1), (3,2), **(3,3)** }

$r_1 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x \leq y \}$

= { (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) } มีสมบัติสะท้อน

$r_2 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x < y \}$

= { (1,2), (1,3), (2,3) } ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี (1,1) (2,2) (3,3)

r_3 = { (1,1), (2,2) } ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี (3,3)

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติสมมาตร** (Symmetric) สำหรับ $x, y \in A$ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติสมมาตร เมื่อมี $(x, y) \in r$ แต่ $(y, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาไม่จำเป็นต้องครบ แต่ถ้ามีต้องมีคู่ของมัน

A = { a, b, c, d }

r_1 = { (a, a), (b, c), (c, b), (d, d) }

มีสมบัติสมมาตร

r_2 = { (a, a), (b, c), (d, d) }

ไม่มีสมบัติสมมาตร ไม่มี (c, b)

$r_3 = \{ (x, y) \in I^+ \times I^+ \mid x+y = 4 \} = \{ \{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\} \}$

มีสมบัติสมมาตร

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติถ่ายทอด** (Transitive) สำหรับ x, y, z $\in$ A
  ถ้า (x, y) $\in$ r และ (y, z) $\in$ r แล้ว (x, z) $\in$ r ดังนั้น r ไม่มีสมบัติถ่ายทอด เมื่อมี (x, y) $\in$ r และ (y, z) $\in$ r **แต่ (x, z) $\notin$ r**
  - โดยหลักการพิจารณาเมื่อไรมีคู่ลำดับที่มีความสัมพันธ์แบบเชื่อมกันเกิดขึ้น เช่น (1,2) (2,3) ต้องมีตัวที่ 3 ตามมา ถ้าไม่มีไม่เป็นไร แต่ถ้ามีต้องมีตัวที่สาม ตามมาเท่านั้น นั้นคือ (1,3)

$r_1 = \{ (1,1), (2,4) \}$	มีสมบัติถ่ายทอด
$r_2 = \{ (1,2), (2,4), (1,4), (1,3) \}$	มีสมบัติถ่ายทอด
$r_3 = \{ (1,2), (2,4), (1,3) \}$	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,4)
$r_4 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$	มีสมบัติถ่ายทอด
$r_5 = \{ (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,1)
$r_6 = \{ (1,1), (3,3), (1,2), (1,3) \}$	มีสมบัติถ่ายทอด
$r_7 = \{ (1,1), (2,2), (1,2), (2,3) \}$	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,3)

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์สมมูล** (Equivalence relation) จะมีสมบัตินี้เมื่อ r มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด

A = { 1, 2, 3 } แล้ว **r = { (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) }**

จงพิสูจน์ว่า r มีความสัมพันธ์สมมูล

มีสมบัติสะท้อน r ต้องมี (1,1), (2,2), (3,3)

มีสมบัติสมมาตร ถ้า r มี (1,2) ต้องมี (2,1)

มีสมบัติถ่ายทอด ถ้า r มี (1,2) และ (2,1) ต้องมี (1,1)

ดังนั้น r มีความสัมพันธ์สมมูล

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ r = { (x, y) $\in$ R$\times$R | x = y } มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x + y = 10 \}$ มีสมบัติสมมาตร

การพิสูจน์สมบัติสมมาตร

สมมุติ $(x, y) \in r$

$x + y = 10$ โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

$y + x = 10$ โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

$(y, x) \in r$

ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x \leq y \}$ มีสมบัติถ่ายทอด

การพิสูจน์สมบัติถ่ายทอด

สมมุติ $(x, y) \in r$ และ $(y, z) \in r$

$x \leq y$ และ $y \leq z$

$x \leq z$

$(x, z) \in r$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

- โดยอาศัยสมบัติการถ่ายทอดของจำนวนเต็ม ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$

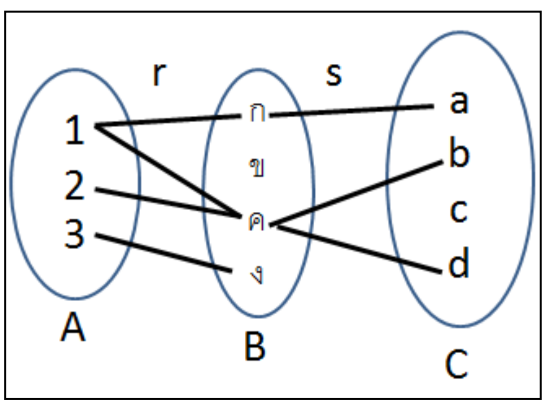
ตัวอย่าง 4

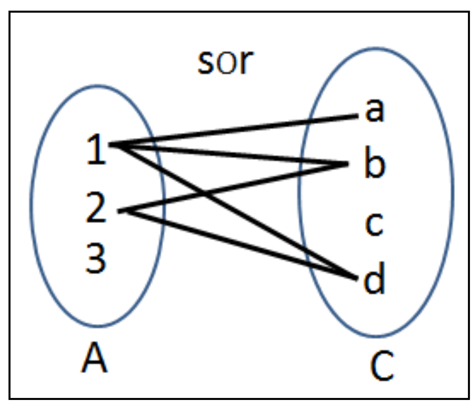
r เป็นความสัมพันธ์บนเซต I^+ และ r = { (x, y) | x + y หารด้วย 2 ลงตัว }

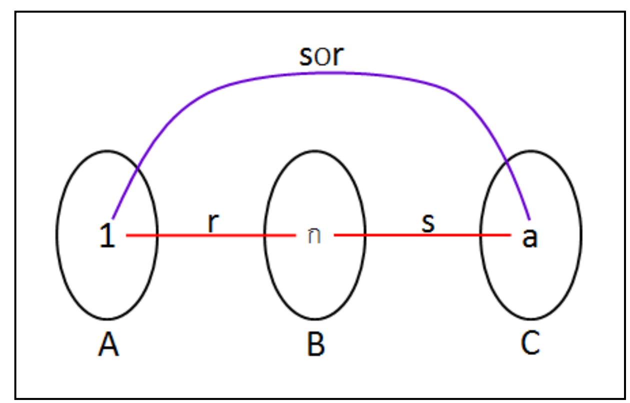
จงพิสูจน์แสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ความสัมพันธ์ประกอบ

- นิยามความสัมพันธ์ประกอบ (Composite Relation) จากรูปข้างล่าง กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C
ความสัมพันธ์ประกอบของ r และ s คือ ความสัมพันธ์ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (a, c) โดยที่ $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in s$
- เขียนแทนด้วย sor นั้นคือ
- $sor = \{ (a, c) \in A \times C$ มี $b \in B$ ซึ่ง $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in s \}$







ความสัมพันธ์ประกอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ A = { 1, 2, 3 }, B = { 1, 2, 3, 4 }, C = { 0, 1, 2 }

แล้ว r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C

แล้ว กำหนดให้ r = { (1,1) , (1,4), (2,3), (3,1), (3,4) }

s = { (1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1) }

จงหาเซตความสัมพันธ์ประกอบของ sor

จากโจทย์ ให้พิจารณาจากพิสัยของ r เชื่อมกับโดเมนของ s ถ้าโดเมนของ s และพิสัยของ r เป็นค่าเดี่ยวกัน ให้เขียน โดเมน r เป็นโดเมนของ sor และเขียนพิสัยของ s เป็นพิสัยของ sor

r = (1, 1) ตรงกับ s = (1, 0) ดังนั้น sor คือ (1, 0)

r = (1, 4) ตรงกับ s = (4, 1) ดังนั้น sor คือ (1, 1)

r = (2, 3) ตรงกับ s = (3, 1) ดังนั้น sor คือ (2, 1)

r = (2, 3) ตรงกับ s = (3, 2) ดังนั้น sor คือ (2, 2)

r = (3, 1) ตรงกับ s = (1, 0) ดังนั้น sor คือ (3, 0)

r = (3, 4) ตรงกับ s = (4, 1) ดังนั้น sor คือ (3, 1)

ดังนั้นเซตของ sor คือ { (1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1) }

แบบฝึกหัด 1

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x \geq y \}$

แบบฝึกหัด 2

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x^2+y^2 = 1 \}$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล **$r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x-y$ หารด้วย 2 ลงตัว $\}$**

แบบฝึกหัด 4

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล **r = { (x, y) $\in$ I×I | x-y เป็นเลขคี่ }**

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทที่ 4

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ลำดับและอนุกรม

- **ลำดับ** (Sequences) หมายถึง จำนวนหรือพจน์ที่เขียนเรียงกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง สำหรับนิยามคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...)
  - เช่น มีฟังก์ชัน $f(n)=n^2+1$ เมื่อ n=1, 2, 3, ... จะได้ f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10, f(4)=17, ...
  - ค่าฟังก์ชันเหล่านี้ที่เขียนต่อกันเป็น 2, 5, 10, 17, ... เรียกว่า ลำดับ นิยมเขียนฟังก์ชันด้วย a_n คือ a_1, a_2, a_3, ..., a_n
  - เขียนแทนด้วย f(1), f(2), f(3), ..., f(n) เพื่อให้ทราบว่าเป็นลำดับ โดยโดเมนต้องเป็นจำนวนนับเท่านั้น เรียก a_1 ว่า “พจน์ที่ 1” ของลำดับ เรียก a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ, ไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่ n ใดๆ เขียนแทนด้วย a_n จะเรียกว่า พจน์ทั่วไปของลำดับ เช่น ลำดับ 2, 5, 10, 17, ... มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2+1$

ลำดับ

- การหาพจน์ทั่วไปนั้น โดยปกติมีได้มากกว่า 1 แบบ
- เช่น ลำดับ 2, 4, 8,...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็นคือ $a_n = 2^n$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 16
  - หรือมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =(n+1)(n2–n+6)/6$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 15 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 3 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน
- หรืออีกกรณี ลำดับ 1, 2, 3, 4, ...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 5
  - หรือ $a_n = (n–1)(n–2)(n–3)(n–4)+n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 29 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 4 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน

ลำดับ

ลำดับทั่วๆ ไปแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ

- **ลำดับจำกัด** (finite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์ที่แน่นอน เช่น 8 พจน์, 15 พจน์, หรือ n พจน์
- **ลำดับอนันต์** (infinite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์มากจนนับไม่ได้ เช่น **1,2,3,4,...**

ลำดับเลขคณิต

- **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetic Sequence) คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่ติดกันมีค่าคงตัวเท่ากันเสมอนี้ จะเรียกว่าลำดับเลขคณิต และเรียกผลต่างที่มีค่าคงตัวเท่ากันเสมอว่าผลต่างร่วม
- สำหรับนิยามคือลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ n+1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่าผลต่างร่วม เขียนแทนผลต่างร่วมด้วย d

ลำดับเลขคณิต

- พิจารณาลำดับ 1, 4, 7, 10, 13, ...
- จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลต่างเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เสมอนั่น
- คือ $4 - 1 = 3$, $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3$
- ตัวอย่าง

2, 5, 8, 11, ...	มี d เท่ากับ 3
9, 7, 5, 3,...	มี d เท่ากับ -2
5, 5, 5, ...	มี d เท่ากับ 0

ลำดับเลขคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$
- ตัวอย่าง จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเลขคณิตนี้ 2, 5, 8, 11, ...
- จากโจทย์มี ผลต่างร่วมเท่ากับ 3
- เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 2 + (5-1) * 3 = 14$$

$$a_{10} = 2 + (10-1) * 3 = 29$$

ลำดับเรขาคณิต

- **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) คือจับพจน์ที่อยู่ข้างหลังหารด้วยพจน์ที่อยู่ติดกันข้างหน้าจะแล้วได้ค่าเท่ากันตลอดลำดับนั้นจะเป็นลำดับเรขาคณิต
- สำหรับนิยามคือลำดับที่มีผลหารซึ่งเกิดจากพจน์ที่ n+1 หารด้วยพจน์ที่ n แล้วมีค่าคงตัว และค่าคงตัวนี้เรียกว่า **อัตราส่วนร่วม เขียนแทนอัตราส่วนร่วมนี้ด้วย r**
- พิจารณาลำดับ 4, 8, 16, 32, 64, ... จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังหารด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลหารเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ
- นั่นคือ $8 / 4 = 2$, $16 / 8 = 2$, $32 / 16 = 2$, $64 / 32 = 2$
- ตัวอย่าง

3, 6, 12, 24, ...	มี r เท่ากับ 2
2, -4, 8, -16,...	มี r เท่ากับ -2
5, 5, 5, ...	มี r เท่ากับ 1

ลำดับเรขาคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$
- ตัวอย่างเช่น จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเรขาคณิตนี้ 3, 6, 12, 24, ...
- จากโจทย์มี r เท่ากับ 2 เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$a_5 = 3*2^4 = 48$

$a_{10} = 3*2^9 = 1536$

ผลรวม

- **ผลรวม** (Summation) หมายถึงการบวกของเซตของจำนวน ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นผลบวกจำนวนที่กล่าวถึงเป็นจำนวนธรรมชาติ

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{i} = 1 + 2 + 3 + \cdots \mathrm{n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ตัวอย่างการหาผลรวมพจน์ที่ 10 $= \frac{10(10+1)}{2} = 55$

อนุกรม

- **อนุกรม** (Series) คือ ผลจากการบวกสมาชิกทุกตัวของลำดับไม่จำกัดเข้าด้วยกัน
- หากกำหนดให้ลำดับของจำนวนเป็นอนุกรมของลำดับนี้ก็คือ อนุกรมสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- สัญลักษณ์ของผลรวม $\sum$ เช่นตัวอย่างนี้เป็น
- อนุกรมของลำดับ 2^n คือ $\boxed{\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{i} = 2 + 4 + 8 + \cdots}$

อนุกรมเลขคณิต

- **อนุกรมเลขคณิต** (Arithmetic Series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิตด้วย หรืออาจกล่าวว่า เป็นผลบวก n พจน์แรก

เมื่อ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d$ เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ d เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวม (d) ของลำดับเลขคณิต เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 99$ เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า $1, 3, 5, \ldots, 99$ เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ $25 + 20 + 15 + 10 + \ldots$ เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า $25, 20, 15, 10, \ldots$ เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ -5

ตัวอย่างที่ 3 คือ $7 + 14 + 21 + 28 + \ldots$ เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า $7, 14, 21, 28, \ldots$ เป็น ลำดับเลขคณิต และมีมี d เท่ากับ 7

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเลขคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต**

  คือ $\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}}$

- ตัวอย่าง จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เลขคณิต** 2, 5, 8, 11, 14, ...

- จากโจทย์เมื่อแทนค่าลงในสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{5}{2}(2 + 14) = 40$$

อนุกรมเรขาคณิต

- **อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Progression) อนุกรมที่ได้จากจากลำดับเรขาคณิตเรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนรวมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

กำหนด $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ **เป็นลำดับเรขาคณิต**

จะได้ $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$ **เป็นอนุกรมเรขาคณิต**

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ 2 + 4 + 8 + 16 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 2, 4, 8, 16, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ 81 + 27 + 9 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 81, 27, 9, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 3 คือ 3 + 3 + 3 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 3, 3, 3, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 1

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเรขาคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต**

  คือ $\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}} \quad \text{โดยที่ } \mathbf{r \neq 1}}$

- จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เรขาคณิต** 3, 6, 12, 24, 48 …
- จากโจทย์ มี r = 2 และเมื่อแทนค่าลงใน

  สูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-\mathrm{r}}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{3(1-2^5)}{1-2} = 93$$

ความหมายการเวียนเกิด (Recursion)

- การเรียกซ้ำหรือการเรียกตัวเองหรือการเวียนเกิด (Recursion)
- คือ วิธีการที่ฟังก์ชันสามารถ**เรียกใช้ฟังก์ชันตัวเอง** โดยแต่ละครั้งที่ฟังก์ชันถูกเรียก จะเกิดค่าตัวแปรหรือพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไปอย่างอัตโนมัติ **แล้วกำหนดการทำงานขั้นสุดท้ายไว้** เมื่อทำงานถึงขั้นสุดท้ายก็จะสิ้นสุดการทำงานและส่งผลลัพธ์กลับไป

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ความสัมพันธ์เวียนเกิด** (Recurrence Relations) สำหรับอันดับ a_0, a_1, ..., a_n เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพจน์ a_n กับพจน์ a_0, a_1, ..., a_{n-1} ที่เกิดก่อน โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับพจน์ a_0, a_1, ..., a_{n-1} ที่ชัดแจ้ง หรืออาจจะกล่าวได้ คือตัวเลขถัดไปนั้นมีความสัมพันธ์กับตัวเลขก่อนหน้า โดยสามารถนำมาเขียนสมการคณิตศาสตร์ได้

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ตัวอย่าง** จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 5, 8, 11, 14, 17,...

$a_0 = 5$

$a_1 = 8 = 5+3 = a_0+3$

$a_2 = 11 = 8+3 = a_1+3$

$a_3 = 14 = 11+3 = a_2+3$

$a_4 = 17 = 14+3 = a_3+3$

พิจารณาพบว่า พจน์ถัดไปมีค่าต่างจากพจน์ก่อนหน้าอยู่ 3

พิจารณาต่อไปจะได้

$a_n = a_{n-1}+3 \;;\; n \geq 1$ เป็น ความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยมี $a_0 = 5$ เป็น เงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่าง 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 2, 4, 7, 11, 16 …

ลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. เป็นฟังก์ชันที่ต้องมีพารามิเตอร์
2. แต่ละครั้งที่เรียกใช้ฟังก์ชันนั้น พารามิเตอร์ของฟังก์ชันต้องค่าเปลี่ยนแปลง
3. ฟังก์ชันการเรียกซ้ำ **ต้องมีกรณีหยุดอย่างน้อย 1 กรณี** หรือ กรณีจำกัด (Stopping Case)

- โดยเมื่อพารามิเตอร์ของฟังก์ชันมีค่าถึงขอบเขตที่กำหนดให้หยุดนี้ ฟังก์ชันจะสามารถให้คำตอบและจะไม่ต้องเรียกตัวเองซ้ำอีก

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

```
function A()
{
  if()
  {
    function A()
  }
  return or print
}
```

เงื่อนไขในการหยุดอย่างน้อย 1 กรณี (หยุด)

เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ และเรียกฟังก์ชันตัวเอง (เรียกตัวเอง หรือ วนซ้ำ)

ส่งหรือแสดงผลลัพธ์ย้อนกลับไป (คำตอบ)

ข้อดีและข้อเสียการเวียนเกิด

- ข้อดีของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้สามารถเขียนโปรแกรมได้สั้น และสามารถเขียนฟังก์ชันบางรูปแบบได้ง่าย
- ข้อเสียของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้ใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำมาก และการรันโปรแกรมทำได้ช้า
- การเขียนโปรแกรมเข้าใจยาก อาจเกิดการเรียกซ้ำไม่รู้จบหากกำหนดเงื่อนไขเพื่อหยุดทำงานไม่รัดกุม

แบบฝึกหัด 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

แบบฝึกหัด 2

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...

แฟกทอเรียล

- **แฟกทอเรียล** ของจำนวนเต็มไม่ติดลบ n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เขียนแทนด้วย n!
- คำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกชุดหนึ่ง ซึ่งถ้าคำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เช่น 1 x 2 x 3 x 4 x 5 จำนวนเหล่านี้เราสามารถใช้สัญลักษณ์ แฟกทอเรียล เขียนแทนได้คือ 5!

$$
\begin{aligned}
N! &= N \times (N-1)! \\
&= N \times (N-1) \times (N-2)! \\
&= N \times (N-1) \times (N-2) \times (N-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1
\end{aligned}
$$

โดย 0! มีค่า เป็น 1

โดย 1! มีค่า เป็น 1

แฟกทอเรียล

- จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบของ N! ได้เป็น 2 กรณี คือ
  - ถ้า N มีค่าเท่ากับ 0 คำตอบที่ได้คือ N! = 1
  - ถ้า N มีค่ามากกว่า 0 คำตอบที่ได้คือ N! = N x (N-1)!
- สำหรับ 5! การคำนวณหาค่าแฟกทอเรียล

$$
\begin{aligned}
5! &= 5 \times 4! \\
&= 5 \times 4 \times 3! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120
\end{aligned}
$$

1	**ft = 5 * fact(4);**	
2	ft = 5 * 4 * fact(3);	
3	ft = 5 * 4 * 3 * fact(2);	
4	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * fact(1);	
5	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * 1;	**หยุดการทำงาน**

แฟกทอเรียล

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n$$

$$a_n = (n-1)! \times n$$

$$= a_{n-1} \times n$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิดของ n!
- คือ $a_n = na_{n-1}$; $n \geq 1$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

ฟีโบนักชี

- **ลำดับฟีโบนัชชี** (Fibonacci Sequence) มีนิยามของความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกก็คือ 0 และ 1 ตามลำดับ หากเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ ลำดับ F_n ของฟีโบนัชชี
- สามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มแรกให้

$$F_0 = 0 \text{ และ } F_1 = 1$$

ฟีโบนักชี

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ,... จากตัวเลขอนุกรมดังกล่าว สามารถแสดงวิธีการหาค่าเทอมต่างๆ ได้ดังนี้

1) $F_0 = 0$

2) $F_1 = 1$

3) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

พจน์ที่ 3 มาจาก พจน์ที่ 1 + พจน์ที่ 2 = 0 +1 = 1 โดยเริ่มจากพจน์ที่ 3 เป็นต้นไป

พจน์ที่ 4 มาจาก พจน์ที่ 2 + พจน์ที่ 3 = 1 + 1 = 2

พจน์ที่ 5 มาจาก พจน์ที่ 3 + พจน์ที่ 4 = 1 + 2 = 3

ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n \geq 2$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

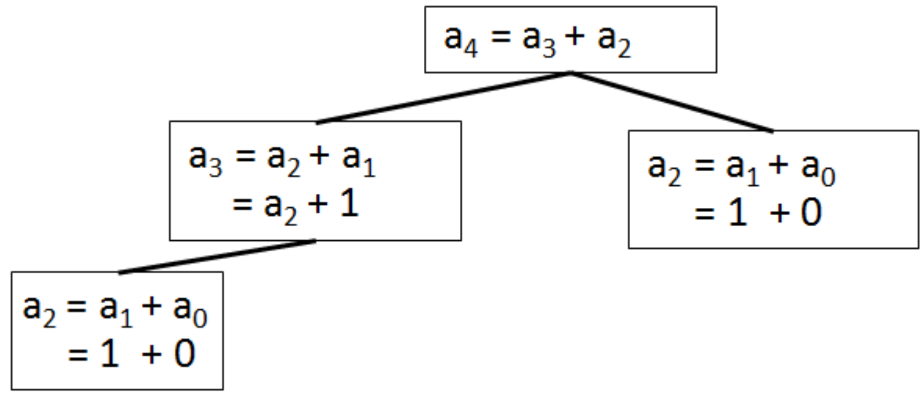
จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบออกเป็น 2 ทางคือ

ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = n$

ถ้า n มีค่ามากกว่า 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

ฟีโบนักชี

- จงคำนวณหาค่าอนุกรมไฟโบเนชชีที่ 4
- วิธีคิดแบบต้นไม้แตกกิ่งก้านสาขา



- วิธีคิดแบบปกติ

$$
\begin{aligned}
F(4) &= F(3) + F(2) \\
&= (F(2) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((F(1) + F(0)) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((1+0) + 1) + (1 + 0) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2

- มีเงินฝาก 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี ถ้าฝากแบบดอกเบี้ยทบต้นสิ้นปีที่ n จะมีเงินรวมทั้งหมดเท่าไร

สิ้นปีที่ 1 มีเงิน $1000.00 + (0.12)(1000.00) = 1120.00$

สิ้นปีที่ 2 มีเงิน $1120.00 + (0.12)(1120.00) = 1254.40$

สิ้นปีที่ 3 มีเงิน $1254.40 + (0.12)(1254.40) = 1404.92$

...

