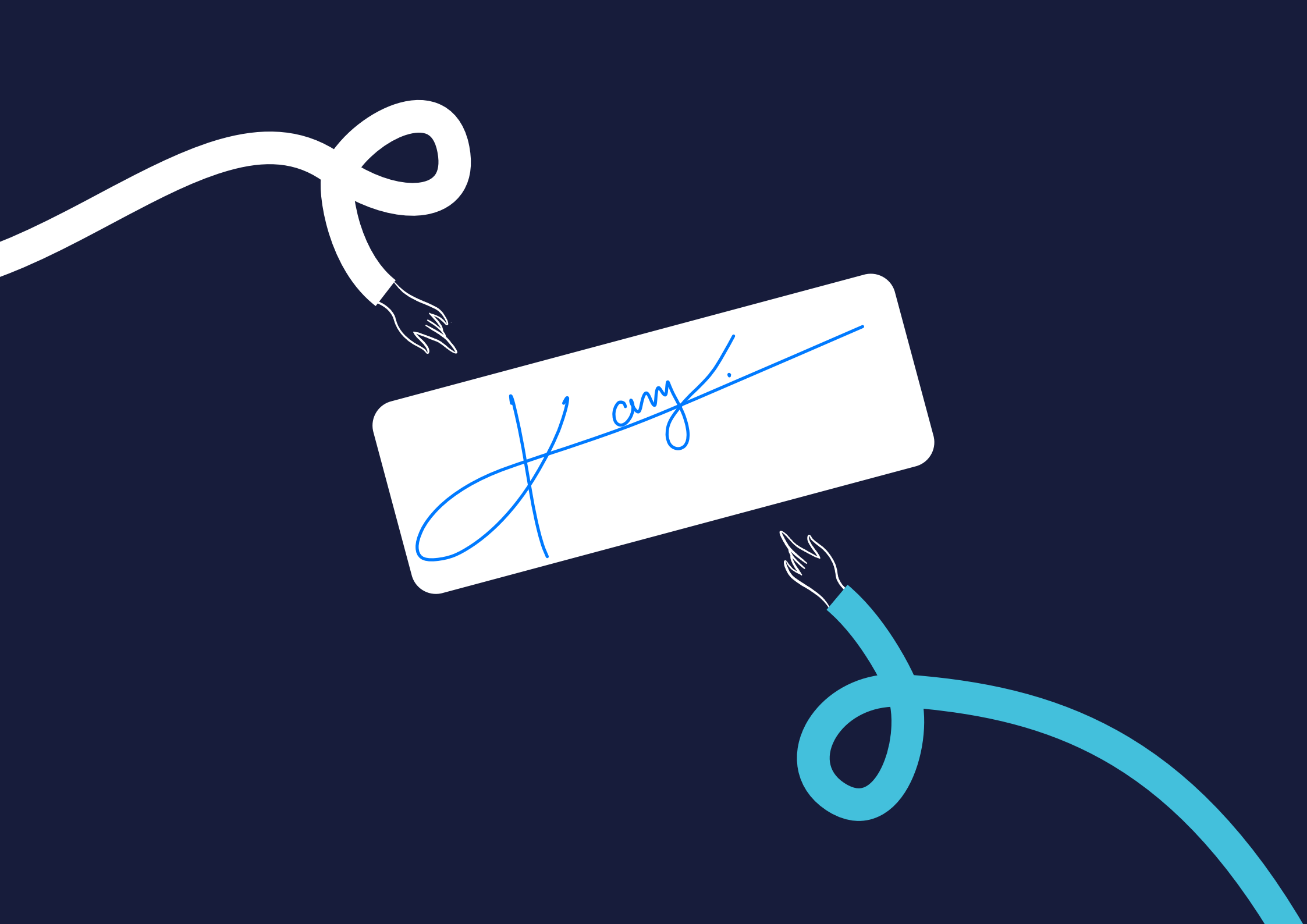


Midterm

① Logic

ประพจน์
ข้อความที่เป็นจริงหรือเท็จ เช่น "2 เป็นเลขคู่"
ข้อความที่ไม่ใช่ประพจน์ เช่น "ไปไหนมา"
หรือประโยค พวกคำถาม, คำสั่ง, ขอร้อง, อ้อนวอน, ห้าม, อุทาน

Conditional Statements

1. Negation การปฏิเสธ
การกลับค่าความจริงของประพจน์
Ex. p : ฝนตก (True) — จากที่
¬p : ฝนไม่ตก (False) — เป็น

2. Contrapositive การปฏิเสธและสลับ
การกลับค่าความจริงของประพจน์ และสลับที่
Ex. $p \to q$ — จากที่
$\neg q \to \neg p$ — เป็น
ถ้าฝนตก (p), ถนนเปียก (q) — จากที่
ถ้าถนนไม่เปียก (¬q), ฝนไม่ตก (¬p) — เป็น

