บทที่ 2 เซต

Waranyu Wongseree
Chitralada Technology Institute

เซต

แนวคิดเกี่ยวกับเซต (Sets) เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ไม่ต่อเนื่อง (Discrete Mathematics) โดยเซตเป็นโครงสร้างแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Structures) ชนิดหนึ่งถูกใช้ในการรวมกลุ่ม "วัตถุ" (objects) เข้าด้วยกันโดยวัตถุนั้นจะเป็นอะไรก็ได้ซึ่งอาจจะมีหรือไม่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันก็ได้

ดังนั้นการนิยามของเซตจะใช้ความเป็นสมาชิก (Membership) เป็นสิ่งที่จะชี้วัดว่าวัตถุใดที่เป็นสมาชิกภายในเซตนั้น

นิยาม

เซต (Set) คือการรวมกลุ่มของวัตถุหรือสมาชิกที่ไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับ และไม่มีสมาชิกซ้ำกัน

คุณสมบัติสำคัญของเซต

- กำหนดชัดเจน (Well-defined): เราสามารถตัดสินได้ว่าวัตถุใด "เป็น" หรือ "ไม่เป็น" สมาชิกของเซตนั้นอย่างแน่นอน
- ไม่มีลำดับ: สมาชิกของเซตไม่มีลำดับ เช่น เซต {1, 2, 3} กับ {3, 2, 1} ถือว่าเป็นเซตเดียวกันไม่มีสมาชิกซ้ำ:
- สมาชิกของเซตไม่ซ้ำกัน เช่น {1, 2, 2, 3} จะถือว่าเป็น {1, 2, 3}

นิยาม

วัตถุนี้อยู่ภายในเซตใดๆนั้นจะเรียกวัตถุนั้นว่า “สมาชิก (Member or Element)” ของเซต

สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงความเป็นสมาชิกของเซต

$a \in A$ หมายถึง a เป็นสมาชิกของเซต A

และ $a \notin A$ หมายถึง a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

การอธิบายสมาชิกภายในเซตใดๆทำได้ 2 วิธี

คือการแจกแจงสมาชิกของเซตและการระบุเงื่อนไขสมาชิกของเซต

1. การแจกแจงสมาชิกของเซต (Roster Method)

ทำได้โดยการเขียนสมาชิกทั้งหมดของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา { } และใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น

เซตของสระในภาษาอังกฤษ คือ {a, e, i, o, u}

เซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 10 คือ {1, 3, 5, 7, 9}

เซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 100 คือ {1, 2, 3, ... , 99}.

2. การระบุเงื่อนไขสมาชิกของเซต (Set-builder Method)

การอธิบายสมาชิกของเซตโดยใช้การระบุเงื่อนไข สมาชิกภายในเซตจะต้องมีคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกัน โดยจะเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

{ x | x : เงื่อนไข } เครื่องหมาย “|” อ่านว่า “โดยที่” เช่น

$A = \{ x \mid x$ เป็นสระภาษาอังกฤษ $\}$

$$B = \{x \mid (x < 10) \wedge (x \in \mathbf{Z}^{+})\}$$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทน เซตพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มีดังต่อไปนี้

$\mathbf{N}$	แทน	จำนวนนับ (Natural Numbers)	$\{0,1,2,3,\cdots\}$
$\mathbf{Z}, \mathbf{I}$	แทน	จำนวนเต็ม (Integers)	$\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$
$\mathbf{Z}^+, \mathbf{I}^+$	แทน	จำนวนเต็มบวก (Positive Integers)	$\{1,2,3,\cdots\}$
$\mathbf{Z}^-, \mathbf{I}^-$	แทน	จำนวนเต็มลบ (Negative Integers)	$\{\cdots,-3,-2,-1\}$
$\mathbf{Q}$	แทน	จำนวนอตรรกยะ (Irrational Numbers)	
$\overline{\mathbf{Q}}$	แทน	จำนวนตรรกยะ (Rational Numbers)	
$\mathbf{R}$	แทน	จำนวนจริง (Real Numbers)	
$\mathbf{R}^+$	แทน	จำนวนจริงบวก (Positive Real Numbers)	
$\mathbf{R}^-$	แทน	จำนวนจริงลบ (Negative Real Numbers)	
$\mathbf{C}$	แทน	จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)	

สัญลักษณ์สำหรับช่วงของจำนวนจริง

• Notation

Given real numbers a and b with $a \le b$:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\} \qquad [a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}.$$

The symbols ∞ and $-\infty$ are used to indicate intervals that are unbounded either on the right or on the left:

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\} \qquad [a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \ge a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\} \qquad [-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\}.$$

นิยาม

เซต 2 เซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อสมาชิกภายในเซตทั้งสองเซตเหมือนกันทุกประการ

เซต {1,3,5} และ {3,5,1} เท่ากันเนื่องจากทั้งสองเซตมีสมาชิกเหมือนกัน

เชต {1,3,3,3,5,5,5,5} เท่ากับเซ็ต {1, 3,5} เนื่องจากทั้งสองเซตมีสมาชิกเหมือนกัน

ตัวอย่าง $A = \{2,4,6\}$, $B = \{6,2,4,2,6,4,6\}$ และ $C = \{x \mid (x < 8) \wedge (x = 2n) \wedge (n \in \mathbf{Z}^+)\}$ เซต A, B, และ C เท่ากันหรือไม่

<u>ตอบ</u> $A = B = C$

จากตัวอย่างจะเห็นได้ว่า ลำดับของสมาชิกและสมาชิกที่ซ้ำกันไม่มีความสำคัญในการพิจารณาเซต

