บทที่ 2 ฟังก์ชัน

Waranyu Wongseree

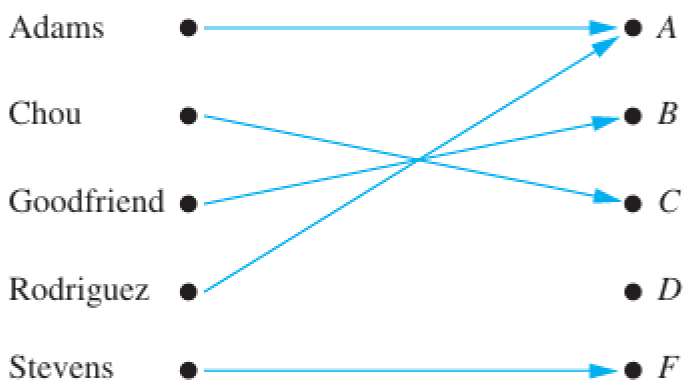
Chitralada Technology Institute

บทที่ 2 ฟังก์ชัน

- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one function)
- ฟังก์ชันทั่วถึง (Onto function)
- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (One-to-one corresponding function)
- ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function)
- ฟังก์ชันประกอบ (Composite function)

ฟังก์ชัน

ในหลายกรณี เราจะกำหนดสมาชิกแต่ละตัวของเซตหนึ่งให้สอดคล้องกับสมาชิกเฉพาะตัวของเซตที่สอง (ซึ่งอาจเป็นเซตเดียวกับเซตแรกก็ได้ ตัวอย่างเช่น สมมติว่า นักเรียนแต่ละคนในวิชาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง จะได้รับการกำหนดเกรดเป็นตัวอักษรจากเซตหนึ่ง



นิยามของฟังก์ชัน

กำหนดให้เซต A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว

"*ฟังก์ชันจาก* A *ไปยัง* B" เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ คือ การกำหนดค่าที่แน่นอนหนึ่งค่าเท่านั้นที่เป็นสมาชิกภายในเซต B ให้กับสมาชิกแต่ละตัวภายในเซต A โดยเขียนแทนด้วย $f(a)=b$ โดยที่ b จะต้องเป็นสมาชิกเพียงตัวเดียวเท่าในภายในเซต B ที่ถูกกำหนดให้กับ a ซึ่งเป็นสมาชิกภายในเซต A

Let A and B be nonempty sets. A *function* f from A to B is an assignment of exactly one element of B to each element of A. We write $f(a) = b$ if b is the unique element of B assigned by the function f to the element a of A. If f is a function from A to B, we write $f : A \rightarrow B$.

นิยามของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

จะเรียก เซต A ว่า "*โดเมน (Domain)*" และเรียก เซต B ว่า "*โคโดเมน (Co-domain)*"

ถ้า $f(a) = b$ แล้ว จะเรียก b ว่า "*อิมเมจของ* a *(Image of* a*)*" และเรียก a ว่า "*พรีอิมเมจของ* b *(Pre-image of* b*)*"

และ นิยามให้ "*เรนจ์ (Range)*" คือ เซตที่มีสมาชิกภายในเซต เป็นอิมเมจของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

If f is a function from A to B, we say that A is the *domain* of f and B is the *codomain* of f. If $f(a) = b$, we say that b is the *image* of a and a is a *preimage* of b. The *range*, or *image*, of f is the set of all images of elements of A. Also, if f is a function from A to B, we say that f *maps* A to B.

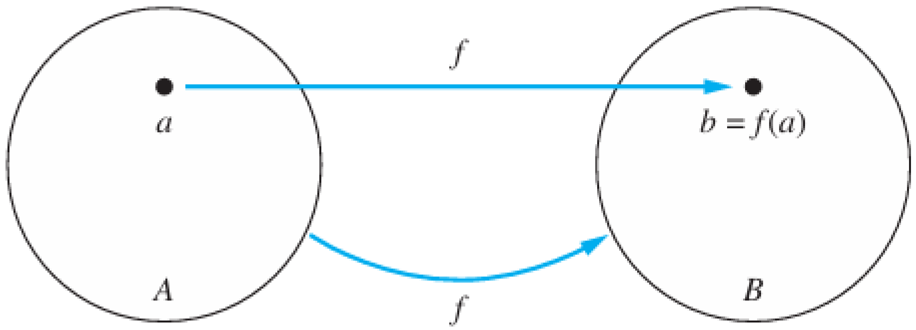
นิยามของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

จะเรียก เซต A ว่า "*โดเมน (Domain)*" และเรียก เซต B ว่า "*โคโดเมน (Co-domain)*"

ถ้า $f(a) = b$ แล้ว จะเรียก b ว่า "*อิมเมจของ* a *(Image of* a*)*" และเรียก a ว่า "*พรีอิมเมจของ* b *(Pre-image of* b*)*"

และ นิยามให้ "*เรนจ์ (Range)*" คือ เซตที่มีสมาชิกภายในเซต เป็นอิมเมจของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด



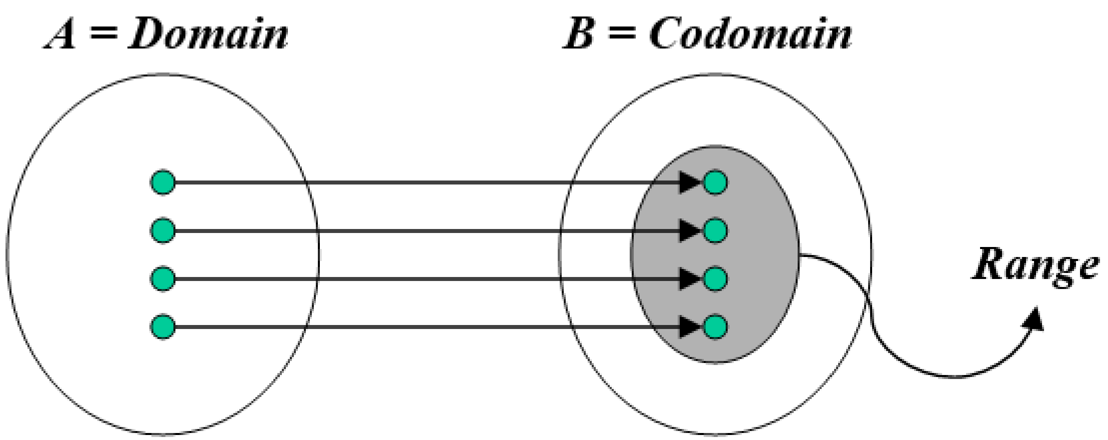
นิยามของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

จะเรียก เซต A ว่า "*โดเมน (Domain)*" และเรียก เซต B ว่า "*โคโดเมน (Co-domain)*"

ถ้า $f(a) = b$ แล้ว จะเรียก b ว่า "*อิมเมจของ a (Image of a)*" และเรียก a ว่า "*พรีอิมเมจของ b (Pre-image of b)*"

และ นิยามให้ "*เรนจ์ (Range)*" คือ เซตที่มีสมาชิกภายในเซต เป็นอิมเมจของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด



ตัวอย่าง ถ้ากำหนดให้ $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ แล้ว $f(x) = x^2$ แล้ว จงหาโดเมน, โคโดเมน, และเรนจ์ ของฟังก์ชัน f

<u>ตอบ</u> โดเมนของฟังก์ชัน f คือ Z

โคโดเมนของฟังก์ชัน f คือ Z

เรนจ์ ของฟังก์ชัน f คือ $\{0,1,4,9,16,\cdots\}$

นิยามของฟังก์ชันลอการิธึม

Let b be a positive real number with $b \neq 1$. For each positive real number x, the **logarithm with base b of x,** written $\log_b x$, is the exponent to which b must be raised to obtain x. Symbolically,

$$\log_b x = y \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x.$$

The **logarithmic function with base b** is the function from $\mathbf{R}^+$ to $\mathbf{R}$ that takes each positive real number x to $\log_b x$.