สิ้นปีที่ n มีเงิน เงินรวมสิ้นปีที่ n-1 + ดอกเบี้ย

ให้ a_n เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n

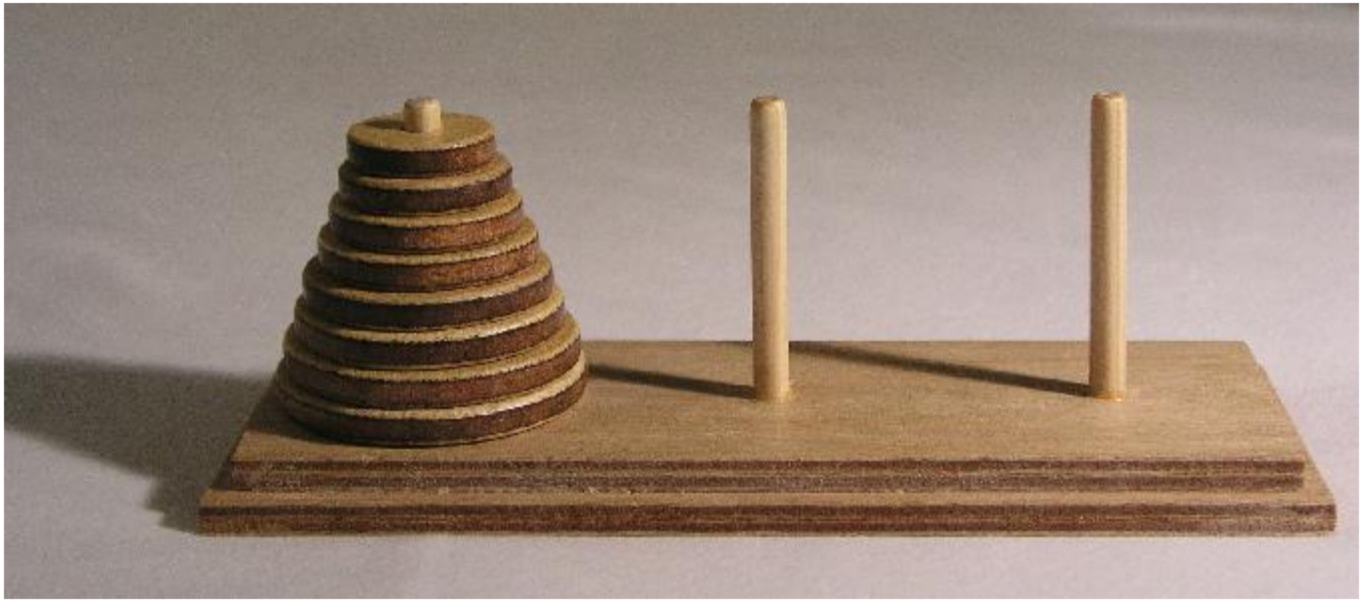
$$a_n = (1)(a_{n-1}) + (0.12)(a_{n-1})$$

$$a_n = (1.12)(a_{n-1})$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = (1.12)(a_{n-1})$; $n \geq 1$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1000$

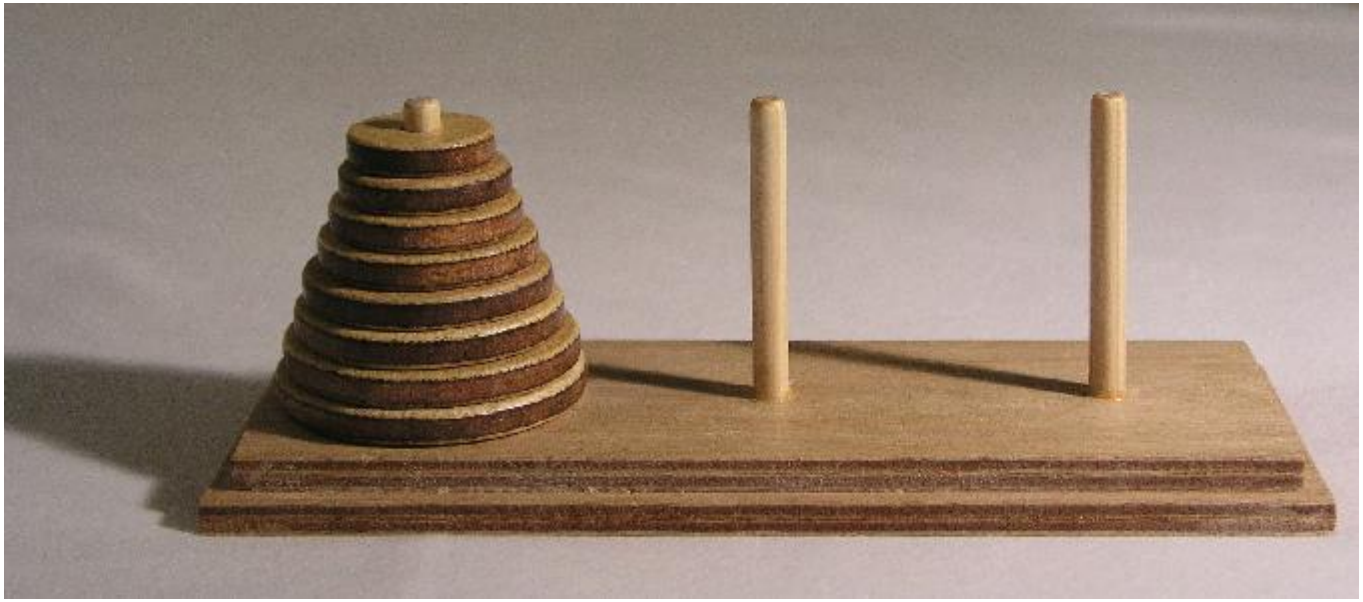
ปริศนาหอคอยฮานอย

- EDOUARD LUCAS คือ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เป็นผู้คิดค้น ปริศนาหอคอยฮานอย (The Tower of Hanoi) โดยปริศนาหอคอยฮานอย นั้นจะมีแผ่นจานไม้ 8 แผ่น รัศมีแตกต่างกัน แต่ละแผ่นมีรูตรงกลาง นำมาใส่ไว้ในหลักเป็นกองซ้อน โดยให้แผ่นที่เล็กกว่าทับแผ่นที่ใหญ่กว่า และมีหลักเปล่าสองหลัก ดังรูป



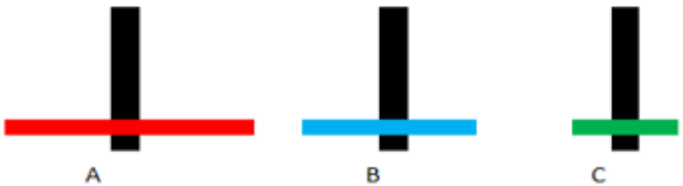
ปริศนาหอคอยฮานอย

- **ปริศนาหอคอยฮานอย** คือ ให้ย้ายแผ่นจานทั้งหมดไปกองไว้ที่หลักเปล่าหลักหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่า เคลื่อนย้ายได้คราวละแผ่น และต้องนำไปไว้ที่หลักใดหลักหนึ่ง และห้ามแผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่าวางทับแผ่นที่มีขนาดเล็กกว่า ต่อไปนี้แสดงขั้นตอนการเคลื่อนย้ายแผ่นจานจำนวน 3 แผ่นจากแผ่น A ไปแผ่น C



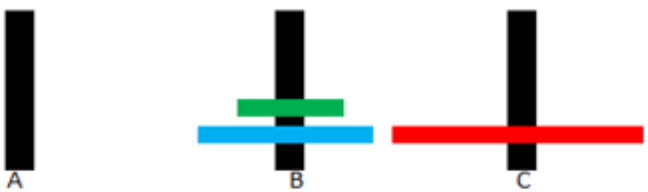
ตัวอย่างการเคลื่อนย้าย

ขั้นตอนที่ 1 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

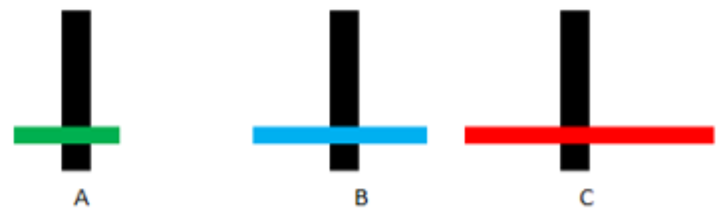


ขั้นตอนที่ 2 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

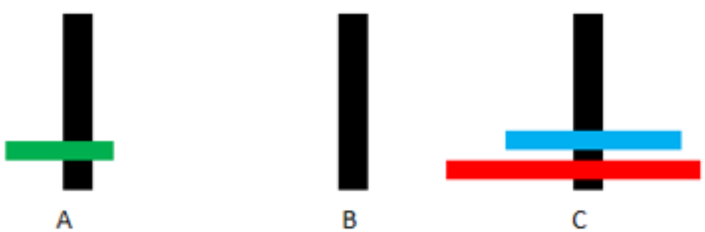
ขั้นตอนที่ 3 เคลื่อนย้ายจากแท่น C ไป B



ขั้นตอนที่ 4 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 5 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป A

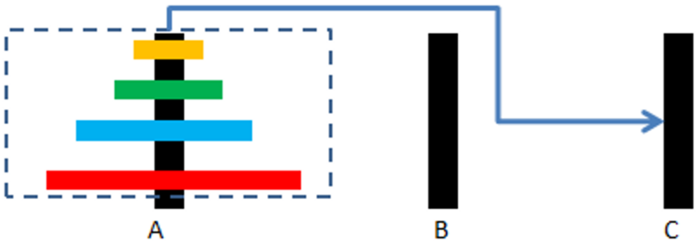


ขั้นตอนที่ 6 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป C

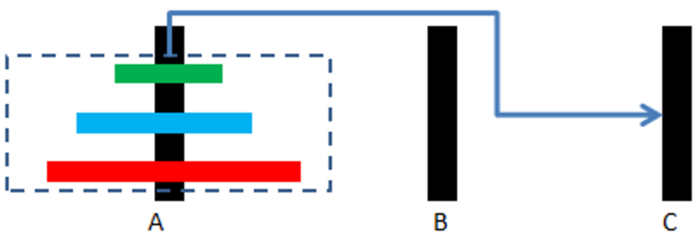
ขั้นตอนที่ 7 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

จำนวนการเคลื่อนย้ายแผ่น

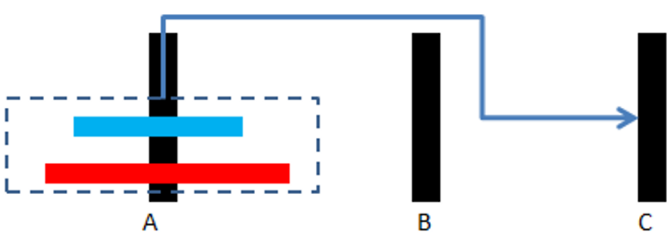
- ให้ a_n เป็นจำนวนครั้งน้อยสุดในการเคลื่อนย้ายแผ่นจาน n แผ่นจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง



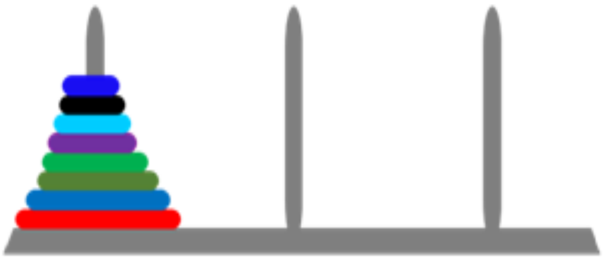
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_n โดย n คือ 4



จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-1} โดย n คือ 3



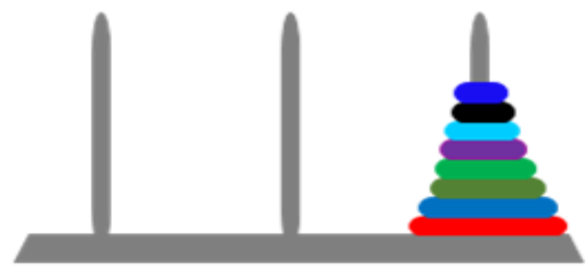
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-2} โดย n คือ 2



1. ต้องย้ายแผ่นที่เล็กกว่าทั้งหมด n-1 แผ่น ไปยังหลักที่ว่างก่อน จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง

2. ย้ายแผ่นใหญ่ที่สุดไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้ายคือ 1 ครั้ง

3. ย้ายแผ่นจานทั้งหมดในข้อ 1. ไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



จะได้ $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$

$= 2a_{n-1} + 1$

ตัวอย่าง 3

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -3a_{n-1}$ และ $a_0=7$

ขั้นตอนที่ 1 จากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1}$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = A(-3)^n$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า A โดยการแก้สมการ

n=0; $a_0 = (-3)^0 \times A$ - (1)

$A = 7$

แก้สมการ (1) จะได้ A = 7

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7x(-3)^n$

ตัวอย่าง 4

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 5 \,;\, n \geq 1$ และ $a_0 = 6$

ตัวอย่าง 5

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; n \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

ตัวอย่าง 6

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $n \geq 2$ โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 3$

ตัวอย่าง 7

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดปริศนาหอคอยฮานอย
- ถ้า n = 1 คือมีแผ่นจานเพียง 1 แผ่น จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 1 ครั้ง และ n = 0 ไม่มีแผ่นจาน จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 0 ครั้ง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1 ; n \geq 2$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$
- จากปริศนาหอคอยฮานอย ทำแปลงรูปจากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1} + d$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n + B$

ผลเฉลยอยู่ในรูป	a_n	$= A \times 2^n + B$	เมื่อ $r = 2$
จะได้	a_0	$= A \times 2^0 + B$	แล้ว $0 = A+B$
	a_1	$= A \times 2^1 + B$	แล้ว $1 = 2A+B$
แก้สมการ	$A = 1,$	$B = -1$	
ผลเฉลยคือ	a_n	$= 2^n - 1 ; n \geq 2$	

ตัวอย่าง 7

- ถ้าจานมีจำนวน 3 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 7
- ถ้าจานมีจำนวน 4 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 15
- ถ้าจานมีจำนวน 5 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 31
- ถ้าจานมีจำนวน 6 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 63
- ถ้าจานมีจำนวน 7 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 127
- ถ้าจานมีจำนวน 8 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 255
- **หมายเหตุ** รูปแบบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ จะนำพจน์ก่อนหน้ามาคำนวณ ซึ่งถ้าต้องการทราบพจน์ที่ n ต้องทราบพจน์ที่ n-1 ก่อน จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 ต้องหาพจน์ที่ 7 ก่อนแล้วนำมาเข้าสูตร คือ $a_8 = 2(127) + 1 = 255$ จึงจะสามารถหาพจน์ที่ 8 แต่ถ้ารูปแบบผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นไม่มีความจำเป็นต้องรู้ค่าพจน์ก่อนหน้า จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2^n-1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 สามารถแทนค่า n ด้วย 8 เข้าไปได้ ตัวอย่างเช่น $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ จึงไม่มีความจำเป็นต้องหาพจน์ก่อนหน้าจึงสะดวกในการใช้งานมากกว่า

ฟังก์ชัน

บทที่ 4 (ต่อ)

Discrete Mathematics for Computer Science

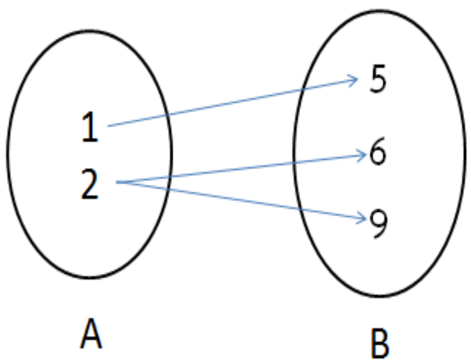
อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ฟังก์ชัน

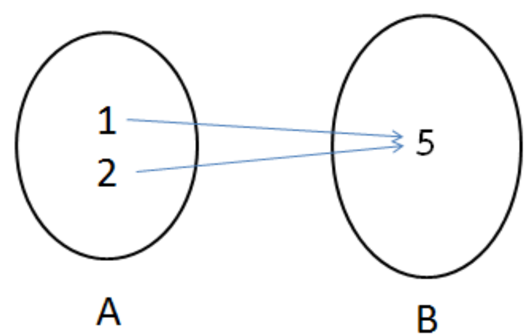
- ในการเขียนโปรแกรม สิ่งสำคัญคือฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันนั้น เกิดจากการสร้างของผู้เขียนโปรแกรม โดยจุดประสงค์ของการสร้างฟังก์ชันเพื่อให้การโปรแกรมนั้นสั้นและสะดวกขึ้น
- แต่อีกสิ่งที่สำคัญคือ หลักการสร้างฟังก์ชันนั้นและหลักการใช้งานฟังก์ชัน สิ่งเหล่านี้เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับผู้เขียนโปรแกรม
- นอกจากนี้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ยังสามารถถูกนำไปใช้กับการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตารางในวิชาฐานข้อมูล ดังนั้นฟังก์ชันเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมาย

- จากนิยามในทางคณิตศาสตร์ **ฟังก์ชัน** คือ ความสัมพันธ์จากเซตหนึ่งที่เรียกว่า **โดเมน (Domain)** ไปยังอีกเซตหนึ่งที่เรียกว่า **พิสัย (Range)** **โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน** ซึ่งฟังก์ชันนี้เป็นพื้นฐานของทุกสาขาของคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์เชิงปริมาณ หรืออาจจะกล่าวได้ว่าฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่ไม่มีโดเมนตัวใดจับคู่กับพิสัยมากกว่า 1 ตัว f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยสรุปคือ ใส่หนึ่งสิ่งเข้าไปในฟังก์ชัน แล้วได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นหนึ่งสิ่งและเหมือนเดิมทุกครั้ง

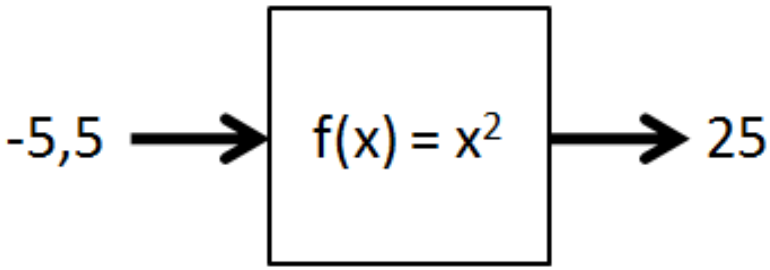


r1 = { (1,5), (2,6), (2,9) } **ไม่เป็นฟังก์ชัน**
เพราะมีโดเมนจับคู่พิสัยมากกว่า 1 ตัว

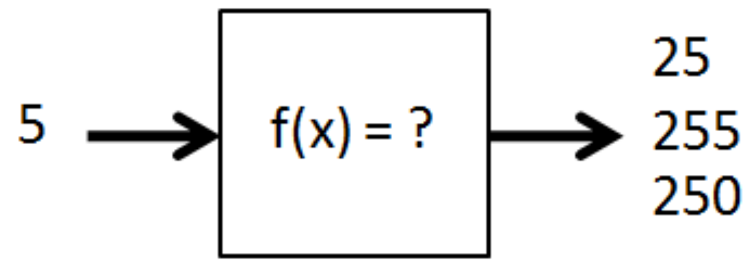


r1 = { (1,5), (2,6), (2,9) } **เป็นฟังก์ชัน**
เพราะมีโดเมนจับคู่พิสัยมากกว่า 1 ตัว

ความหมาย



จากรูปนี้ ถ้าเป็นสมการคณิตศาสตร์สามารถเกิดขึ้นได้ ใส่เลข 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้กลับมาเหมือนเดิมทุกครั้ง ในกรณีถ้าหากใส่เลข 5 เข้าไปคำตอบที่ได้จะเป็น 25 เสมอ หรือจะใส่ -5 เข้าไปคำตอบที่ได้จะเป็น 25 เสมอ



จากรูปนี้ ไม่สามารถเกิดขึ้นกับสมการคณิตศาสตร์ คือ ใส่เลข 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้กลับมีโอกาสเป็นเลขอื่นๆ ใส่แต่ละครั้งได้คำตอบออกมาไม่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น ใส่ 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้ครั้งแรกเป็น 25 ครั้งที่สอง เป็น 255 ครั้งที่สามเป็น 250 แบบนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ จะเรียก y เป็นตัวแปรตามที่ขึ้นอยู่กับค่าของ x กล่าวคือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย f(x) โดยที่ $(1, 2) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 2$ การกำหนดฟังก์ชันสามารถเขียนในรูป **$y = f(x)$** หรือ f(x) = นิพจน์ใดๆ

พิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน

หลักการพิสูจน์เราจะใช้นิยามของฟังก์ชัน " โดเมน (Domain) ไปยังอีกเซตหนึ่งที่เรียกว่า พิสัย (Range) โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน"

- ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่า $f=\{ (x, y) \in R\times R \mid y = x^2+1 \}$ เป็นฟังก์ชัน

สมมติ $(x,y_1)\in f$ และ $(x,y_2)\in f$

$y_1 = x^2+1$ และ $y_2 = x^2+1$

$x^2+1 = x^2+1$

$x = x$ เมื่อแก้สมการแล้ว x เท่ากับ x แสดงว่า x ค่า 1 จะได้ y ออกมา 1 ค่า

$y_1 = y_2$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน

พิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน

- ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f=\{ (x, y) \in R\times R \mid x^2+y^2 = 1 \}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

สมมติ $(x,y_1)\in f$ และ $(x,y_2)\in f$

$x^2+y_1^2 = 1$ และ $x^2+y_2^2 = 1$

$x^2+y_1^2 = x^2+y_2^2$ เมื่อแก้สมการแล้ว x สามารถตัดกับ x แต่ y ไม่สามารถตัดกันได้

$y_1^2 = y_2^2$ ในกรณีนี้ y_1 สามารถเท่ากับ y_2 หรือ $-y_2$ ดังนั้น มีโอกาสที่ $y_1\neq y_2$

$y_1 = \pm y_2$ คือ x = 0 แต่ y อาจจะได้คำตอบเป็น -1 หรือ 1 ก็ได้ ซึ่ง x มี 1 ค่าสามารถ

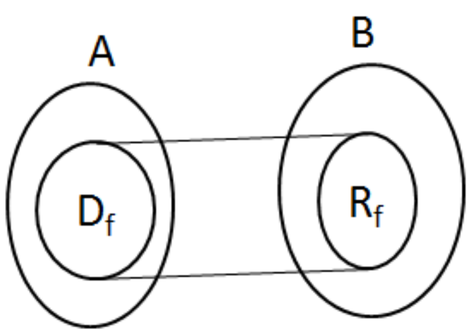
$y_1\neq y_2$ ทำให้เกิด y ได้หลายค่า จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน

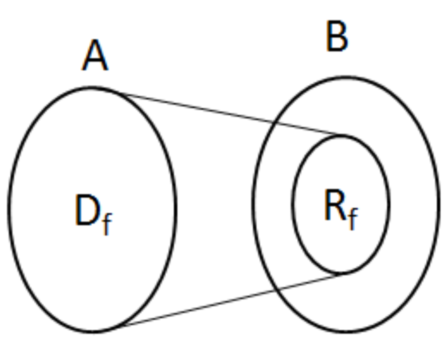
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันไป**

A และ B เป็นเซต f เป็นฟังก์ชันที่ D_f = A และ $R_f \subset$ B โดย f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปนั้น โดเมน D_f ต้องใช้หมด แต่พิสัย R_f ไม่ต้องใช้หมด เขียนแทนด้วย **f: A $\rightarrow$ B**



ไม่ใช่ f: A $\rightarrow$ B
เพราะ โดเมนของฟังก์ชันใช้ไม่หมด ดังนั้น
จึง**ไม่เป็น**ความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันไป**