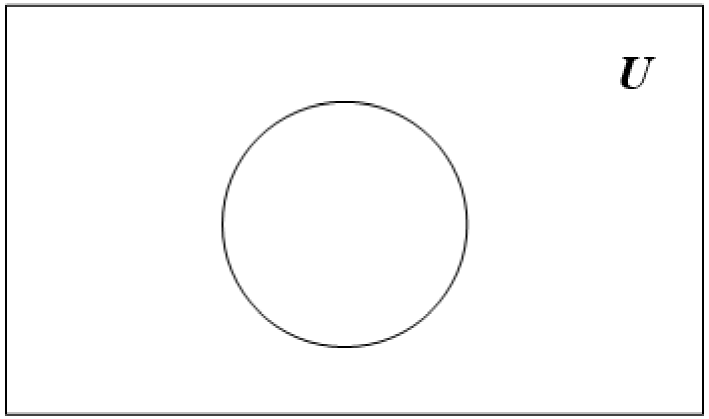
นิยาม

เซตจักรวาล (Universal Set) หรือ $\mathbf{U}$ คือ เซตที่มีขนาดใหญ่ที่สุด และประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่กำลังพิจารณาอยู่

เซตว่าง (Empty Set) หรือ $\varnothing$ คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกภายในเซตเลย

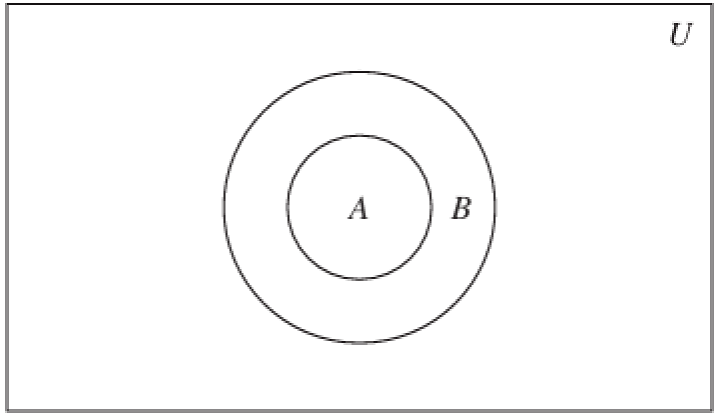
แผนภาพของเวนน์ (Venn Diagram)

เป็นแนวคิดที่ใช้ในการนำเสนอเซตในรูปแบบของภาพ โดยจะเขียนเซตต่างๆ เป็นรูปวงกลมโดยถูกปิดรอบด้วยกรอบสี่เหลี่ยมซึ่งกรอบสี่เหลี่ยมนั้นจะแทนเซตจักรวาล ดังเสนอในรูป



นิยาม

“ A เป็นเซตย่อย (Subset) ของ B ” ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A จะต้องเป็นสมาชิกของเซต B ด้วย โดยใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ แทน A เป็นเซตย่อยของ B และใช้สัญลักษณ์ $A \not\subset B$ แทน A ไม่เป็นเซตย่อยของ B



นิยาม

“ A เป็นเซตย่อย (Subset) ของ B ” ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A จะต้องเป็นสมาชิกของเซต B ด้วย โดยใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ แทน A เป็นเซตย่อยของ B และใช้สัญลักษณ์ $A \not\subset B$ แทน A ไม่เป็นเซตย่อยของ B

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ แล้ว $A \subseteq B$ แต่ $B \not\subset A$

นิยาม

“ A เป็นเซตย่อย (Subset) ของ B ” ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของเซต A จะต้องเป็นสมาชิกของเซต B ด้วย โดยใช้สัญลักษณ์ $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ แทน A เป็นเซตย่อยของ B และใช้สัญลักษณ์ $A \not\subset B$ แทน A ไม่เป็นเซตย่อยของ B

ลักษณะการเป็นเซตย่อย สามารถนำตรรกศาสตร์เข้ามานิยามได้ดังนี้

$A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A \qquad \Rightarrow \qquad \forall x\{(x \in A) \rightarrow (x \in B)\} = \mathbf{T}$