ตัวอย่าง

a. $\log_3 9 = 2$ because $3^2 = 9$. b. $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ because $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

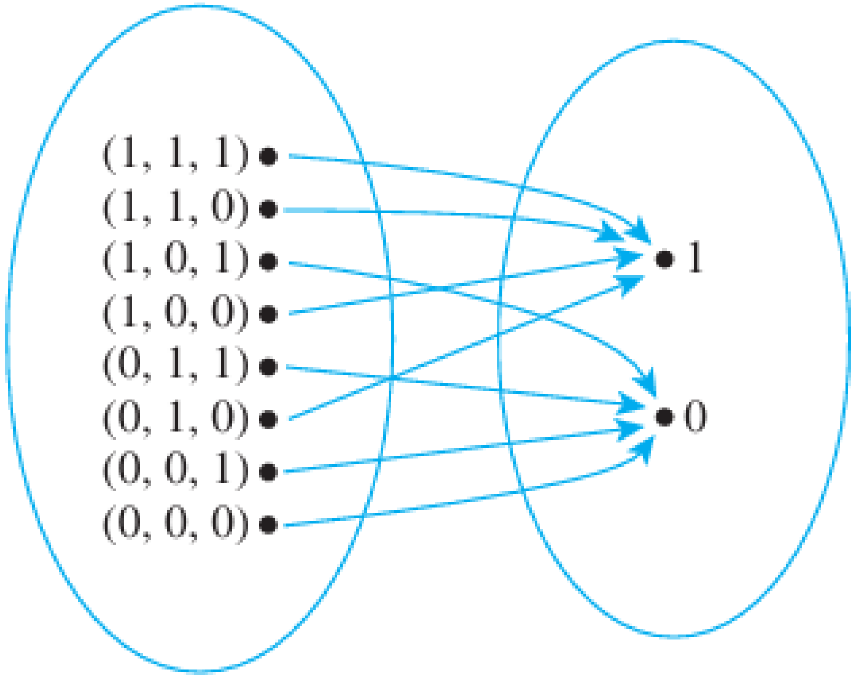
c. $\log_{10}(1) = 0$ because $10^0 = 1$.

d. $\log_2(2^m) = m$ because the exponent to which 2 must be raised to obtain 2^m is m.

e. $2^{\log_2 m} = m$ because $\log_2 m$ is the exponent to which 2 must be raised to obtain m. ■

Boolean Functions

Input			Output
P	***Q***	***R***	***S***
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0



ตัวอย่าง

Consider the three-place Boolean function defined from the set of all 3-tuples of 0's and 1's to {0, 1} as follows: For each triple (x_1, x_2, x_3) of 0's and 1's,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \ mod \ 2.$$

Describe f using an input/output table.

Solution

$$f(1, 1, 1) = (1 + 1 + 1) \ mod \ 2 = 3 \ mod \ 2 = 1$$
$$f(1, 1, 0) = (1 + 1 + 0) \ mod \ 2 = 2 \ mod \ 2 = 0$$

ตัวอย่าง

Consider the three-place Boolean function defined from the set of all 3-tuples of 0's and 1's to {0, 1} as follows: For each triple (x_1, x_2, x_3) of 0's and 1's,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\ mod\ 2.$$

Describe f using an input/output table.

Input			Output
x_1	x_2	x_3	$(x_1 + x_2 + x_3)\ mod\ 2$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

ตัวอย่าง

Let $J_3 = \{0, 1, 2\}$, and define functions f and g from J_3 to J_3 as follows: For all x in J_3,

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \textit{ mod } 3 \quad \text{and} \quad g(x) = (x + 2)^2 \textit{ mod } 3.$$

Does $f = g$?

a. Yes, the table of values shows that $f(x) = g(x)$ for all x in J_3.

x	$x^2 + x + 1$	$f(x) = (x^2 + x + 1)$ *mod* 3	$(x + 2)^2$	$g(x) = (x + 2)^2$ *mod* 3
0	1	$1 \textit{ mod } 3 = 1$	4	$4 \textit{ mod } 3 = 1$
1	3	$3 \textit{ mod } 3 = 0$	9	$9 \textit{ mod } 3 = 0$
2	7	$7 \textit{ mod } 3 = 1$	16	$16 \textit{ mod } 3 = 1$

นิยาม

กำหนดให้ $f_1, f_2 : A \to \mathrm{R}$ แล้ว $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2 : A \to \mathrm{R}$ ด้วย โดยนิยามให้

$$[f_1 + f_2](x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ และ } [f_1 \cdot f_2](x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Let f_1 and f_2 be functions from A to $\mathbf{R}$. Then $f_1 + f_2$ and $f_1 f_2$ are also functions from A to $\mathbf{R}$ defined for all $x \in A$ by

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

ตัวอย่าง ถ้ากำหนดให้ $f_1, f_2 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ และ $f_1(x) = x^2$ แล้ว $f_2(x) = x - x^2$ แล้ว จงหา $[f_1 + f_2](x)$ และ $[f_1 \cdot f_2](x)$

<u>ตอบ</u>

$$[f_1 + f_2](x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x - x^2 = x$$

$$[f_1 \cdot f_2](x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = x^2\left(x - x^2\right) = x^3 - x^4$$

นิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

f เป็น “ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One, 1:1 หรือ Injective)” ก็ต่อเมื่อ $f(x) = f(y)$ เมื่อ $x = y$ สำหรับทุกๆ ค่าของ x ที่เป็นสมาชิกภายในโดเมนของ f เขียนแทนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย

$f : A \xrightarrow{1:1} B$

A function f is said to be *one-to-one*, or an *injunction*, if and only if $f(a) = f(b)$ implies that $a = b$ for all a and b in the domain of f. A function is said to be *injective* if it is one-to-one.