3. Converse การกลับคำสั่ง
การสลับตำแหน่งของเงื่อนไขในประโยค
Ex. $p \to q$ — จากที่
$q \to p$ — เป็น
ถ้าฝนตก (p), ถนนเปียก (q) — จากที่
ถ้าถนนเปียก (q), ฝนตก (p) — เป็น

4. Inverse การปฏิเสธเงื่อนไข
การปฏิเสธทั้งสองข้างของประโยค
Ex. $p \to q$ — จากที่
$\neg p \to \neg q$ — เป็น
ถ้าฝนตก (p), ถนนเปียก (q) — จากที่
ถ้าฝนไม่ตก (¬p), ถนนไม่เปียก (¬q) — เป็น

Logical Operators

p	¬p
T	F
F	T

¬p — ไม่ — ถ้า p คือ "ฝนตก" | ¬p คือ "ฝนไม่ตก"
p ∧ q — และ — "ฝนตกและลมแรง"
p ∨ q — หรือ — "ฝนตก หรือ หิมะตก"
p → q — ถ้า...แล้ว — "ถ้าฝนตก แล้วถนนเปียก"
p ↔ q — ก็ต่อเมื่อ — "เขาสอบผ่าน ก็ต่อเมื่อ เขาเรียน"

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p → q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Rule of Inference

1. Modus Ponens กฎการยืนยัน
เป็นรูปแบบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง
Ex. $p \to q$, p
∴ q **Valid**
ถ้าฝนตก (p) ⟶ ถนนเปียก (q)
ฝนตก (p)
ดังนั้น ถนนเปียก (q)

2. Modus Tollens กฎการปฏิเสธ
เป็นรูปแบบการให้เหตุผลที่ถูกต้อง
Ex. $p \to q$, ¬q
∴ ¬p **Valid**
ถ้าฝนตก (p) ⟶ ถนนเปียก (q)
ถนนไม่เปียก (¬q)
ดังนั้น ฝนไม่ได้ตก (¬p)

3. Converse Error การสลับแล้วผิด
เป็นรูปแบบการให้เหตุผลที่ไม่ถูกต้อง
Ex. $p \to q$, q
∴ p **Invalid**
ถ้าฝนตก (p) ⟶ ถนนเปียก (q)
ถนนเปียก (q)
ดังนั้น ฝนตก (p)

4. Inverse Error การปฏิเสธแล้วผิด
เป็นรูปแบบการให้เหตุผลที่ไม่ถูกต้อง
Ex. $p \to q$, ¬p
∴ ¬q **Invalid**
ถ้าฝนตก (p) ⟶ ถนนเปียก (q)
ฝนไม่ได้ตก (¬p)
ดังนั้น ถนนไม่เปียก (¬q)

Propositional Equivalences

การสมมูลกันของประพจน์ คือ ประพจน์ 2 ประโยค ที่มีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี (สัญลักษณ์ คือ ≡)

Ex.

p	q	p ∧ q	¬(p ∧ q)	¬p	¬q	¬p ∨ ¬q
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

∴ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
They are logically equivalent

TABLE 6 Logical Equivalences. (สำคัญ)

Equivalence	Name
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws

Tautology and Contradiction

Tautology : ประพจน์เป็นจริงเสมอ หรือก็คือ True ทุกกรณี
Contradiction : ประพจน์เป็นเท็จเสมอ หรือก็คือ False ทุกกรณี

Ex.

p	¬p	p ∨ ¬p
T	F	T
F	T	T

p	¬p	p ∧ ¬p
T	F	F
F	T	F

Predicates and Quantified statements

Predicate : ประโยคที่มีสัญลักษณ์แทนตัวแปรและยังไม่รู้ค่าความจริงจนกว่าจะระบุตัวแปร (เรียกว่า ภาคแสดง)
Ex. P(x) : "x เป็นเลขคู่"
Domain = Z^+
P(2) = "2 เป็นเลขคู่" ⟶ True
P(3) = "3 เป็นเลขคู่" ⟶ False

Quantifier : สัญลักษณ์ที่ใช้ บ่งบอกปริมาณ ของค่าตัวแปรที่ทำให้ Predicate เป็นจริง
2 แบบที่ใช้บ่อย
- Universal ∀ ทุกตัว
- Existential ∃ บางตัว

Ex. P(x), "$x^2 \geq 0$"
$\forall x \in R, x^2 \geq 0$ True เพราะกำลังสองของจำนวนจริงไม่ติดลบ