ตัวอย่าง A เป็นเซตย่อยของ B และ A ไม่เป็นเซตย่อยของ B

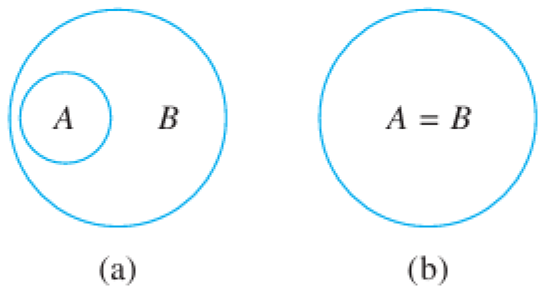


Figure 6.1.1 $A \subseteq B$

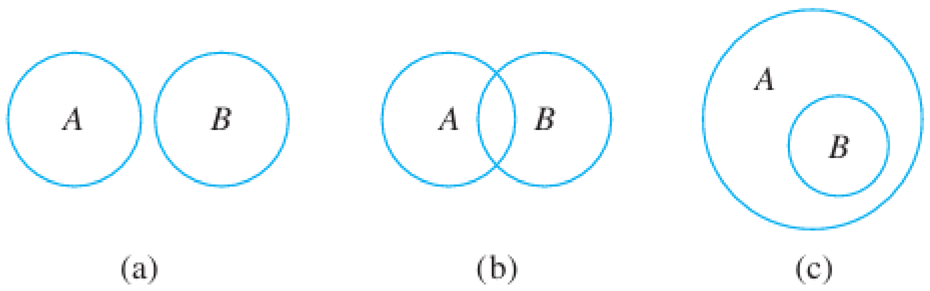


Figure 6.1.2 $A \not\subseteq B$

ทฤษฎีบท

ให้ S เป็นเซตใดๆ แล้ว

1) $\varnothing \subseteq S$

2) $S \subseteq \mathbf{U}$

3) $S \subseteq S$

ทฤษฎีบท

จากทฤษฎีบทที่กล่าวว่า $\varnothing$ เป็นเซตย่อยของทุกๆ เซตนั้น สามารถที่จะพิสูจน์ได้โดยการใช้ตรรกศาสตร์

พิจารณา $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A \quad \Rightarrow \quad \forall x\{(x \in A) \rightarrow (x \in B)\} = \mathbf{T}$

ถ้าแทนค่าเซต A ด้วย $\varnothing$ แล้วจะได้

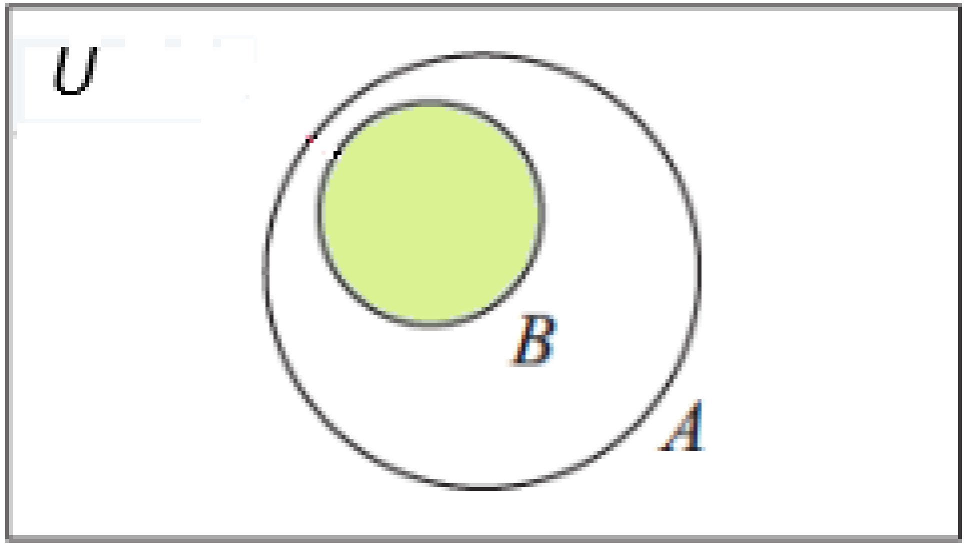
$$\varnothing \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \forall x\{(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in B)\}$$

แต่ $x \in \varnothing$ เป็นเท็จเสมอ ดังนั้นทำให้ $\forall x\{(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in B)\}$ เป็นจริงเสมอ ไม่ว่าเซต B จะเป็นเซตอะไรก็ตาม

นิยาม

“ A เป็นเซตย่อยแท้จริง (Proper Subset) ของ B ” ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ โดยใช้สัญลักษณ์ $A \subset B$ หรือ $B \supset A$ แทน A เป็นเซตย่อยแท้จริงของ B

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$



B is proper subset of A $B \subset A$

นิยาม

ให้ S เป็นเซตใดๆ

ถ้า n เป็นจำนวนสมาชิกของเซต S ที่ทราบค่าแน่นอน และ n ไม่ใช่จำนวนเต็มลบแล้ว เรียก S ว่า "*เซตจำกัด (Finite Set)*" และเรียก n ว่า "*จำนวนสมาชิกของเซต S (Cardinality of S)*"โดยแทนด้วย $|S|$ ถ้า n เป็นจำนวนสมาชิกของเซต S ที่ค่าเป็นจำนวนนับไม่ได้แล้วเรียก S ว่า "*เซตอนันต์ (Infinite Set)*"

ตัวอย่าง ถ้า $A = \{ x \mid x$ เป็นสระภาษาอังกฤษ $\}$

$B = \{x \mid (x < 10) \wedge (x \in \mathbf{Z}^+)\}$

$C = \{x \mid (x < 10) \wedge (x \in \mathbf{R})\}$ แล้ว

$|A| = 5$ และ $|B| = 9$ ดังนั้น A และ B เป็นเซตจำกัด

$|C| = \infty$ ดังนั้น C เป็นเซตอนันต์

นิยาม

ให้ S เป็นเซตใดๆ

“*เพาเวอร์เซต (Power Set) ของ* S ” คือ เซตที่สมาชิกเป็นเซตย่อยของ S ทั้งหมด เขียนแทน

เพาเวอร์เซตของ S ด้วย $P(S)$

ตัวอย่าง $A=\{1,2,3\}$ แล้ว เพาเวอร์เซตของ A คือ

$$P(S)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

ตัวอย่าง $A=\varnothing$ และ $B=\{\varnothing\}$ แล้ว จงหาเพาเวอร์เซตของ A และ B

$P(A)=\{\varnothing\}$ และ $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$|P(A)|=1$ และ $|P(B)|=2$

ทฤษฎีบท

ให้ S เป็นเซตใดๆ แล้ว

ถ้า $|S| = n$ แล้ว $|P(S)| = 2^n$

Ordered n-tuple

The *ordered n-tuple* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is the ordered collection that has a_1 as its first element, a_2 as its second element, $\ldots$, and a_n as its nth element.