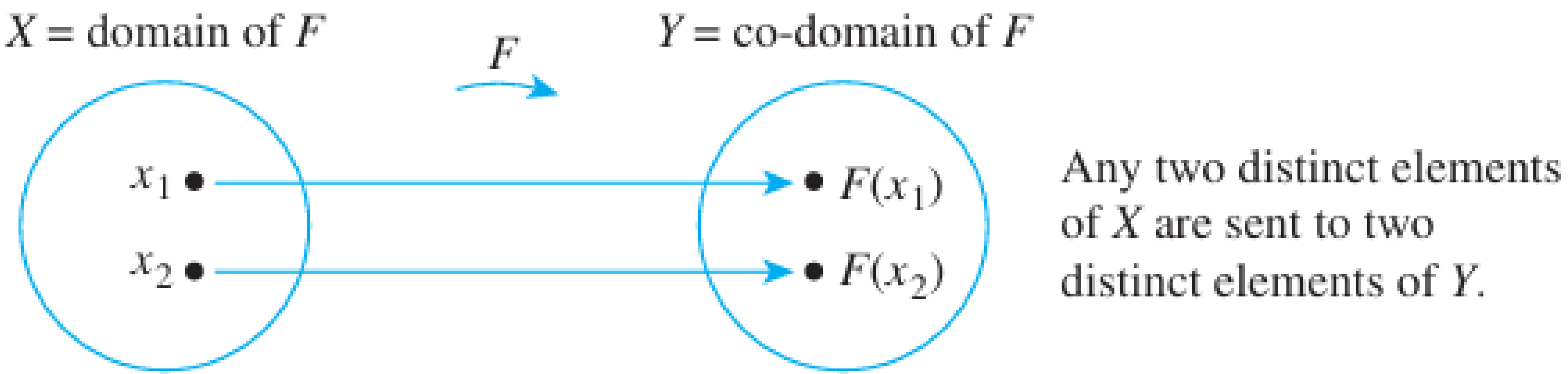


Figure 7.2.1(a) **A One-to-One Function Separates Points**

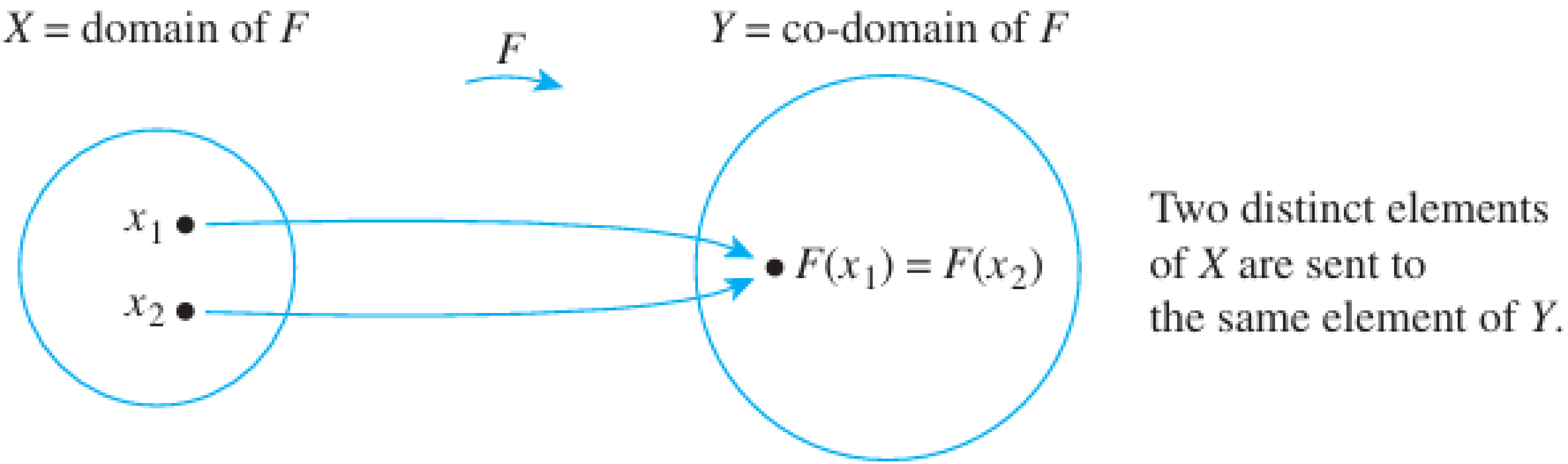
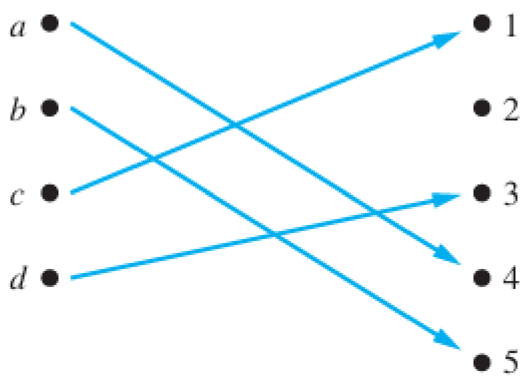


Figure 7.2.1(b) **A Function That Is Not One-to-One Collapses Points Together**

Example: One-to-One Functions on Finite Sets

Determine whether the function f from $\{a, b, c, d\}$ to $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ with $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$, and $f(d) = 3$ is one-to-one.

Solution: The function f is one-to-one because f takes on different values at the four elements of its domain. This is illustrated in Figure 3.



Example: One-to-One Functions on Finite Sets

Do either of the arrow diagrams in Figure 7.2.2 define one-to-one functions?

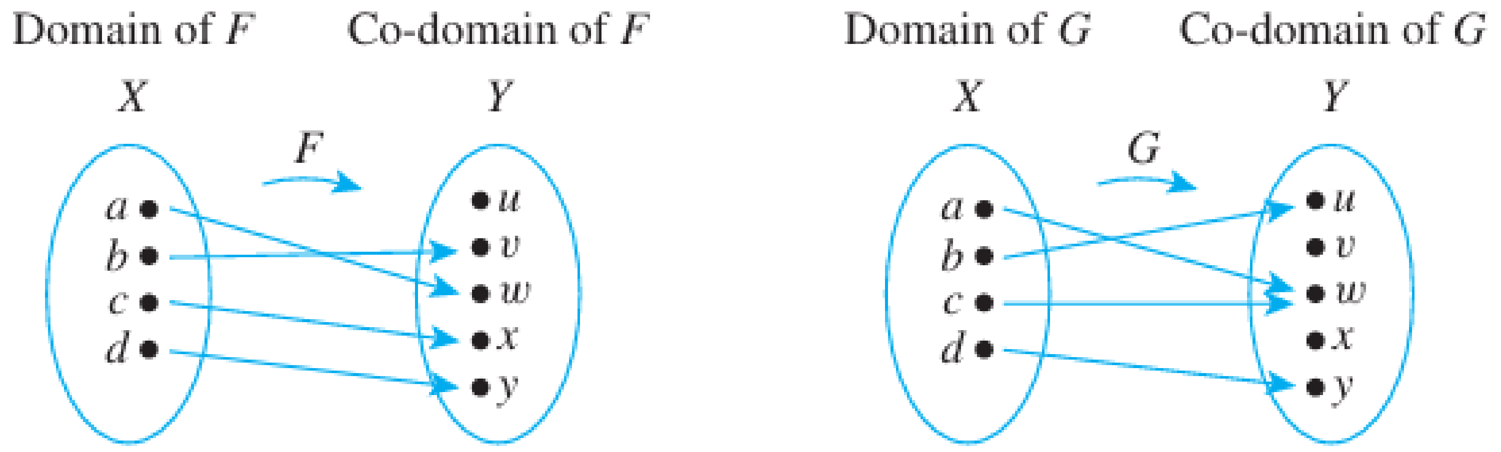


Figure 7.2.2

F is one-to-one but G is not. F is one-to-one because no two different elements of X are sent by F to the same element of Y. G is not one-to-one because the elements a and c are both sent by G to the same element of Y: $G(a) = G(c) = w$ but $a \neq c$.

Example: One-to-One Functions on Finite Sets

Let $X = \{1, 2, 3\}$ and $Y = \{a, b, c, d\}$. Define $H: X \to Y$ as follows: $H(1) = c$, $H(2) = a$, and $H(3) = d$. Define $K: X \to Y$ as follows: $K(1) = d$, $K(2) = b$, and $K(3) = d$. Is either H or K one-to-one?

