ภาคแสดงและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
Predicates and Quantified Statements

ภาคแสดงและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
Predicates and Quantified Statements

ในตรรกศาสตร์ **ภาคแสดง (predicates)** สามารถได้มาจากการลบคำนามบางส่วนหรือทั้งหมดออกจากประโยค เช่น ให้ P แทน “เป็นนักศึกษาของวิทยาลัยเบดฟอร์ด” และให้ Q แทน “เป็นนักศึกษาของ” ดังนั้น P และ Q จึงเป็น **สัญลักษณ์ของภาคแสดง (predicate symbols)** ทั้งคู่

ประโยค “x เป็นนักศึกษาของวิทยาลัยเบดฟอร์ด” และ “x เป็นนักศึกษาของ y” จะเขียนแทนด้วย $P(x)$ และ $Q(x, y)$ ตามลำดับ ซึ่ง x และ y คือ **ตัวแปรของภาคแสดง (predicate variables)** ที่รับค่าในเซตที่เหมาะสม

เมื่อมีการแทนค่าที่แน่นอนให้กับตัวแปรเหล่านั้น จะได้ **ประพจน์ (statement)** ที่สมบูรณ์

ภาคแสดงและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

Predicates and Quantified Statements

เพื่อความง่ายในการอธิบาย เราจะนิยามว่า **ภาคแสดง (predicate)** คือ **สัญลักษณ์ของภาคแสดง (predicate symbol)** ร่วมกับ **ตัวแปรของภาคแสดง (predicate variables)**

• Definition

A **predicate** is a sentence that contains a finite number of variables and becomes a statement when specific values are substituted for the variables. The **domain** of a predicate variable is the set of all values that may be substituted in place of the variable.

ภาคแสดงและประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
Predicates and Quantified Statements

เมื่อมีการแทนค่าหนึ่งจากโดเมนของตัวแปรในภาคแสดงที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียวลงไปในตัวแปรนั้น จะได้ประพจน์ซึ่งมีค่าความจริงเป็น “จริง” หรือ “เท็จ” อย่างใดอย่างหนึ่ง

เซตของค่าทั้งหมดที่ทำให้ภาคแสดงนั้นเป็นจริง เรียกว่า **เซตค่าความจริง** ของภาคแสดง (truth set of the predicate)

• Definition

If $P(x)$ is a predicate and x has domain D, the **truth set** of $P(x)$ is the set of all elements of D that make $P(x)$ true when they are substituted for x. The truth set of $P(x)$ is denoted

$$\{x \in D \mid P(x)\}.$$

ตัวอย่าง การหาเซตค่าความจริงของภาคแสดง

1. กำหนดให้ $Q(n)$ เป็นภาคแสดง “n เป็นตัวประกอบของ 8”

จงหาเซตค่าความจริงของ $Q(n)$ เมื่อ:

โดเมนของ n คือ เซตของจำนวนเต็มบวก Z^+

คำตอบ

เซตค่าความจริงคือ {1, 2, 4, 8}

เพราะตัวเลขเหล่านี้คือจำนวนเต็มบวกที่หาร 8 ลงตัวพอดี

ตัวอย่าง การหาเซตค่าความจริงของภาคแสดง

2. กำหนดให้ $Q(n)$ เป็นภาคแสดง “n เป็นตัวประกอบของ 8”

จงหาเซตค่าความจริงของ $Q(n)$ เมื่อ:

โดเมนของ n คือ เซตของจำนวนเต็ม Z

คำตอบ

เซตค่าความจริงคือ $\{1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8\}$

เพราะจำนวนเต็มลบอย่าง -1, -2, -4 และ -8 ก็สามารถหาร 8 ลงตัวได้เช่นกัน (ไม่มีเศษ)

ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกค่า
The Universal Quantifier: ∀

The Universal Quantifier: ∀

วิธีหนึ่งในการเปลี่ยนภาคแสดงให้เป็นประพจน์ คือการกำหนดค่าที่แน่นอนให้กับตัวแปรทั้งหมดในภาคแสดง

ตัวอย่างเช่น ถ้า x แทนจำนวน 35 ประพจน์ “x หารด้วย 5 ลงตัว” ก็จะกลายเป็นประพจน์ที่เป็นจริง เพราะ $35=5\times735 = 5$

อีกวิธีหนึ่งในการเปลี่ยนภาคแสดงให้เป็นประพจน์ คือการเพิ่ม **ตัวบ่งปริมาณ (quantifiers)**

ตัวบ่งปริมาณ คือ คำที่บอกจำนวนหรือขอบเขต เช่น “**บางค่า**” หรือ “**ทุกค่า**” ซึ่งใช้บอกว่าในบรรดาค่าทั้งหมดนั้น มีจำนวนเท่าใดที่ทำให้ภาคแสดงเป็นจริง

The Universal Quantifier: ∀

สัญลักษณ์ ∀ แทนความหมายว่า “**สำหรับทุกค่า**” และเรียกว่า **ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกค่า** (universal quantifier)

โดยทั่วไป **โดเมนของตัวแปรในภาคแสดง** จะแสดงไว้ระหว่างสัญลักษณ์ ∀ กับชื่อตัวแปร หรือระบุไว้ถัดจากชื่อตัวแปรโดยตรง

คำอื่น ๆ ที่สามารถใช้แทน “สำหรับทุกค่า” ได้ เช่น for every, for arbitrary, for any, for each, และ given any

The Universal Quantifier: ∀

ประโยคที่มีการบ่งปริมาณสำหรับทุกค่าจะถูกนิยามให้เป็น **ประพจน์ (statement)** โดยกำหนด **ค่าความจริง** นิยามต่อไปนี้

• Definition

Let $Q(x)$ be a predicate and D the domain of x. A **universal statement** is a statement of the form "$\forall x \in D, Q(x)$." It is defined to be true if, and only if, $Q(x)$ is true for every x in D. It is defined to be false if, and only if, $Q(x)$ is false for at least one x in D. A value for x for which $Q(x)$ is false is called a **counterexample** to the universal statement.

ตัวอย่าง ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับทุกค่า

1. กำหนดให้ $D = \{1,2,3,4,5\}$ และพิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

$$\forall x \in D, x^2 \geq x.$$

จงแสดงว่าประพจน์นี้เป็นจริง

ตัวอย่าง ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับทุกค่า

วิธีทำ

ตรวจสอบว่า “$x^2 \geq x$” เป็นจริงสำหรับแต่ละค่า x ในเซต D

$$1^2 \geq 1, \qquad 2^2 \geq 2, \qquad 3^2 \geq 3, \qquad 4^2 \geq 4, \qquad 5^2 \geq 5.$$

ดังนั้น $\forall x \in D, x^2 \geq x.$

จึงเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ตัวอย่าง ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับทุกค่า

2. พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

$$\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq x.$$

จงหาตัวอย่างค้าน (counterexample) เพื่อแสดงว่าประพจน์นี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับทุกค่า

วิธีทำ

ให้ x = 1/2 ซึ่ง x อยู่ในเซต R (เพราะ 0.5 เป็นจำนวนจริง) และ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2}.$$