Cartesian Product

Let A and B be sets. The *Cartesian product* of A and B, denoted by $A \times B$, is the set of all ordered pairs (a, b), where $a \in A$ and $b \in B$. Hence,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

What is the Cartesian product of $A = \{1, 2\}$ and $B = \{a, b, c\}$?

Solution: The Cartesian product $A \times B$ is

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

ตัวปฏิบัติการของเซต (Set Operations)

ตัวปฏิบัติการของเซตมีทั้งหมด 4 ตัว คือ ยูเนียน (Union), อินเตอร์เซคชัน (Intersection), ผลต่าง (Difference), และคอมพลีเมนต์ (Complement)

นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆแล้ว

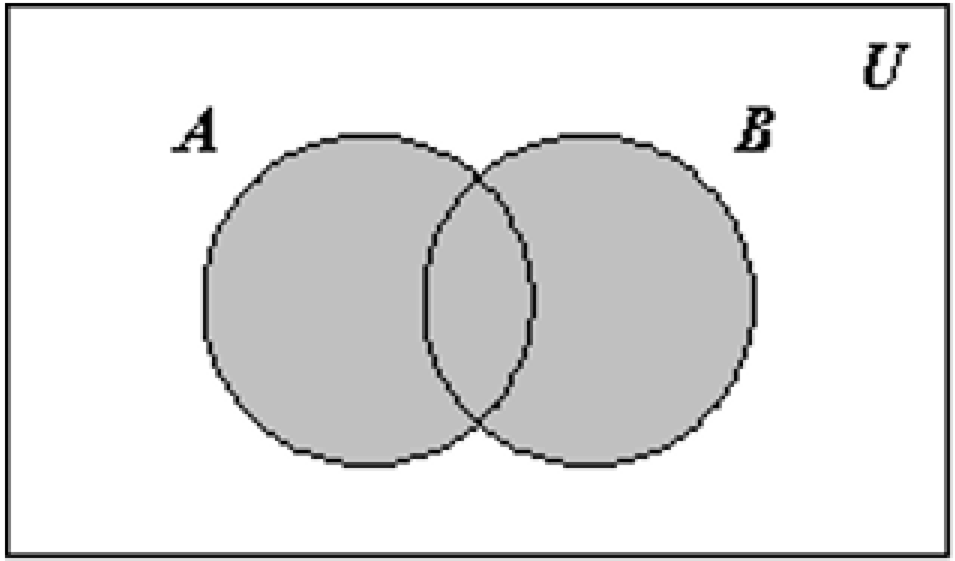
"*เซต* A *ยูเนียน (Union) เซต* B" เขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A หรือเป็นสมาชิกของเซต B โดยสามารถแสดงเป็นสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

ตัวอย่าง $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$

ดังนั้น $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$

สามารถนำ $A \cup B$ มาแสดงเป็นแผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้



นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆแล้ว

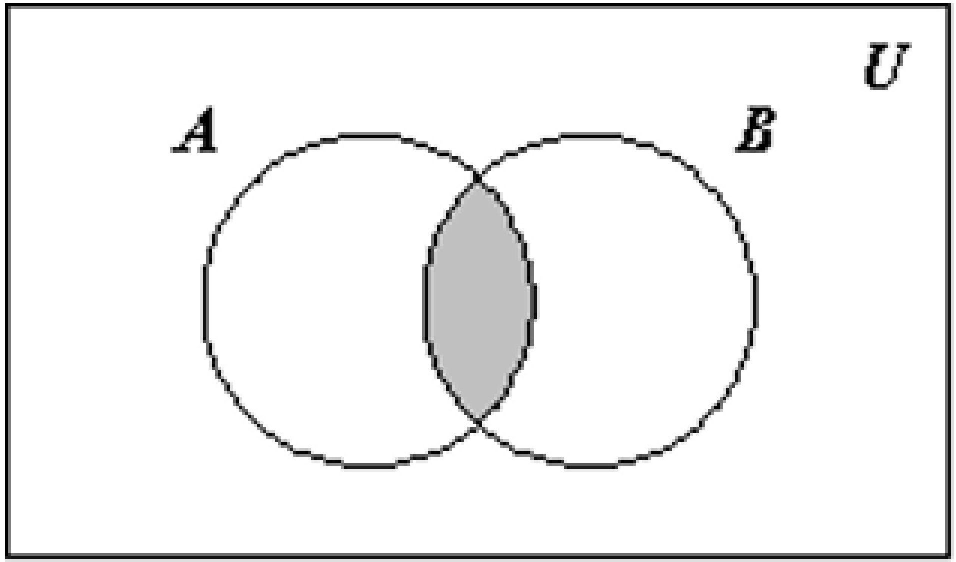
"เซต A อินเตอร์เซคชัน (Intersection) เซต B" เขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A และเป็นสมาชิกของเซต B โดยสามารถแสดงเป็นสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

ตัวอย่าง $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{3,4,5\}$

ดังนั้น $A \cap B = \{3\}$

สามารถนำ $A \cap B$ มาแสดงเป็นแผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้