H is one-to-one but K is not. H is one-to-one because each of the three elements of the domain of H is sent by H to a different element of the co-domain: $H(1) \neq H(2)$, $H(1) \neq H(3)$, and $H(2) \neq H(3)$. K, however, is not one-to-one because $K(1) = K(3) = d$ but $1 \neq 3$. ■

Example: One-to-One Functions on Infinite Sets

Determine whether the function $f(x) = x^2$ from the set of integers to the set of integers is one-to-one.

Solution: The function $f(x) = x^2$ is not one-to-one because, for instance, $f(1) = f(-1) = 1$, but $1 \neq -1$.

นิยามของฟังก์ชันทั่วถึง

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

f เป็น "ฟังก์ชันทั่วถึง (Onto หรือ Surjection)" ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ ค่าของ b ที่เป็นสมาชิกภายในเซต B จะมีแล้ว a ที่เป็นสมาชิกภายในเซต A ที่ทำให้ $f(a)=b$ เขียนแทนฟังก์ชันทั่วถึงด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{} B$

A function f from A to B is called *onto*, or a *surjection*, if and only if for every element $b \in B$ there is an element $a \in A$ with $f(a) = b$. A function f is called *surjective* if it is onto.

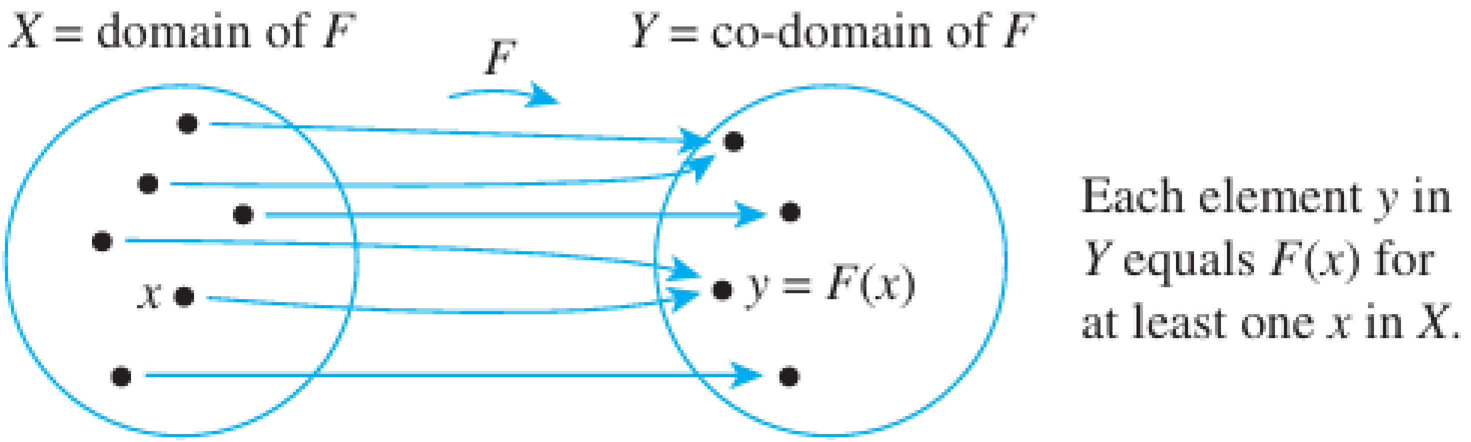


Figure 7.2.3(a) **A Function That Is Onto**

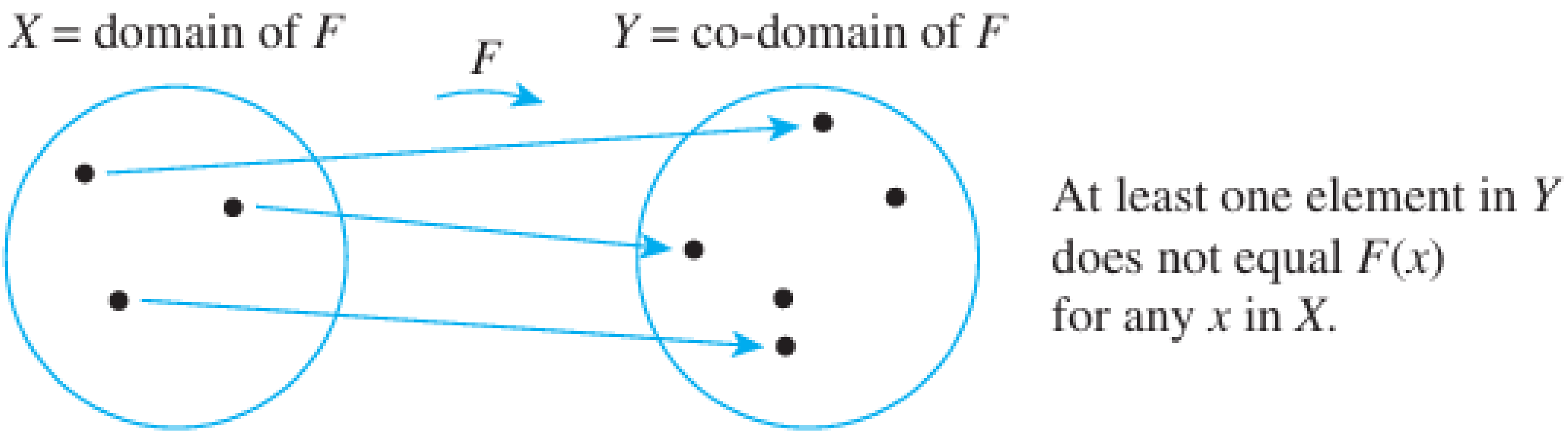
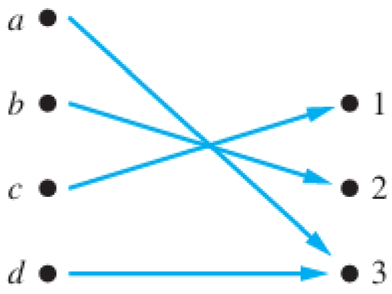


Figure 7.2.3(b) **A Function That Is Not Onto**

Example: Onto Functions on Finite Sets

Let f be the function from $\{a, b, c, d\}$ to $\{1, 2, 3\}$ defined by $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, and $f(d) = 3$. Is f an onto function?

Solution: Because all three elements of the codomain are images of elements in the domain, we see that f is onto. This is illustrated in Figure 4. Note that if the codomain were $\{1, 2, 3, 4\}$, then f would not be onto.



Example: Onto Functions on Finite Sets

Do either of the arrow diagrams in Figure 7.2.4 define onto functions?