Ex. P(x), "$x^2 = 4$"
$\exists x \in Z, x^2 \geq 4$ True เพราะ x = 2 หรือ −2

Valid and Invalid

Valid : รูปแบบของการให้เหตุผลที่ ถ้าทุก premise (สมมติฐาน) เป็นจริง แล้ว conclusion (ข้อสรุป) จะต้องเป็นจริงเสมอ
Invalid : รูปแบบของการให้เหตุผลที่ แม้ว่า premise ทุกตัวเป็นจริง แต่ conclusion จะต้องเป็นจริงเสมอ

Ex.1 $p \to q$
p
∴ q
Valid

p	q	p → q (premise)	p (premise)	q (conclusion)	Critical Row
T	T	T	T	T	Yes
T	F	F	T	F	No
F	T	T	F	T	No
F	F	T	F	F	No

Ex.2 $p \to q$
q
∴ p
Invalid

p	q	p → q (premise)	q (premise)	p (conclusion)	Critical Row
T	T	T	T	T	Yes
T	F	F	F	T	No
F	T	T	T	F	Yes
F	F	T	F	F	No

② Set

คือ การรวมรวมกลุ่มของสมาชิก ที่มี ลักษณะเหมือนกัน หรือมีคุณสมบัติเดียวกัน

คุณสมบัติของ Set
- กำหนดชัดเจน : สามารถบอกได้ว่าสมาชิกของเซตคืออะไร และไม่มีข้อมสงสัย
- ไม่มีลำดับ : {1,2,3} กับ {3,2,1} ถือว่าเป็นเซตเดียวกัน
- ไม่มีสมาชิกซ้ำ : {1,1,2,3} จะถือว่าเป็น {1,2,3}

สัญลักษณ์ใช้แสดงความเป็นสมาชิกของเซต
$a \in A$: a เป็นสมาชิกของ A
$a \notin A$: a ไม่เป็นสมาชิกของ A

N	แทน	จำนวนนับ (Natural Numbers)	{0,1,2,3,⋯}
Z, I	แทน	จำนวนเต็ม (Integers)	{⋯,−3,−2,−1,0,1,2,3,⋯}
$\mathbf{Z}^+, \mathbf{I}^+$	แทน	จำนวนเต็มบวก (Positive Integers)	{1,2,3,⋯}
$\mathbf{Z}^-, \mathbf{I}^-$	แทน	จำนวนเต็มลบ (Negative Integers)	{⋯,−3,−2,−1}
Q	แทน	จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers)	
$\overline{\mathbf{Q}}$	แทน	จำนวนตรรกยะ (Rational Numbers)	
R	แทน	จำนวนจริง (Real Numbers)	
$\mathbf{R}^+$	แทน	จำนวนจริงบวก (Positive Real Numbers)	
$\mathbf{R}^-$	แทน	จำนวนจริงลบ (Negative Real Numbers)	
C	แทน	จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)	

ควรจำ

การแสดง Set
1. การแจกแจงสมาชิก สมาชิกทั้งหมดจะอยู่ภายใน {} และใช้ (,) คั่นระหว่าง สมาชิก
Ex. {a,e,i,o,u} Set ของสระ Eng
{1,3,5,7,9} Set จำนวนเต็มคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 10
{2,4,6,8,10,...} Set จำนวนนับคู่ในโดเมน N
2. การระบุเงื่อนไข แสดง Set โดยการระบุเงื่อนไข
Ex. {x | x ∈ N และ x ≤ 10} Set ของจำนวนเต็มที่มีค่าไม่เกิน 10

ประเภทของ Set
- Set ว่าง : ไม่มีสมาชิกใน Set
Ex. ∅, {}
- Set เดี่ยว : มีสมาชิกเดียว
Ex. {1}, {a}
- Set ย่อย : สมาชิกทั้งหมดของ Set ใดๆ เป็นสมาชิกของ Set ใดๆ ด้วย
Ex. ถ้า A = {1,2} และ B = {1,2,3,4,5} ⟶ $A \subseteq B$
ถ้า A = {1,2} และ B = {3,4,5} ⟶ $A \nsubseteq B$
- Set ที่ไม่เป็น Set ย่อย : สมาชิกทั้งหมดของ Set ใดๆ เป็นสมาชิกของ Set ใดๆ และต้องไม่เท่ากับ Set ใดๆ
Ex. ถ้า A = {1,2} และ B = {1,2,3,4,5} ⟶ $A \subset B$
ถ้า A = {1,2} และ B = {1,2} ⟶ $A \not\subset B$