ดังนั้น $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq x.$

จึงเป็นเท็จ

The Universal Quantifier: ∀

เทคนิคที่ใช้ในการแสดงว่าประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับทุกค่าเป็นจริง เรียกว่า **"วิธีการแบบครอบคลุม"** (method of exhaustion)

วิธีนี้ประกอบด้วยการตรวจสอบความจริงของภาคแสดงแยกกันทีละค่าของสมาชิกแต่ละตัวในโดเมน

ในทางทฤษฎี วิธีนี้สามารถใช้ได้เสมอ เมื่อโดเมนของตัวแปรในภาคแสดงมีจำนวนจำกัด (finite)

ตัวบ่งปริมาณสำหรับบางค่า

The Existential Quantifier: ∃

The Existential Quantifier: ∃

สัญลักษณ์ ∃ แทนความหมายว่า “มีอยู่” และเรียกว่า ตัวบ่งปริมาณสำหรับบางค่า (existential quantifier)
ตัวอย่างเช่น ประโยค “มีนักเรียนคนหนึ่งในวิชา Math” สามารถเขียนได้ว่า

$\exists p \in P$ ซึ่ง p เป็นนักเรียนในวิชา Math
$\exists p \in P$ such that p is a student in Math

โดยที่ P คือเซตของ “คนทั้งหมด”
โดเมนของตัวแปรในภาคแสดงมักจะแสดงไว้ ระหว่างสัญลักษณ์ ∃ กับชื่อตัวแปร หรือ ต่อท้ายชื่อตัวแปร โดยตรง

The Existential Quantifier: ∃

ประโยคที่มีการบ่งปริมาณสำหรับบางค่าจะถูกนิยามให้เป็น **ประพจน์ (statement)** โดยการกำหนด **ค่าความจริง** ตามคำจำกัดความต่อไปนี้

• Definition

Let $Q(x)$ be a predicate and D the domain of x. An **existential statement** is a statement of the form "$\exists x \in D$ such that $Q(x)$." It is defined to be true if, and only if, $Q(x)$ is true for at least one x in D. It is false if, and only if, $Q(x)$ is false for all x in D.

ตัวอย่าง **ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับบางค่า**

1. พิจารณาประพจน์:

$$\exists m \in Z^{+} \text{ such that } m^2 = m.$$

จงแสดงว่าประพจน์นี้เป็นจริง

คำตอบ สังเกตว่า $1^2 = 1$ ดังนั้น "$m^2 = m$" จึงเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม m อย่างน้อยหนึ่งค่า ดังนั้นประพจน์ $\exists m \in Z^{+}$ such that $m^2 = m$" จึงเป็นจริง

ตัวอย่าง ความจริงและความเท็จของประพจน์ที่บ่งปริมาณสำหรับบางค่า

2. ให้ $E = \{5, 6, 7, 8\}$ และพิจารณาประพจน์

$$\exists m \in E \text{ such that } m^2 = m.$$

จงแสดงว่าประพจน์นี้เป็นเท็จ

คำตอบ สังเกตว่า $m^2 = m$ ไม่เป็นจริงสำหรับจำนวนเต็มใด ๆ ตั้งแต่ 5 ถึง 8

ดังนั้นประพจน์ $\exists m \in E$ such that $m^2 = m$ จึงเป็นเท็จ

ประโยคเงื่อนไขสำหรับทุกค่า
Universal Conditional Statements

Universal Conditional Statements

รูปแบบประพจน์ที่สำคัญที่สุดในคณิตศาสตร์คือ "ประพจน์เงื่อนไขสำหรับทุกค่า":

$$\forall x, \text{ if } P(x) \text{ then } Q(x).$$

การคุ้นเคยกับประโยคในรูปแบบนี้เป็นสิ่งจำเป็น หากต้องการเรียนรู้ภาษาของคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง การเขียนประพจน์เงื่อนไขสำหรับทุกค่าในรูปแบบไม่เป็นทางการ

จงเขียนประโยคต่อไปนี้ใหม่แบบไม่เป็นทางการ โดยไม่ใช้สัญลักษณ์ตรรกะหรือค่าตัวแปร

$$\forall x \in \mathrm{R}, \text{ if } x > 2 \text{ then } x^2 > 4.$$

คำตอบ

ถ้าจำนวนจริงตัวใดมากกว่า 2 แล้ว จำนวนยกกำลังสองของมันจะมากกว่า 4

หรือ

ทุกจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 2 ผลลัพธ์ของการยกกำลังสองจะมากกว่า 4

Equivalent Forms of Universal Statements

ประพจน์

$$\forall x, \text{ if } x \text{ is in } D \text{ then } Q(x).$$

สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\forall x \in D, Q(x)$$

ยกตัวอย่างเช่น

∀x, ถ้า x เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว x เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

สามารถเขียนอยู่ในรูป

∀ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส x, x เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

Equivalent Forms of Existential Statements

ประพจน์

$\exists x$ such that $P(x)$ and $Q(x)$

สามารถเขียนอยู่ในรูป

$\exists x \in D$ such that $Q(x)$ where D เป็นเซตของ x ทุกตัวที่ $P(x)$ เป็นขริง

เช่น

$\exists n$ ที่จำนวนเฉพาะและเป็นเลคู่

สามารถเขียนอยู่ในรูป

$\exists$ จำนวนเฉพาะ n ที่เป็นเลขคู่

$\exists$ เลขคู่ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะ

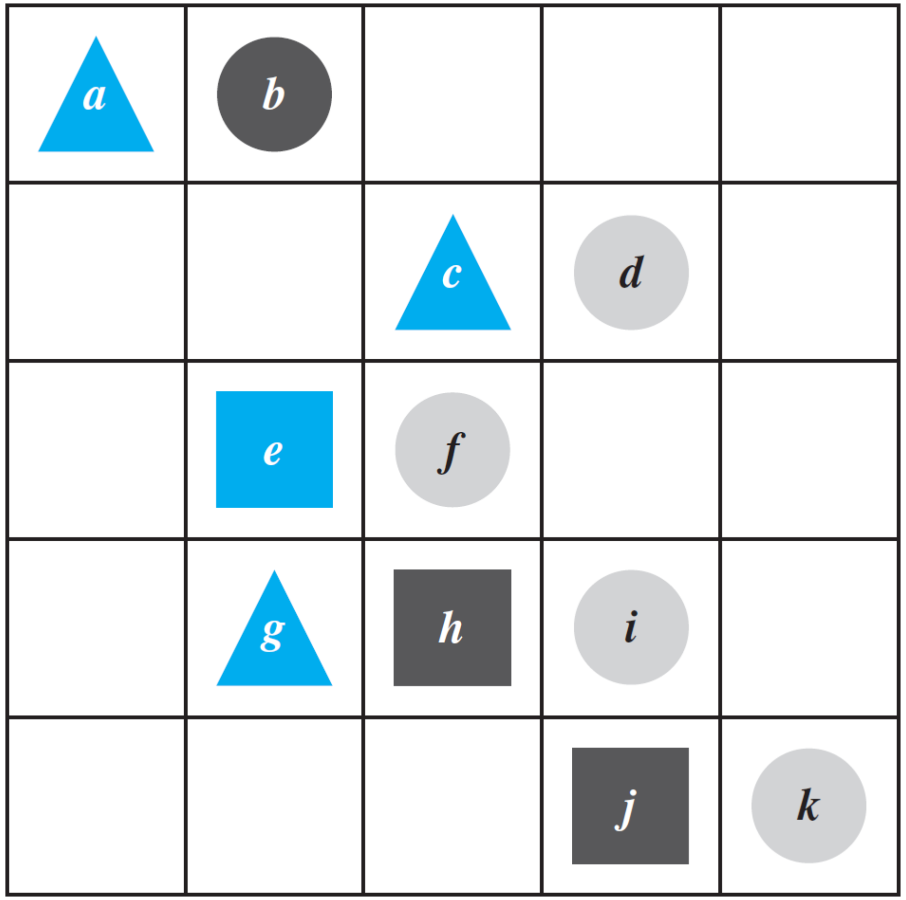
Tarski’s World

Tarski's World

เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาโดยนักวิทยาศาสตร์ข้อมูล **Jon Barwise** และ **John Etchemendy** เพื่อช่วยสอนหลักการของตรรกะ