นิยาม

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆแล้ว

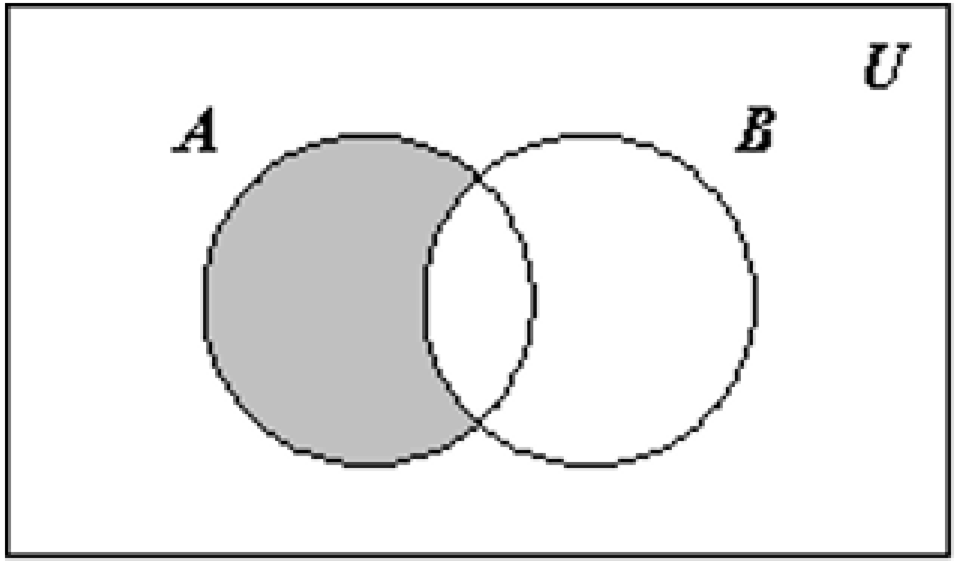
“*ผลต่าง (Difference) ของเซต* A *และเซต* B” เขียนแทนด้วย $A-B$ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B โดยสามารถแสดงเป็นสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$A-B=\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

ตัวอย่าง $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{3,4,5\}$

ดังนั้น $A - B = \{1,2\}$

สามารถนำ $A - B$ มาแสดงเป็นแผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้



นิยาม

ให้ A เป็นเซตใดๆแล้ว

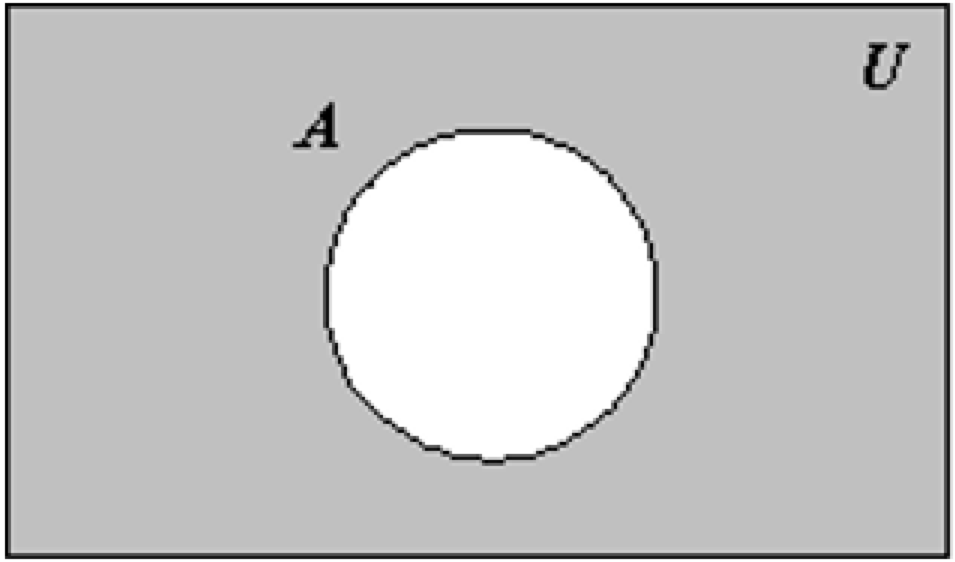
"*คอมพลีเมนต์ (Complement) ของเซต* A" เขียนแทนด้วย $\overline{A}$ คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต A โดยสามารถแสดงเป็นสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$\overline{A} = \{x \mid (x \notin A)\}$$

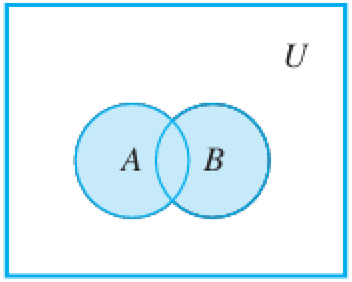
ตัวอย่าง $A = \{1,2,3\}$ และ $\mathbf{U} = \{x \mid (x < 10) \wedge (x \in \mathbf{Z}^{+})\}$

ดังนั้น $\overline{A} = \{4,5,6,7,8,9\}$

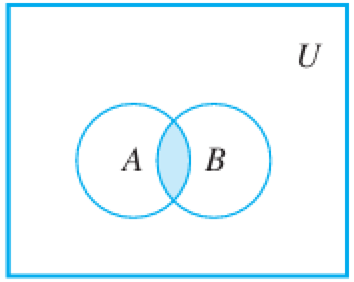
สามารถนำ $\overline{A}$ มาแสดงเป็นแผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้



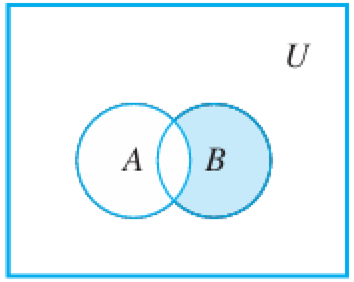
ตัวปฏิบัติการของเซต (Set Operations)



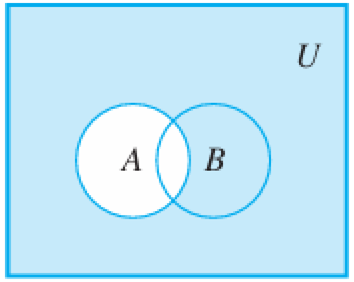
Shaded region represents $A \cup B$.



