Introduction to Proofs

Waranyu Wongseree

Chitralada Technology Institute

Methods of Proving Theorems

- Direct Proofs
- Proof by Contraposition
- Proofs by Contradiction
- Mistakes in Proofs

นิยามของจำนวนเต็มคู่ (even integer)

จำนวนเต็ม n เป็น **จำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ** n เท่ากับสองเท่าของจำนวนเต็มใด ๆ

n เป็นจำนวนเต็มคู่ $\Leftrightarrow \exists$ จำนวนเต็ม k ที่ $n = 2k$

จากคำนิยามจะสรุปได้ว่า

- หากทราบว่าจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งเป็นจำนวนเต็มคู่ ย่อมอนุมาน (Deduce) ได้ว่ามีรูปเป็น

$$2 \times (\text{จำนวนเต็มใดๆ})$$

- ในทางกลับกัน หากทราบว่าจำนวนเต็มใดมีค่าเท่ากับ 2 × (จำนวนเต็มใดๆ) ก็สามารถสรุปได้ว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนเต็มคู่

Know a particular integer n is even.	$\xrightarrow{\text{deduce}}$	n has the form $2 \cdot$ (some integer).
Know n has the form $2 \cdot$ (some integer).	$\xrightarrow{\text{deduce}}$	n is even.

นิยามของจำนวนเต็มคี่ (odd integer)

จำนวนเต็ม n เป็น **จำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ** n เท่ากับสองเท่าของจำนวนเต็มใด ๆ บวก 1

n เป็นจำนวนเต็มคี่ $\Leftrightarrow$ $\exists$ จำนวนเต็ม k ที่ $n = 2k + 1$

นิยาม

An integer n is **even** if, and only if, n equals twice some integer. An integer n is **odd** if, and only if, n equals twice some integer plus 1.

Symbolically, if n is an integer, then

$$n \text{ is even} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ an integer } k \text{ such that } n = 2k.$$

$$n \text{ is odd} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ an integer } k \text{ such that } n = 2k + 1.$$

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

1. 0 เป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

1. 0 เป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่

คำตอบ ใช่

เพราะ 0 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2 (0)

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

2. -301 เป็นจำนวนเต็มคี่หรือไม่

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

2. -301 เป็นจำนวนเต็มคี่หรือไม่

คำตอบ ใช่

เพราะ -301 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2 (-151) + 1

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $6a^2b$ เป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $6a^2b$ เป็นจำนวนเต็มคู่หรือไม่

คำตอบ ใช่

เพราะ $6a^2b$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $2(3a^2b)$

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

4. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $10a + 8b + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่หรือไม่

จำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

4. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $10a + 8b + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่หรือไม่

คำตอบ ใช่

เพราะ $10a + 8b + 1$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $2(5a + 4b) + 1$

นิยามของจำนวนเฉพาะ (Prime Number)

จำนวนเต็ม n เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $n > 1$ และสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก r และ s ถ้า $n = rs$ แล้ว r หรือ s ต้องเท่ากับ n

$\forall$ จำนวนเต็มบวก r และ s, ถ้า $n = rs$ แล้วจะต้องเป็นกรณีที่ ($r = 1$ และ $s = n$) หรือ ($r = n$ และ $s = 1$)

หรือ จำนวนเฉพาะคือจำนวนที่หารลงตัวได้ **แค่ 1 กับตัวมันเอง** เท่านั้น

นิยามของจำนวนเฉพาะ (Prime Number)

$\forall$จำนวนเต็มบวก r และ s, ถ้า $n = rs$ แล้วจะต้องเป็นกรณีที่ ($r = 1$ และ $s = n$) หรือ ($r = n$ และ $s = 1$)

7 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

7 > 1 ดังนั้น หา r, s ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $7 = rs$ มีสองกรณีคือ

$7=1\times7$

$7=7\times1$

ดังนั้น 7 เป็น **จำนวนเฉพาะ**

นิยามของจำนวนประกอบ (Composite Number)