โปรแกรมนี้ถูกอธิบายไว้ในหนังสือของพวกเขาชื่อ The Language of First-Order Logic ที่มีโปรแกรม **Tarski's World** ซึ่งตั้งชื่อตามนักตรรกศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ **Alfred Tarski**

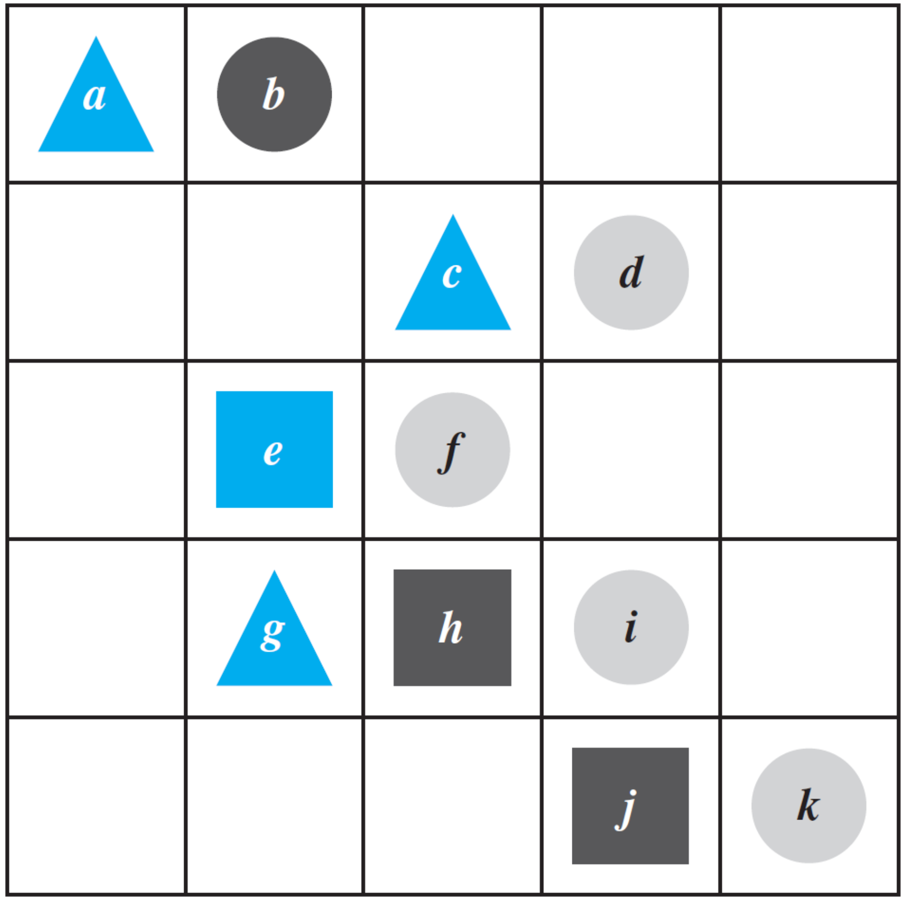
Tarski's World



แสดงด้วยภาพของบล็อกที่มีขนาด รูปร่าง และสีต่าง ๆ ซึ่งวางอยู่บนตาราง รูปแบบการจัดวางนี้สามารถอธิบายได้โดยใช้ตัวดำเนินการทางตรรกะ เช่น

- Triangle(x) หมายถึง “x เป็นรูปสามเหลี่ยม”
- Blue(y) หมายถึง “y มีสีฟ้า”
- และ RightOf(x, y) หมายถึง “x อยู่ทางขวาของ y (แต่อาจอยู่คนละแถวกันก็ได้)”
- วัตถุแต่ละชิ้นสามารถตั้งชื่อเฉพาะได้ เช่น a, b หรือ c

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ

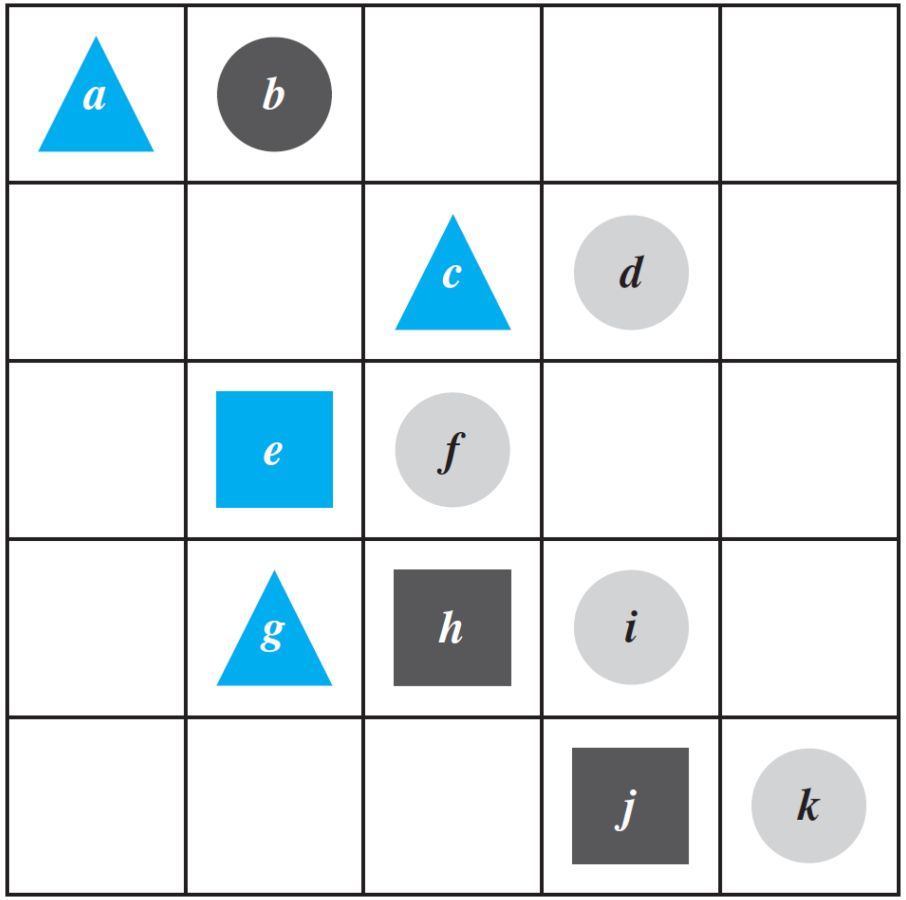


1. $\forall t$, Triangle(t) $\longrightarrow$ Blue(t).