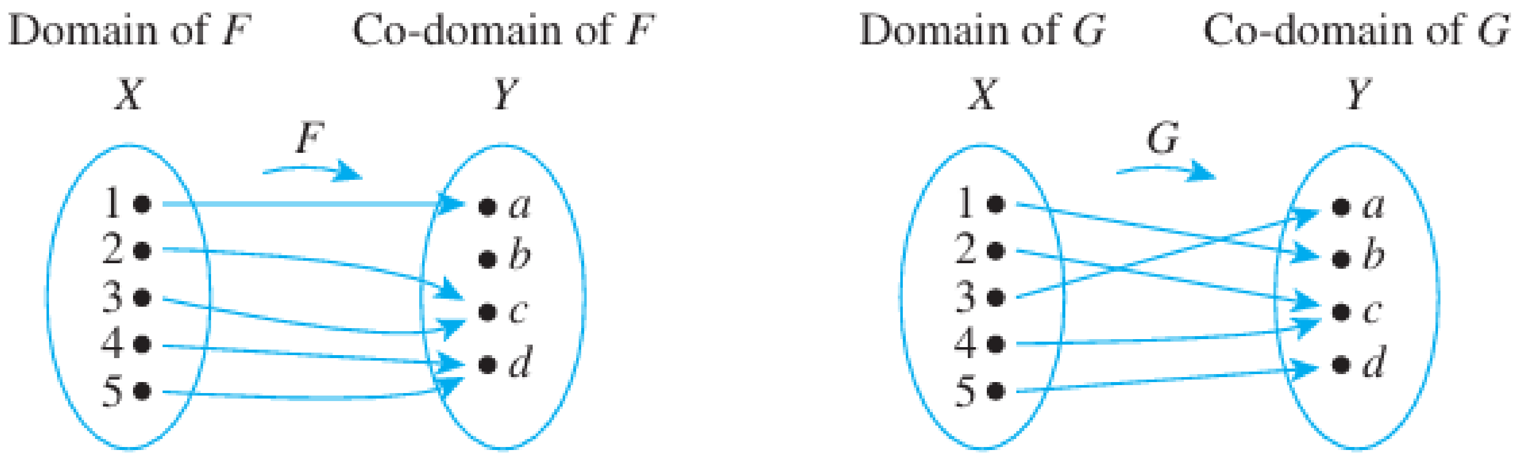


Figure 7.2.4

F is not onto because $b \neq F(x)$ for any x in X. G is onto because each element of Y equals $G(x)$ for some x in X: $a = G(3)$, $b = G(1)$, $c = G(2) = G(4)$, and $d = G(5)$.

Example: Onto Functions on Finite Sets

Let $X = \{1, 2, 3, 4\}$ and $Y = \{a, b, c\}$. Define $H: X \to Y$ as follows: $H(1) = c$, $H(2) = a$, $H(3) = c$, $H(4) = b$. Define $K: X \to Y$ as follows: $K(1) = c$, $K(2) = b$, $K(3) = b$, and $K(4) = c$. Is either H or K onto?

H is onto but K is not. H is onto because each of the three elements of the co-domain of H is the image of some element of the domain of H: $a = H(2)$, $b = H(4)$, and $c = H(1) = H(3)$. K, however, is not onto because $a \neq K(x)$ for any x in $\{1, 2, 3, 4\}$.

Example: Onto Functions on Infinite Sets

Is the function $f(x) = x^2$ from the set of integers to the set of integers onto?

Solution: The function f is not onto because there is no integer x with $x^2 = -1$, for instance. ◀

Example: Onto Functions on Infinite Sets

Is the function $f(x) = x + 1$ from the set of integers to the set of integers onto?

Solution: This function is onto, because for every integer y there is an integer x such that $f(x) = y$. To see this, note that $f(x) = y$ if and only if $x + 1 = y$, which holds if and only if $x = y - 1$. ◀

Relations between Exponential and Logarithmic Functions

Laws of Exponents

If b and c are any positive real numbers and u and v are any real numbers, the following laws of exponents hold true:

$$b^u b^v = b^{u+v} \tag{7.2.1}$$

$$(b^u)^v = b^{uv} \tag{7.2.2}$$

$$\frac{b^u}{b^v} = b^{u-v} \tag{7.2.3}$$

$$(bc)^u = b^u c^u \tag{7.2.4}$$

Theorem 7.2.1 Properties of Logarithms

For any positive real numbers b, c and x with $b \neq 1$ and $c \neq 1$:

a. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

b. $\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

c. $\log_b(x^a) = a\log_b x$

d. $\log_c x = \dfrac{\log_b x}{\log_b c}$

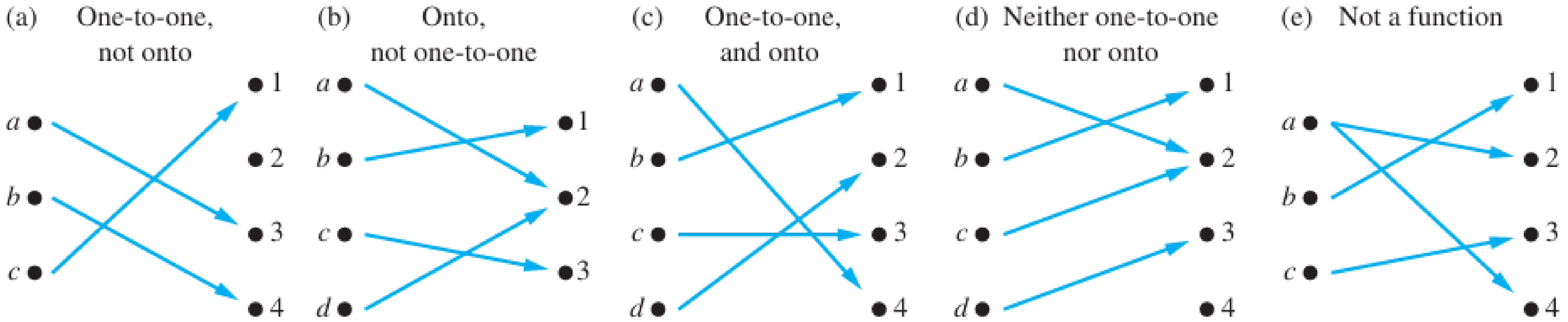
นิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

กำหนดให้ $f : A \to B$ แล้ว

f เป็น "ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (One-to-One Corresponding หรือ Bijection)" ก็ต่อเมื่อ f เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เขียนแทนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงด้วย

$$f : A \xrightarrow[onto]{1:1} B$$

The function f is a *one-to-one correspondence*, or a *bijection*, if it is both one-to-one and onto. We also say that such a function is *bijective*.


(a) One-to-one, not onto
(b) Onto, not one-to-one
(c) One-to-one, and onto
(d) Neither one-to-one nor onto
(e) Not a function
a
b
c
d
1
2
3
4

Example

Let f be the function from $\{a, b, c, d\}$ to $\{1, 2, 3, 4\}$ with $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, and $f(d) = 3$. Is f a bijection?

Solution: The function f is one-to-one and onto. It is one-to-one because no two values in the domain are assigned the same function value. It is onto because all four elements of the codomain are images of elements in the domain. Hence, f is a bijection. ◀

Example

Let A be a set. The *identity function* on A is the function $\iota_A : A \to A$, where

$$\iota_A(x) = x$$

for all $x \in A$. In other words, the identity function ι_A is the function that assigns each element to itself. The function ι_A is one-to-one and onto, so it is a bijection. (Note that ι is the Greek letter iota.) ◀