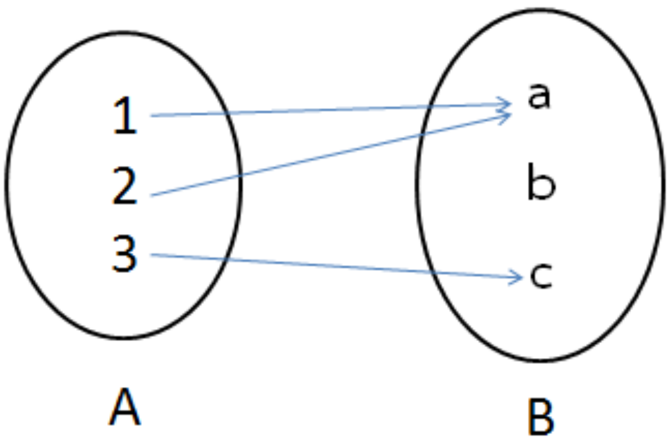
เป็น f: A $\rightarrow$ B
เพราะ โดเมนของฟังก์ชันใช้หมด ดังนั้น
จึงเป็นความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันไป**

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ตัวอย่าง A = {1, 2, 3} และ B = { a, b, c } จงพิจารณา f_1 และ f_2 เป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไป

$f_1 = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$ เป็น $f_1 : A \rightarrow B$ A ใช้หมด f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

$f_2 = \{(1,a), (3,b)\}$ ไม่ใช่ $f_2 : A \rightarrow B$ A ใช้ไม่หมด f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

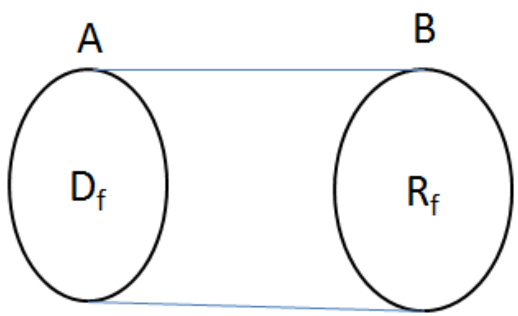


จากรูป
f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (A into B)
เพราะ A ใช้หมด แต่ B ใช้ไม่หมด

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

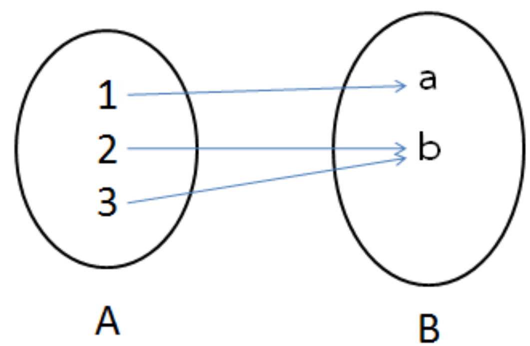
- ความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันไปทั่วถึง**

A และ B เป็นเซตที่ f : A → B ถ้า R_f = B จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึงนั้น โดเมน D_f ต้องใช้หมด และพิสัย R_f ต้องใช้หมดทั้งสองตัวเช่นกัน เขียนแทนด้วย **f: $A \xrightarrow{onto} B$**



f: $A \xrightarrow{onto} B$

เพราะ โดเมนของฟังก์ชันใช้หมด และพิสัยของฟังก์ชันใช้หมด ดังนั้นจึงเป็นความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันไปทั่วถึง**



f: $A \xrightarrow{onto} B$

จากรูปเป็นฟังก์ชัน A ไปทั่วถึง B (A onto B)เพราะ A ใช้หมดและ B ใช้หมด

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ตัวอย่าง A = {1, 2, 3} และ B = { a, b, c} จงพิจารณา f_3 และ f_4 เป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึง

$f_3 = \{(1,b),(2,c),(3,a)\}$ เป็น $f_3 : A \xrightarrow{onto} B$ A และ B ใช้หมด f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึงB

$f_4 = \{(1,a),(2,a),(3,c)\}$ ไม่ใช่ $f_4 : A \xrightarrow{onto} B$ A ใช้ไม่หมด f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

- **การพิสูจน์ฟังก์ชันไปทั่วถึง**
  - จัด X เทอมใน Y
  - พิจารณา Y ทำให้ X อยู่ในเงื่อนไข

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $f:R \to R$ โดย $f(x) = 3x+4$ เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง กำหนดให้ $y \in R$ โดย $y = f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$y = 3x+4$

$x = (y-4)/3$ ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน R ได้

$x \in R$ ในกรณีนี้คือ ไม่ว่าจะสุ่มเลขอะไรมา x อยู่ใน R เสมอ ไม่สามารถทำให้เกิด y เป็นจำนวนจินตภาพ

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f : I^+ \rightarrow I^+$ โดย $f(x) = 3x+4$ ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง
กำหนดให้ $y \in I^+$ โดย $y = f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$y = 3x+4$

$x = (y-4)/3$

ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน I^+ ได้ คือ x ใน I^+ ไม่สามารถทำให้เกิด y ตัวนั้นได้ เมื่อแทน 3 เข้าไปใน y ทำให้ $x = -1/3$ ไม่เป็น I^+

$x \notin I^+$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $f : R \rightarrow R$ โดย $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึงหรือไม่

กำหนดให้ $y \in R$ ที่ $y = f(x)$

วิธีทำ

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน R ได้ คือ x ใน R ไม่สามารถทำให้เกิด y ตัวนั้นได้ เมื่อแทน -1 เข้าไปใน y ทำให้ $x = \sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

$x \notin R$

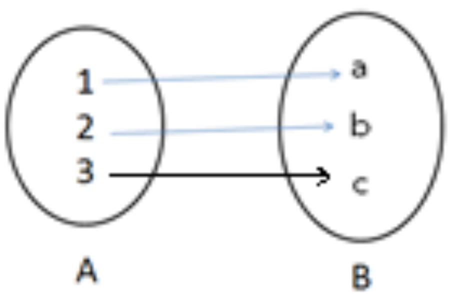
ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

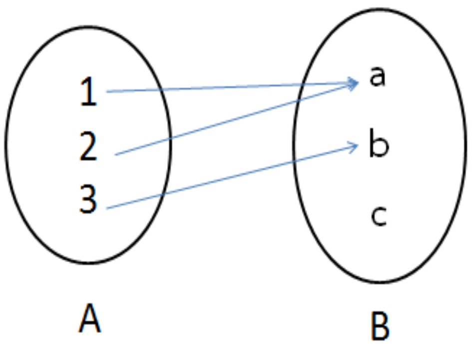
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ความสัมพันธ์ของ**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**

จากฟังก์ชัน f : A $\rightarrow$ B จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$ ทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$ เท่านั้น

เขียนแทนด้วย $\mathbf{f}: A \xrightarrow{1-1} B$





$\mathbf{f} : A \xrightarrow{1-1} B$

A และ B เป็น**ฟังก์ชัน 1-1** เพราะ พิสัย 1 ตัวต่อ โดเมน 1 ตัวเท่านั้น

$\mathbf{f} : A \xrightarrow{1-1} B$

A และ B **ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1** เพราะ พิสัย 1 ตัว หรือตัวอักษร a ต่อโดเมน 2 ตัวคือ 1 กับ 2

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- การพิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน 1 – 1
  - ใช้นิยามของการเป็นฟังก์ชัน 1-1
  - เขียนหัวเขียนท้าย
  - ลอกโจทย์
  - **จับค่า X ให้เท่ากัน**

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 2x+1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ สมมุติว่า y เท่ากัน แต่ไม่รู้ว่า x เท่ากันไหม

$2x_1+1 = 2x_2+1$ แต่สุดท้ายตัดสมการออกมาต้องได้เท่ากัน

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$ แก้สมการ แล้วได้ $x_1 = x_2$ เท่านั้น ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x^2$ ไม่เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ สมมุติว่า y เท่ากัน แต่ไม่รู้ว่า x เท่ากันไหม

$(x_1)^2 = (x_2)^2$ แต่สุดท้ายตัดสมการออกมาต้องได้เท่ากัน

$x_1 = \pm x_2$ แก้สมการได้ $x_1 \neq x_2$ เท่านั้น ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตรวจคำตอบ $x_1 \neq x_2$ โดยการสมมุติตัวเลขให้ $x_1 = 2$ และ $x_2 = -2$

$$f(x_1) = f(2) = 4$$

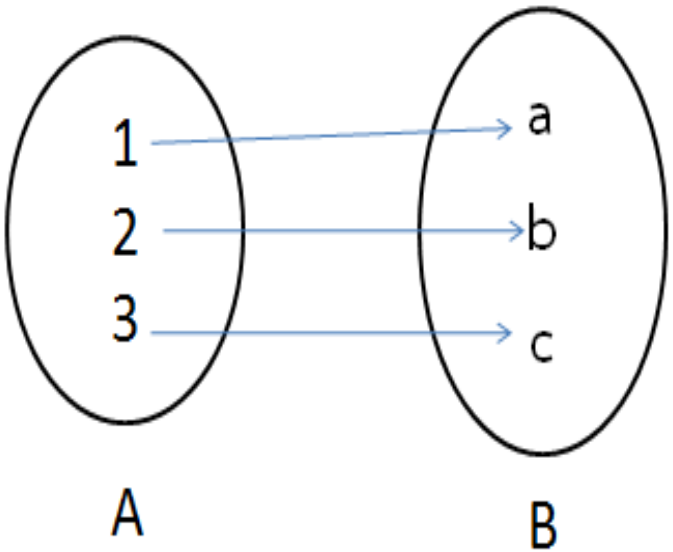
$$f(x_2) = f(-2) = 4$$

$f(x_1) = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

▪ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง คือฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันทั่วถึงด้วย คือ **โดเมนหนึ่งตัวต่อพิสัยหนึ่งตัว** และ**ทั้งโดเมนและพิสัยต้องใช้หมด** เขียนแทนด้วย f: $A \xrightarrow{1-1\ onto} B$



จากรูปเป็น f: A → B
เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เพราะ A ใช้หมดและ B ใช้หมด และโดเมนหนึ่งตัวต่อพิสัยหนึ่งตัว

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

________ **1.1)** ถ้า $f(x+3) = 2x - 1$ แล้ว $f(x) = 2x-5$

________ **1.2)** ถ้า $f(1-3x) = 5x^3$ แล้ว $f(4)$ คือ 5

________ **1.3)** ถ้า $f(x) = x^2+x+1$ แล้ว $f(x) = g(x-1)$ ดังนั้น $g(x) = x^2+3x+3$

________ **1.4)** ถ้า $f(x+2) = x^2-x-3$ แล้ว $f(-x+1)$ คือ x^2+3x-1

________ 1.5) ถ้า $g(x^2+4)=|x|-1$ แล้ว $g(x) = \sqrt{x-4} - 1$

________ 1.6) ถ้า $f(x+1) = x^2+7x+4$ แล้ว $f(x) = x^2+x-8$

แบบฝึกหัด 1.1

- **1.1)** ถ้า $f(x+3) = 2x - 1$ แล้ว $f(x) = 2x-5$

แบบฝึกหัด 1.2

- **1.2)** ถ้า $f(1-3x) = 5x^3$ แล้ว $f(4)$ คือ 5

แบบฝึกหัด 1.3

- **1.3)** ถ้า $f(x) = x^2+x+1$ แล้ว $f(x) = g(x-1)$ ดังนั้น $g(x) = x^2+3x+3$

แบบฝึกหัด 1.4

- **1.4)** ถ้า $f(x+2) = x^2-x-3$ แล้ว $f(-x+1)$ คือ x^2+3x-1

แบบฝึกหัด 2.1

2) กำหนด $f : R \rightarrow R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.1) **$f(x) = 6x-9$**

แบบฝึกหัด 2.2

2) กำหนด $f : R \rightarrow R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.2) **$f(x) = 3x^2-3x+1$**

แบบฝึกหัด 2.3

2) กำหนด $f : R \rightarrow R$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.3) **$f(x) = \sin x$**

แบบฝึกหัด 3.1

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

3.1) $\mathbf{f : I \rightarrow I}$ ที่ $\mathbf{f}(\boldsymbol{n}) = \begin{cases} \boldsymbol{n}^2; \mathbf{n} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{n}^2; \boldsymbol{n} < \mathbf{0} \end{cases}$

แบบฝึกหัด 3.2

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

3.2) $\mathbf{f : I \rightarrow I}$ ที่ $\mathbf{f}(n) = \begin{cases} \mathbf{n+1}; \mathbf{n} \text{ เป็นเลขคี่} \\ n^3; \mathbf{n} \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

แบบฝึกหัด 3.3

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

3.3) $f : R \rightarrow R$ ที่ $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $x \neq 0$

ฟังก์ชันผกผัน

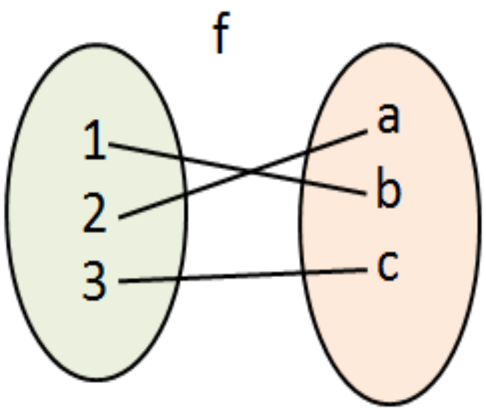
<u>นิยาม</u>

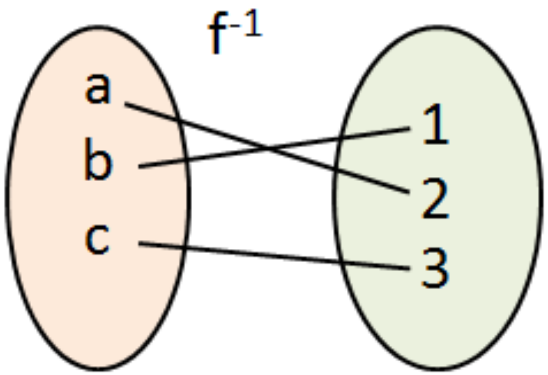
“ กำหนด $f : A \rightarrow B$ ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จะเรียก **f^{-1} ว่า ฟังก์ชันผกผัน** ของ f และ $f^{-1} : B \rightarrow A$ ”

- ตัวผกผันของความสัมพันธ์ คือ **การสลับตำแหน่งสมาชิกตัวหน้าและตัวหลัง**ของความสัมพันธ์ ซึ่งตัวผกผันของฟังก์ชัน **<u>ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป</u>** หรืออาจจะกล่าวได้ว่าถ้าสลับสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของความสัมพันธ์ แล้วผลลัพธ์ที่ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน
- แต่ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชัน จะเรียกตัวผกผันของความสัมพันธ์นั้นว่า **ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)** ซึ่งฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผันได้นั้น ตัวฟังก์ชันต้องมีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้น

ฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่าง กำหนดให้เซต A = {1, 2, 3} และ เซต B = {a, b, c}

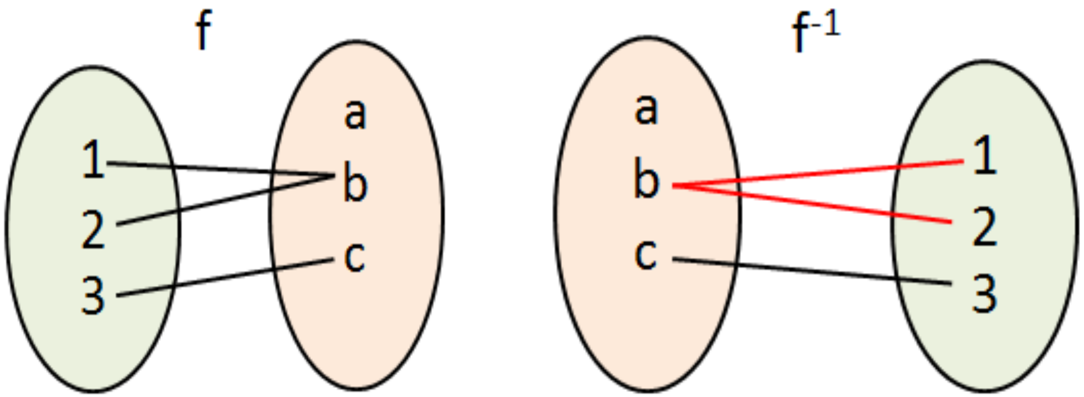




จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ f = { (1, b), (2, a), (3, c) } ซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสามารถทำฟังก์ชันผกผันได้ โดยฟังก์ชันผกผัน f^{-1} มีสมาชิกดังนี้ f^{-1} = { (a, 2), (b, 1), (c, 3) } เป็นฟังก์ชันผกผันของ f เพราะฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่าง กำหนดให้เซต A = {1, 2, 3} และ เซต B = {a, b, c}

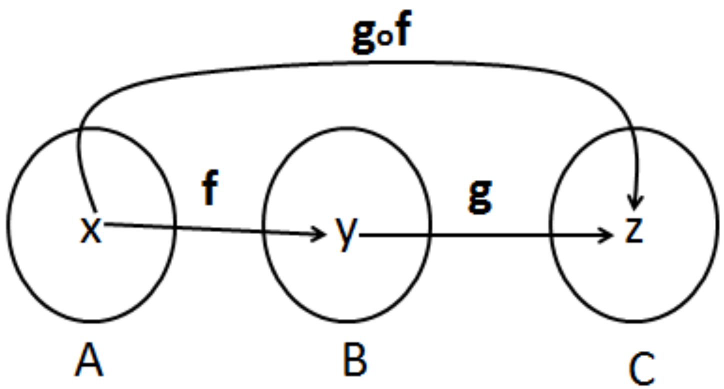


จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ f = { (1,b), (2,b), (3,c) } ไม่สามารถเป็นฟังก์ชันผกผัน เพราะ**ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** กรณีนี้ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} มีสมาชิกดังนี้ f^{-1} = { (b,1), (b,2), (c,3) } ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะโดเมนหนึ่งตัวสามารถเกิดพิสัยได้มากกว่าหนึ่งตัว สำหรับ f ในกรณีนี้ไม่มีฟังก์ชันผกผัน **ดังนั้น f : A $\rightarrow$ B โดย f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**

ฟังก์ชันประกอบ

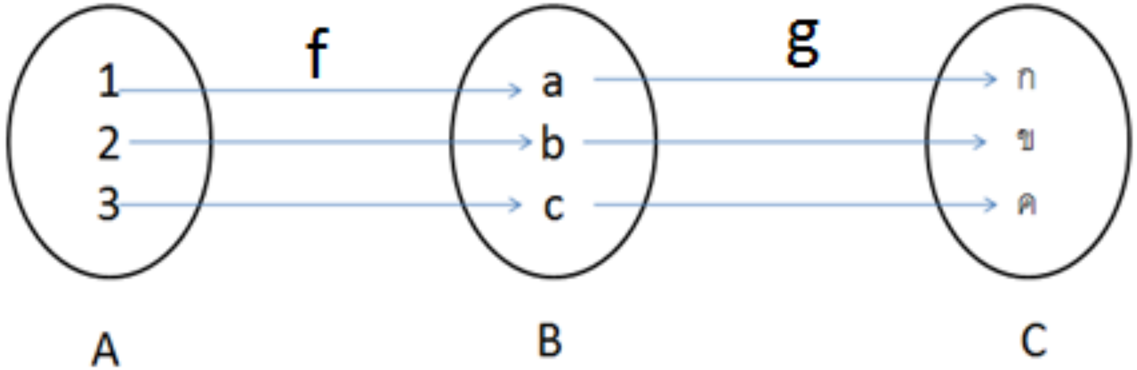
ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function) ฟังก์ชันใหม่ที่สร้างขึ้นจาก 2 ฟังก์ชันเดิมคือ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ **gof(x) และ g(f(x))** โดย f : A $\rightarrow$ B และ g : B $\rightarrow$ C ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย gof(x) หรือ g(f(x)) สำหรับ x $\in$ A

นิยาม ถ้า f: $A \xrightarrow{1-1} B$ และ $g: B \xrightarrow{1-1} C$ แล้ว $gof: A \xrightarrow{1-1} C$



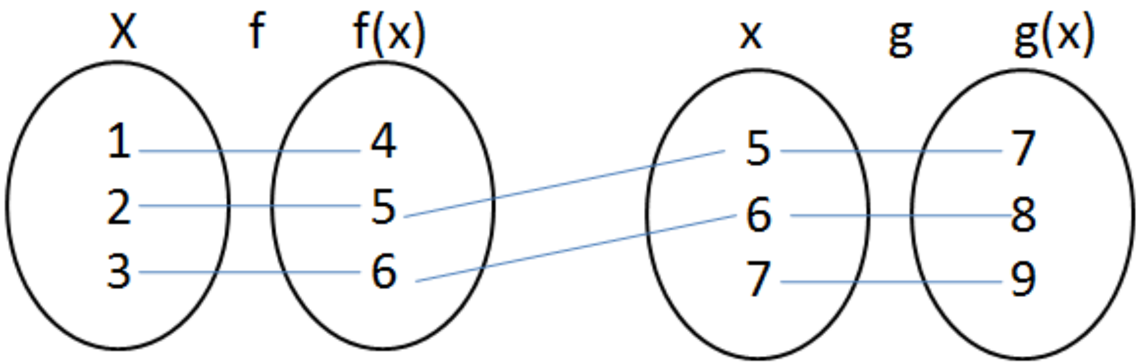
จากรูปข้างบน gof = { (x, z) | มี y $\in$ B ที่ (x, y) $\in$ f และ (y, z) $\in$ g }

ฟังก์ชันประกอบ



- จากรูปข้างบนเซต A = {1, 2, 3} และเซต B = {a, b, c} และเซต C = {ก, ข, ค}
- ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ f = { (1,a), (2,b), (3,c) } และฟังก์ชัน g มีสมาชิกดังนี้ g= { (a,ก), (b,ข), (c,ค) }
- สำหรับฟังก์ชันประกอบ gof มีสมาชิกดังนี้ gof = { (1,ก),(2,ข),(3,ค) }
- สำหรับฟังก์ชันประกอบผกผัน gof^{-1} มีสมาชิกดังนี้ gof^{-1}= { (ก,1),(ข,2),(ค,3) }
- ดังนั้นสามารถสรุปนิยามออกมาได้ดังนี้ โดเมนของฟังก์ชันประกอบเป็นสับเซตของโดเมนของฟังก์ชัน f ($D_{gof} \subset D_f$)และพิสัยของฟังก์ชันประกอบเป็นสับเซตของพิสัยของฟังก์ชัน g ($R_{gof} \subset R_g$)

ฟังก์ชันประกอบ

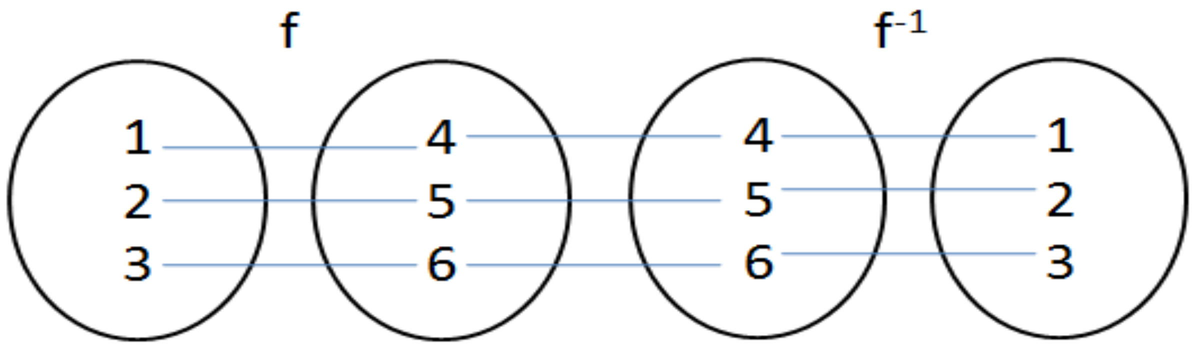


จากรูปข้างบน

f = { (1,4), (2,5), (3,6) }
g = { (5,7), (6,8), (7,9) }

สำหรับฟังก์ชันประกอบ gof มีสมาชิกดังนี้ gof = { (2,7), (3,8) } โดย gof จะมีจุดที่เชื่อมกัน ระหว่างพิสัยของ f ที่ซ้ำกับโดเมนของ g นั้นหมายเลข 5, 6 ที่เป็นจุดเชื่อม โดย gof จะนำโดเมนของ f และ พิสัยของ g มาเป็นสมาชิกของฟังก์ชัน gof และเลือกเฉพาะสมาชิกที่สามารถเชื่อมกันได้เท่านั้น