Shaded region represents $A \cap B$.



Shaded region represents $B - A$.



Shaded region represents A^c.

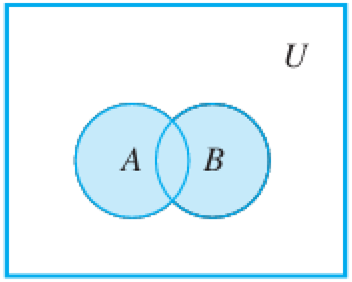
$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ or } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ and } x \in B\},$$

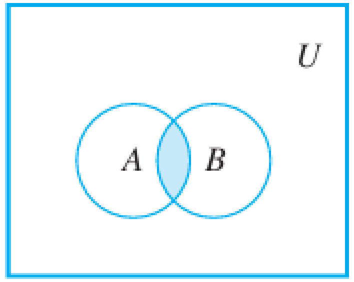
$$B - A = \{x \in U \mid x \in B \text{ and } x \notin A\},$$

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

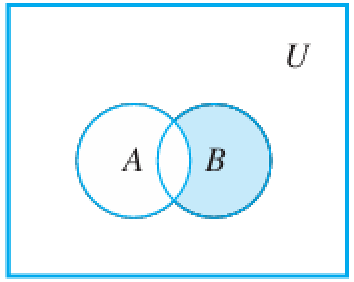
ตัวปฏิบัติการของเซต (Set Operations)



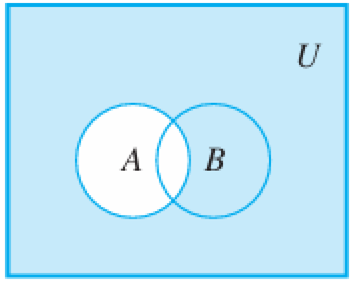
Shaded region represents $A \cup B$.



Shaded region represents $A \cap B$.



Shaded region represents $B - A$.



Shaded region represents A^c.

Let the universal set be the set $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ and let $A = \{a, c, e, g\}$ and $B = \{d, e, f, g\}$. Find $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, and A^c.

Solution

$A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$ $\quad$ $A \cap B = \{e, g\}$

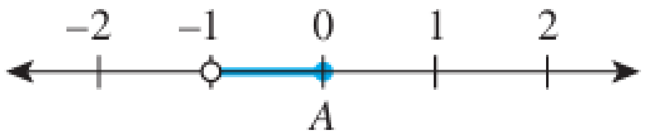
$B - A = \{d, f\}$ $\quad$ $A^c = \{b, d, f\}$

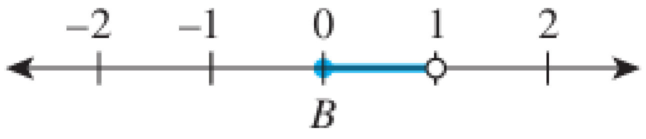
An Example with Intervals

Let the universal set be the set $\mathbf{R}$ of all real numbers and let

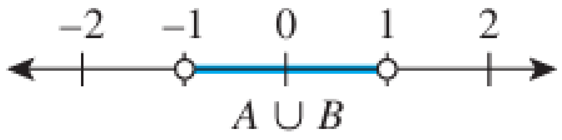
$$A = (-1,\ 0] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \le 0\} \text{ and } B = [0,\ 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x < 1\}.$$

These sets are shown on the number lines below.





$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1,\ 0] \text{ or } x \in [0,\ 1)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1,\ 1)\} = (-1,\ 1).$$

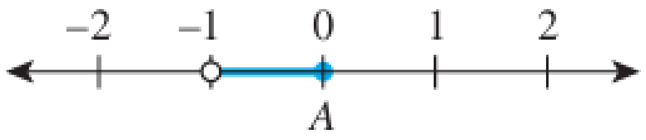


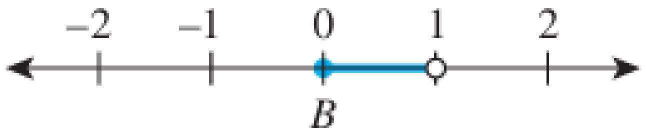
An Example with Intervals

Let the universal set be the set **R** of all real numbers and let

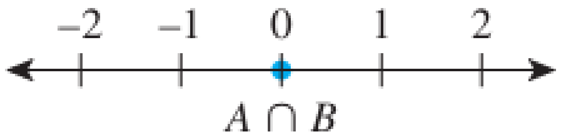
$$A = (-1,\ 0] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 0\} \text{ and } B = [0,\ 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

These sets are shown on the number lines below.