นิยามของฟังก์ชันผกผัน

กำหนดให้ $f : A \xrightarrow[onto]{1:1} B$ แล้ว

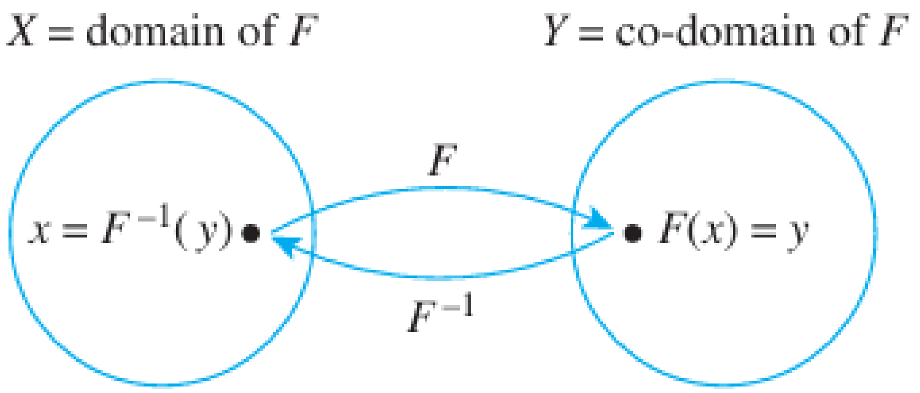
“ฟังก์ชันผกผันของ f (Inverse function of f)” เป็นการกำหนดค่าที่แน่นอนหนึ่งค่าซึ่งสมาชิกภายในเซต A ให้กับสมาชิกแต่ละตัวภายในเซต B โดยจะเขียนแทนฟังก์ชันผกผันของ f ด้วย $f^{=1}$ และ $f^{=1}(b) = a$ เมื่อ $f(a) = b$

Let f be a one-to-one correspondence from the set A to the set B. The *inverse function* of f is the function that assigns to an element b belonging to B the unique element a in A such that $f(a) = b$. The inverse function of f is denoted by f^{-1}. Hence, $f^{-1}(b) = a$ when $f(a) = b$.

นิยามของฟังก์ชันผกผัน

กำหนดให้ $f : A \xrightarrow[onto]{1:1} B$ แล้ว

“ฟังก์ชันผกผันของ f (Inverse function of f)” เป็นการกำหนดค่าที่แน่นอนหนึ่งค่าซึ่งสมาชิกภายในเซต A ให้กับสมาชิกแต่ละตัวภายในเซต B โดยจะเขียนแทนฟังก์ชันผกผันของ f ด้วย f^{-1} และ $f^{-1}(b) = a$ เมื่อ $f(a) = b$



Example

Let f be the function from $\{a, b, c\}$ to $\{1, 2, 3\}$ such that $f(a) = 2$, $f(b) = 3$, and $f(c) = 1$. Is f invertible, and if it is, what is its inverse?

Solution: The function f is invertible because it is a one-to-one correspondence. The inverse function f^{-1} reverses the correspondence given by f, so $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$, and $f^{-1}(3) = b$. ◀

Example

Let f be the function from **R** to **R** with $f(x) = x^2$. Is f invertible?

Solution: Because $f(-2) = f(2) = 4$, f is not one-to-one. If an inverse function were defined, it would have to assign two elements to 4. Hence, f is not invertible. (Note we can also show that f is not invertible because it is not onto.) ◀

นิยามของฟังก์ชันประกอบ

กำหนดให้ $g: A \to B$ และ $f: B \to C$ แล้ว
"ฟังก์ชันประกอบของ f และ g (The Composition of function f and g)" เขียนแทนด้วย
$f \circ g(x)$ โดยที่ $f \circ g(x) = f(g(x))$

Let g be a function from the set A to the set B and let f be a function from the set B to the set C. The *composition* of the functions f and g, denoted for all $a \in A$ by $f \circ g$, is defined by

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

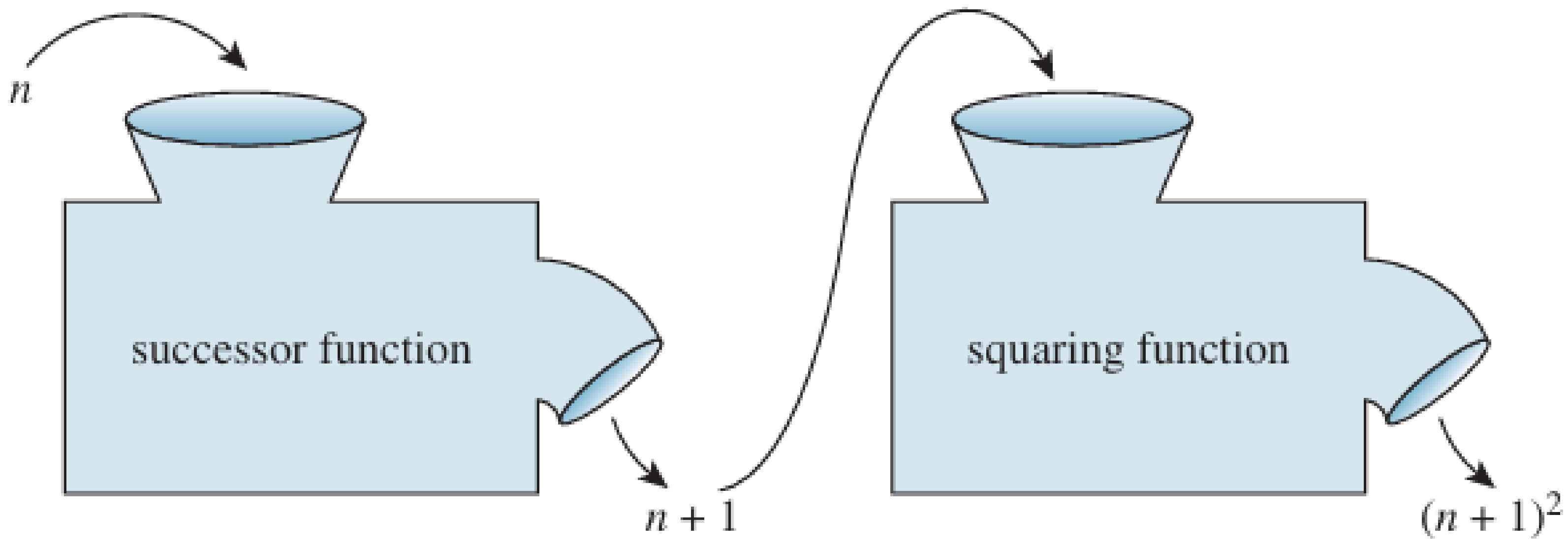
Example

Let g be the function from the set $\{a, b, c\}$ to itself such that $g(a) = b$, $g(b) = c$, and $g(c) = a$. Let f be the function from the set $\{a, b, c\}$ to the set $\{1, 2, 3\}$ such that $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, and $f(c) = 1$. What is the composition of f and g, and what is the composition of g and f?

