Homework

Class : Linear Algebra (20-Aug-22)

จากโจทย์ : (จากชีท p.12)

3. กำหนดเมทริกซ์

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix}$$

3.1 จงหาค่าของ $\|A\|_2$ → euclidian norm of matrix A

3.2 จงหาค่าของ $\|A^{-1}\|_2$

3.3 จงหาค่าไอเก้นของเมทริกซ์ A

3.1 หา $\|A\|_2 = ?$

Sol จาก ทฤษฎีบท 12 เราทราบว่า

$$\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)}} \quad \text{— (1)}$$

เมื่อ A เป็น Squared Matrix ขนาด $n \times n$

และจากนิยาม 1.9 เราทราบว่า สำหรับ matrix A ใดๆ เราจะสามารถหา ρ (spectral radius) ได้โดย.

$$\boxed{\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|} \quad \text{— (2)}$$

โดยที่ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าไอเก้นทั้งหมดของ matrix A

ซึ่งเราทราบว่า สำหรับเมทริกซ์ A ใดๆ ตามข้อกำหนดเดียวกัน จะหา λ ได้โดย

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0} \quad \text{— (3)}$$

แต่ในเคสนี้ เราก็แค่เปลี่ยนจากการหา λ สำหรับ $\rho(A)$ มาเป็นการหา λ สำหรับ $\rho(A^t \cdot A)$

ดังนั้น จึงต้องแทน A ใน (3) ให้กลายเป็น A^tA

∴ เราจะได้สมการใหม่คือ

$$\boxed{\det(A^t \cdot A - \lambda I) = 0} \quad \text{(4)}$$

∴ flow การทำงานของ 3.1 คือ

#1 หา A^+

#2 : ใช้สมการหา λ.

#3 หา max λ

#4) ตอบ $\sqrt{\#3}$

Flow 3.1

#1 หา $A^+ = ?$

จาก $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{— } (5)$$

$$\therefore A^+ = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{— } (6)$$

#2 หา $\lambda = ?$

จาก (4) ของสมการเมื่อกี้

$$\lambda = \det\left(\underbrace{A^+ \cdot A}_{=\,?} - \lambda I\right) \quad \text{— } (4)$$

หา (5) × (6) = ?

$$A^+ \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \cancel{0 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}}}^{\,0} + \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \cancel{\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)(0)}_{\,0} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) & \cancel{0 \times 0} + \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{3} + \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{64}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{64}{3} \end{bmatrix}$$

$A^+ \cdot A$

חשב $A^{t}\cdot A = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{64}{3} \end{bmatrix}$

$A^{t}A - \lambda I = ?$

$$A^{t}A-\lambda I = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{64}{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{64}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{10}{3}-\lambda\right) & \left(-\frac{8}{3}-\lambda\right) \\ -\frac{8}{3} & \left(\frac{64}{3}-\lambda\right) \end{bmatrix}$$

$\det(A^{t}\cdot A - \lambda I) =$

$\det(A^{t}\cdot A - \lambda I) =$

$$\left[\left(\frac{10}{3}-\lambda\right)\left(\frac{64}{3}-\lambda\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}-\lambda\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{640}{9} - \frac{10}{3}\lambda - \frac{64}{3}\lambda + \lambda^{2}\right) + \left(-\frac{64}{9} \quad -\frac{8}{3}\lambda\right)\right]$$

$$= \left(\frac{576}{9}\right) - \frac{82}{3}\lambda + \lambda^{2}$$

$$= \lambda^{2} - \left(\frac{82}{3}\right)\lambda + 64$$

חשב λ ערך=עצמי

$$\lambda = \frac{-\left(-\frac{82}{3}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{82}{3}\right)^{2} - 4\cdot 1\cdot 64}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{41+\sqrt{1105}}{3}, \quad \frac{41-\sqrt{1105}}{3}$$

ערכי $\lambda = \dfrac{41 + \sqrt{1105}}{3}$, לכן $= \dfrac{41 - \sqrt{1105}}{3}$

max λ

$\therefore \quad \rho(A^t \cdot A) = \dfrac{41 + \sqrt{1105}}{3}$

לכן $=$ עפ"י (1) $\quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t \cdot A)}$

$\therefore \|A\|_2 = \sqrt{\dfrac{41 + \sqrt{1105}}{3}}$ Ans

$$\boxed{\therefore \|A\|_2 \approx 4.975}$$

3.2 จงหา $\|A^{-1}\|_2 = ?$ → โจทย์ให้หา Euclidian Norm ของ inverse matrix A ว่ามีค่าเท่าไหร่ ?