จำนวนเต็ม n เป็นจำนวนประกอบ ก็ต่อเมื่อ $n > 1$ และ $n = rs$ สำหรับจำนวนเต็ม r และ s บางคู่ ที่มีเงื่อนไขว่า $1 < r < n$ และ $1 < s < n$

$\exists$ จำนวนเต็มบวก r และ s, ที่ $n = rs$ และ $1 < r < n$ และ $1 < s < n$

หรือจำนวนประกอบคือจำนวนที่สามารถ "แยกเป็นผลคูณ" ของจำนวนที่ไม่ใช่ 1 และไม่ใช่ตัวมันเองได้

นิยามของจำนวนประกอบ (Composite Number)

∃จำนวนเต็มบวก r และ s, ที่ $n = rs$ และ $1 < r < n$ และ $1 < s < n$

15 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

$15 > 1$ ดังนั้น หา r, s ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $7 = rs$ และ $1 < r < n$ และ $1 < s < n$

พบว่า $15 = 3 \times 5$, ซึ่ง $1 < 3 < 15$ และ $1 < 5 < 15$

ดังนั้น 15 เป็น **จำนวนประกอบ**

1 เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ เพราะอะไร

1 เป็นจำนวนประกอบหรือไม่ เพราะอะไร

นิยาม

An integer n is **prime** if, and only if, $n > 1$ and for all positive integers r and s, if $n = rs$, then either r or s equals n. An integer n is **composite** if, and only if, $n > 1$ and $n = rs$ for some integers r and s with $1 < r < n$ and $1 < s < n$.

In symbols:

n is prime $\Leftrightarrow$ $\forall$ positive integers r and s, if $n = rs$ then either $r = 1$ and $s = n$ or $r = n$ and $s = 1$.

n is composite $\Leftrightarrow$ $\exists$ positive integers r and s such that $n = rs$ and $1 < r < n$ and $1 < s < n$.

Proving Existential Statements

$$\exists x \in D \text{ such that } Q(x)$$

มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งค่าในเซต D ที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง

- วิธีหนึ่งในการพิสูจน์ข้อความนี้ คือการหาค่า x ในเซต D ที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง
- อีกวิธีหนึ่งคือการอธิบายขั้นตอนหรือแนวทางในการหาค่า x ดังกล่าว
- ทั้งสองวิธีนี้เรียกว่า การพิสูจน์เชิงสร้าง (constructive proofs of existence)

ตัวอย่าง Constructive Proofs of Existence

1. มีจำนวนเต็มคู่ n จำนวนหนึ่ง ที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้สองรูปแบบ

ตัวอย่าง Constructive Proofs of Existence

1. มีจำนวนเต็มคู่ n จำนวนหนึ่ง ที่สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลบวกของจำนวนเฉพาะสองจำนวนได้สองรูปแบบ

คำตอบ

ให้ $n = 10$ แล้ว $10 = 5 + 5 = 3 + 7$ และ $3, 5, 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง Constructive Proofs of Existence

2. ให้ r และ s เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ มีจำนวนเต็ม k ตัวหนึ่งที่ทำให้ $22r + 18s$ เท่ากับ $2k$

ตัวอย่าง Constructive Proofs of Existence

2. ให้ r และ s เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ มีจำนวนเต็ม k ตัวหนึ่งที่ทำให้ $22r + 18s$ เท่ากับ $2k$

คำตอบ

ให้ $k = 11r + 9s$ แล้ว k เป็นจำนวนเต็มเนื่องจากผลรวมของคูณของจำนวนเต็มและ

จาก $2k = 22r + 18s$ โดย distributive law of algebra

Disproving Universal Statements by Counterexample

$\forall x$ in D, if $P(x)$ then $Q(x)$

สำหรับทุกค่า x ในเซต D, ถ้า $P(x)$ เป็นจริงแล้ว $Q(x)$ ก็เป็นจริง

การแสดงว่าประพจน์นี้เป็นเท็จเทียบเท่ากับการแสดงว่า **นิเสธของประพจน์ปฏิเสธเป็นจริง**