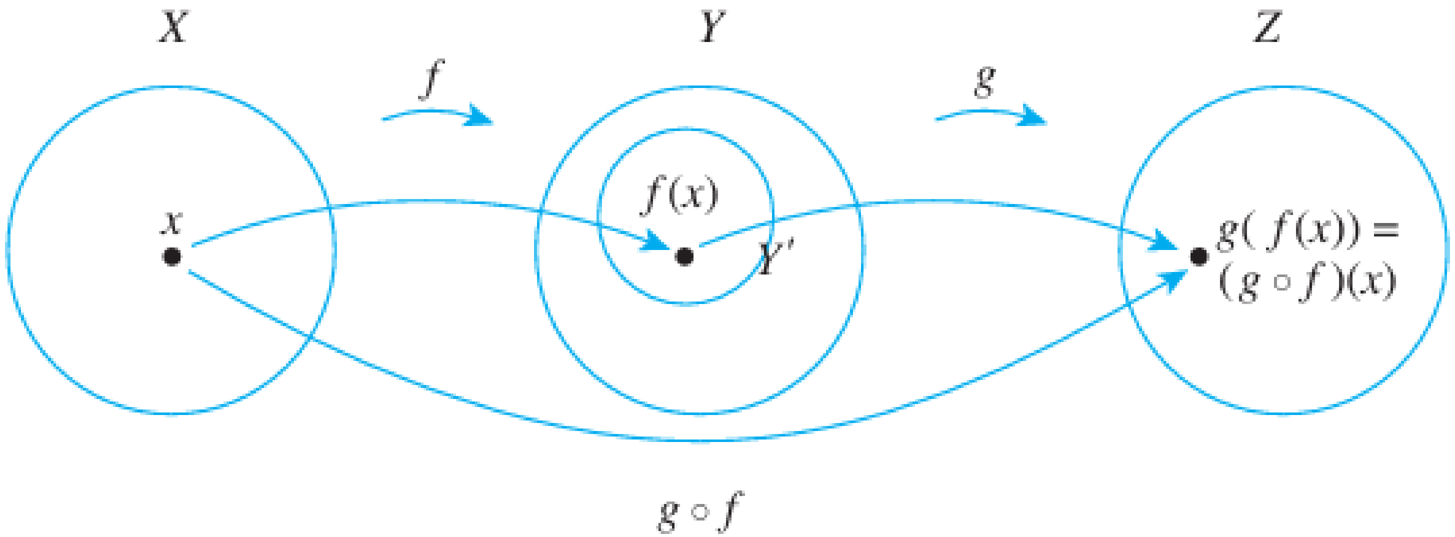
Solution: The composition $f \circ g$ is defined by $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$, and $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.

Note that $g \circ f$ is not defined, because the range of f is not a subset of the domain of g. ◀

ฟังก์ชันประกอบ



ฟังก์ชันประกอบ



Example: Composition of Functions on Finite Sets

Let f and g be the functions from the set of integers to the set of integers defined by $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = 3x + 2$. What is the composition of f and g? What is the composition of g and f?

Solution: Both the compositions $f \circ g$ and $g \circ f$ are defined. Moreover,

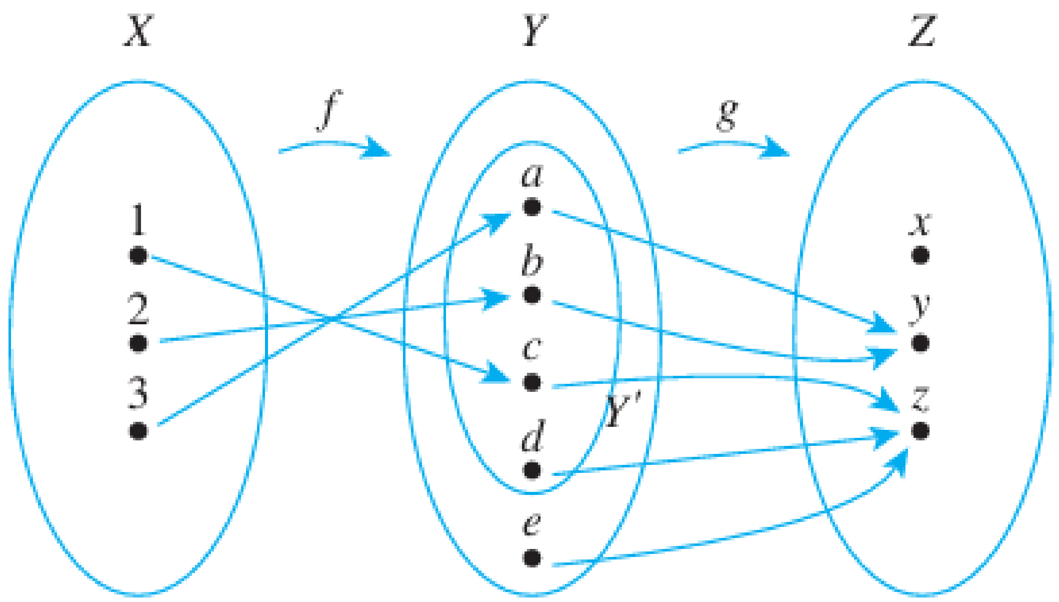
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

and

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11.$$

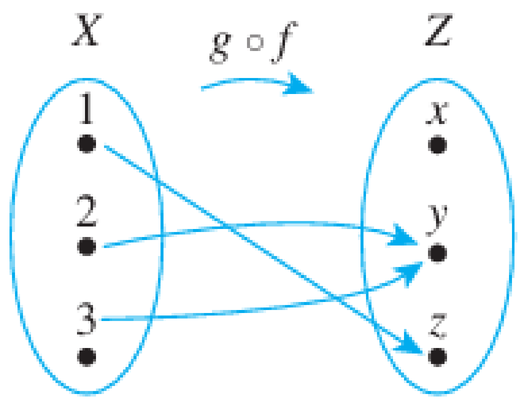
Example: Composition of Functions on Finite Sets

Let $X = \{1, 2, 3\}$, $Y' = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, and $Z = \{x, y, z\}$. Define functions $f: X \to Y'$ and $g: Y \to Z$ by the arrow diagrams below.



Draw the arrow diagram for $g \circ f$. What is the range of $g \circ f$?

Example: Composition of Functions on Finite Sets

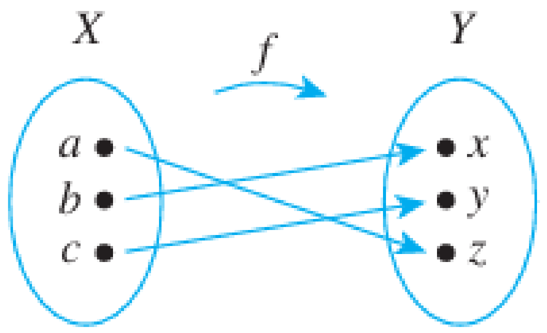


The range of $g \circ f$ is $\{y, z\}$.

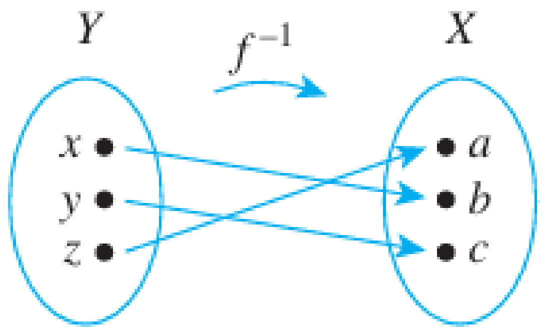
$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$$

Example: Composing a Function with Its Inverse

Let $X = \{a, b, c\}$ and $Y = \{x, y, z\}$. Define $f\colon X \to Y$ by the following arrow diagram.



Then f is one-to-one and onto. Thus f^{-1} exists and is found by tracing the arrows backwards, as shown below.