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมทั้งหมดมีสีฟ้า

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นจริง

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ

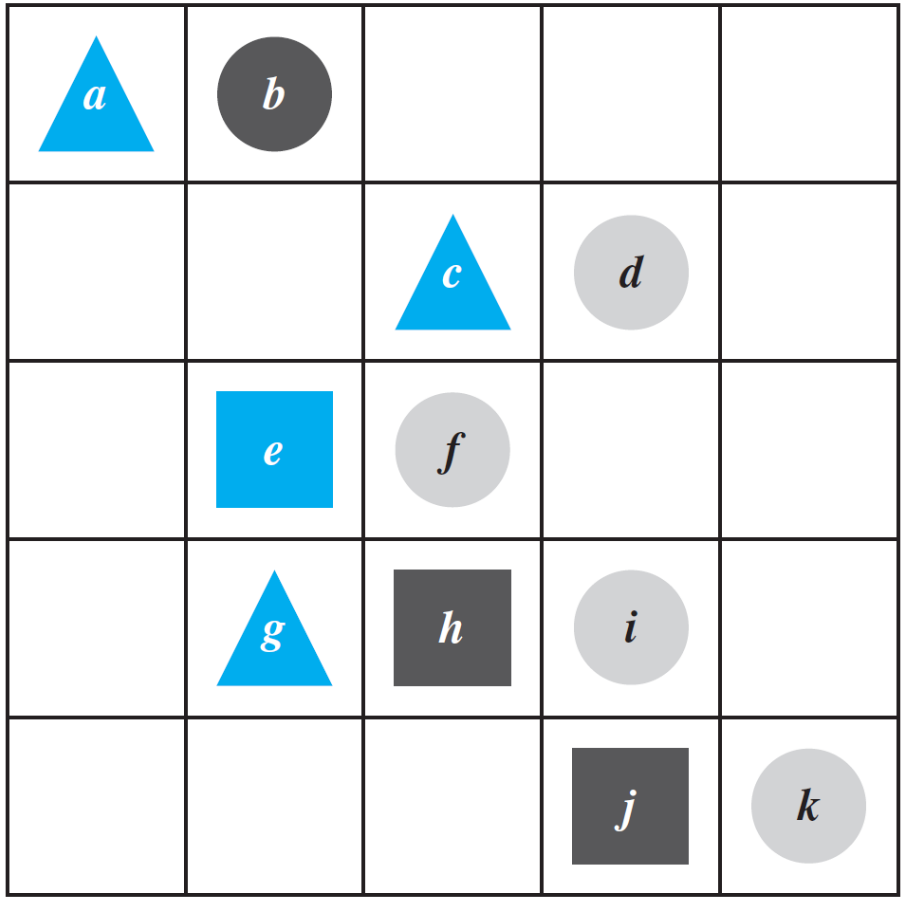


2. $\forall x$, Blue(x) $\longrightarrow$ Triangle(x).

เนื่องจาก e มีสีฟ้า แต่ไม่ใช่รูปสามเหลี่ยมเป็นตัวอย่างค้าน

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ

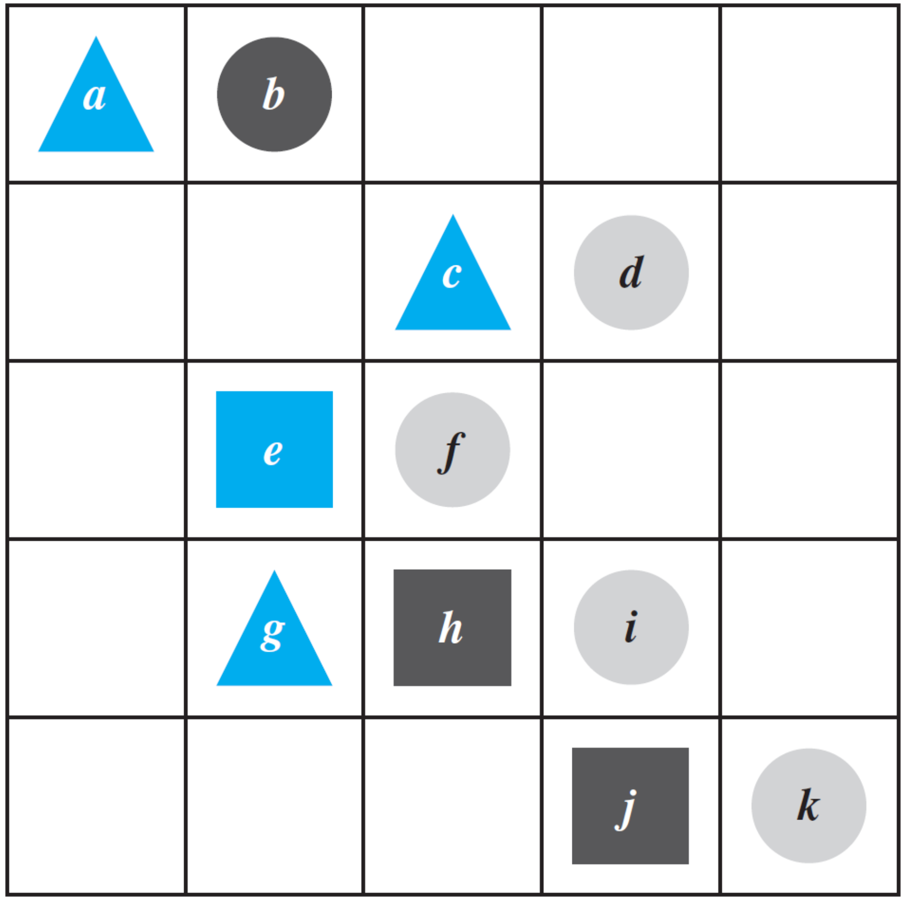


3. $\exists y$ such that Square(y) $\land$ RightOf(d, y).

เนื่องจาก e และ h เป็นรูปสี่เหลี่ยมทั้งคู่ และ d อยู่ทางขวาของพวกมัน

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นจริง

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าประพจน์ต่อไปนี้แต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จ



4. $\exists z$ such that Square(z) $\land$ Gray(z).