ฟังก์ชันประกอบ



จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน fof^{-1} มีสมาชิกดังนี้ $fof^{-1} = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

$fof^{-1}(1) = 1$
$fof^{-1}(2) = 2$
$fof^{-1}(3) = 3$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าฟังก์ชันประกอบเป็นฟังก์ชันผกผันของตัวเอง เช่น **$fof^{-1}(x) = x$** และโดเมนกับพิสัยจะมีค่าเดี่ยวกัน

ฟังก์ชันประกอบ

หมายเหตุ การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันประกอบ $g(x) = x^2$ และ $f(x) = x + 2$

สำหรับฟังก์ชัน $g(f(x))$ สามารถคิดได้ 2 แบบ แบบแรกคือการนำผลลัพธ์ของอีกฟังก์ชันเป็นโดเมนของอีกฟังก์ชันแบบที่สองคือการนำฟังก์ชันทั้งสองมายุบรวมกันเป็นฟังก์ชันเดี่ยวแล้วนำโดเมนใส่เข้าไปแล้วให้ผลลัพธ์ออกมา

แบบแรก เมื่อใส่ค่า x เข้าไปในฟังก์ชัน $g(f(x))$ เช่น $x = 1$ คำตอบที่ได้คือ $f(x) = 1 + 2 = 3$ และ 3 จะเป็นค่าที่ใส่เข้าไปในฟังก์ชัน $g(x)$ อีกที คือ $g(x) = (3)^2 = 9$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ 9

แบบสอง สำหรับฟังก์ชัน $g(f(x))$ คือ $(x + 2)^2$ ใส่ค่า 1 เข้าไปได้ผลลัพธ์คือ $(1 + 2)^2 = 9$ ซึ่งมีค่าเท่ากัน

จะเห็นว่าฟังก์ชันประกอบ คือการนำผลลัพธ์ของอีกฟังก์ชัน เป็นโดเมนของอีกฟังก์ชัน แล้วนำคำตอบสุดท้ายเป็นคำตอบของฟังก์ชันประกอบหรือการนำฟังก์ชันมารวมกันเป็นฟังก์ชันใหม่

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน

- **ตัวอย่างที่ 1** $fog(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ โดย $f(x) = x^3 + 1$ จงหา $g(x)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน

- **ตัวอย่างที่ 1** **$fog(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$** โดย $f(x) = x^3 + 1$

    จงหา $g(x)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$f^{-1}\,f(g(x)) = f^{-1}(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$$

$$f^{-1}(f(g(x))) = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) - 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(x+1)^3}$$

$$g(x) = x+1$$

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน

- **ตัวอย่างที่ 2** **fog(x) = 3x-14** และ f(x) = 3x-8 จงหา g(x)

$f^{-1}(x) = \frac{x+8}{3}$

$f^{-1}\,\mathbf{f(g(x))} = f^{-1}\,\mathbf{(3x\text{-}14)}$

$f^{-1}\,(f(g(x))) = \frac{3x-14+8}{3}$

$g(x) = x-2$

แบบฝึกหัด 1

1) ถ้า $f(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ แล้ว $f^{-1}(5) - f^{-1}(-2)$ มีค่าเท่าใด

แบบฝึกหัด 2

2) ถ้า $f(x) = x - 1$ และ $(gof^{-1})(x) = 4x^2 - 1$ ถ้า $g(x) = 0$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

แบบฝึกหัด 3

3) $fog(x+2) = 3x+6$ จงหาค่า $fog(2)$

แบบฝึกหัด 4

4) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ fog(x+2) = 3x+6 แล้ว g(2)

แบบฝึกหัด

6) กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันจาก I^+ ไป I^+ จงหา fof, gog , fog, gof จาก f(n) = 2n+1, g(n) = 3n-1

7) กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันจาก I^+ ไป I^+ จงหา fof, gog , fog, gof จาก $f(n) = n^2$, $g(n) = 2^n$

Note

ตรรกศาสตร์

บทที่ 5

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ตรรกศาสตร์

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สิ่งที่สำคัญคือผู้เขียนโปรแกรมต้องมีความคิดเชิงลอจิกหรือตรรกศาสตร์ เช่น ต้องการสร้างโปรแกรมคำนวณเกรดของนักศึกษา โดยถ้าใส่คะแนนมากกว่า 80 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด A ถ้าใส่คะแนนมากกว่า 70 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด B เป็นต้น โดยตรรกศาสตร์จะเป็นการฝึกให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับกับการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ผู้เขียนโปรแกรมสามารถเข้าใจหลักการคิดของคอมพิวเตอร์มากขึ้น และสามารถสั่งการให้คอมพิวเตอร์ทำงานได้ตามที่ผู้เขียนโปรแกรมต้องการ ดังนั้น ตรรกศาสตร์ จึงเป็นวิชาที่สำคัญมาก เป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ตรรกศาสตร์ (logic)**
  - เป็นการศึกษาเชิงปรัชญาว่าด้วย**การให้เหตุผล** หรือ**การตรวจสอบข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล** โดยมักจะเป็นส่วนสำคัญของวิชาปรัชญา คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ รวมถึงภาษาศาสตร์ ตรรกศาสตร์เป็นการศึกษาที่มีมานานโดยมนุษยชาติที่เจริญแล้ว เช่น กรีก จีน หรืออินเดีย และถูกยกขึ้นเป็นสาขาวิชาหนึ่งโดย อริสโตเติล

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ประพจน์ (proposition)**
  - คือ **ประโยคที่มีค่าความจริงเป็น จริง (True หรือสัญลักษณ์ตัว T) หรือเท็จ (False หรือสัญลักษณ์ตัว F)** **อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น** โดยประโยคเหล่านี้จะอยู่ในรูป**ประโยคบอกเล่า**
  - ส่วนข้อความรูปแบบ **คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน คำปฏิเสธ** ข้อความเหล่านี้**ไม่เป็นประพจน์**
  - สำหรับข้อความบอกเล่าแต่**มีตัวแปรอยู่ด้วย** ไม่สามารถบอกว่าเป็นจริงหรือเท็จถึงว่า**ไม่เป็นประพจน์**
  - ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจระบุได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ **ไม่เป็นประพจน์** เช่น **อารมณ์ ความรู้สึก** เป็นต้น

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ตัวอย่าง**

ธงชาติไทยมี 3 สี	(จริง)
$1 \in \{1,2,3,4\}$	(จริง)
กรุงเทพมหานครเป็นจังหวัดหนึ่งในประเทศไทย	(เท็จ)
$5 > 6$	(เท็จ)

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง (T) เรียกว่า ประพจน์จริง**

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **เท็จ (F) เรียกว่า ประพจน์เท็จ**

กำหนดตัวแปร **p, q, r,...** แทนประพจน์ใดๆ เรียกตัวแปรว่า **ตัวแปรประพจน์**

ค่าความจริงของตัวแปรประพจน์ ขึ้นอยู่กับตัวแปรนั้นใช้แทนประพจน์ใด

p แทน $1 \in \{1,2,3,4\}$	p เป็นประพจน์จริง
q แทน $5 > 6$	q เป็นประพจน์เท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- การนำประพจน์มาเชื่อมกัน จะได้ประพจน์ใหม่ ซึ่งสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ สำหรับตัวเชื่อมประพจน์ (Propositional Connective) นั้น มีอยู่ 5 ตัว และตัวเชื่อมที่ใช้กันมากในตรรกศาสตร์คือ และ, หรือ, ถ้า...แล้ว, ก็ต่อเมื่อ, ไม่

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“และ”** (conjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ $\wedge$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “และ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“หรือ”** (disjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ $\vee$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“ถ้า…แล้ว”** (if…then…) ใช้สัญลักษณ์ “ $\rightarrow$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า…แล้ว” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“ก็ต่อเมื่อ”** (if and only if) ใช้สัญลักษณ์ **“ $\leftrightarrow$ ”**
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ **$p \leftrightarrow q$** ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกัน และจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน

- นิเสธของประพจน์ **“นิเสธ”** (negation) ใช้สัญลักษณ์ **“ ~ ”**
  - นิเสธของประพจน์ใดๆ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้นๆ และสามารถเขียนแทนนิเสธของ p ได้ด้วย **~p**

การเชื่อมต่อประพจน์

ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน ตารางค่าความจริง (Truth Table) ของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน โดย T แทนค่าความจริงเป็นจริง และ F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ มีรายละเอียดดังนี้

p	q	~p	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ประพจน์กับข้อความ

สมมติให้

p	ฝนตก
q	น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

เครื่องหมายของประพจน์และข้อความ

$\sim p$	ฝนไม่ตก
$p \wedge q$	ฝนตก และ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
$p \vee q$	ฝนตก หรือ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
$p \rightarrow q$	ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
$p \leftrightarrow q$	ฝนตก ก็ต่อเมื่อ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 1** ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน และประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา

p	ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน	T
q	ประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา	F

$T \wedge F = F$

- **ตัวอย่างที่ 2** $(10 + 10 > 8) \wedge (1 \times 0 = 0)$

p	$10 + 10 > 8$	T
q	$1 \times 0 = 0$	T

$T \wedge T = T$

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 3** -3 เป็นเลขจำนวนจริง หรือ สกุลเงินไทยคือปอนด์

p	-3 เป็นเลขจำนวนจริง	T
q	สกุลเงินไทยคือปอนด์	F

$T \vee F = T$

- **ตัวอย่างที่ 4** π เป็นเลขจำนวนเต็ม หรือ -2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

p	π เป็นเลขจำนวนเต็ม	F
q	-2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก	F

$F \vee F = F$

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 5** ถ้าฝนตก แล้ว รถติด

p	ฝนตก	T (กำหนดให้ฝนตกเป็น T)
q	รถติด	T (กำหนดให้รถติดเป็น T)

$T \rightarrow T = T$

- **ตัวอย่างที่ 6** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ S V ~S

S	~S	S V ~S
T	F	T
F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 7** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์

$$p \vee q, \quad (p \vee q) \rightarrow p, \quad (p \vee q) \rightarrow q$$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	T	F	T
F	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 8** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ และ $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

สัจจะ แปลว่า จริง และสำหรับนิรันดร์ แปลว่า ตลอดกาล ประพจน์ที่เป็น**สัจนิรันดร์ (tautology)** คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงตลอดกาล ทุกกรณีของประพจน์ย่อย หรือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

สำหรับการตรวจสอบสัจนิรันดร์ สามารถทำได้ 2 กรณีดังนี้

- **กรณีที่ 1**

สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์นั้นๆ ขึ้นมาเพื่อตรวจสอบว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยถ้าเป็นต้องได้ผลลัพธ์ทุกกรณีเป็นจริงหมด แสดงว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ประพจน์เหล่านี้ $p\wedge \sim p$, $p\vee\sim p$, $(p\wedge q)\rightarrow p$, $(p\wedge q)\rightarrow q$, $p\wedge q\wedge\sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้สร้างตารางค่าความจริงแล้วพิจารณาว่าประพจน์ใดที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี หากมีกรณีที่ค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดี่ยวเท่านั้นก็ถึงว่า ไม่เป็นสัจนิรันดร์

P	$p\wedge \sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	F	T
	ไม่เป็นสัจนิรันดร์	สัจนิรันดร์

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$	$(p\wedge q)\rightarrow q$	$p\wedge q\wedge\sim q$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F
			สัจนิรันดร์	สัจนิรันดร์	ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น $p\vee\sim p$, $(p\wedge q)\rightarrow p$, $(p\wedge q)\rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ เพราะตารางความจริงเป็นจริงทุกกรณี

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

- **กรณีที่ 2**

กำหนดให้ประพจน์ทั้งหมดเป็นเท็จ แล้วพยายามพิสูจน์ว่าประพจน์นี้สามารถเป็นเท็จได้ ถ้าสามารถเป็นเท็จได้ แสดงว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $p \wedge q \wedge \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$p \wedge q \wedge \sim q$ กรณีนี้ถ้ากำหนด $p = T$ และ $q = T$ ได้ผลลัพธ์ของประพจน์เป็น F

$T \wedge T \wedge F$

ผลลัพธ์ของประพจน์นี้คือ F ถ้าเป็นเท็จได้ถึงว่าไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นจึงไม่เป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $(p\wedge q)\rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$(p\wedge q)\rightarrow p$	กำหนดให้เป็น F ถ้าจะเป็นเท็จได้ p ต้องเป็น F และ $p\wedge q$ ต้องเป็น T
$T\rightarrow F$	
$p\wedge q = T$	ดังนั้น $p\wedge q$ ต้องเป็น T ทั้งหมด ซึ่งขัดแย้งกับ p ที่ต้องแรกกำหนดเป็น F

ดังนั้นประพจน์นี้จึงเป็นสัจนิรันดร์ เนื่องจาก $(p\wedge q)\rightarrow p$ ไม่สามารถเป็น F ได้

แบบฝึกหัด

1). จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นประพจน์

______ 1) คุณวรนุช

______ 2) สุนัขเห่าเหมียวๆ

______ 3) มนุษย์มีสองขา

______ 4) $8 \times 8 > 10$

______ 5) โลกเป็นบริวารของดวงอาทิตย์

______ 6) ฉันคิดถึงเธอมาก

______ 7) โปรดเห็นใจฉันบ้าง

______ 8) ผู้หญิงที่เดินมาเธอเป็นใครเหรอ

______ 9) จงเงียบสะ

______ 10) กากเกรียนกะโหลกกะลากิ๊กก๊อก

แบบฝึกหัด

______ 11) รบกวนช่วยเปิดหน้าต่างหน่อย

______ 12) ผมอยากเป็นโปรแกรมเมอร์

______ 13) ผมเป็นนักศึกษา

______ 14) ผมเป็นเมียเขา

______ 15) โอ้ยเจ็บ

______ 16) เราพร้อมแล้วเพื่อนเอ๋ย

______ 17) รักลูกให้ผูก รักวัวให้ตี

______ 18) x + 5 = 15

______ 19) x + y = z

______ 20) ไก่ขัน “เหมียวๆ”

แบบฝึกหัด

______ 21) แม่คิดถึงลูกมาก

______ 22) อาจารย์ทิพย์เป็นผู้ชาย

______ 23) กรุงเทพเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

______ 24) นกไม่มีปีก

______ 25) ธนาคารมีการบันทึกและจัดเก็บข้อมูลลูกค้าไว้ในคอมพิวเตอร์

______ 26) 4+5 มีค่าเท่ากับ 9

______ 27) จังหวัดอุดรธานีไม่ได้อยู่ในภาคอีสาน

______ 28) 2 + 3 = 3 - 1

______ 29) โลกเป็นดาวเคราะห์

______ 30) เลขคู่ทุกจำนวนหารด้วยสองลงตัว

แบบฝึกหัด

______ 31) 17 + 8 = 30

______ 32) เซตว่างไม่เป็นสับเซตของทุกเซต

______ 33) ปลาและนกเป็นสัตว์บก

______ 34) 50 คูณด้วย 40 มีค่าเท่ากับเท่าไร

______ 35) หยุดเดี๋ยวนี้นะ

______ 36) อย่าส่งเสียงดังในเวลาทำงาน

______ 37) กรุณาปิดไฟทุกครั้งก่อนออกจากห้อง

______ 38) ได้โปรดเถอะนะถือว่าสงสารฉันหน่อย

______ 39) ว้าย! ตะเถรตกกระโถน

______ 40) บรรยากาศสำหรับเราสองคนอยากให้เป็นเช่นนี้จังเลย

แบบฝึกหัด

______ 41) อย่าคุยเวลาทำงาน

______ 42) อยากดูหนังมากเลย

______ 43) ว้าย! น่ากลัวจัง

______ 44) สมการของ x+y = 1 เป็นสมการอะไร

แบบฝึกหัด

2) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$

3) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim P \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	$\sim P$	$P \vee Q$	$\sim P \rightarrow (P \vee Q)$

แบบฝึกหัด

4) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

P	R	Q	$\sim P \vee R$	$(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

แบบฝึกหัด

5) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee \sim R)$

แบบฝึกหัด

6) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(10 > 5) \wedge (\frac{4}{8} + 5 > 6)$

7) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $((P \vee Q) \wedge (\sim P)) \rightarrow (R \rightarrow P)$ โดยที่ P = F, Q = T, R = T

8) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 5 + 5 = 10 และ -3 + 3 = 3

9) จงหาค่าความจริงของ $(\sim Q \wedge (P \vee Q)) \rightarrow ((Q \wedge R) \vee (P \vee R))$ โดยที่ P, Q, R โดยมีค่าความจริง T, F, F

แบบฝึกหัด

10) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 6 มากกว่า 5 แล้ว -6 มากกว่า -5

11) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 5 มากกว่า 6 แล้ว -5 มากกว่า -6

12) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 2 คือเลขคี่ แล้ว 3 เป็นเลขคู่

13) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 33 คือเลขจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมือ 33 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

แบบฝึกหัด

14) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 10 คือเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ π เป็นเลขจำนวนเต็ม

15) $p \rightarrow p \vee q$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

16) $(R \rightarrow (S \vee T)) \vee (S \leftrightarrow (R \wedge T))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

17) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

18) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

19) $((p\rightarrow q)\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

20) $(p\rightarrow (r\vee q))\rightarrow((p\rightarrow r)\vee(p\rightarrow q))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน (Logically equivalent) คือ ประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสอง**มีค่าความจริงเหมือนกัน**ทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย หรือประพจน์ทั้งสองต้องมีค่าความจริงแบบเดียวกันทุกกรณี เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

การทดสอบว่าประพจน์ 2 ประพจน์ สมมูลกันนั้นสามารถทำได้โดยการสร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ถ้าค่าความจริงของตารางตรงกันทุกกรณี แสดงว่าประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ มีดังนี้

$p \wedge q$	$\equiv$	$q \wedge p$
$p \vee q$	$\equiv$	$q \vee p$
$(p \wedge q) \wedge r$	$\equiv$	$p \wedge (q \wedge r)$
$(p \vee q) \vee r$	$\equiv$	$p \vee (q \vee r)$
$p \wedge (q \vee r)$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r)$	$\equiv$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\sim p \vee q$
$p \rightarrow q$	$\equiv$	$\sim q \rightarrow \sim p$
$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ข้อสังเกต ประพจน์ที่สมมูลกัน เมื่อเชื่อมกันด้วย $\leftrightarrow$ จะเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ แต่โดยส่วนมากแล้ว **นิยมเขียนตาราง** เพราะตัวเชื่อมกันเป็น $\leftrightarrow$ ทำให้กรณีที่เกิดขึ้นมีโอกาสเป็น T และ F หรือ F และ T เมื่อพิสูจน์ทำให้มีหลายกรณี จึงทำให้การพิจารณากรณีให้ครบเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก ถ้าพบว่าไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพียงกรณีเดียวก็สามารถสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน แต่ถ้าไล่กรณีไม่ครบก็มีโอกาสที่จะไม่พบกรณีที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ทำให้พิจารณาว่าประพจน์ทั้งสองนี้สมมูลกัน ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

ถ้าคิดกรณีแรกเป็นกรณีที่สมมูลกัน ดังนั้นจึงตอบว่าประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน แต่ความจริงแล้วพลาดไม่ได้คิดกรณีที่ สอง ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่สมมูลกัน ทำให้นักศึกษาตอบคำถามผิด

<table>
<tr><th colspan="2">$p \rightarrow q$</th><th>$\leftrightarrow$</th><th>$(p \wedge q)$</th><th>$\wedge$</th><th>$(q \rightarrow p)$</th><th rowspan="4">สัจนิรันดร์</th></tr>
<tr><td colspan="2">F</td><td></td><td colspan="3">T</td></tr>
<tr><td>T</td><td>T</td><td></td><td>$T \wedge T$</td><td></td><td>$T \rightarrow T$</td></tr>
<tr><td colspan="2">q ต้องเป็น F แต่ q ถูกกำหนดเป็น T แล้วจึงขัดแย้งกัน แสดงว่าประพจน์ไม่สามารถเป็น "เท็จ"</td><td></td><td>T</td><td></td><td>T</td></tr>
</table>

ประพจน์สมมูลกัน

แต่ในความจริงแล้วถ้าคิดกรณีที่สอง กรณีนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพราะสามารถเป็นเท็จได้ ดังนั้นประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน

$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$	
T		F			ไม่เป็นสัจนิรันดร์
$F \rightarrow T$		$F \wedge T$		$T \rightarrow F$	
ไม่ขัดแย้ง T แสดงว่าประพจน์ สามารถเป็น "เท็จ" ได้		F		F	

สำหรับการค้นหาคำตอบ ถ้าหากพบคำตอบที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพียงคำตอบเดียวถึงว่าให้ยุติการค้นหาคำตอบ เพราะประพจน์ทั้งสองอันนั้นไม่สมมูลกันแน่นอน แต่ถ้าเกิดพบว่าคำตอบเป็นสัจนิรันดร์ ต้องหากรณีอื่นๆ อีกจนครบทุกกรณีที่เป็นไปได้ จึงจะสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน ถ้าหากขาดเพียงกรณีเดียว อาจจะสรุปคำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ สมมูลกันหรือไม่

p	$\sim p$	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

จากตารางนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า 4^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 เป็นจำนวนคู่ และถ้า 4^2 ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 ไม่เป็นจำนวนคู่ สมมูลกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

สามารถเขียนแทนในรูปแบบ p และ q ได้ดังนี้

p = 4^2 เป็นจำนวนคู่ $\sim p$ = 4^2 ไม่เป็นจำนวนคู่

q = 4 เป็นจำนวนคู่ $\sim q$ = 4 ไม่เป็นจำนวนคู่

และสามารถเขียนสรุปได้ดังนี้ $p \rightarrow q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

ประพจน์สมมูลกัน

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

~p	~q	~p→~q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

จากตารางทั้งสองนี้สรุปได้ว่า p→q ≡ ~q → ~p ประพจน์**ไม่สมมูลกัน**

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge {\sim}q) \to r$ สมมูลกันหรือไม่

p	q	r	$p \to (q \vee r)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	r	$(p \wedge {\sim}q) \to r$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

จากตารางสองตารางนี้สรุปได้ว่า $p \to (q \vee r) \equiv (p \wedge {\sim}q) \to r$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน เพื่อใช้ในการลดรูปประพจน์ และพิสูจน์ประพจน์

$p \equiv \sim(\sim p)$	นิเสธซ้อน		
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กระจาย	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กระจาย
$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$	กระจาย	$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$	กระจาย
$p \vee q \equiv q \vee p$	สลับที่	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	สลับที่
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	จัดกลุ่ม	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	จัดกลุ่ม
$\boldsymbol{\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q}$	**เดอมอร์แกน**	$\boldsymbol{\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q}$	**เดอมอร์แกน**
$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$		$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	
$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$	ประพจน์แย้งสลับที่	$\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$	
$\boldsymbol{(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)}$		$\boldsymbol{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$	