$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in (-1,\ 0] \text{ and } x \in [0,\ 1)\} = \{0\}.$$

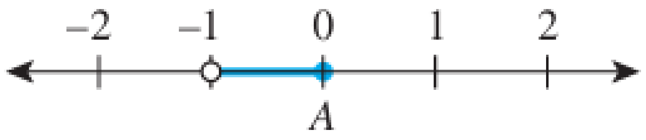


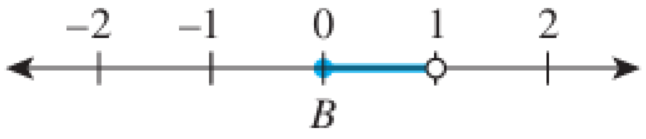
An Example with Intervals

Let the universal set be the set $\mathbf{R}$ of all real numbers and let

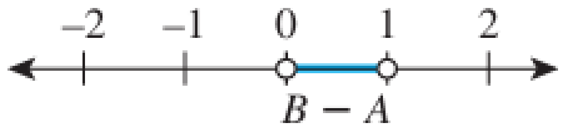
$$A = (-1,\ 0] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \le 0\} \text{ and } B = [0,\ 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x < 1\}.$$

These sets are shown on the number lines below.





$$B - A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in [0,\ 1) \text{ and } x \notin (-1,\ 0]\} = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$$

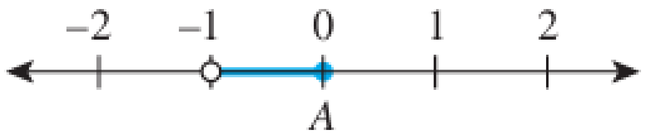


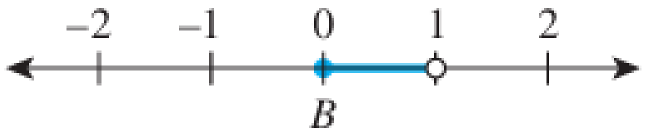
An Example with Intervals

Let the universal set be the set $\mathbf{R}$ of all real numbers and let

$$A = (-1,\ 0] = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 0\} \text{ and } B = [0,\ 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

These sets are shown on the number lines below.

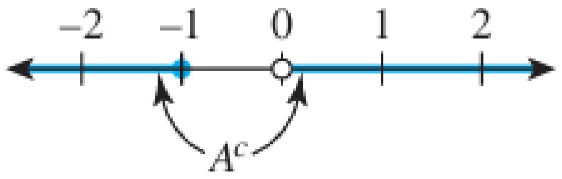




$$\begin{aligned} A^c &= \{x \in \mathbf{R} \mid \text{it is not the case that } x \in (-1,\ 0]\} \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid \text{it is not the case that } (-1 < x \text{ and } x \leq 0)\} \\ &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -1 \text{ or } x > 0\} = (-\infty,\ -1] \cup (0,\ \infty) \end{aligned}$$

by definition of the double inequality

by De Morgan's law



Disjoint Set

Two sets are called *disjoint* if their intersection is the empty set.

Let $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ and $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Because $A \cap B = \emptyset$, A and B are disjoint.

ทฤษฎีบท

ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

กฎเกณฑ์ต่างๆของเซต (Set Equivalence Laws)

การสมมูลกันทางเซต (Set Equivalences)	
การสมมูลกัน (Equivalence)	*ชื่อ (Name)*
$A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$	Identity Laws
$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Domination Laws
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotent Laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Double Negation Law
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Commutative Laws

กฎเกณฑ์ต่างๆของเซต (Set Equivalence Laws)

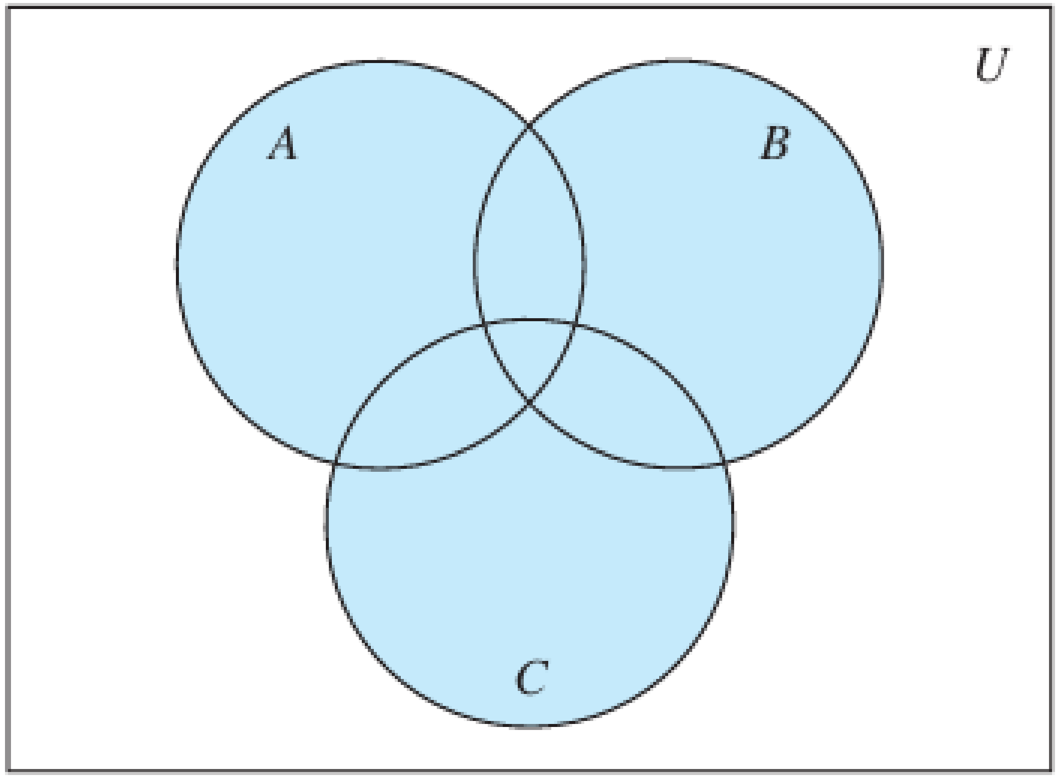
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Associative Laws
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive Laws
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's Laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption Laws
$A \cup \overline{A} = \mathbf{U}$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$	Complement Laws