$\exists x$ in D such that $P(x)$ and not $Q(x)$

มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งค่า ในเซต D ที่ $P(x)$ เป็นจริงและ $Q(x)$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง Disproof by Counterexample

$\forall$ real numbers a and b, if $a^2 = b^2$ then $a = b$

ตัวอย่าง Disproof by Counterexample

$\forall$ real numbers a and b, if $a^2 = b^2$ then $a = b$

คำตอบ counterexample a = 1 และ b = -1

$a^2 = 1$, $b^2 = 1$ ดังนั้น $a^2 = b^2$

แต่ a ไม่เท่ากับ b

Generalizing from the Generic Particular

<table>
<tr><th>Step</th><th>Visual Result</th><th>Algebraic Result</th></tr>
<tr><td>Pick a number.</td><td>□</td><td>x</td></tr>
<tr><td>Add 5.</td><td>□ | | | | |</td><td>$x + 5$</td></tr>
<tr><td>Multiply by 4.</td><td>□ | | | | |
□ | | | | |
□ | | | | |
□ | | | | |</td><td>$(x + 5) \cdot 4 = 4x + 20$</td></tr>
<tr><td>Subtract 6.</td><td>□ | |
□ | |
□ | | | | |
□ | | | | |</td><td>$(4x + 20) - 6 = 4x + 14$</td></tr>
<tr><td>Divide by 2.</td><td>□ | |
□ | | | | |</td><td>$\dfrac{4x + 14}{2} = 2x + 7$</td></tr>
<tr><td>Subtract twice the original number.</td><td>| |
| | | | |</td><td>$(2x + 7) - 2x = 7$</td></tr>
</table>

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทเป็นเรื่องยาก ต้องอาศัยกลยุทธ์และวิธีการพิสูจน์หลายแบบ

การเลือก “วิธีการพิสูจน์” เป็นกุญแจสำคัญ เช่น direct proof, contrapositive, contradiction, etc.

เมื่อเลือกวิธีได้แล้ว ให้ใช้เฉพาะสิ่งเหล่านี้เท่านั้น เช่น นิยาม ผลที่เคยพิสูจน์แล้ว กฎการอนุมาน (rules of inference)

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทรูปแบบ $\forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$ เป้าหมายคือแสดงว่า $P(c) \longrightarrow Q(c)$ เป็นจริง สำหรับ c ใด ๆ ในโดเมน แล้วจึงสรุปผลทั่วไปด้วยหลัก universal generalization โดยเน้นว่าเราต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าเมื่อ P เป็นจริงแล้ว Q ก็ต้องเป็นจริง

เพราะประพจน์เงื่อนไข $p \longrightarrow q$ จะเป็นเท็จได้ก็ต่อเมื่อ p จริงแต่ q เท็จเท่านั้น บทนี้จึงมุ่งเน้นเทคนิคที่ใช้ในการพิสูจน์ประพจน์ประเภทเงื่อนไข ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญก่อนจะต่อยอดไปยังรูปแบบอื่น ๆ ในบทถัดไป

Direct Proof

การพิสูจน์แบบตรง (direct proof) ของประพจน์เงื่อนไข p ⟶ q เริ่มจากสมมุติว่า p เป็นจริง แล้วใช้กฎอนุมาน สัจพจน์ นิยาม และทฤษฎีบทที่เคยพิสูจน์แล้ว เพื่อแสดงว่า q ต้องเป็นจริง

จุดมุ่งหมายคือแสดงว่าในกรณีที่ p เป็นจริง จะไม่มีทางที่ q เป็นเท็จได้ การพิสูจน์แบบตรงหลายกรณีสามารถทำได้ง่ายและมีขั้นตอนชัดเจนจากสมมุติฐานไปสู่ข้อสรุป แต่บางครั้งก็ต้องอาศัยความเข้าใจลึกหรือลำดับเหตุผลที่ซับซ้อนขึ้น