เนื่องจากสี่เหลี่ยมทั้งหมดมีสีฟ้าหรือสีดำ

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นเท็จ

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

Negations of Quantified Statements

Negations of Quantified Statements

Theorem 3.2.1 Negation of a Universal Statement

The negation of a statement of the form

$$\forall x \text{ in } D, Q(x)$$

is logically equivalent to a statement of the form

$$\exists x \text{ in } D \text{ such that } \sim Q(x).$$

Symbolically, $\sim(\forall x \in D, Q(x)) \equiv \exists x \in D \text{ such that } \sim Q(x).$

นิเสธประพจน์สำหรับทุกค่า “ทุกค่าเป็นจริง”

จะสมมูลทางตรรกะกับประพจน์สำหรับ “บางค่าไม่เป็นจริง” หรือ “มีอย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เป็นจริง”

Negations of Quantified Statements

Theorem 3.2.2 Negation of an Existential Statement

The negation of a statement of the form

$$\exists x \text{ in } D \text{ such that } Q(x)$$

is logically equivalent to a statement of the form

$$\forall x \text{ in } D, \sim Q(x).$$

Symbolically, $\sim(\exists x \in D \text{ such that } Q(x)) \equiv \forall x \in D, \sim Q(x).$

นิเสธของประพจน์สำหรับบางค่า “บางค่าเป็นจริง”

จะสมมูลทางตรรกะกับประพจน์สำหรับทุกค่า “ไม่มีค่าใดเป็นจริง” หรือ “ทั้งหมดไม่เป็นจริง”

เขียนรูปแบบการปฏิเสธอย่างเป็นทางการสำหรับประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall$ จำนวนเฉพาะ p, p เป็นจำนวนคี่

คำตอบ

$\exists$ จำนวนเฉพาะ p ที่ p ไม่เป็นจำนวนคี่

เขียนรูปแบบการปฏิเสธอย่างเป็นทางการสำหรับประพจน์ต่อไปนี้

2. $\exists$ รูปสามเหลี่ยม T ที่ผลรวมของมุมของ T เท่ากับ 200 องศา

คำตอบ

$\forall$ รูปสามเหลี่ยม T ทุกตัว ผลรวมของมุมของ T ไม่เท่ากับ 200 องศา

Negations of Universal Conditional Statements

รูปแบบของการปฏิเสธเช่นนี้สามารถหาได้จากข้อเท็จจริงที่ได้พิสูจน์ไว้แล้วก่อนหน้านี้ตามนิยามของการปฏิเสธประพจน์ที่ขึ้นต้นด้วย "สำหรับทุกค่า" (for all statement):

$$\sim(\forall x,\ P(x) \rightarrow Q(x)) \ \equiv\ \exists x \text{ such that } \sim(P(x) \rightarrow Q(x)).$$

แต่ การปฏิเสธประพจน์รูป “ถ้า–แล้ว” นั้น สมมูลทางตรรกะกับประพจน์รูป “และ”

$$\sim(P(x) \rightarrow Q(x)) \ \equiv\ P(x) \wedge \sim Q(x).$$

เมื่อนำสมการที่ 2 ไปแทนในสมการแรกจะได้

$$\sim(\forall x,\ P(x) \rightarrow Q(x)) \ \equiv\ \exists x \text{ such that } (P(x) \wedge \sim Q(x)).$$

หากเขียนในรูปที่ไม่เป็นสัญลักษณ์มากนัก จะได้ว่า:

Negation of a Universal Conditional Statement

$$\sim(\forall x, \text{ if } P(x) \text{ then } Q(x)) \ \equiv\ \exists x \text{ such that } P(x) \text{ and } \sim Q(x).$$

ตัวอย่าง เขียนรูปแบบการปฏิเสธสำหรับประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall$ บุคคล p, ถ้า p เป็นคนผมบลอนด์ แล้ว p มีตาสีฟ้า

คำตอบ

$\exists$ บุคคล p ที่เป็นคนผมบลอนด์ และไม่มีตาสีฟ้า

ตัวอย่าง เขียนรูปแบบการปฏิเสธสำหรับประพจน์ต่อไปนี้

2. ถ้าโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีมากกว่า 100,000 บรรทัด แล้วมันจะมีบั๊ก

คำตอบ

มีอย่างน้อยหนึ่งโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีมากกว่า 100,000 บรรทัด และไม่มีบั๊ก

รูปแบบอื่นของประพจน์เงื่อนไขแบบสากล
Variants of Universal Conditional Statements

Variants of Universal Conditional Statements

- **Definition**

Consider a statement of the form: $\forall x \in D$, if $P(x)$ then $Q(x)$.

1. Its **contrapositive** is the statement: $\forall x \in D$, if $\sim Q(x)$ then $\sim P(x)$.
2. Its **converse** is the statement: $\forall x \in D$, if $Q(x)$ then $P(x)$.
3. Its **inverse** is the statement: $\forall x \in D$, if $\sim P(x)$ then $\sim Q(x)$.

ตัวอย่าง จงเขียนประพจน์ตรงข้าม (contrapositive), กลับเหตุผล (converse) และกลับเงื่อนไข (inverse) สำหรับประพจน์ต่อไปนี้

$\forall x \in R$, ถ้า $x > 2$ แล้ว $x^2 > 4$.

Contrapositive

$\forall x \in R$, ถ้า $x^2 \leq 4$ แล้ว $x \leq 2$

Converse

$\forall x \in R$, ถ้า $x^2 > 4$ แล้ว $x > 2$

Inverse

$\forall x \in R$, ถ้า $x \leq 2$ แล้ว $x^2 \leq 4$

ตัวอย่าง จงเขียนประพจน์ตรงข้าม (contrapositive), กลับทาง (converse) และกลับเงื่อนไข (inverse) สำหรับประพจน์ต่อไปนี้

ถ้าจำนวนจริงมีค่ามากกว่า 2 แล้ว ค่ากำลังสองของมันจะมากกว่า 4

Contrapositive

ถ้ากำลังสองของจำนวนจริงมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 แล้ว จำนวนนั้นจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2

Converse

ถ้ากำลังสองของจำนวนจริงมีค่ามากกว่า 4 แล้ว จำนวนนั้นจะมากกว่า 2

Inverse

ถ้าจำนวนจริงมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้วกำลังสองของมันจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4

ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณหลายตัว
Statements with Multiple Quantifiers

Statements with Multiple Quantifiers

มีบุคคลคนหนึ่งที่ดูแลทุกรายละเอียดของกระบวนการผลิต

There is a person supervising every detail of the production process.

ประโยคนี้มีรูปแบบไม่เป็นทางการของทั้งตัวบ่งปริมาณแบบมีอยู่ (there is) และตัวบ่งปริมาณแบบสากล (every) ข้อใดต่อไปนี้อธิบายความหมายของประโยคนี้ได้ดีที่สุด

มีบุคคลเพียงคนเดียวที่ดูแลรายละเอียดทั้งหมดของกระบวนการผลิต

There is one single person who supervises all the details of the production process.

Statements with Multiple Quantifiers

มีบุคคลคนหนึ่งที่ดูแลทุกรายละเอียดของกระบวนการผลิต

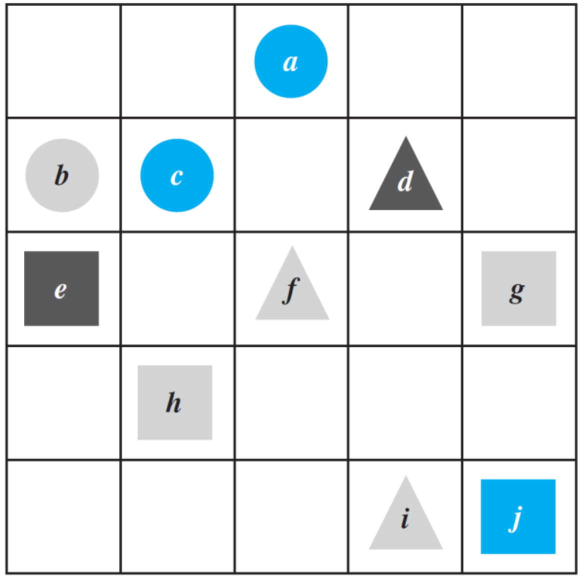
There is a person supervising every detail of the production process.