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

นิยาม : ลำดับของประพจน์ เขียนแทนด้วย p_1 p_2 .... p_n และ q จะเรียก $p_1, p_2, ..., p_n$ ว่า สมมุติฐาน (hypothesis) และเรียก q ว่า ข้อยุติ (conclusion) ซึ่งสมเหตุสมผล ถ้า p_1 และ p_2 และ ... และ p_n เป็นจริงทั้งหมด แล้ว q ต้องเป็นจริงเท่านั้น มิฉะนั้น จะถือว่า ไม่สมเหตุสมผล

- นิยามนี้คือ $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$ จะสมเหตุสมผล เมื่อประพจน์เป็น **สัจนิรันดร์** ต้องเอาประพจน์มาเชื่อมต่อกัน ถ้าตารางความจริงเป็นสัจนิรันดร์ถึงว่า ข้อความนี้สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดประพจน์ทั้ง 2 ข้อเป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

1. ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
2. ฝนตก

สรุป น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สามารถแทนข้อความ ออกมาในรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

p	แทน ฝนตก
q	แทน น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
$p \to q$	คือ ถ้าฝนตก แล้วน้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

<table>
<tr><td>p</td><td>→ q</td><td>∧ p</td><td>→ q</td><td rowspan="3">สัจนิรันดร์</td></tr>
<tr><td colspan="3">T</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>T</td><td>T
เดิมกำหนด q ต้องเป็น F แต่เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้วขัดแย้งกับเงื่อนไขใหม่ ที่กำหนดให้ q เป็น T ดังนั้นประพจน์ไม่สามารถเป็น F ได้</td><td>T</td></tr>
</table>

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ ประพจน์นี้จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด ประพจน์ทั้ง 2 ข้อ เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

1. ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
2. น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สรุป ฝนตก

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$p \rightarrow q$

q

---

p

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

p	$\rightarrow q$	$\wedge q$	$\rightarrow p$	
T			F	ไม่เป็นสัจนิรันดร์
F เดิมกำหนด p ต้องเป็น F เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้ว ประพจน์นี้สามารถเกิดขึ้นได้ แสดงว่าสอดคล้องกัน ดังนั้นประพจน์สามารถเป็น F ได้	T	T		

เมื่อประพจน์ไม่เป็นสัจนิรันดร์ จึงไม่สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดประพจน์ข้อ 1-4 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

<u>วิธีทำ</u>

1. $p \wedge q \rightarrow \sim r$
2. $\sim s \rightarrow q$
3. P
4. R

สรุป **s**

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $(p \wedge q \rightarrow \sim r) \wedge (\sim s \rightarrow q) \wedge p \wedge r \rightarrow s$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$$(p \wedge q \rightarrow {\sim} r) \wedge ({\sim} s \rightarrow q) \wedge p \wedge r \rightarrow s$$

<table>
<tr><th>$(p \wedge q \rightarrow {\sim} r) \wedge$</th><th>$({\sim} s \rightarrow q) \wedge$</th><th>$p \wedge$</th><th>$r$</th><th>$\rightarrow s$</th><td rowspan="4">สัจนิรันดร์</td></tr>
<tr><td colspan="4">T</td><td rowspan="3">F</td></tr>
<tr><td>$(T \wedge F \rightarrow F)$</td><td>$T \rightarrow T$</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>q ต้องเป็น F แต่คำตอบที่ได้คือ T
ขัดแย้ง ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการเป็นเท็จ
ของประพจน์นี้
ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้</td><td>$T \rightarrow T$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดประพจน์ข้อ 1 และ 2 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

<u>วิธีทำ</u>

1. $p \rightarrow r$
2. $p \rightarrow q$

สรุป $p \rightarrow (r \wedge q)$

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

<table>
<tr><th>(p→r) ∧</th><th>(p→q)</th><th>→</th><th>p →</th><th>(r∧q)</th><th rowspan="4">สัจนิรันดร์</th></tr>
<tr><td colspan="2">T</td><td></td><td colspan="2">F</td></tr>
<tr><td>T</td><td>T</td><td></td><td>T</td><td>F</td></tr>
<tr><td>T→T</td><td>T→T</td><td></td><td></td><td>r หรือ q ต้องเป็น F ตัวใดตัวหนึ่ง
แต่คำตอบที่ได้คือ r หรือ q เป็น T
ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการเป็นเท็จ
ของประพจน์นี้
ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้</td></tr>
</table>

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่ผิด

______1.1) ถ้ามีประพจน์ย่อยรวมทั้งสิ้น 5 ประพจน์ จะมีค่าความจริงกี่กรณี 32

______1.2) ประพจน์ที่มีความสมมูลกันคือประพจน์ทั้งสองมีจำนวนค่าความจริงเท่ากัน

______1.3) สัจนิรันดร์คือค่าความจริงของประพจน์เป็นจริงทุกกรณี

______1.4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \rightarrow q$ เป็น F

______1.5) $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \wedge \sim r$ เป็น F

______1.6) $(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \rightarrow s$ เป็น F

______1.7) $\sim ((p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)) \equiv p \wedge \sim(q \rightarrow r)$

______1.8) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \sim (p \vee q) \wedge r$

______1.9) $p \vee (\sim q) \vee r \equiv \sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \wedge q))$

แบบฝึกหัด

______1.10) $((p \rightarrow q) \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

______1.11) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ เป็นสัจนิรันดร์

______1.12) $(\sim p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

2) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $P \wedge Q \rightarrow R$ และ $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

3) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow R$ และ $P \rightarrow (\sim Q \leftrightarrow R)$

แบบฝึกหัด

4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

5) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

แบบฝึกหัด

6) จงแสดงว่าการสรุปข้อยุติข้อย่อยต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

6.1) $p \rightarrow q$ $\sim q$ ——— $\sim p$	6.2) $p \rightarrow r$ p ——— r
6.3) $r \rightarrow s$ $\sim s$ ——— $\sim r$	6.4) $\sim q \rightarrow r$ $p \rightarrow \sim q$ ——— $p \rightarrow r$

แบบฝึกหัด

6.5) $(p \rightarrow q) \vee r$ $\sim r$ —— $p \rightarrow q$ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____	6.6) $\sim p \rightarrow r$ $q \rightarrow \sim s$ $\sim p \vee q$ —— $s \rightarrow r$ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

แบบฝึกหัด

6.7) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

$r \rightarrow \sim s$

$\overline{}$

$\sim p \wedge \sim q$

6.8) $p \rightarrow \sim q$

$q \vee r$

$\sim r$

$\overline{}$

P

6.9) $p \wedge q$

$q \rightarrow r$

$\sim r \vee s$

$\overline{}$

s

6.10) $p \rightarrow q \rightarrow \sim s$

$p \wedge s$

$\overline{}$

q

ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ**ประโยคบอกเล่าที่มีตัวแปร** สำหรับ**ประโยคเปิดไม่สามารถบอกค่าความจริงได้** ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่าโดยไม่เป็นประพจน์ แต่ถ้าแทนค่าตัวแปรลงไป ประโยคเปิดจะกลายเป็นประพจน์ และสามารถบอกค่าความจริงได้

ตัวอย่างประโยคเปิด เช่น

$x + 5 = 15$

$y < -6$

$x < 3$

$x + y \geq 0$

$x = y$

ตัวอย่างประโยคที่ไม่ใช่ประโยคเปิด เช่น

- 10 เป็นคำตอบของสมการ $x - 1 = 7$
- โลกหมุนรอบตัวเอง
- จงหาค่า x จากสมการ $2x + 1 = 8$
- กรุณานั่งเงียบๆ
- ห้ามสูบบุหรี่

ประโยคเปิด

ข้อตกลงของประโยคเปิด

1. นิยมแทนประพจน์ด้วย p, q, r, s,...

2. นิยมแทนประโยคเปิดด้วย P(x) , Q(x) ,... P(x, y) , Q(x, y), ...

โดย P(x) , Q(x) , ... แทน ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร

โดย P(x, y) , Q(x, y) , ... แทน ประโยคเปิดที่มี x และ y เป็นตัวแปร

กำหนดให้	P(x)	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x
	P(x, y)	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และ
	$P(x_1, x_2, ..., x_n)$	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$

ประโยคเปิด

เช่น	P(x)	แทน $x+4 = 20$	เป็นประโยคเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x ถ้าแทนค่า x จะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ
	p(x, y)	แทน $x + y < 50$	เป็นประโยคเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x, y ถ้าแทนค่า x, yจะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณ (quantifier) เป็นตัวระบุจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ เพราะประโยคเปิดจะเป็นประพจน์ได้ เมื่อแทนค่าตัวแปรแล้วหรือมีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่ ตัวบ่งปริมาณมี 2 ชนิด คือ

1. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ **∀ (for all)** อ่านว่า “ **สำหรับสมาชิก x ทุกตัว** ”
2. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ **∃ (for some)** อ่านว่า “**สำหรับสมาชิก x บางตัว**”

ตัวบ่งปริมาณ

$\forall x(p(x))$ คือ ทุกค่า x ในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้ว ทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นจริงทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าหากแทนค่า x ลงใน p(x) แล้ว มีเพียง 1 ตัวที่ทำให้ความค่าจริงเป็นเท็จ ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$\forall x \in R\ (x^2 \geq 0)$		เป็น “จริง”
$\forall x \in R\ (x^2 \geq x)$	ไม่จริงกรณีนี้ $x = 1/2$	เป็น “เท็จ”
$\forall x \in R\ (\lvert x \rvert \geq 0)$		เป็น “จริง”
$\forall x \in R\ (x^3 \geq 0)$	ไม่จริงกรณีนี้ $x = -1$	เป็น “เท็จ”

ตัวบ่งปริมาณ

$\exists x(p(x))$ คือ ค่า x เพียงค่าเดียวในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x เพียงตัวเดียวตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้วทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงตัวเดียว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าหากแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้วทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$\exists x \in R\ (x^2 \geq x)$	เป็นจริงเมื่อแทน x=5	เป็น “จริง”
$\exists x \in R\ (x = x+1)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”
$\exists x \in R\ (x^2 \leq 0)$	เป็นจริงเมื่อแทน x=0	เป็น “จริง”
$\exists x \in R\ (x^2 < 0)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”

ตัวบ่งปริมาณ

- **ตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว**

$\forall x \forall y(P(x,y))$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x และ y ทุกค่าเป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x และ y เพียง 1 คู่ทำให้เป็นเท็จ

$\forall x \exists y(P(x,y))$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x ทุกตัวต้องสามารถมี y เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ y มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้

$\exists x \forall y(P(x,y))$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ y ทุกตัวต้องสามารถมี x เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ y อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ x มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้

$\exists x \exists y(P(x,y))$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีเพียง 1 คู่ที่เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีคู่ไหนที่เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y(P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y \geq y$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x + y \geq y$ และต้องเป็นจริงทุกกรณี

$0+0 \geq 0$	เป็นจริง
$0+1 \geq 1$	เป็นจริง
$1+0 \geq 0$	เป็นจริง
$1+1 \geq 1$	เป็นจริง

จากกรณี ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\forall x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y(P(x, y))$ โดย U = { 0, 1 } และ $P(x, y) = x \geq y$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x \geq y$ และต้องเป็นจริงทุกกรณีแต่ถ้าเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวถึงว่าเป็นเท็จ

$0 \geq 1$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y(P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y \geq xy$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ถ้าเป็นจริงเพียงกรณีเดียว ค่าความจริงเป็นจริง

$1 + 1 \geq 1*1$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y(P(x, y))$ โดย U = { 0, 1 } และ P(x, y) = x + y = 5

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ x + y = 5 และต้องเป็นเท็จทุกกรณี จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ

$0+0 \neq 5$	เป็นเท็จ
$0+1 \neq 5$	เป็นเท็จ
$1+0 \neq 5$	เป็นเท็จ
$1+1 \neq 5$	เป็นเท็จ

จากกรณี ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นเท็จทุกกรณี

ดังนั้น $\exists x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y(P(x, y))$ โดย $U = \{ -1, 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

$-1 + 1 = 0$ เป็นจริง

$0 + 0 = 0$ เป็นจริง

$1 + -1 = 0$ เป็นจริง

จากกรณี x ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\forall x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y(P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ขอให้ประพจน์เป็นจริง

$0 + 0 = 0$ เป็นจริง

$1 + y = 0$ เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน y แล้วเป็นจริง

จากกรณีนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y(P(x, y))$ โดย U = { -1 0 1 } และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

$-1 + 1$	$= 0$	เป็นจริง
$0 + 0$	$= 0$	เป็นจริง
$1 + -1$	$= 0$	เป็นจริง

จากกรณี y ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\exists x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y(P(x, y))$ โดย U = { 0 1 } และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

$0 + 0 = 0$ เป็นจริง

$x + 1 = 0$ เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน x แล้วเป็นจริง

จากกรณีนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

- นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน มีรายละเอียดดังนี้

$\sim\forall x(P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(\sim P(x))$
$\sim\exists x(P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(\sim P(x))$
$\sim\forall x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(P(x)]$
$\sim\exists x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(P(x))$
$\sim\forall x\forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x\exists y(\sim P(x, y))$
$\sim\forall x\exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x\forall y(\sim P(x, y))$
$\sim\exists x\forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x\exists y(\sim P(x, y))$
$\sim\exists x\exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x\forall y(\sim P(x, y))$

ตัวบ่งปริมาณ

- **ตัวอย่างนิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน**

จงพิสูจน์ $\sim\forall x(x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x(x+3 \le 5)$

การพิสูจน์	$\sim(\forall x\ p(x))$ สมมูลกับ $\exists x \sim p(x)$
ต้องพิสูจน์	$\sim(\forall x\ p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$ และ $\exists x \sim p(x) \rightarrow \sim(\forall x\ p(x))$

กรณีพิสูจน์ $\sim(\forall x\ p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$

สมมติ	$\sim(\forall x\ p(x))$	เป็น T
	$\forall x\ (p(x))$	เป็น F
มี x ที่ทำให้	$p(x)$	เป็น F
มี x ที่ทำให้	$\sim p(x)$	เป็น T
	$\exists x \sim p(x)$	เป็น T

สรุป $\sim(\forall x\ p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$ คือ $T \rightarrow T$ เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

กรณีพิสูจน์ $\exists x \sim p(x) \rightarrow \sim(\forall x\, p(x))$

สมมติ $\exists x(\sim p(x))$ เป็น T

มี x ที่ทำให้	$\sim p(x)$	เป็น T
มี x ที่ทำให้	$p(x)$	เป็น F
	$\forall x(p(x))$	เป็น F
	$\sim(\forall x\, p(x))$	เป็น T

สรุป $\exists x (\sim p(x)) \rightarrow \sim(\forall x\, p(x))$ คือ $T \rightarrow T$ เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

หมายเหตุ ถ้าหากต้องการพิสูจน์โดยแทนค่า สมมุติให้ U = {1, 2, 3, 4, 5}

ตัวเลขที่แทนค่า	1	2	3	4	5
$\forall x[x+3>5]$	F	F	T	T	T
$\sim\forall x[x+3>5]$	T	T	F	F	F
$\exists x[x+3\leq 5]$	T	T	F	F	F

$\sim\forall x[x+3>5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ทั้งหมดมีค่าความจริงเป็น T แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น F แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\exists x[x+3\leq 5]$ ทุกกรณี

$\exists x[x+3\leq 5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ในเซตคำตอบนี้ไม่มีแม้แต่ตัวเดียว ที่ทำให้ประพจน์มีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\sim\forall x[x+3>5]$ ทุกกรณี

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $\sim\forall x(x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x(x+3 \leq 5)$ โดยพิจารณาจากการแทนค่า แต่วิธีนี้ไม่สามารถนำมาพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ แต่อาจจะใช้ในการตรวจสอบคำตอบได้

แบบฝึกหัด 1.1

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

____1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2 \neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in R$

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

____1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2\neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in R$

____1.2) $\sim\forall x\forall y[\, x+y > 0] \equiv \exists x\exists y[x+y \geq 0]$ โดย $x,y \in R$

____1.3) $\sim\exists x\forall y[\, (x=y)\,] \equiv \sim\forall x\exists y[x\neq y]$ โดย $x,y \in R$

____1.4) $\exists x\forall y[(x=y)\rightarrow(x^2>y)] \equiv \forall x\exists y[(x=y)\wedge(x^2\leq y)]$ โดย $x,y \in R$

____1.5) $\sim\exists x\forall y[(xy<0) \rightarrow (x<0 \vee y<0)] \equiv \exists x\forall y[(xy<0)\wedge(x\geq 0\wedge y\geq 0)]$ โดย $x,y \in R$

____1.6) $\exists y\forall x[(xy=0 \;\wedge x\neq 0) \rightarrow y=0] \equiv \forall y\exists x[(xy=0 \wedge x\neq 0) \wedge y\neq 0]$ โดย $x,y \in R$

____1.7) $\forall x\exists y[(x>y) \wedge (x^2<y)] \equiv \exists x\forall y[(x>y) \rightarrow (y\leq x^2)]$ โดย $x,y \in R$

____1.8) $U = \{1, 2, 3\}$ $\exists x\forall y[x^2 < y + 1]$ มีค่าความจริงเป็น F

____1.9) $U = \{1, 2, 3\}$ $\exists y\forall x[x^2 + y^2 < 12]$ มีค่าความจริงเป็น T

แบบฝึกหัด 2

2) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x \in R(x^2-6x+9 \geq 0)$

แบบฝึกหัด 3

3) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x \in R(x^2-6x+9 < 0)$

แบบฝึกหัด 4

4) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(\frac{1}{x^2+1} > 1)$ เมื่อ x จำนวนจริง

แบบฝึกหัด 5

5) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 6

6) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 8

7) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

8) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

9) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

10) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

11) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

12) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

13) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \geq 2$

14) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \leq 2$

15) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x\,(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 3$

16) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x\,(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 2$

ขั้นตอนวิธี

บทที่ 6

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ขั้นตอนวิธี

ในการเขียนโปรแกรม ผู้เขียนโปรแกรมสามารถเขียนแล้วรันออกมาได้ผลลัพธ์เหมือนกัน แต่บางครั้งโปรแกรมเหล่านี้อาจจะใช้ระยะเวลาในการประมวลผลหรือทรัพยากรที่ใช้ในการประมวลผลแตกต่างกัน แน่นอนว่า**โปรแกรมที่ดีต้องเป็นโปรแกรมที่ใช้เวลาน้อยและใช้ทรัพยากรน้อยที่สุด** ซึ่งการที่จะวิเคราะห์ได้ว่าโปรแกรมไหนดีหรือไม่ นั้นต้องวิเคราะห์จากขั้นตอนวิธีที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมนั้น ดังนั้นขั้นตอนวิธีจึงเป็นวิชาที่สำคัญมาก เป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมาย

ขั้นตอนวิธีหรืออัลกอริทึม (Algorithms) คือ ลำดับของขั้นตอนการคำนวณที่ใช้แก้ปัญหา โดยการเปลี่ยนข้อมูลนำเข้าของปัญหา (input) ออกมาเป็นผลลัพธ์ (output) ขั้นตอนวิธีดังกล่าวนั้นจะสามารถนำมาเขียนเป็นโปรแกรมในคอมพิวเตอร์ได้หรือกระบวนการแก้ปัญหาที่สามารถเข้าใจได้ โดยมีลำดับหรือวิธีการในการแก้ไขปัญหาใดปัญหาหนึ่งอย่างเป็นขั้นเป็นตอนและชัดเจน เมื่อนำเข้าอะไร แล้วจะต้องได้ผลลัพธ์เช่นไร โดยทั่วไปขั้นตอนวิธีจะประกอบด้วย วิธีการเป็นขั้นๆ และมีส่วนที่ต้องทำแบบวนซ้ำ (iterate) หรือเวียนเกิด (recursive) โดยใช้ตรรกะ (logic) และ/หรือ ในการเปรียบเทียบ (comparison) ในขั้นตอนต่างๆ จนกระทั่งเสร็จสิ้นการทำงาน ในการทำงานหรือแก้ปัญหาอย่างเดียวกัน **การเลือกขั้นตอนวิธีที่ใช้แก้ปัญหาที่แตกต่างกันนั้น อาจได้ผลลัพธ์ออกมาเหมือนกันหรือไม่ก็ได้** โดยขั้นตอนวิธีที่แตกต่างกันนั้นจะส่งผลให้เวลา (time) และขนาดหน่วยความจำ (space) ที่ต้องการต่างกัน หรือเรียกได้อีกอย่างว่ามีความซับซ้อน (complexity) ต่างกัน

ความหมาย

การนำขั้นตอนวิธีไปใช้ ไม่จำกัดเฉพาะการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่สามารถใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้เช่น การออกแบบวงจรไฟฟ้า, การทำงานเครื่องจักรกล, หรือแม้กระทั่งปัญหาในธรรมชาติ เช่น วิธีของสมองมนุษย์ในการคิดเลข หรือวิธีการขนอาหารของแมลง

หนึ่งในขั้นตอนวิธีอย่างง่าย คือ ขั้นตอนวิธีที่ใช้หาจำนวนที่มีค่ามากที่สุดในรายการซึ่งไม่ได้เรียงลำดับไว้ ในการแก้ปัญหานี้ต้องพิจารณาจำนวนทุกจำนวนในรายการ ซึ่งมีขั้นตอนวิธีดังนี้ และ**รหัสเทียม (Pseudo Code)** สำหรับขั้นตอนวิธีนี้

1) พิจารณาแต่ละจำนวนในรายการ ถ้ามันมีค่ามากกว่า จำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่เคยพบจดค่านั้นเอาไว้

2) จำนวนที่จดไว้ตัวสุดท้าย จะเป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุด

ความหมาย

ขั้นตอนวิธีการหาค่ามากสุดระหว่าง จำนวน 3 จำนวน a, b, c

บรรทัด	
1	If (a > b) then
2	If (a > c) then
3	return a
4	else
5	return c
6	else if (b > c) then
7	return b
8	else
9	return c

ขั้นตอนวิธี เพื่อหาค่ามากสุดของชุดข้อมูล $a_1, a_2, \ldots, a_n$ โดย a คือ อาร์เรย์ โดยถ้า a_1 คือตำแหน่งสมาชิกตัวที่ 1 เช่น a มีสามารถ คือ 5, 2, 4, 7, 8 ตามลำดับ ค่าของ a_1 คือ 5 และค่าของ a_5 คือ 8 ในกรณีนี้ n คือขนาดของอาร์เรย์

บรรทัด	
1	large = a_1
2	i = 2
3	if (a_i > large) then
4	large =a_i
5	i = i+1
6	If (i > n) then
7	return large
8	else
9	goto line 3

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

โดยปกติประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี หรือ การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี สามารถพิจารณาได้ 2 ส่วนหลัก

1) หน่วยความจำ (Memory) เรียกว่าการวิเคราะห์หน่วยความจำ (Space Complexity)

โดยองค์ประกอบคือ จำนวนหน่วยความจำที่ใช้ตอนรัน (run) และตอนคอมไพล์ (compile) สำหรับหน่วยความจำมี 2 แบบ คือ

Static คือ ขนาดหน่วยความจำที่ใช้เป็นค่าคงที่ เช่น อาร์เรย์ (Array)

Dynamic คือ ขนาดหน่วยความจำที่ใช้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ เช่น วัตถุ (Object)

หมายเหตุ กรณีการเขียนโปรแกรมรูปแบบเวียนเกิดยิ่งลึกมาก ยิ่งใช้หน่วยความจำมาก

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

<table>
<tr><td colspan="4">OS (Reserved)</td></tr>
<tr><td>Function
โตลงมาข้างล่าง
(Read-Write)</td><td>void func()
{
}</td><td></td><td>Stack Segment</td></tr>
<tr><td>New
โตขึ้นมาข้างบน
(Read-Write)</td><td>Test t = new Test();</td><td>Dynamic Data
(Heap)</td><td rowspan="2">Data Segment</td></tr>
<tr><td>Global variables
Static variables
(Read-Write)</td><td>int a = 10;</td><td>Static Data</td></tr>
<tr><td>Code Program
(Read-only)</td><td>public class TEST
{
    public static void main(String[] args)
    {
    }
}</td><td></td><td>Text Segment</td></tr>
</table>