Direct Proof

ขั้นตอนที่ 1 ตั้งสมมติฐานและแทนค่าตามนิยาม

สมมุติว่าเงื่อนไขต้นเป็นจริง แล้วใช้ “นิยาม” เพื่อเขียนให้อยู่ในรูปเชิงสัญลักษณ์

ขั้นตอนที่ 2 ดำเนินการทางพีชคณิตเพื่อหาผลลัพธ์

คำนวณหรือจัดรูปสมการตามหลักพีชคณิต/ตรรกะ

ขั้นตอนที่ 3 สรุปผลตามนิยาม และยืนยันว่าประพจน์เป็นจริง

แสดงว่าได้รูปตามที่ต้องการ เช่น อยู่ในรูปของจำนวนคี่ แล้ว ประพจน์จริง

Direct Proof

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n^2 ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์

ขั้นตอนที่ 1 สมมติว่า n เป็นจำนวนเต็มคี่ จากนิยาม

$n = 2k + 1$ เมื่อ k คือ จำนวนเต็มใด ๆ

ขั้นตอนที่ 2 ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการและจัดรูป

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจาก n^2 อยู่ในรูป $2m + 1$ เมื่อ $m = 2k^2 + 2k$

ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

สรุป ประพจน์เป็นจริง

แบบฝึกหัด

1. Use a direct proof to show that the sum of two odd integers is even.
2. Use a direct proof to show that the sum of two even integers is even.
3. Show that the square of an even number is an even number using a direct proof.
4. Use a direct proof to show that the product of two odd numbers is odd.

Direct Proof

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์

ขั้นตอนที่ 1 สมมติว่า $3n + 2 = 2k + 1$

ขั้นตอนที่ 2 จัดรูปสมการ $n = (2k - 1)/3$

ขั้นตอนที่ 3 ไม่สามารถพิสูจน์ว่า n เป็นจำนวนคี่ได้

Direct Proof

การพิสูจน์แบบตรง (direct proof) คือการเริ่มต้นจากสมมุติฐานของทฤษฎีบท แล้วดำเนินเหตุผลไปตามลำดับจนได้ข้อสรุปตามที่ต้องการ

อย่างไรก็ตาม บางครั้งการพิสูจน์แบบตรงก็ไม่สามารถดำเนินต่อได้หรือไปไม่ถึงข้อสรุป ทำให้จำเป็นต้องใช้วิธีการอื่น โดยเฉพาะในกรณีทฤษฎีบทที่อยู่ในรูป $\forall x(P(x) \longrightarrow Q(x))$

หากไม่สามารถพิสูจน์แบบตรงได้ วิธีที่ใช้แทนเรียกว่า “การพิสูจน์แบบอ้อม (indirect proof)” ซึ่งไม่ได้เริ่มต้นจากสมมุติฐานโดยตรงแต่ใช้วิธีอื่น เช่น contrapositive หรือ contradiction แทน

Proof by Contraposition

การพิสูจน์แบบอ้อมที่มีประโยชน์มากรูปแบบหนึ่งคือ การพิสูจน์โดยใช้ contrapositive ซึ่งอาศัยความจริงที่ว่า $p \longrightarrow q$ มีค่าความจริงเท่ากับ $\neg q \longrightarrow \neg p$

ดังนั้น หากพิสูจน์ contrapositive ได้ว่าจริง ก็เท่ากับพิสูจน์ $p \longrightarrow q$ ได้เช่นกัน วิธีนี้เริ่มจากสมมุติว่า $\neg q$ เป็นจริง แล้วใช้กฎอนุมาน สัจพจน์ นิยาม และทฤษฎีบทเดิม เพื่อแสดงว่า $\neg p$ ต้องเป็นจริง

Proof by Contraposition

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

ประพจน์ Contrapositive

กำหนกให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า n ก็เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 1 $n = 2k$ เมื่อ k คือ จำนวนเต็มใด ๆ

ขั้นตอนที่ 2 แทนค่า n ลงใน $3n + 2$ และจัดรูป

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจาก $3n + 2$ อยู่ในรูป $2m$ ดังนั้น $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่