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

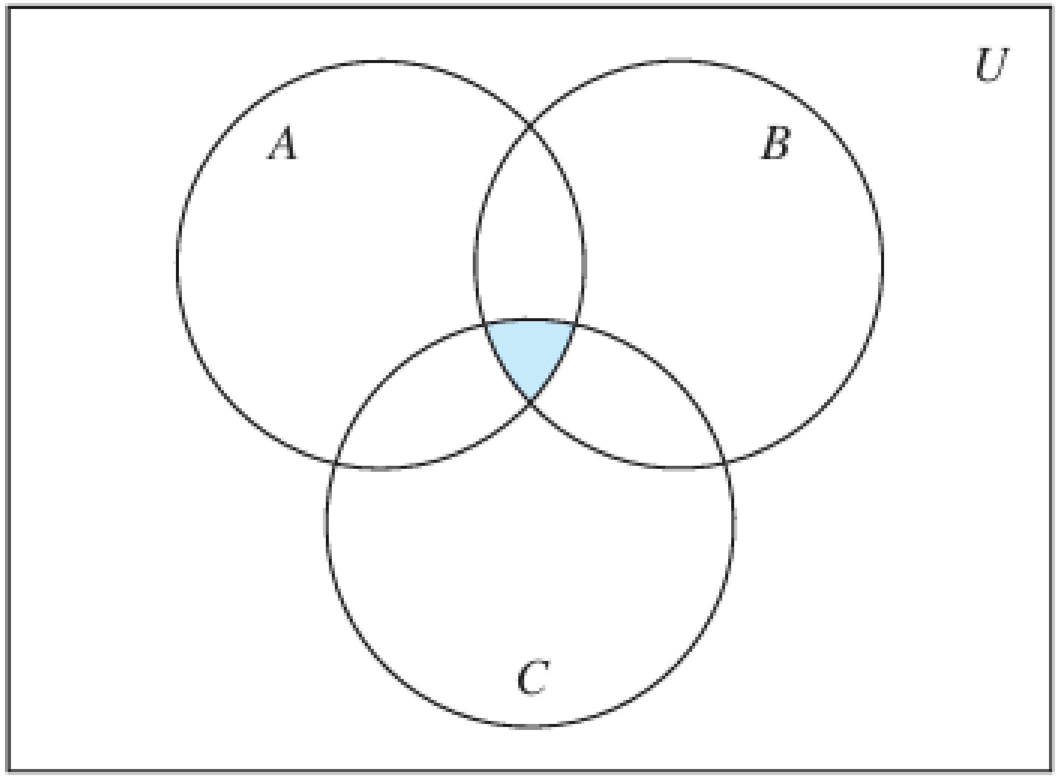
<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{De Morgan Law} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{De Morgan Law} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{Commutative Law} \\
\overline{A \cup (B \cap C)} &= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{Commutative Law}
\end{aligned}$$

Generalized Unions and Intersections



(a) $A \cup B \cup C$ is shaded.



(b) $A \cap B \cap C$ is shaded.

Let $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, and $C = \{0, 3, 6, 9\}$. What are $A \cup B \cup C$ and $A \cap B \cap C$?

Solution: The set $A \cup B \cup C$ contains those elements in at least one of A, B, and C. Hence,

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}.$$

The set $A \cap B \cap C$ contains those elements in all three of A, B, and C. Thus,

$$A \cap B \cap C = \{0\}.$$ ◀

นิยาม

ให้ A_i เป็นเซตใดๆ โดยที่ $i \in \mathbf{Z}^+$ แล้ว

"การสะสมยูเนียนของเซต (Union of a collection of set)" เขียนแทนด้วย

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n$$

"การสะสมอินเตอร์เซคชันของเซต (Union of an intersection of set)" เขียนแทนด้วย

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n$$

Finding Unions and Intersections of More than Two Sets

For each positive integer i, let $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

$$
\begin{aligned}
A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid\ & x \text{ is in at least one of the intervals } (-1, 1), \\
& \text{or } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \text{ or } \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\}
\end{aligned}
$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}$$

$$= (-1,\ 1)$$

because all the elements in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ and $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ are in $(-1,\ 1)$

Finding Unions and Intersections of More than Two Sets

For each positive integer i, let $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

$$
\begin{aligned}
A_1 \cap A_2 \cap A_3 &= \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ is in all of the intervals } (-1,\ 1), \\
&\qquad \text{and } \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \text{ and } \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\} \\
&= \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\tfrac{1}{3} < x < \tfrac{1}{3}\right\} \qquad \text{because } \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \subseteq \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \subseteq (-1, 1) \\
&= \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Finding Unions and Intersections of More than Two Sets

For each positive integer i, let $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ is in at least one of the intervals } \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right), \text{ where } i \text{ is a positive integer}\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 1\}$$

$$= (-1,\ 1)$$

because all the elements in every interval $\left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ are in $(-1,\ 1)$

Finding Unions and Intersections of More than Two Sets

For each positive integer i, let $A_i = \left\{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i}\right\} = A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ is in all of the intervals } \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \text{, where } i \text{ is a positive integer}\}$$

$$= \{0\}$$

because the only element in every interval is 0

■