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

2) เวลา (Time) เรียกว่าการวิเคราะห์เวลา (Time Complexity)

โดยองค์ประกอบคือ เวลาที่ใช้ตอนรัน โดยส่วนนี้จะขึ้นอยู่กับโปรแกรมที่เขียน และเป็นส่วนที่ใช้พิจารณาขั้นตอนวิธี เพราะตอนคอมไพล์หรือตรวจสอบวากยสัมพันธ์ (syntax) ส่วนนี้ไม่ขึ้นอยู่กับโปรแกรมที่เขียน

การวิเคราะห์เวลาสามารถกระทำได้โดยการจับเวลา และทดลองรันกับข้อมูลหลายชุด ซึ่งบางชุดอาจจะใช้เวลาน้อย บางชุดอาจจะใช้เวลามาก แล้วดูว่าคอมพิวเตอร์ใช้เวลาในการรันนานไหม โดยรันหลายๆ ครั้งแล้วหาค่าเฉลี่ย

- เวลากระทำการน้อย (น้อยสุด คือเวลาดีที่สุด best- case time)
- เวลากระทำการมาก (มากสุด คือเวลาแย่ที่สุด worst-case time)
- เวลากระทำโดยเฉลี่ย (เวลาโดยเฉลี่ย average-case time)

การพิจารณาตามขั้นตอนวิธี คือการพิจารณาเฉพาะขั้นตอนที่สำคัญของปัญหาที่ต้องการแก้ เช่น จำนวนการกระทำหรือเวลา ตัวนี้คือเอาโค้ด (code) มาวิเคราะห์ว่าต้องใช้ทรัพยากรหรือเวลาในการรันเท่าไรโดยประมาณ

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา กระทำคำสั่งเปรียบเทียบ a_i > large และ a คือ อาร์เรย์ โดยถ้า a_1 คือตำแหน่งสมาชิกตัวที่ 1 เช่น a มีค่า 5, 2, 4, 7, 8 ตามลำดับ ค่าของ a_1 คือ 5 และค่าของ a_5 คือ 8 ในกรณีนี้ n คือขนาดของอาร์เรย์

บรรทัด		
1	Large = a_1	ให้ t(n) เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้
2	i = 2	สมมุติ n = 5
3	if (a_i > Large) then	รอบแรก i = 3 → 3 > 5
4	Large = a_i	รอบสอง i = 4 → 4 > 5
5	i = i+1	รอบสาม i = 5 → 5 > 5
6	if (i > n) then	รอบสี่ i = 6 → 6 > 5 หยุด → ทำ 4 ครั้งจาก n = 5 ดังนั้น n-1
7	return Large	
8	else	
9	goto line 3	

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด

```
j=n
while ( j ≥ 1 )
{
   for i = 1 to j
      x = x+1
   j = j-1
}
```

ให้ t(n) เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้

สมมุติ n = 5

รอบแรก j = 5 → for i to j ทำอีก 5 รอบ

รอบสอง j = 4 → for i to j ทำอีก 4 รอบ

รอบสาม j = 3 → for i to j ทำอีก 3 รอบ

รอบสี่ j = 2 → for i to j ทำอีก 2 รอบ

รอบห้า j = 1 → for i to j ทำอีก 1 รอบ

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$ คือ $\frac{n(n+1)}{2}$

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด	
1	`j=n`
2	`while ( j  > 1 )`
3	`{`
4	`   j = j/2`
5	`}`

ให้ t(n) เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้

สมมุติ n = 8

รอบแรก j = 8 → 4 = 8/2

รอบสอง j = 4 → 2 = 4/2

รอบสาม j = 2 → 1 = 2/2

จำนวนรอบทั้งหมด คือ 3 รอบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\log_2 8 = 3 = \log_2 n$

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด

```
j=n
while ( j  >= 1 )
{
  i=n
  while ( i  >= 1 )
  {
    i = i -1
  }
  j = j-1
}
```

ให้ t(n) เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้

สมมุติ n = 5

รอบแรก j = 5 → for i to n ทำอีก 5 รอบ

รอบสอง j = 4 → for i to n ทำอีก 5 รอบ

รอบสาม j = 3 → for i to n ทำอีก 5 รอบ

รอบสี่ j = 2 → for i to n ทำอีก 5 รอบ

รอบห้า j = 1 → for i to n ทำอีก 5 รอบ

จำนวนรอบทั้งหมด คือ 25 รอบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ nxn หรือ n^2

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ขั้นตอนวิธีที่ได้ บางครั้งไม่สามารถบอกจำนวนหรือเวลาที่แท้จริงได้ ถ้าต้องการเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีเหล่านี้ที่แก้ปัญหาเดียวกัน จะต้องปรับขั้นตอนวิธีให้เข้าสู่ตัวอ้างอิงตัวเดียวกัน โดยการตัวอ้างอิงที่นิยมใช้ คือ บิ๊กโอ (Big O) โดย *O* คือสัญลักษณ์ของ **Big O** ซึ่งเป็นการปรับให้มีค่าโดยประมาณที่มากที่สุด **โดยหลักการคือการยุบเศษเข้ากับตัวมากที่สุดเพื่อให้ได้ค่าที่มากที่สุด**ค่าของขั้นตอนวิธี โดยเรียงลำดับประสิทธิภาพจากมากไปหาน้อยดังนี้

$$\mathbf{c} > \boldsymbol{log\,N} > \boldsymbol{N} > \boldsymbol{N^2} > \boldsymbol{2^n} > \boldsymbol{N}!$$

บิ๊กโอ คือ กรณีที่ใช้เวลากระทำการมาก (worst case) ของขั้นตอนวิธี ซึ่งหมายความว่า ขั้นตอนวิธีนี้จะทำงานไม่แย่ไปกว่า Big O ของมันแล้ว ซึ่งก็เหมือนกับเป็นตัวบอกถึง ประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีหลายวิธีเข้าด้วยกัน

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ขั้นตอนวิธีที่อยู่ใน O(n) ก็หมายความว่า ถ้าใช้ขั้นตอนวิธีนี้ประมวลข้อมูล n อย่าง มีขั้นตอนในการประมวลผลประมาณ n ครั้ง และไม่ช้าไปกว่านี้ ส่วนขั้นตอนวิธีที่อยู่ใน $O(n^3)$ ก็หมายความว่าถ้าใช้ขั้นตอนวิธีนี้ประมวลข้อมูล n อย่าง มีขั้นตอนในการประมวลผลประมาณ n^3 ครั้ง และ**ไม่ช้าไปกว่านี้** ด้วยวิธีนี้ Big O ของขั้นตอนวิธีใดๆ จะสามารถเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาของขั้นตอนวิธีนั้นๆ เช่นตัวอย่างนี้ O(n) นั้นเร็วกว่า $O(n^3)$ ถ้าประมวลข้อมูลเดียวกัน

ในแง่ของการเปรียบเทียบ Big O สามารถนำมาวัดระดับความสามารถของขั้นตอน เช่นกัน O(log n) อันนี้เร็วมาก ส่วน $O(2^n)$ อันนี้ช้ามาก ถ้าให้เรียงลำดับ Big O มาตรฐานที่พบบ่อย มีเปรียบเทียบกับความเร็วจากเร็วมากไปหาเร็วน้อยนั้นมีรายละเอียดดังนี้

$$O(1) > O(\log n) > O(n) > O(n \log n) > O(n^2) > O(2^n) > O(n!)$$

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

โดย O(1) คือ Constant Time Algorithm เป็นขั้นตอนวิธีที่เร็วที่สุด คือ ทำงานทุกครั้งใช้เวลาเท่าเดิมเสมอ ไม่ว่า ข้อมูลนำเข้าจะมีค่ามากแค่ไหน ขั้นตอนวิธีประเภทนี้ไม่ค่อยมีให้เห็นนัก และแก้ปัญหาได้ไม่กี่อย่าง เช่น การแทรกค่าใหม่เข้าไปที่จุดท้ายสุดของรายการโยง (linked list) หรือโปรแกรมที่ไม่มีลูปเลย หรือลูปที่กำหนดตายตัว

โดย O(log n) คือ Logarithmic Algorithm เป็นขั้นตอนที่เริ่มมีจริง เรียกได้ว่าเป็นขั้นตอนวิธีที่ที่เร็วที่สุดในความเป็นจริงแล้ว ตัวอย่างเช่น สมมติค่าเป็นลอการิทึมฐาน 2 ใส่ค่าไป 8 แต่วนซ้ำแค่ 3 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น

โดย O(n) คือ Linear Algorithm เป็นขั้นตอนที่ทำงานเท่ากับตัวข้อมูลนำเข้า ตัวอย่างเช่น สมมุติใส่ค่าไป 10 แต่วนซ้ำแค่ 10 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

โดย **$O(n^2)$** คือ **Quadratic Algorithm** เป็นขั้นตอนที่ทำงานยกกำลังเท่ากับตัวข้อมูลนำเข้า ตัวอย่างเช่น สมมติใส่ค่าไป 10 แต่วนซ้ำ 100 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น พวกนี้มักเป็นลูปซ้อนลูปอีกที

โดย **$O(2^n)$** คือ **Polynomial Algorithm** เป็นขั้นตอนที่พบในกรณีเวียนเกิด (recursive) เช่น ปริศนาหอคอยฮานอยจำนวนครั้งในการทำงานคือ $a_n = 2^n-1$ เป็นต้น

โดย **$O(n!)$** คือ **Factorial Algorithm** เป็นขั้นตอนที่พบในกรณีเวียนเกิด เช่น การสลับเปลี่ยนค่า สำหรับ {1,2} สามารถสลับได้ 2 ครั้ง คือ {1,2} กับ {2,1} หรือ 2! สำหรับ {1,2,3} สามารถสลับได้ {1,2,3} {1,3,2} {2,1,3} {2,3,1} {3,2,1} {3,1,2} จำนวน 6 ครั้ง หรือ 3! เป็นต้น

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 1 f(n) = 2n-1 จงหา Big O

f(n) = 2n-1 คือ 2n มีค่าเยอะมาก n คืออนันต์ แล้วเศษคือ -1 เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n

= 2n + n

O(f(n)) = 3n โดยที่ $f(n) \leq 3n$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n

หมายเหตุ สำหรับกรณี Big O ไม่ว่าพจน์ที่ความเร็วมากกว่าพจน์ที่ช้าที่สุด ในกรณีนี้คือ 1 ซึ่ง**ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบ ให้บวกเพิ่มไปอีก 1** สำหรับพจน์ที่มีค่ามากที่สุดเสมอ ในกรณีนี้คือ 2n กลายเป็น 3n แต่การเขียน **Big O สามารถไม่คิดตัวเลขหน้า n** ที่ช้าที่สุด เพราะจะทำให้เปรียบเทียบกันได้ง่ายกว่า ดังนั้นจึงนิยมไม่เขียนตัวเลขหน้า n ที่ช้าที่สุด ทำให้คำตอบที่ได้ n

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 2 $f(n) = n^2+n+3$ จงหา Big O

$f(n) = n^2+n+3$ คือ n^2 มีค่าเยอะมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ n เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n^2

$O(f(n)) = 2n^2$ โดยที่ $f(n) \leq 2n^2$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n^2

ตัวอย่างที่ 3 $f(n) = 2n^2+7n$ จงหา Big O

$f(n) = 2n^2+7n$ คือ n^2 มีค่าเยอะมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ n เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n^2

$O(f(n)) = 3n^2$ โดยที่ $f(n) \leq 3n^2$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n^2

แบบฝึกหัด

1.1) `i = i * i`
`i = i + 2`
`j = j + 1`
`j = j - 3`
`if ( j > 5 )`
`    print "Love"`
`else`
`    print "No"`
	1.2) `for i = 1 to n`
	
	`    print "Loop"`

1.3) `i = 1`
 	
`loop (i <= n)`
 	
`    i = i+2`
	1.4) `i = 1`
	
	`loop (i <= n)`
	
	`i = i * 2`

แบบฝึกหัด

1.5) for i = 1 to n
  print “loop1”
  for j = i to n
    print “loop2”
	1.6) for i = 1 to n
	  for j = 1 to n
	    x = x+1

1.7) for i = 1 to n
  for j = 1 to n
    for k = 1 to n
      x = x+1
	1.8) for i = 1 to n
	  for j = 1 to i
	    print “loop2”

1.9) for i = 1 to n
  if(a % 2 == 0)
    print “loop2”
	1.10) i = n
	  loop (i >= 1)
	    i = i-2

แบบฝึกหัด

1.11) i = n
 	
loop (i >= 1)
 	
i = i / 2
	1.12) i = 1
	
	loop (i <= n)
	if(i % 2 == 0)
	
	i = i + 2
	else
	
	i = i +1

1.13)
for (i = 0; i < n; i++)
{
print E
}
for (j = 0; j < n; j++)
{
print ***
}
for (j = 0; j < n; j++)
{
print ann
}
	1.14)
	If(n < 2)
	{
	n = n + 2
	}
	for (i = 1; i < n ; j++)
	{
	j = j * 3
	print dead
	}

แบบฝึกหัด

1.15)
for (i = 1; i < n ;)
{
    i = i * 10
    print dead
}
	1.16)
	for (i = 0 ; i < n ; i++)
	{
	    for (j = 0 ; j < n ; j++)
	    {
	        for (k = 0 ; k < n ; k++)
	        {
	            print work
	        }
	    }
	}

1.17)
for (i = 0 ; i < n ;)
{
    for (j = 0 ; j < n ; j++)
    {
        print no_name
    }
}
	1.18)
	for (i = n; i ≥ 1;)
	{
	  i = i / 5;
	    for (j = 0; j <n; j++)
	    {
	        print love me
	    }
	}

แบบฝึกหัด

<table>
<tr>
<td>

1.19)

```
for (i = 0 ; i < 100000 ; i++)
{
        for (j = 0 ; j < 1000000 ; j++)
        {

                print work
        }
}
```

</td>
<td>

1.20)

```
for (i = 0; i < N; i++)
{
        print love
}
for (j = 0; j < N; j++)
{
        print love
}
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>

1.21)

```
for (i = 1; ; i++)
{
   i = i * 2;
}
```

</td>
<td>

1.22)