Example: Composing a Function with Its Inverse

Now $f^{-1} \circ f$ is found by following the arrows from X to Y by f and back to X by f^{-1}. If you do this, you will see that

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(z) = a$$

$$(f^{-1} \circ f)(b) = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(x) = b$$

and

$$(f^{-1} \circ f)(c) = f^{-1}(f(c)) = f^{-1}(y) = c.$$

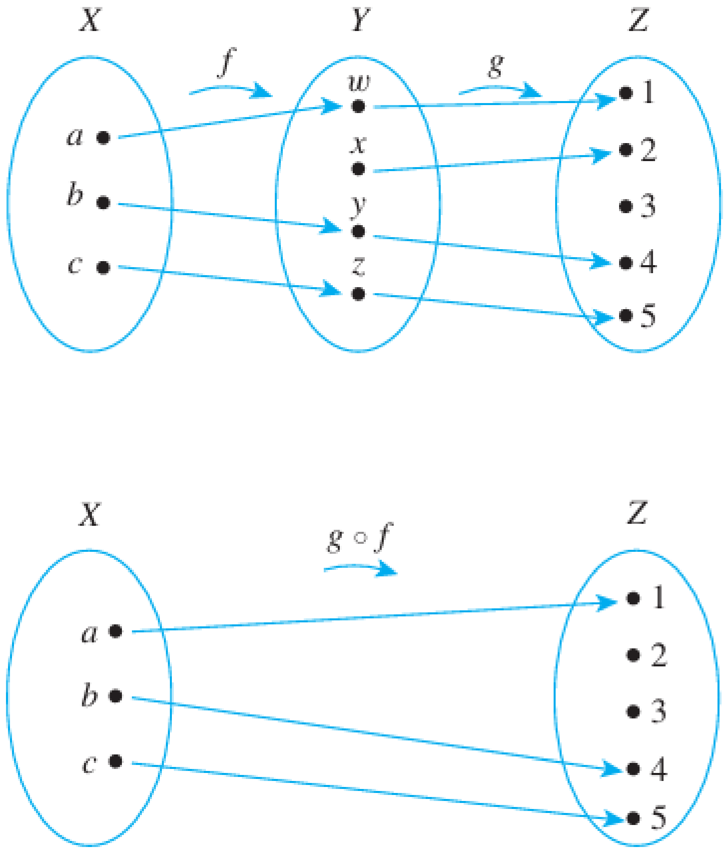
Thus the composition of f and f^{-1} sends each element to itself. So by definition of the identity function,

$$f^{-1} \circ f = I_X.$$

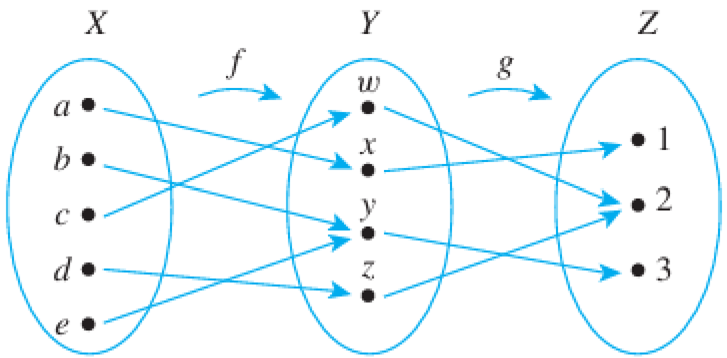
In a similar way, you can see that

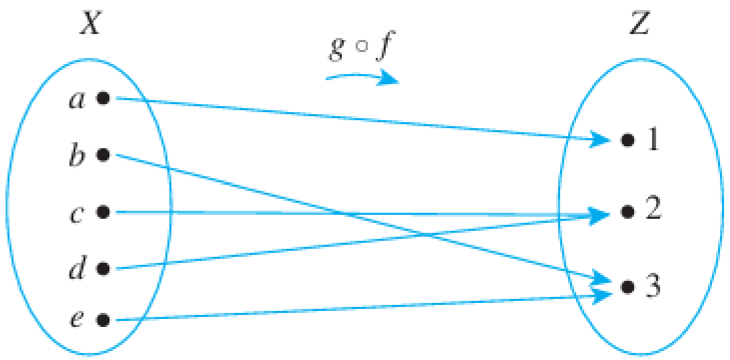
$$f \circ f^{-1} = I_Y. \qquad \blacksquare$$

Composition of One-to-One Functions



Composition of Onto Functions





One-to-One Functions on Infinite Sets

Now suppose f is a function defined on an infinite set X. By definition, f is one-to-one if, and only if, the following universal statement is true:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{if } f(x_1) = f(x_2) \text{ then } x_1 = x_2.$$

Thus, to prove f is one-to-one, you will generally use the method of direct proof:

suppose x_1 and x_2 are elements of X such that $f(x_1) = f(x_2)$

and **show** that $x_1 = x_2$.

To show that f is *not* one-to-one, you will ordinarily

find elements x_1 and x_2 in X so that $f(x_1) = f(x_2)$ but $x_1 \neq x_2$.

Example: Proving or Disproving That Functions Are One-to-One

Define $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ and $g\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ by the rules

$$f(x) = 4x - 1 \quad \text{for all} \quad x \in \mathbf{R}$$

Proof:

Suppose x_1 and x_2 are real numbers such that $f(x_1) = f(x_2)$. *[We must show that $x_1 = x_2$.]* By definition of f,

$$4x_1 - 1 = 4x_2 - 1.$$

Adding 1 to both sides gives

$$4x_1 = 4x_2,$$

and dividing both sides by 4 gives

$$x_1 = x_2,$$

which is what was to be shown.

Example: Proving or Disproving That Functions Are One-to-One

$g(n) = n^2 \quad \text{for all} \quad n \in \mathbf{Z}.$

Counterexample:

Let $n_1 = 2$ and $n_2 = -2$. Then by definition of g,

$$g(n_1) = g(2) = 2^2 = 4 \quad \text{and also}$$
$$g(n_2) = g(-2) = (-2)^2 = 4.$$

Hence $\qquad g(n_1) = g(n_2) \quad \text{but} \quad n_1 \neq n_2,$

and so g is not one-to-one.

Onto Functions on Infinite Sets

Now suppose F is a function from a set X to a set Y, and suppose Y is infinite. By definition, F is onto if, and only if, the following universal statement is true:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ such that } F(x) = y.$$

Thus to prove F is onto, you will ordinarily use the method of generalizing from the generic particular:

suppose that y is any element of Y

and **show** that there is an element X of X with $F(x) = y$.

To prove F is *not* onto, you will usually

find an element y of Y such that $y \neq F(x)$ for *any* x in X.

Example: Proving or Disproving That Functions Are Onto

$f(x) = 4x - 1 \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}$

Proof:

Let $y \in \mathbf{R}$. *[We must show that $\exists x$ in $\mathbf{R}$ such that $f(x) = y$.]* Let $x = (y+1)/4$. Then x is a real number since sums and quotients (other than by 0) of real numbers are real numbers. It follows that

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y+1}{4}\right) && \text{by substitution} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{y+1}{4}\right) - 1 && \text{by definition of } f \\ &= (y+1) - 1 = y && \text{by basic algebra.} \end{aligned}$$

Example: Proving or Disproving That Functions Are Onto

$h(n) = 4n - 1 \quad$ for all $n \in \mathbf{Z}$.

Counterexample:

The co-domain of h is $\mathbf{Z}$ and $0 \in \mathbf{Z}$. But $h(n) \neq 0$ for any integer n. For if $h(n) = 0$, then

$$4n - 1 = 0 \qquad \text{by definition of } h$$

which implies that

$$4n = 1 \qquad \text{by adding 1 to both sides}$$

and so

$$n = \frac{1}{4} \qquad \text{by dividing both sides by 4.}$$

But $1/4$ is not an integer. Hence there is no integer n for which $f(n) = 0$, and thus f is not onto.