Contrapositive เป็นจริง ดังนั้นประพจน์ดั้งเดิมเป็นจริงด้วย

สรุป ประพจน์เป็นจริง

Proof by Contradiction

ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่า ถ้า p เป็นจริงแล้ว q ต้องเป็นจริง แต่การพิสูจน์แบบตรงทำได้ยาก เราอาจใช้วิธีพิสูจน์แบบหักล้าง (contradiction) แทน

โดยเริ่มจากสมมุติว่า p เป็นจริง และ q ไม่จริง แล้วใช้เหตุผลเพื่อหาข้อขัดแย้ง

ถ้าเกิดความขัดแย้ง แสดงว่าสมมุติว่า q ไม่จริงนั้นผิด จึงสรุปได้ว่า q ต้องเป็นจริง และ p $\Rightarrow$ q จึงเป็นจริง

Proof by Contradiction

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

ประพจน์ Contradiction

กำหนกให้ n เป็นจำนวนเต็ม $3n + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่และ n ก็เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 1 $3n + 2 = 2k + 1$ และ $n = 2m$

ขั้นตอนที่ 2 แทนค่า n ลงใน $3n + 2$ และจัดรูป

$$3n + 2 = 3(2m) + 2 = 6m + 2 = 2(3m + 1)$$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจาก $3n + 2$ เป็นจำนวนคู่ขัดแย้งกับนิยาม ดังนั้นสมมติฐานจึงเป็นเท็จ

สรุป ประพจน์เป็นจริง

สรุป

Direct Proof

If 3n+2 is odd$\Rightarrow$n is odd

Contrapositive

If n is even$\Rightarrow$3n+2 is even

Contradiction

3n+2 is และ n is even

สรุปชื่อขั้นตอนแต่ละวิธี

	Direct	Contrapositive	Contradiction
ประพจน์	$p \longrightarrow q$	$\neg q \longrightarrow \neg p$	p และ $\neg q$
ขั้นตอนที่ 1	สมมติ p	สมมติ $\neg q$	สมมติ p และ $\neg q$
ขั้นตอนที่ 2	พิสูจน์ว่า q เป็นจริง	พิสูจน์ว่า $\neg p$ เป็นจริง	เจอข้อขัดแย้ง
ขั้นตอนที่ 3	สรุปว่า $p \longrightarrow q$	สรุปว่า $\neg q \longrightarrow \neg p$ แล้ว $p \longrightarrow q$	สรุปว่า $p \longrightarrow q$

Direct Proof

ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

พิสูจน์

ขั้นตอนที่ 1 $n^2 = 2k + 1$

ไม่มีวิธีที่จะแสดงว่า n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

Proof by Contraposition

ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

ประพจน์ Contrapositive

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว n^2 ก็เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 1 $n = 2k$

ขั้นตอนที่ 2 ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการและจัดรูป

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจาก n^2 อยู่ในรูป $2m$ ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

Contrapositive เป็นจริง ดังนั้นประพจน์ดังเดิมเป็นจริงด้วย

สรุป ประพจน์เป็นจริง

Proof by Contradiction

ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n ก็เป็นจำนวนเต็มคี่

ประพจน์ Contradiction

n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ขั้นตอนที่ 1 $n^2 = 2k + 1$ และ $n = 2m$

ขั้นตอนที่ 2 แทนค่า n ลงใน n^2 และจัดรูป

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจาก n^2 เป็นจำนวนคู่ขัดแย้งกับนิยาม ดังนั้นสมมติฐานจึงเป็นเท็จ

สรุป ประพจน์เป็นจริง

Mistakes in Proofs

Step	**Reason**
1. $a = b$	Given
2. $a^2 = ab$	Multiply both sides of (1) by a
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtract b^2 from both sides of (2)
4. $(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Factor both sides of (3)
5. $a + b = b$	Divide both sides of (4) by $a - b$
6. $2b = b$	Replace a by b in (5) because $a = b$ and simplify
7. $2 = 1$	Divide both sides of (6) by b

แบบฝึกหัด

1. Show that if n is an integer and $n^3 + 5$ is odd, then n is even using a) a proof by contraposition. b) a proof by contradiction.

2. Show that if n is an integer and $4n+3$ is odd, then n is odd using a) a proof by contraposition. b) a proof by contradiction.