```
Function test (int N)
{
   print chanida
   if (N<1)
   {  return;  }

   if (N>1)
   { test (N-1); }

   if (N>1)
   { test (N-1);}
}
```

</td>
</tr>
</table>

แบบฝึกหัด

1.23)
for (i = 1; i ≤ N; i++)
{
   i = i * 2;
      for (j = 0; j < N; j++)
            {
                        print love
            }
}
	1.24)
	Function test(int l)
	{
	   if (l == n) { }
	   else
	   {
	      for (int i = l; i < n; i++)
	      {
	          test(l+1);
	
	      }
	   }
	}

1.25)
for (i = n; i ≥ 1; i--)
{
   i = i - 2;
}
	1.26)
	for (i = n; i ≥ 1; i--)
	{
	            i = i /10;
	                        for (j = 0; j <n; j++)
	                        {
	                        print love me
	                        }
	}

แบบฝึกหัด

2) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 3n^2-7n$

3) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 6n^3+5n$

4) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2n^2+n-n\log_2 n$

5) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2^n(n^2-2n)$

6) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2n^4+3n^3+5$

7) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = n^2-3n+3$

8) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Note

ทฤษฎีกราฟ

บทที่ 7

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ทฤษฎีกราฟ

- ในการเขียนโปรแกรม ผู้เขียนโปรแกรมจำเป็นต้องวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ซึ่งปัญหาต่างๆ เหล่านี้ถ้ามองในมุมมองข้อความเราอาจจะวิเคราะห์ปัญหานั้นได้ยากเช่น เมือง A เชื่อมกับเมือง C, เมือง D เชื่อมเมือง B, เมือง C เชื่อมเมือง B จงหาเส้นทางจากเมือง A ไป D ถ้าได้โจทย์แบบนี้ผู้เขียนโปรแกรมคงสับสนและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ยาก
- แต่ถ้าหากเรานำข้อความเหล่านี้มาเขียนเป็นรูปภาพ เราจะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ง่าย ซึ่งในความเป็นจริงแล้วปัญหาในโลกนี้สามารถเขียนอธิบายในเชิง**กราฟ**ได้มากมาย ดังนั้นเรียนทฤษฎีกราฟจึงเป็นเรื่องสำคัญและเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

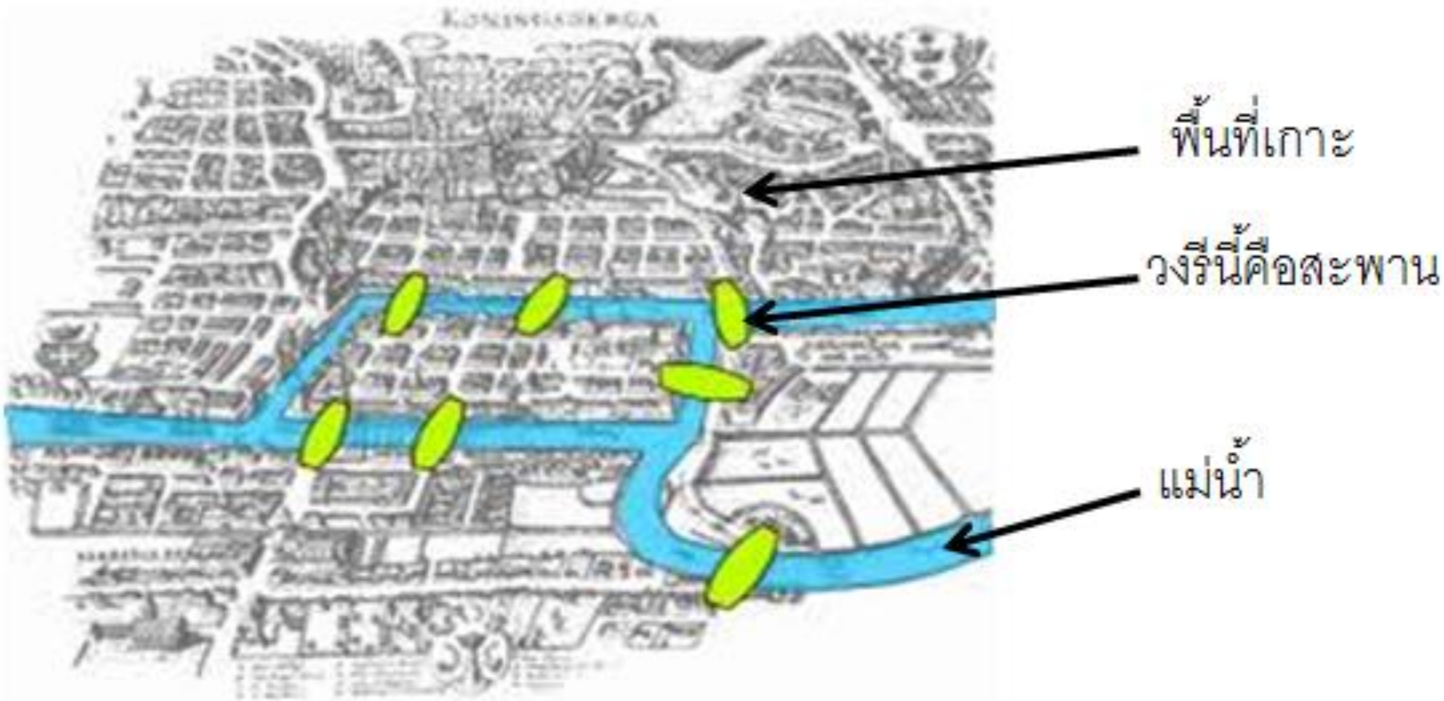
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- กราฟเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้สำหรับจำลองปัญหาบางอย่าง ด้วยแผนภาพที่ประกอบด้วยจุด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด ตัวอย่างเช่น
  - แผนภาพที่แสดงเส้นทางของรถไฟฟ้า, แผนภาพที่แสดงถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆ, แผนภาพแสดงโครงสร้างวงจรไฟฟ้า, แผนภาพเครือข่ายคอมพิวเตอร์, แผนภาพแสดงเส้นทางการบิน, แผนภาพแสดงโครงสร้างทางเคมีของสารประกอบไฮโดรคาร์บอน เป็นต้น

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

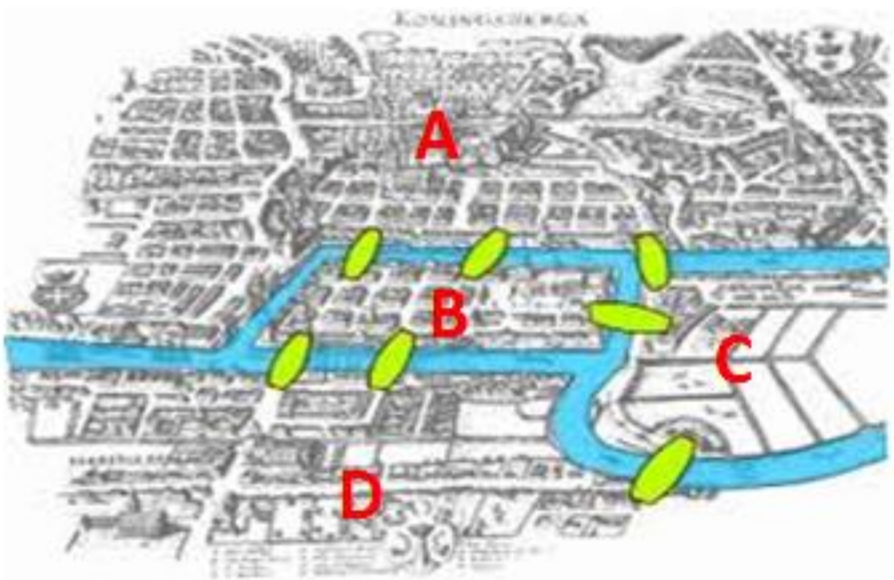
- เลออนฮาร์ด <u>ออยเลอร์ (Leonhard Euler)</u> นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิส เป็นผู้ริเริ่มในการศึกษาทฤษฎีกราฟ เนื่องจากการตอบข้อคำถามเกี่ยวกับสะพานเมืองเคอนิกส์เบอร์ก โดยเมืองเคอนิกส์เบอร์กตั้งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำพรีเกล (Pregel) ทั้งสองฝั่ง และบางส่วนเป็นเกาะ โดยมี<u>สะพานเชื่อม 7 สะพาน</u>
- คำถามคือ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเดินทางรอบเมือง โดย<u>เริ่มจากพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง แล้วมาจบลงที่พื้นที่เริ่มต้น</u> โดยการ<u>ข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง</u> แต่ละแห่งข้ามได้<u>เพียงครั้งเดียว</u> โดยจากคำถามนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปได้ดังนี้

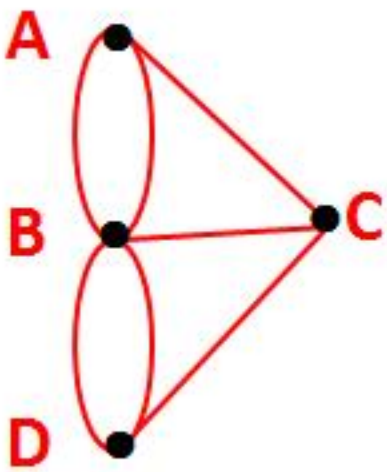
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



ที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg.jpeg (ออนไลน์)

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

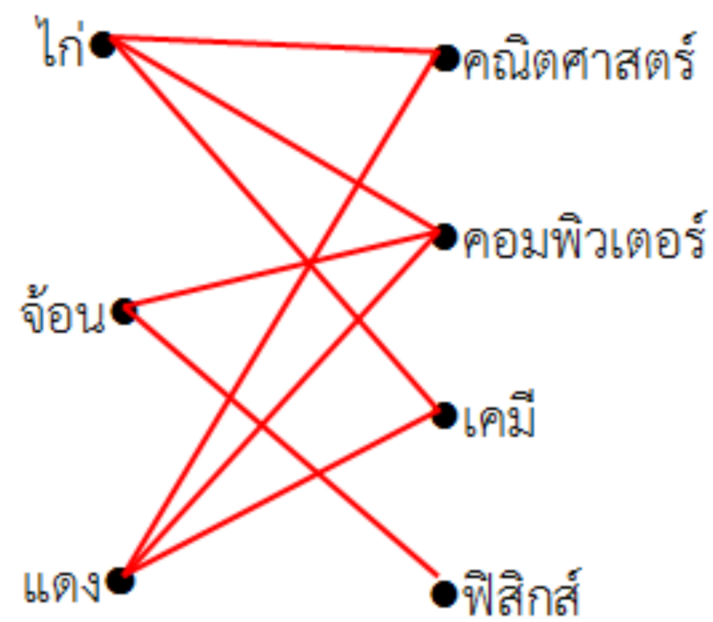




คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

นอกจากกรณีสะพานเมืองเคอนิกส์เบอร์ก ความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างก็สามารถเขียนออกมาในแบบกราฟดังตัวอย่างข้างล่างนี้ <u>ด้านซ้ายมือคือตารางความสัมพันธ์ ด้านขวามือคือความสัมพันธ์ในรูปแบบกราฟ</u>

ชื่อ	วิชา
ไก่	คณิตศาสตร์
จ้อน	คอมพิวเตอร์
แดง	คณิตศาสตร์
ไก่	เคมี
ไก่	คอมพิวเตอร์
จ้อน	ฟิสิกส์
แดง	เคมี
แดง	คอมพิวเตอร์



เรียกว่า กราฟ

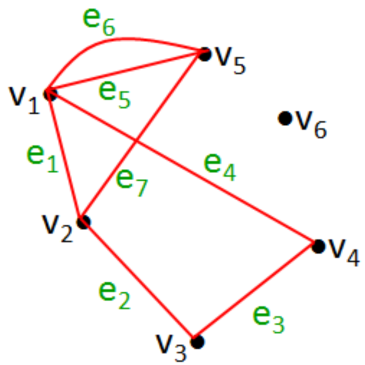
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

บทนิยาม กราฟ G ประกอบด้วย เซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (Vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ V(G)
2. เซตของเส้นเชื่อม (Edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอด แทนด้วยสัญลักษณ์ E(G)

ข้อสังเกต <u>$V(G) \neq \varnothing$ แต่ E(G) อาจเป็นเซตว่างได้</u>

จากรูปข้างล่างนี้ เส้นที่ลากต่อระหว่างจุดหรือ**จุดยอด (Vertex)** เรียกว่า **เส้นเชื่อม (edge)** กราฟ G = (V, E) ประกอบด้วยเซต V ซึ่งเป็นเซตของจุดต่างๆ และ E ซึ่งเป็นเซตของเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด



$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

$E = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ หรือ

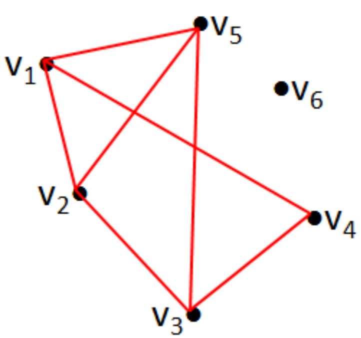
$E = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_1,v_4),(v_1,v_5),(v_1,v_5),(v_2,v_5)\}$

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

จากรูป เส้นเชื่อม **<u>e = (a, b)</u>** คือเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุด a และ จุด b จะเรียกว่าเส้นเชื่อม e โดยที่จุด a และ จุด b เชื่อมกัน (adjacent) สามารถเขียน **e = (b, a)** ได้

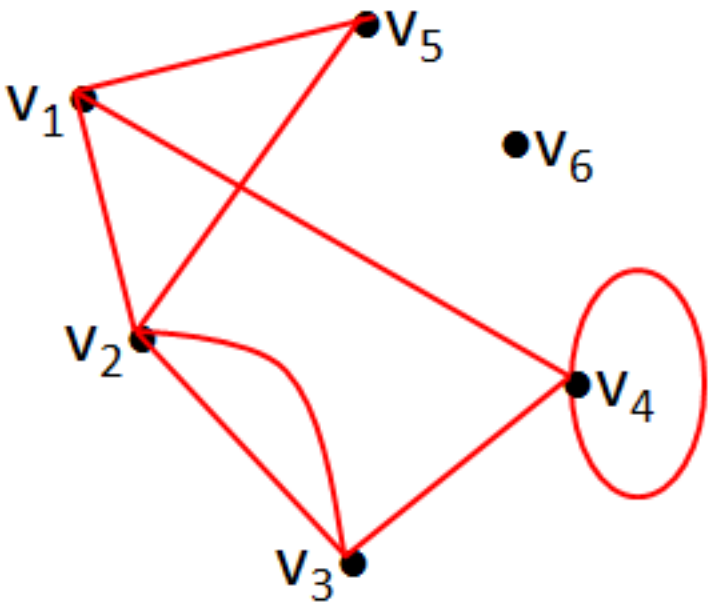
จากรูป จุดประชิดกันมีเส้นเชื่อมมากกว่า 1 เส้น เรียกว่า **<u>เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)</u>**

จากรูป e =(a, a) คือเส้นเชื่อมที่ต่อจุดเดียวกัน เรียกว่า **<u>เส้นเชื่อมวงวน (loop)</u>**



กราฟที่<u>ไม่มีทั้งเส้นเชื่อมวงวนและเส้นเชื่อมขนาน</u> เรียกว่า <u>กราฟเชิงเดียว (simple graph)</u> จุดที่ไม่มีการเชื่อมกับใคร เรียกว่า <u>จุดเอกเทศ (isolated point)</u> จากรูป ในกรณีนี้คือ V_6

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



<u>ดีกรีของจุด (Degree of Vertex)</u> คือ ดีกรีของจุด v เขียนแทนด้วย deg(v) คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระทบกับจุด v สำหรับดีกรีเป็นเลขคู่ เรียก **<u>จุดยอดคู่ (even vertex)</u>** และดีกรีเป็นเลขคี่ เรียก **<u>จุดยอดคี่ (odd vertex)</u>** จากรูป

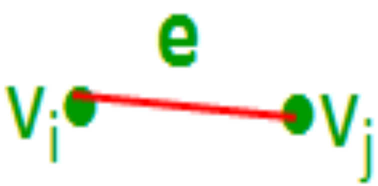
$deg(v_1) = 3$
$deg(v_2) = 4$
$deg(v_3) = 3$
$deg(v_4) = 4$ มีเส้นเชื่อมวงวน (loop) = +2
$deg(v_5) = 2$
$deg(v_6) = 0$

ถ้า G เป็นกราฟ มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม ถ้า G คือ กราฟ แล้ว

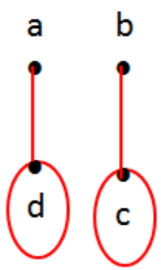
$deg(v_1)+deg(v_2)+...+deg(v_n)$ = 2 (จำนวนเส้นเชื่อมของ G)

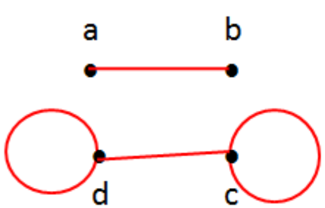
ผลรวมดีกรี = 16
จำนวนเส้นเชื่อม = 8

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



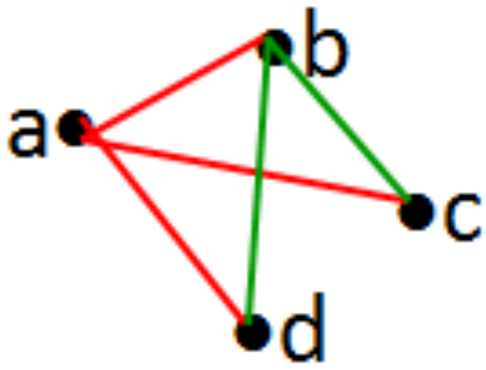
จากรูป เส้นเชื่อม e ระหว่างจุด v_i และ v_j มีค่าเป็น 1
v_i มีจำนวนดีกรี 1 และ v_j มีจำนวนดีกรี 1 ดังนั้น
จำนวนดีกรีของ e ถูกนับเป็น 2
สรุป เส้นเชื่อม e ใดๆ จะถูกนับเป็นดีกรี 2 ครั้งเสมอ
ดังนั้น <u>ผลรวมดีกรีของกราฟ</u>
G = 2 x ของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ G





จากรูป กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 3 และ 3
ซึ่ง**สามารถเขียนกราฟได้**
<u>ผลรวมดีกรี = 1+1+3+3 = 8 **(เลขคู่)**</u>
แต่ถ้ากราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 2 และ 3
กรณีนี้**ไม่สามารถเขียนเป็นกราฟได้**
<u>ผลรวมดีกรี = 1+1+2+3 = 7 **(เลขคี่)**</u>

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

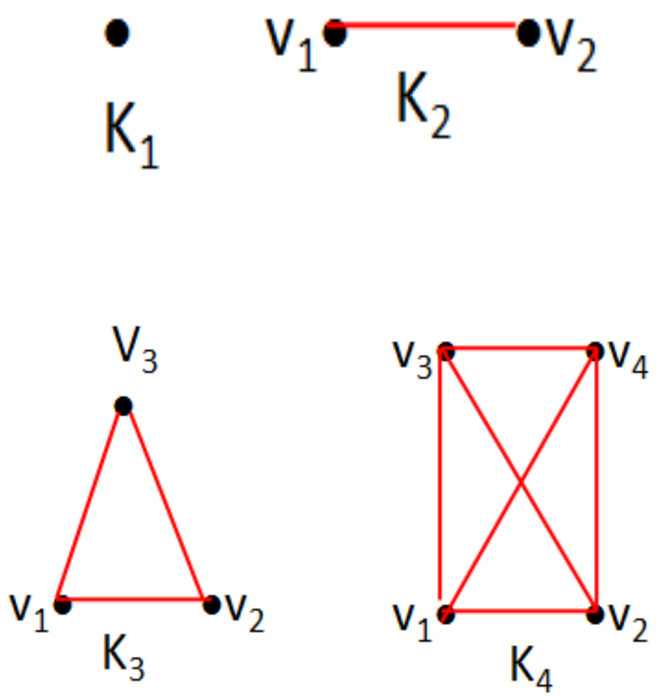


กำหนดให้ภาพนี้มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 3 และ 3 = 8 สมมุติจุด a มีดีกรี 3 แสดงว่า จุด a ต้องเชื่อมต่อกับจุดอื่นอีก 3 จุด ให้เป็น b, c, d และ b เป็นอีกจุดที่มีดีกรี 3 ดังนั้น b ต้องมีเส้นเชื่อมกับจุดอื่นที่ไม่ใช่ a อีก 2 เส้น ซึ่งทำให้จุด c และ d มีดีกรีเกิน 1 สรุปคือดีกรี 1, 1, 3 และ 3 นี้ไม่เป็นกราฟ ถ้าสังเกต ทั้งหมดมีเส้นเชื่อม 5 เส้น ซึ่งต้องมีดีกรีเป็น 10 จึงจะสามารถสร้างกราฟได้ดังรูป ซึ่งรูปนี้

ควรจะมี ดีกรี 2, 2, 3 และ 3 = 10 จึงจะสามารถเขียนกราฟได้ ดังนั้นการกำหนดจุดและผลรวม

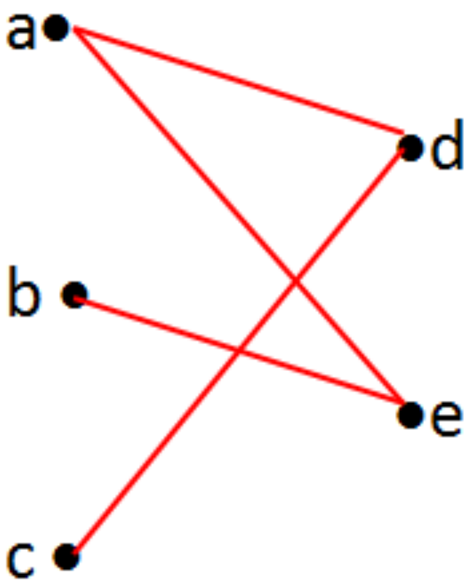
ดีกรีของจุดเป็นเลขคู่ ไม่ได้เป็นกราฟได้เสมอไป

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



จากรูป กราฟที่มี n จุด จะเรียกกราฟว่า **กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph)** เมื่อเป็น**กราฟเชิงเดียวและระหว่างจุดทุกคู่ต้องมีเส้นเชื่อม** หรืออาจกล่าวได้ว่า ทุกจุดได้มีเส้นเชื่อมโดยตรงกับจุดอื่นๆ ในกราฟทั้งหมด และ**ต้องเชื่อมกันเพียงเส้นเดี่ยวเท่านั้น**ดังรูป

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

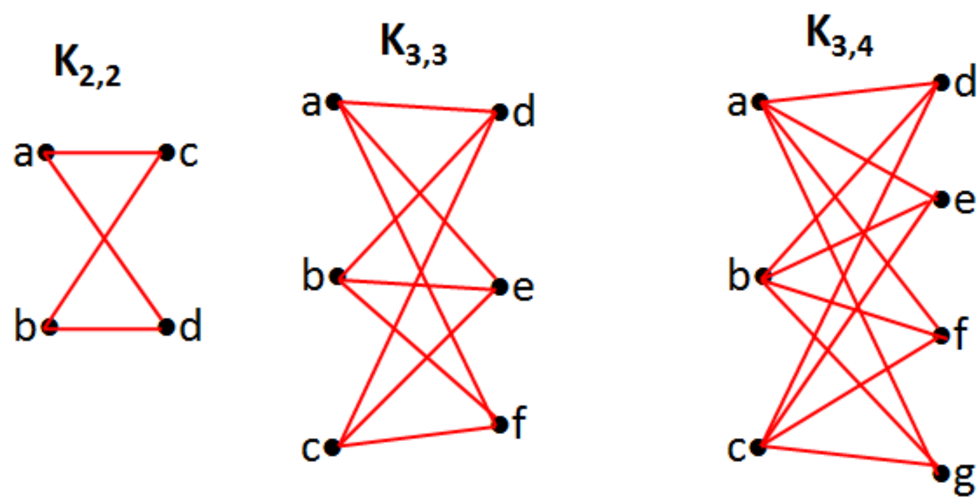


กราฟ G =(V,E) เป็น**กราฟสองส่วน (Bipartite Graph)** ถ้ามีเซตย่อย V_1 และ V_2 ของ V ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ และ $V_1 \cup V_2 = V$ และแต่ละเส้นเชื่อมใน E เชื่อมระหว่างจุดหนึ่งใน V_1 และอีกจุดใน V_2 โดยหลักการคือการสมมุติให้กราฟแบ่งเป็นสองกลุ่ม และมีกฎว่าภายในกลุ่มของตัวเองจะต้องไม่มีเส้นเชื่อมถึงกันโดยตรง โดยพิจารณาดังนี้ จากรูป a เชื่อม d กับ e ดังนั้นถ้า a อยู่กลุ่มไหนห้ามมี d กับ e และ b เชื่อม e ดังนั้น b อยู่กลุ่มไหนห้ามมี e และ c เชื่อม d ดังนั้น c อยู่กลุ่มไหนห้ามมี d ซึ่ง a, b, c จึงจัดอยู่ในกลุ่มเดี่ยวกัน ให้จัดอยู่กลุ่มเดี่ยวกันโดยพิจารณาจากตัวห้าม

V = {a, b, c, d, e}
V_1= {a, b, c} คือ a จะไม่เชื่อมกับเซตของตัวเองเสมือนแบ่งเป็นสองชุด
V_2 = {d, e} คือ d จะไม่เชื่อมกับเซตของตัวเองเสมือนแบ่งเป็นสองชุด

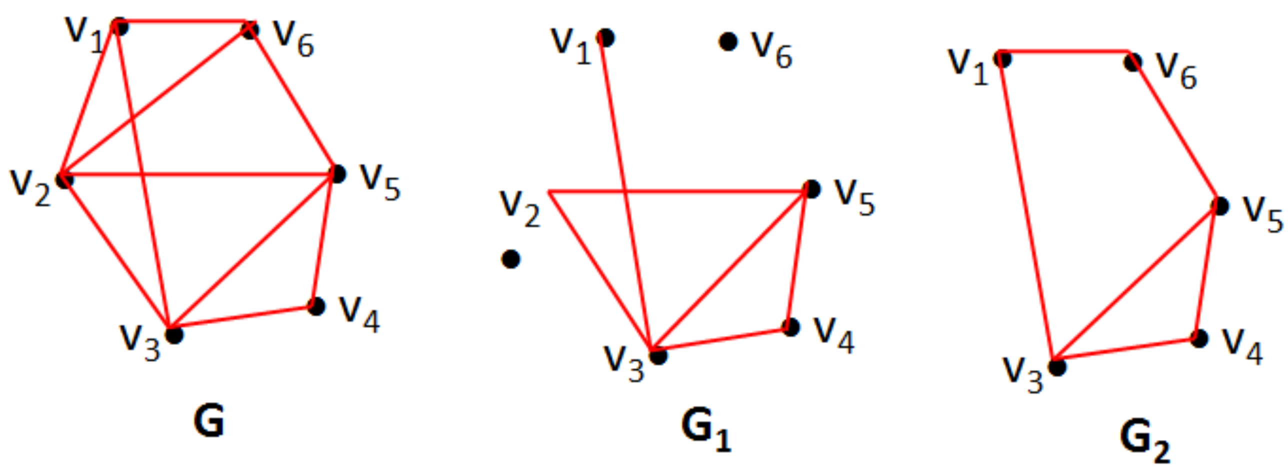
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- จากรูปข้างล่าง กราฟ G = (V,E) เป็น**กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete bipartite graph)** เมื่อ G เป็นกราฟสองส่วน และแต่ละจุดในเซตย่อย V_1 ของ V ต้องมีเส้นเชื่อมไปยังทุกจุดในเซตย่อย V_2 ของ V เขียนแทนด้วย $K_{m,n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนสมาชิกของ V_1 และ V_2 ตามลำดับ โดยการพิจารณาคือ ชุดแรกต้องเชื่อมกับชุดที่สองให้ครบจึงเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์