ประโยคนี้มีรูปแบบไม่เป็นทางการของทั้งตัวบ่งปริมาณแบบมีอยู่ (there is) และตัวบ่งปริมาณแบบสากล (every) ข้อใดต่อไปนี้อธิบายความหมายของประโยคนี้ได้ดีที่สุด

สำหรับรายละเอียดใด ๆ ของการผลิต จะมีใครสักคนที่ดูแลรายละเอียดนั้น

For any particular production detail, there is a person who supervises that detail, but there might be different supervisors for different details.

ตัวอย่าง ความจริงของประพจน์ ∀∃ (for all–exists)



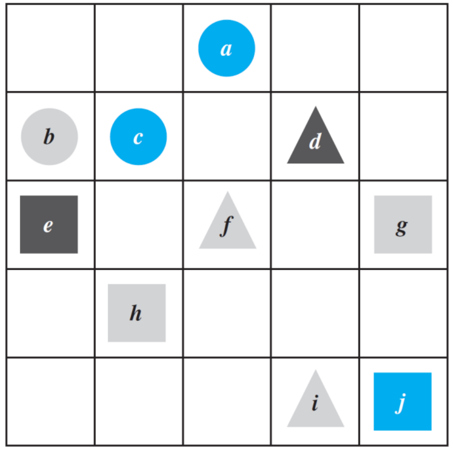
สำหรับรูปสามเหลี่ยม x ทุกรูป จะมีรูปสี่เหลี่ยม y อย่างน้อยหนึ่งรูปที่มีสีเดียวกับ x

ประพจน์นี้เป็นจริงหรือไม่

ประพจน์นี้กล่าวว่า ไม่ว่าจะเป็นรูปสามเหลี่ยมใด จะสามารถหาสี่เหลี่ยมที่มีสีเดียวกันได้เสมอ

ในที่นี้มีรูปสามเหลี่ยมเพียงสามรูป คือ d, f และ i

ตัวอย่าง ความจริงของประพจน์ ∀∃ (for all-exists)



สำหรับรูปสามเหลี่ยม x ทุกรูป จะมีรูปสี่เหลี่ยม y อย่างน้อยหนึ่งรูปที่มีสีเดียวกับ x

จากตารางแสดงว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเหล่านี้สามารถหาสี่เหลี่ยมที่มีสีเดียวกันได้

Given x =	**choose y =**	**and check that y is the same color as x.**
d	e	yes •
f or i	h or g	yes •

Statements with Multiple Quantifiers

ถ้าคุณต้องการพิสูจน์ความจริงของประพจน์ในรูปแบบ

$\forall$x ใน D, $\exists$y ใน E ที่ทำให้ P(x, y)

หมายยถึง ทุกค่า x ในเซต D จะต้องมีค่า y จากเซต E ที่ทำให้ P(x, y) เป็นจริง

ถ้าคุณต้องการพิสูจน์ความจริงของประพจน์ในรูปแบบ

$\exists$x ใน D ที่ทำให้ สำหรับทุก y ใน E, P(x, y)

หมายถึง มีค่า x หนึ่งตัวจากเซต D ที่ทำให้ P(x, y) เป็นจริงไม่ว่าจะเลือกค่า y ใดจากเซต E มาก็ตาม

ตัวอย่าง Statements with Multiple Quantifiers

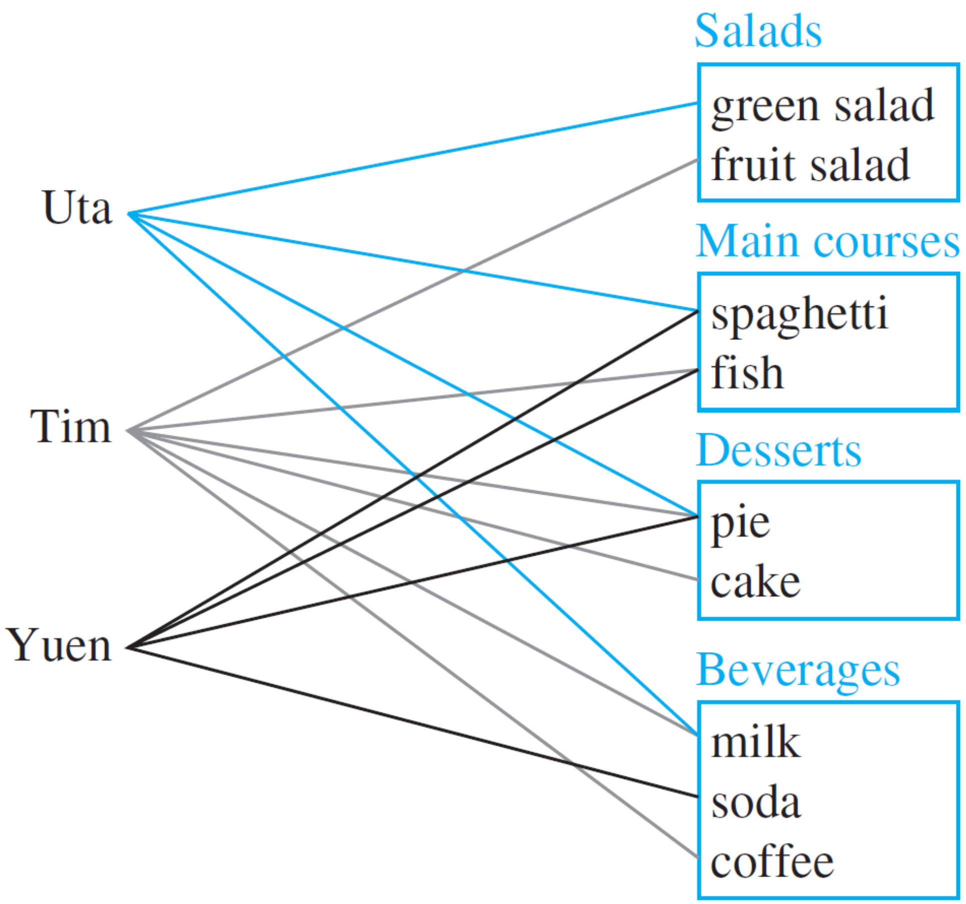
สายการตักอาหารของโรงอาหารในวิทยาลัยมี 4 จุดบริการ ได้แก่: สลัด, อาหารจานหลัก, ของหวาน และเครื่องดื่ม

- จุดบริการสลัดมีให้เลือกระหว่าง **สลัดผัก** หรือ **สลัดผลไม้**
- จุดอาหารจานหลักมีให้เลือกระหว่าง **สปาเก็ตตี้** หรือ **ปลา**
- จุดของหวานมีให้เลือกระหว่าง **พาย** หรือ **เค้ก**
- จุดเครื่องดื่มมีให้เลือก **นม**, **น้ำอัดลม**, หรือ **กาแฟ**

นักเรียนสามคน ได้แก่ Uta, Tim และ Yuen เดินผ่านสายการตักอาหารและเลือกอาหารดังต่อไปนี้:

- Uta: green salad, spaghetti, pie, milk
- Tim: fruit salad, fish, pie, cake, milk, coffee
- Yuen: spaghetti, fish, pie, soda

ตัวอย่าง จงเขียนประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปแบบไม่เป็นทางการ และระบุค่าความจริงของแต่ละประพจน์



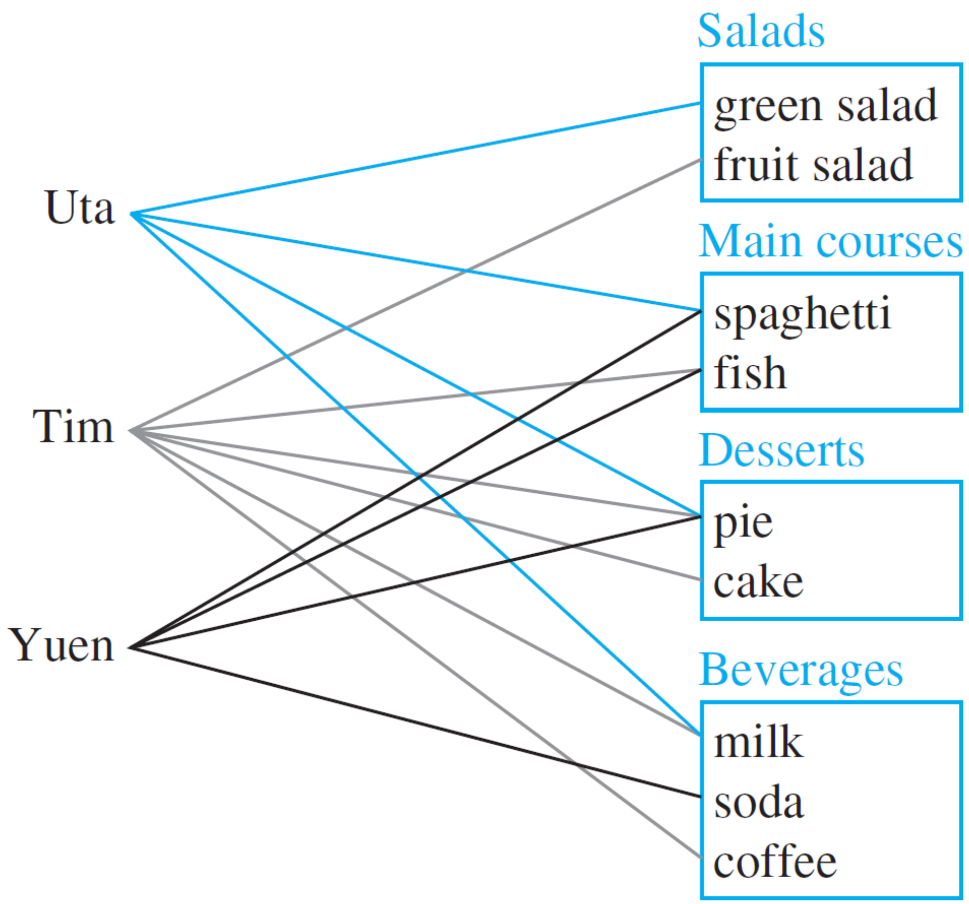
∃ an item *I* such that ∀ students *S*, *S* chose *I*.

มีรายการอาหารอย่างน้อยหนึ่งอย่างที่นักเรียนทุกคนเลือก

เนื่องจากนักเรียนทุกคนเลือกพาย

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นจริง

ตัวอย่าง **จงเขียนประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปแบบไม่เป็นทางการ และระบุค่าความจริงของแต่ละประพจน์**



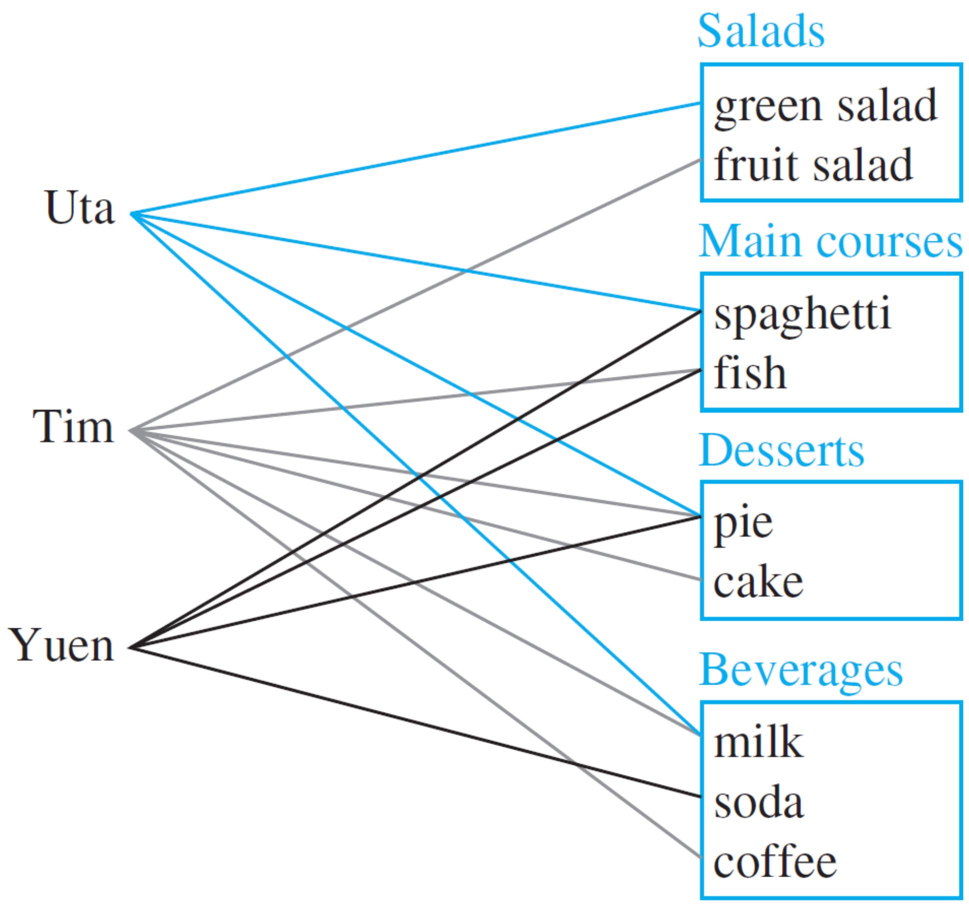
$\exists$ a student *S* such that $\forall$ items *I*, *S* chose *I*.