การดำเนินการของ Set
- Union : รวมสมาชิกของ 2 Set
Ex. ถ้า A = {1,2} และ B = {3,4} ⟶ A ∪ B = {1,2,3,4}
- Intersection : หาสมาชิกใน Set ทั้งสอง
Ex. ถ้า A = {1,2} และ B = {2,3} ⟶ A ∩ B = {2}
- Difference : หาสมาชิกใน Set แรก ที่ไม่อยู่ใน Set สอง
Ex. ถ้า A = {1,2,3} และ B = {2,3,4} ⟶ A − B = {1}
- Complement : หาสมาชิกที่ไม่อยู่ใน Set
Ex. ถ้า A = {1,2} และจักรวาล U = {1,2,3,4} ⟶ A′ = {3,4}

การคูณกันของ Set
Ex. A = {1,2}, B = {x,y,z}
A × B = {(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2,z)}

การสมมูลกันทางเซต (Set Equivalences)

การสมมูลกัน (Equivalence)	ชื่อ (Name)
$A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$	Identity Laws
$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Domination Laws
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotent Laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Double Negation Law
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Commutative Laws
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Associative Laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive Laws
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's Laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption Laws
$A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complement Laws

MATH

Function

คือ ความสัมพันธ์ระหว่าง สองเซต ที่แต่ละสมาชิกในเซตแรก (โดเมน) จะถูกจับคู่กับสมาชิก เพียงหนึ่งเดียว ในเซตที่สอง (โคโดเมน)

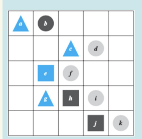
สัญลักษณ์ทั่วไป
$f : A \to B$ (A = โดเมน, B = โคโดเมน) $f(x) = ?$ ⟶ ค่าผลลัพธ์จากการแทนค่า x ในฟังก์ชัน f

Ex. ฟังก์ชัน f(x) = 2x + 1 จากเซต A = {1,2,3} ไปยังเซต B = R
เมื่อแทน x = 1, f(1) = 2(1) + 1 = 3
x = 2, f(2) = 2(2) + 1 = 5
x = 3, f(3) = 2(3) + 1 = 7

ประเภทของ Function
- One-to-One : สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนจะจับคู่กับโคโดเมนโดยไม่ซ้ำกัน
Ex. f(x) = 2x จาก {1,2,3} ⟶ {2,4,6}
1→2, 2→4, 3→6
ไม่ซ้ำกันเลย
- Onto : ทุกสมาชิกในโคโดเมน ต้องมีสมาชิกในโดเมนจับคู่ด้วย
Ex. $f(x) = x^3$ จาก R → R
ทุกค่าจำนวนจริงในโคโดเมนสามารถเกิดจากการยกกำลังสามของค่าโดเมนได้เสมอ
- Bijective : ทั้ง One-to-One และ Onto พร้อมกัน
Ex. f(x) = x + 1 จาก Z → Z
- Inverse : ถ้า Function เป็น Bijective จะมีฟังก์ชัน Inverse ย้อนกลับได้
Ex. f(x) = 2x + 1
ฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$
- Composite : นำผลลัพธ์ของฟังก์ชันหนึ่ง ไปแทนในอีกฟังก์ชันหนึ่ง
Ex. f(x) = x + 1, g(x) = 2x
$(f \circ g)(x) = f(x) = 2x + 1$

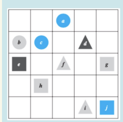
ตรวจสอบว่า Onto หรือ One-to-one ไหม?
- One-to-One $f(x_1) = f(x_2)$ ถ้าทำได้ ✓
Ex. f(x) = 2x + 1
ให้ $2x_1 + 1 = 2x_2 + 2 \to x_1 = x_2$
- Onto f(x) = y แก้สมการหาค่า x ถ้าทำได้ ✓
Ex. f(x) = 2x + 1, f : R → R
ให้ y ∈ R → แก้ $2x_1 + 1 = y \to x = \frac{y-1}{2}$

Determine which of the following statements are true and which are false.
Let Above(x, y) mean that x is above y (but possibly in a different column).
จงพิจารณาว่า ประพจน์ต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ
กำหนดให้ Above(x, y) คือ x อยู่ด้านบน y (แต่อาจจะอยู่คนละคอลัมน์ได้)



$\exists y$ such that Square(y) ∨ Above(y, d). True
y บางตัว — ให้ y คือสี่เหลี่ยม — หรือ — y อยู่บน d

Determine which of the following statements are true and which are false.
จงพิจารณาว่า ประพจน์ต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ



∀ circles x and ∀ triangles y, x is above y.
∀วงกลม x และ ∀สามเหลี่ยม y, x อยู่เหนือ y False (ทั้งหมด)

∃ a triangle x and ∃ a square y such that x is above y and x and y have same colors.
∃สามเหลี่ยม x และ ∃สี่เหลี่ยม y ที่ x อยู่เหนือ y และ x และ y มีสีเดียวกัน True (บางตัว)