- ตัวอย่างเช่น กราฟซ้ายมือ สมาชิกชุดแรก คือ a สามารถเชื่อม c กับ d ซึ่งเป็นสมาชิกในชุดที่สองทั้งหมด และสมาชิกชุดสอง คือ c สามารถเชื่อม a กับ b ซึ่งเป็นสมาชิกในชุดแรกทั้งหมด



คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- กราฟ $G_1 = (V_1,E_1)$ เป็น**กราฟย่อยของกราฟ** G =(V,E) ถ้า $V_1 \subset V$ และ $E_1 \subset E$ และ เส้นเชื่อม $e \in E_1$ มีจุดกระทบทั้งสองอยู่ใน V_1 ตัวอย่างเช่น กราฟ G ของรูปข้างล่างนี้ สามารถเขียนออกมาเป็นกราฟย่อย G_1 และ G_2 โดย G_1 และ G_2 เมื่อประกอบกันแล้วจะเป็นกราฟ G



แบบฝึกหัด 1

1) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 5 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 2, 3 และ 5 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 2

2) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 3 และ 3 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 3

3) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟเชิงเดี่ยวได้หรือไม่

แบบฝึกหัด

4) มีคน 15 คน เป็นไปได้หรือไม่ที่แต่ละคนจะมีเพื่อนอย่างแน่นอน 3 คน จงอธิบาย (ก. เป็นเพื่อน ข. ความหมายเดียวกับ ข. เป็นเพื่อน ก.)

แบบฝึกหัด

5) คน 4 คน เป็นไปได้หรือไม่ที่แต่ละคนจะมีเพื่อนอย่างแน่นอน 3 คน จงอธิบาย

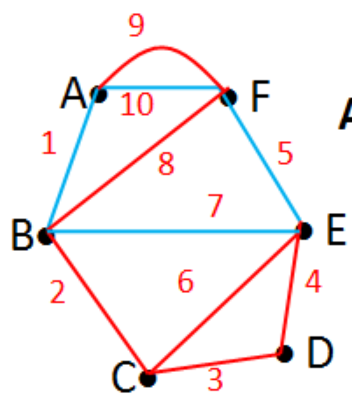
6) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 5 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 0, 2, 2, 3 และ 9 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

แบบฝึกหัด

7) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 8 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 3, 4, 1, 5, 2, 2, 1 ตามลำดับ แล้วสรุปว่าภาพนี้เป็นกราฟหรือไม่

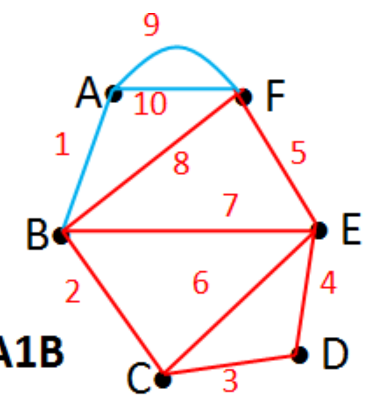
8) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 8 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 2, 2, 9, 1, 3, 1 ตามลำดับ แล้วสรุปว่าภาพนี้เป็นกราฟเชิงเดี่ยวหรือไม่

แนวเดินวงจรและวัฏจักร



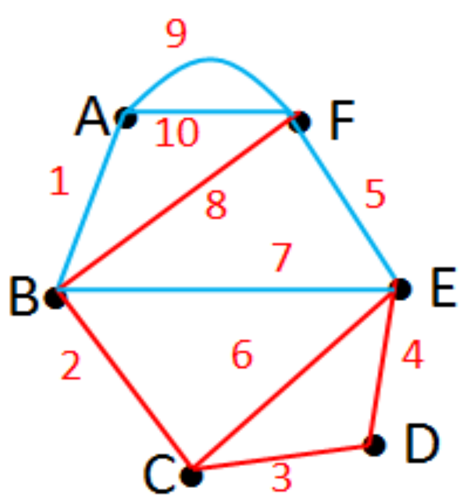
A10F5E7B1A10F

A9F10A1B



แนวเดิน (walk) คืออันดับจำกัดของจุดและเส้นเชื่อมสลับกัน ดังนี้ $v_0e_1v_1e_2...v_ne_n$ โดย $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ และ $i \in \{1,2,...,n\}$ เรียก v_0 ว่า จุดเริ่มต้นและเรียก v_n ว่าจุดสิ้นสุดของแนวเดิน เรียก $v_1,v_2,...,v_{n-1}$ ว่าจุดภายในของแนวเดิน เรียกแนวเดินดังกล่าวว่า แนวเดิน v_0-v_n ตัวอย่างเช่น จากรูปข้างบนด้านซ้ายมือ A ไปหา F ด้วยเส้นทาง 10 และ F ไปหา E ด้วยเส้นทาง 5 และ E ไปหา B ด้วยเส้นทาง 7 ตามลำดับ เป็นต้น

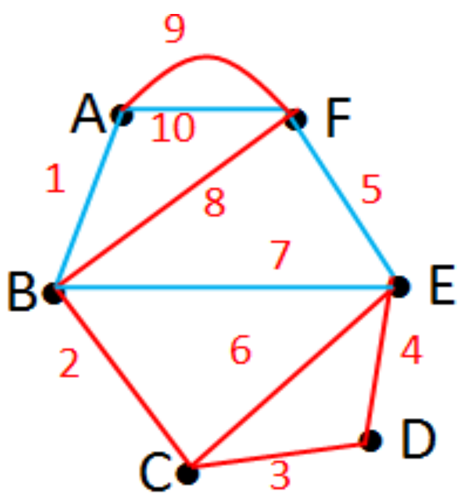
แนวเดินวงจรและวัฏจักร



A9F10A1B7E5F

แนวเดินเปิด ความยาว **5**

รูปที่ 1



A10F5E7B1A

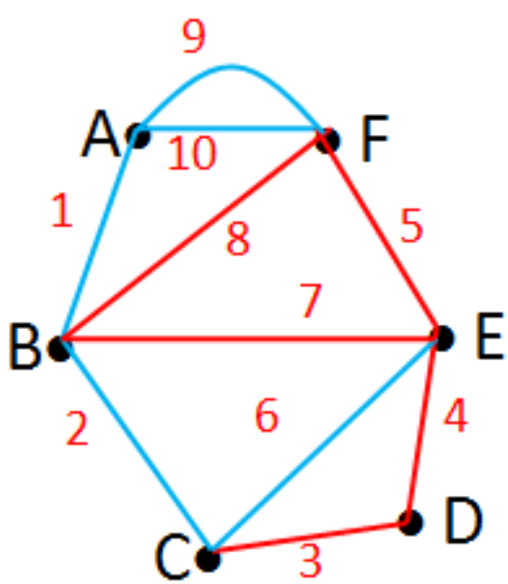
แนวเดินปิด ความยาว **4**

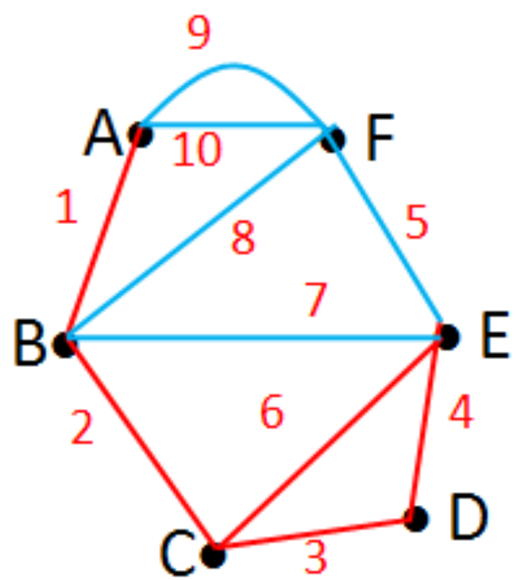
รูปที่ 2

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- แนวเดินที่มีเส้นเชื่อม n เส้น เรียกว่า **แนวเดินที่มีความยาวเท่ากับ n** ตัวอย่างเช่น รูปที่ 1 และ รูปที่ 2 มีความยาวเท่ากับ 5 และ 4 ตามลำดับ
- แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดแตกต่างกัน เรียกว่า **แนวเดินเปิด** ตัวอย่างเช่น รูปที่ 1 จุดเริ่มต้นที่ A แล้วจุดสิ้นสุดที่ F
- แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า **แนวเดินปิด** ตัวอย่างเช่น รูปที่ 2 จุดเริ่มต้นที่ A แล้วจุดสิ้นสุดที่ A

แนวเดินวงจรและวัฏจักร





ร่องเดิน **A9F10A1B2C6E**

ร่องเดินปิด(วงจร) **A9F5E7B8F10A**

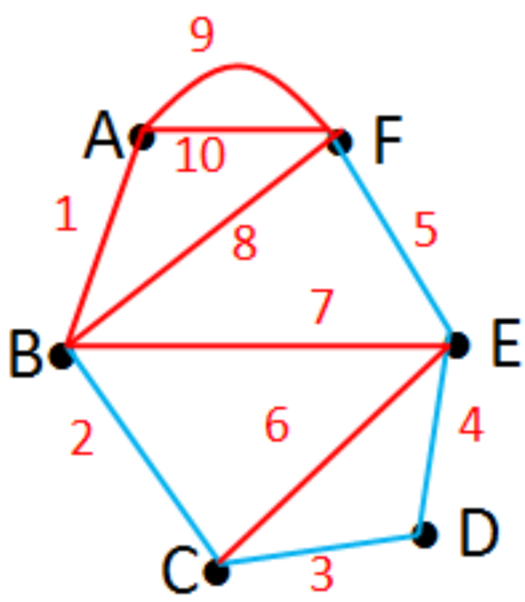
รูปที่ 3

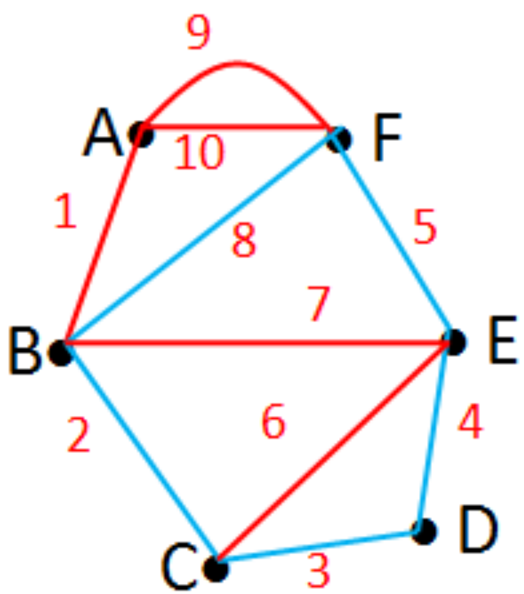
รูปที่ 4

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- แนวเดินที่เส้นเชื่อมทุกเส้นในอันดับแตกต่างกัน **(V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำ)** เรียกว่า **แนวเดินไม่ซ้ำหรือร่องเดิน (trail)** เพราะปกติแนวเดินนั้น สามารถซ้ำเส้นทางเดิมได้ (V ซ้ำได้และ E ซ้ำได้) ตัวอย่างเช่น A9F9A1B7E กรณีนี้คือ A ไป F และ F ไป A กรณีนี้มีเส้นทางที่ซ้ำเส้นทางเดิม ซึ่งกรณีนี้ถึงว่าไม่เป็นร่องเดิน แต่รูปที่ 3 นั้น เป็นร่องเดินเพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม
- ร่องเดินแบบปิดที่มีความยาวตั้งแต่ 3 ขึ้นไป **(V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำและกลับที่จุดเริ่มต้น)** เรียกว่า **วงจร (circuit)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 4 นั้น เป็นร่องเดิน ที่จุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดี่ยวกัน คือจุดเริ่มต้นคือจุด A และจุดสิ้นสุดคือจุด A

แนวเดินวงจรและวัฏจักร





วิถี **B2C3D4E5F**

วิถีปิด(วัฏจักร) **B2C3D4E5F8B**

รูปที่ 5

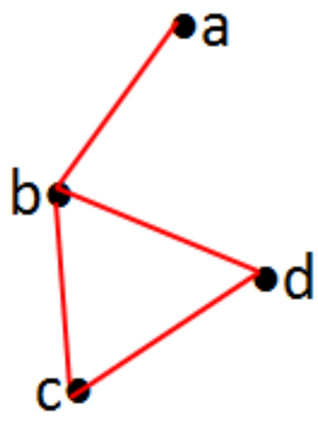
รูปที่ 6

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

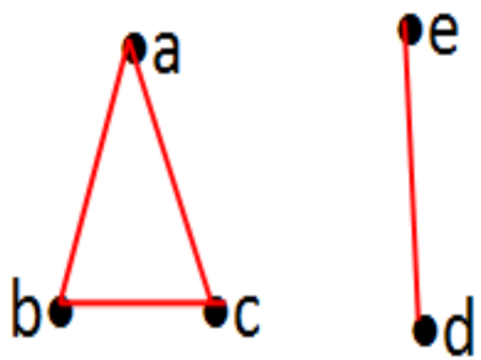
- ร่องเดินที่จุดในอันดับทุกจุดแตกต่างกัน **(V ห้ามซ้ำและ E ห้ามซ้ำ)** เรียกว่า **วิถี (path)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 5 นั้น เป็นวิถี เพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม และไม่มีจุดยอดใดซ้ำกันเลยเนื่องจากอันดับของจุดและเส้นเชื่อมที่เป็นวิถี ไม่ซ้ำกัน จึงสามารถเขียนแทนวิถีในรูปที่ 5 คือ B2C3D4E5F ด้วยอันดับของจุด BCDEF แบบนี้ได้
- **วิถีแบบปิด** (วิถีที่ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดซ้ำกัน หรือ **V ห้ามซ้ำและ E ห้ามซ้ำ และกลับที่จุดเริ่มต้น**) ที่มีความยาวตั้งแต่ 3 ขึ้นไป เรียกว่า **วัฏจักร (cycle)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 6 เป็นวัฏจักร เพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม และไม่มีจุดยอดใดซ้ำกันเลย มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดี่ยวกัน คือจุดเริ่มต้นคือจุด A และจุดสิ้นสุดคือจุด A
- ระยะห่างระหว่างจุด a และ b คือ **ความยาวของวิถีจากจุด a ไปยังจุด b ที่สั้นที่สุด** ตัวอย่างเช่น A ไป E ระยะห่างระหว่างจุด A และ E คือ 8 โดยวิถีคือ A1B7E ระยะห่างคือ 1 + 7 = 8

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- ให้ a และ b เป็นจุดในกราฟ จุด a เชื่อมโยง (connect) กับจุด b ก็ต่อเมื่อ มีแนวเดินจากจุด a ไปยังจุด b กราฟ G เป็น**กราฟเชื่อมโยง (connected graph)** ก็ต่อเมื่อทุกๆ คู่ของจุดในกราฟ G ต้องเชื่อมโยงกัน หรืออาจกล่าวได้ว่า จุดใดๆ บนกราฟสามารถไปถึงจุดใดบนกราฟได้ทุกจุด เช่น กราฟบนด้านซ้ายมือ a มีเส้นทางที่สามารถไปหา b, c, d ได้ จึงเป็นกราฟเชื่อมโยง แต่กราฟบนด้านขวามือ a ไม่มีเส้นทางที่สามารถไปหา e กับ d ได้ จึงไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง



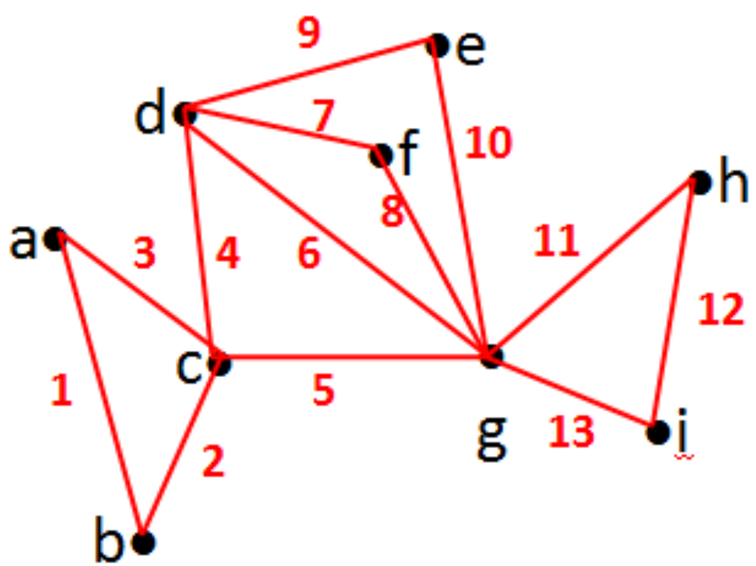
เชื่อมโยง



ไม่เชื่อมโยง

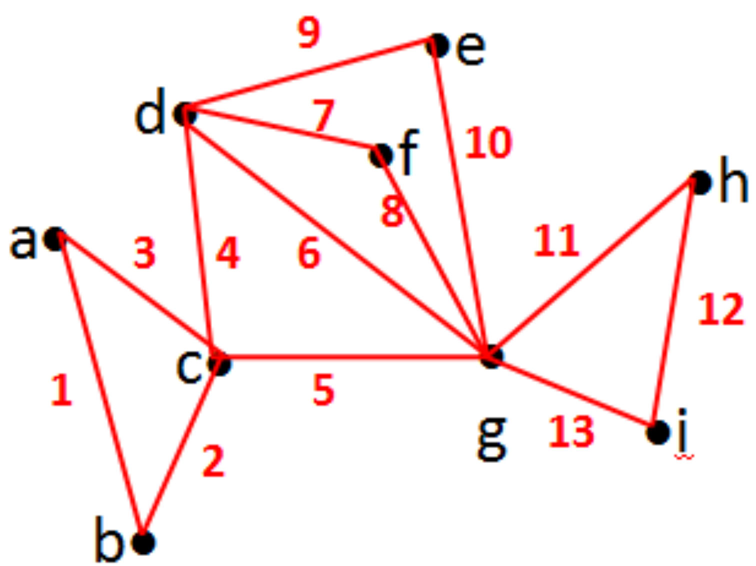
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- **วงจรออยเลอร์ (Euler Circuit)** คือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นแต่เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น และทุกจุดยอด โดยเริ่มจากจุดหนึ่งไปตามเส้นเชื่อมต่างๆ แล้วสามารถกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้ **(V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำ และกลับที่จุดเริ่มต้น และต้องผ่าน E ให้ครบ)**



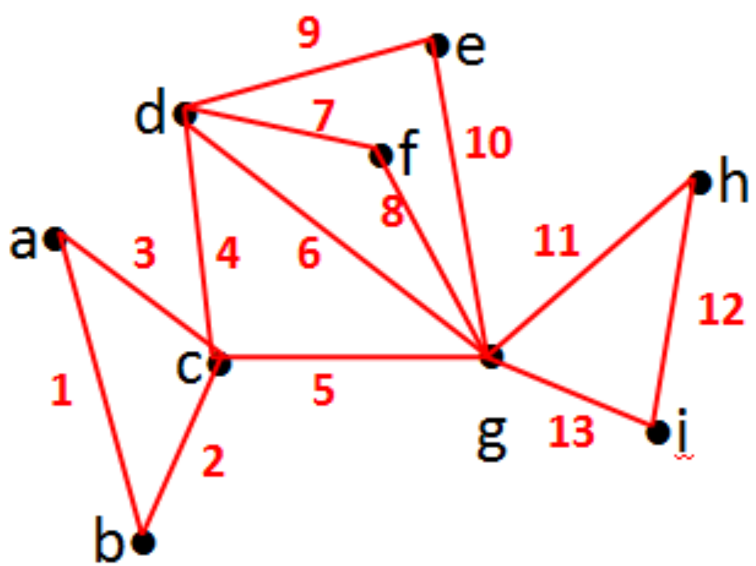
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- **ทางเดินออยเลอร์หรือเส้นทางออยเลอร์ (Euleria Tail)** คือ อันดับเส้นเชื่อม โดยเส้นทางที่ลากผ่านเส้นต่างๆ ในกราฟ **โดยแต่ละเส้นลากผ่านได้เพียงครั้งเดียว** จากรูปข้างบน คือ 1 2 5 13 12 11 8 7 9 10 6 4 3 โดยเริ่มที่จุด a จบลงที่จุด a และเส้นเชื่อมไม่ซ้ำกันทุกเส้นเชื่อมในกราฟ



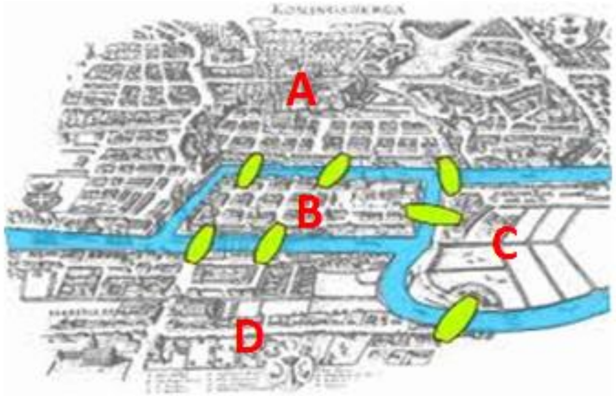
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

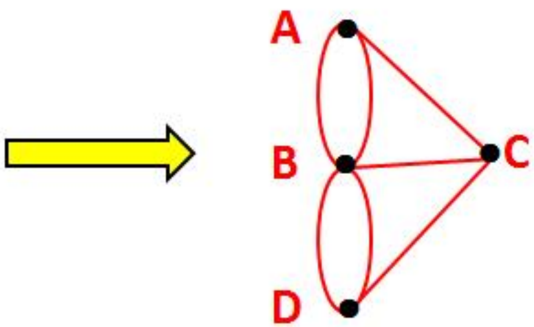
- **กราฟออยเลอร์ (Eulerian Graph)** คือ กราฟที่มีวงจรออยเลอร์ ซึ่งกราฟออยเลอร์นั้นเมื่อนับ**ดีกรีของจุดจะได้คราวละ 2 เสมอ** เพราะส่วนจุดเริ่มต้นเมื่อมีเส้นเชื่อมออกไป ในที่สุดจะมีเส้นเชื่อมกลับเข้ามา ซึ่งทำให้ทุกๆ จุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่
- ตัวอย่างเช่น deg(a) = 2, deg(b) = 2, deg(c) = 4, deg(d) = 4, deg(e) = 2, deg(f) = 2, deg(g) = 6, deg(h) = 2, deg(i) = 2 ดังนั้นกราฟนี้เป็นกราฟออยเลอร์ เพราะดีกรีของจุดมีค่าเป็นจุดยอดคู่ทั้งหมด



แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- คำถามเกี่ยวกับสะพานเมืองเคอนิกส์เบอร์ก ตอบโดยทฤษฎีกราฟ พื้นที่เมืองแบ่งเป็น 4 ส่วน แทนด้วยจุด A B C D และแทนสะพานด้วยเส้นเชื่อม



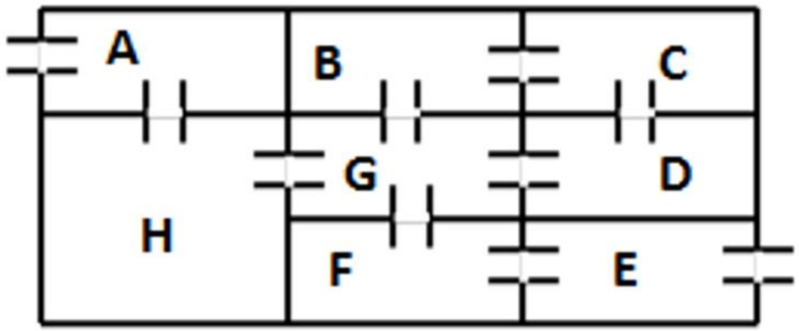


- การที่จะเดินทางรอบเมือง โดยเริ่มจากพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง แล้วมาจบลงที่พื้นที่เริ่มต้นโดยการข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง แต่ละแห่งข้ามได้เพียงครั้งเดียว คือ การหาวงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นนั่นคือ วงจรออยเลอร์ เนื่องจากกราฟที่ใช้แทนมีจุดยอดคี่ เช่น deg(C) = 3 ดังนั้นกราฟนี้ไม่เป็นกราฟออยเลอร์ จึงไม่มีวงจรออยเลอร์ คำตอบคือเป็นไปไม่ได้

ที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg.jpeg (ออนไลน์)

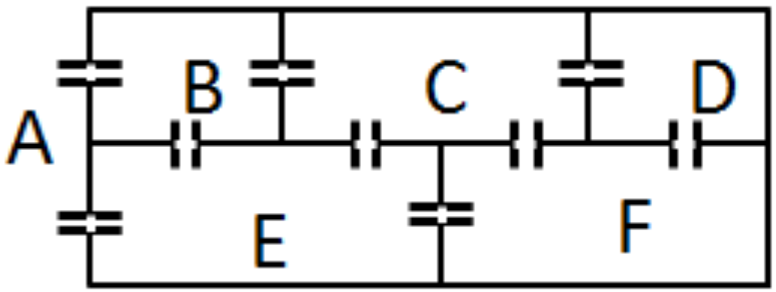
แบบฝึกหัด 1

1. ถ้าแผนผังชั้นล่างของอาคารแห่งหนึ่งเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าอาคารทางห้อง A และออกทางห้อง E โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



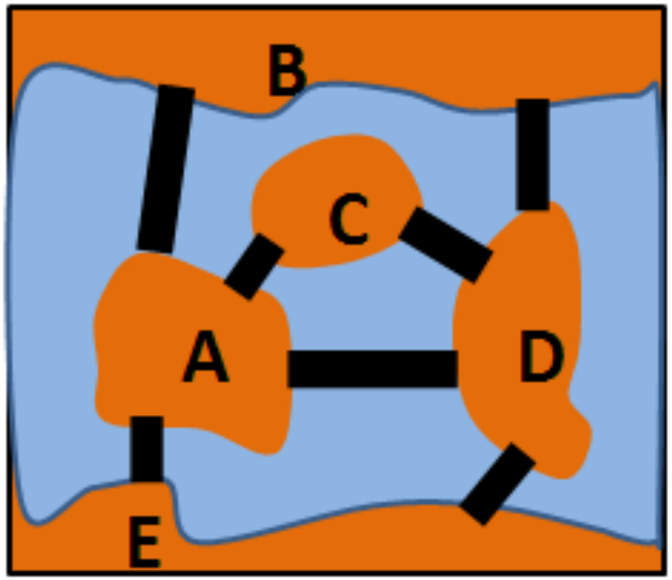
แบบฝึกหัด 2

2. ถ้าแผนผังของอาคารชั้นเดียวเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าไปในอาคาร และออกมา โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



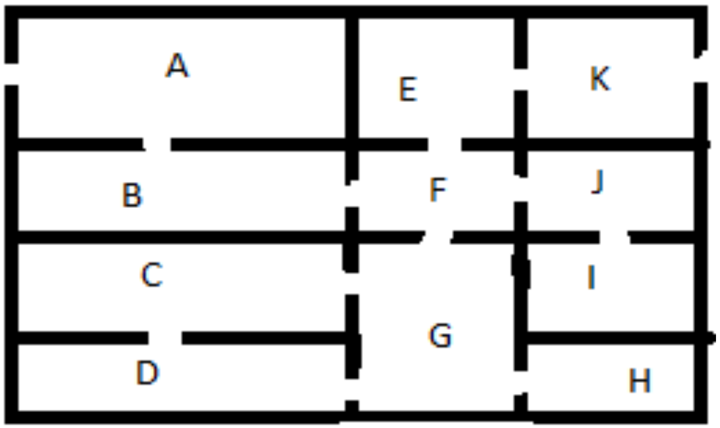
แบบฝึกหัด 3

3. การเดินทางให้ผ่านทุกพื้นที่ของเมืองดังรูป โดยเริ่มที่จุดใดๆ แล้วกลับมาที่จุดเดิม และต้องข้ามทุกสะพานเพียงครั้งเดียว



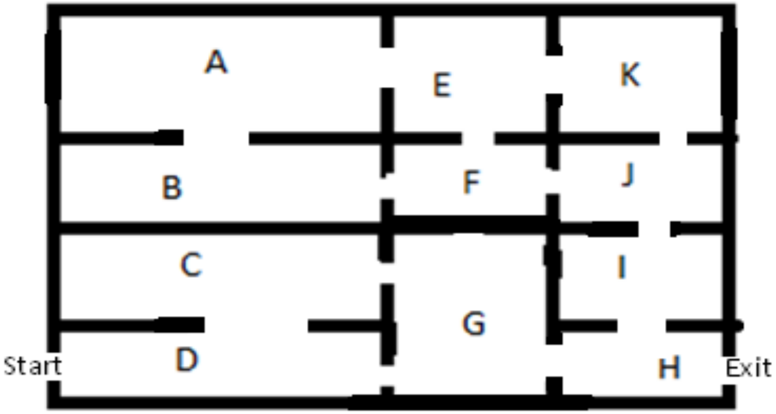
แบบฝึกหัด 4

4. ถ้าแผนผังชั้นล่างของอาคารแห่งหนึ่งเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าอาคารทางห้อง A และออกทางห้อง K โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



แบบฝึกหัด 5

5. ถ้าแผนผังของอาคารชั้นเดียวเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าไปในอาคาร และออกมา โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



Note