มีนักเรียนอย่างน้อยหนึ่งคนที่เลือกทุกรายการ

เนื่องจากไม่มีนักเรียนคนใดเลือกรายการอาหารครบทั้ง 9 รายการ

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นเท็จ

ตัวอย่าง **จงเขียนประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปแบบไม่เป็นทางการ และระบุค่าความจริงของแต่ละประพจน์**



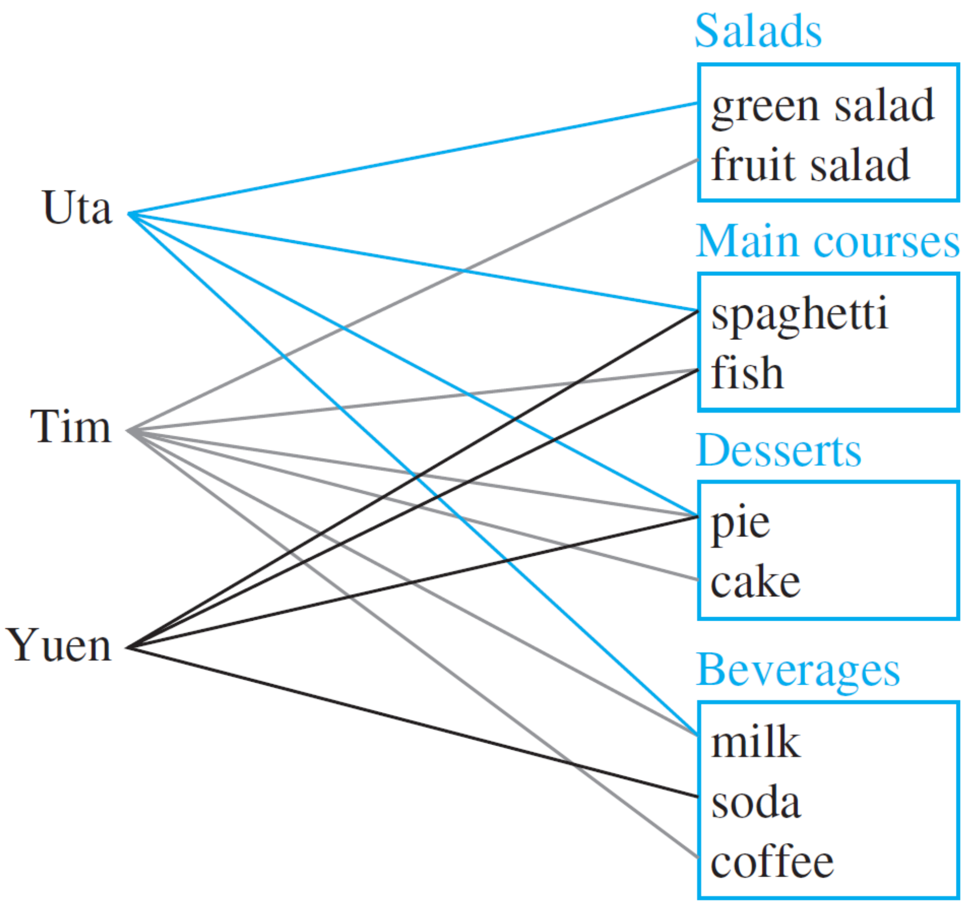
∃ a student *S* such that ∀ stations *Z*, ∃ an item *I* in *Z* such that *S* chose *I*.

มีนักเรียนอย่างน้อยหนึ่งคนที่เลือกรายการอาหารจากทุกจุดบริการอย่างน้อยหนึ่งอย่าง

เนื่องจากทั้ง Uta และ Tim ต่างก็เลือกรายการอาหารจากทุกจุดบริการอย่างน้อยหนึ่งอย่าง

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นจริง

ตัวอย่าง จงเขียนประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปแบบไม่เป็นทางการ และระบุค่าความจริงของแต่ละประพจน์



∀ students *S* and ∀ stations *Z*, ∃ an item *I* in *Z* such that *S* chose *I*.

นักเรียนทุกคนเลือกรายการอาหารอย่างน้อยหนึ่งอย่างจากทุกจุดบริการ

เนื่องจาก Yuen ไม่ได้เลือกสลัด

ดังนั้นประพจน์นี้เป็นเท็จ

การให้เหตุผลเชิงตรรกะด้วยประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
Arguments with Quantified Statements

Universal Modus Ponens

Universal Modus Ponens

Formal Version	*Informal Version*
$\forall x$, if $P(x)$ then $Q(x)$.	If x makes $P(x)$ true, then x makes $Q(x)$ true.
$P(a)$ for a particular a.	a makes $P(x)$ true.
$\bullet$ $Q(a)$.	$\bullet$ a makes $Q(x)$ true.

ตัวอย่าง การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่? เพราะอะไร?

ถ้าจำนวนเต็มเป็นจำนวนคู่ แล้วค่ายกกำลังสองของมันจะเป็นจำนวนคู่

k เป็นจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนคู่

∴ k^2 เป็นจำนวนคู่

กำหนดให้ $E(x)$ หมายถึง "x เป็นจำนวนเต็มคู่" $S(x)$ หมายถึง "x^2 เป็นจำนวนคู่" และให้ k แทนจำนวนเต็มตัวหนึ่งที่เป็นจำนวนคู่

$\forall$ x, if $E(x)$ then $S(x)$.

$E(k)$, for a particular k.

∴ $S(k)$.

การให้เหตุผลนี้อยู่ในรูปแบบของ universal modus ponens

ดังนั้นเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

Universal Modus Tollens

Universal Modus Tollens

Formal Version	*Informal Version*
$\forall x$, if $P(x)$ then $Q(x)$.	If x makes $P(x)$ true, then x makes $Q(x)$ true.
$\sim Q(a)$, for a particular a.	a does not make $Q(x)$ true.
• $\sim P(a)$.	• a does not make $P(x)$ true.

ตัวอย่าง การให้เหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่? เพราะอะไร?

มนุษย์ทุกคนล้วนต้องตาย

ซุสเป็นอมตะ

∴ ซุสไม่ใช่มนุษย์

กำหนดให้ $H(x)$ หมายถึง “x เป็นมนุษย์” $M(x)$ หมายถึง “x ต้องตาย” และให้ Z คือซุส

$\forall x$, if $H(x)$ then $M(x)$

$\sim M(Z)$

∴ $\sim H(Z)$.

การให้เหตุผลนี้อยู่ในรูปแบบของ universal modus tollens

ดังนั้นเป็นการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

Converse Error

Converse Error (Quantified Form)

Formal Version	*Informal Version*
$\forall x$, if $P(x)$ then $Q(x)$.	If x makes $P(x)$ true, then x makes $Q(x)$ true.
$Q(a)$ for a particular a.	a makes $Q(x)$ true.
• $P(a)$. ← invalid conclusion	• a makes $P(x)$ true. ← invalid conclusion

Inverse Error

Inverse Error (Quantified Form)

Formal Version	*Informal Version*
$\forall x$, if $P(x)$ then $Q(x)$.	If x makes $P(x)$ true, then x makes $Q(x)$ true.
$\sim P(a)$, for a particular a.	a does not make $P(x)$ true.
• $\sim Q(a)$. $\leftarrow$ invalid conclusion	• a does not make $Q(x)$ true. $\leftarrow$ invalid conclusion

Universal Transitivity

Inverse Error (Quantified Form)

Formal Version	*Informal Version*
$\forall x$, if $P(x)$ then $Q(x)$.	If x makes $P(x)$ true, then x makes $Q(x)$ true.
$\sim P(a)$, for a particular a.	a does not make $P(x)$ true.
• $\sim Q(a)$. $\leftarrow$ invalid conclusion	• a does not make $Q(x)$ true. $\leftarrow$ invalid conclusion