Step การทำงาน
1. หา $A^{-1} = ?$
2. กลับไปดูที่ $\boxed{\text{flow 3.1}}$ ทำเหมือนเดิม ✓

Sol จาก 5 ;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{—— (5)}$$

เราทราบว่าการหา inverse ของเมทริกซ์ ขนาด 2 x 2 สามารถหาได้จากสมการ

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}} \quad \text{—— (7)}$$

โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

∴ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) - \cancel{0}} \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

0x....

$$= \frac{1}{\left(\frac{\cancel{24}\,8}{\cancel{3}\,1}\right)} \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{8\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{8\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ans

ต่อไป จะทำตามแบบ $\boxed{\text{flow 3.1}}$

ขั้นตอนต่อไป

① หา $(A^{-1})^+ = ?$

② หา $(A^{-1})^+(A^{-1}) = ?$

③ หา λ จาก

$$\det\left((A^{-1})^+(A^{-1}) - \lambda I\right) = 0$$

④ $\rho\left(A^{-1}(A^{-1})^+\right) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$

⑤ $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{④}$

---

① $(A^{-1})^+ = ?$

จาก $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{8\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{8\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ — ⑧

$$\therefore (A^{-1})^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{3}} & \frac{3}{8\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$ ⑨

② หา ⑧ × ⑨

$$(A^{-1})^+(A^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{3}} & \frac{3}{8\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{8\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{3}{8\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right) + 0 \\ \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 0 & \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{3}{8\sqrt{3}}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{3}{32} \end{bmatrix} \sim (A^{-1})^+(A^{-1})$$

③ หา λ จาก $\det\left[(A^{-1})^+(A^{-1}) - \lambda I\right) = 0$

$$(A^{-1})^+(A^{-1}) - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{3}{32} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{+}(CA^{-1}) - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{3}{32} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{3}{32} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{24} - \lambda \\ \frac{1}{24} - \lambda & \frac{3}{32} - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{—} \quad (10)$$

∴ จาก det ของ (10)

$$\det((10)) = 0 \; ;$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\left(\frac{3}{32} - \lambda\right) - \left(\frac{1}{24} - \lambda\right)\left(\frac{1}{24} - \lambda\right) = 0$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{32}\right) - \frac{1}{3}\lambda - \frac{3}{32}\lambda + \lambda^2\right]$$

$$- \left[\frac{1}{576} - \frac{1}{12}\lambda + \lambda^2\right]$$

$$= \left[\frac{1}{32} - \frac{35}{96}\lambda + \cancel{\lambda^2}\right] - \left[\frac{1}{576} - \frac{1}{12}\lambda + \cancel{\lambda^2}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{576}\right) - \frac{35}{96}\lambda - \frac{8}{96}\lambda$$

$$= \frac{17}{576} - \frac{43}{96}\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{17}{576} - \frac{43}{96}\lambda = 0$$

$$\frac{17}{576} = \frac{43}{96}\lambda$$

$$\lambda = \left(\frac{17}{\cancel{576}_{6}}\right)\left(\frac{\cancel{96}^{1}}{43}\right)$$

$$\therefore \lambda = \frac{17}{258} \quad \text{Ans}$$

λ มีค่าเดียว $\therefore \lambda_{max} = \frac{17}{258}$ ✱

$$\rho\left(A^{-1}\cdot(A^{-1})^{T}\right) = \max \lambda$$

$$\therefore \rho\left(A^{-1}\cdot(A^{-1})^{T}\right) = \frac{17}{258} \quad \text{--- (11)}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{(11)}$$

$$\therefore \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{17}{258}} \quad \text{Ans}$$

หรือถ้ายกค่าแก้โจทย์

$$\boxed{\|A^{-1}\|_2 = 0.2567} \quad \text{Ans}$$

3.3 หาค่าไอเกน ของเมทริกซ์ A

sol/ เราทราบมาแล้วว่า

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

และเราทราบจากนิยาม 1.8 ว่า

$$Au = \lambda u$$

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}u_2 \\ 0 + \frac{8}{\sqrt{3}}u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} - \lambda\right)u_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}u_2 \\ \left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \lambda\right)u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} + \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{—— (12)}$$

ระบบสมการ (12) จะมีผลเฉลยไม่เป็น vector ศูนย์ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} - \lambda & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งก็คือ ให้ det = 0

$$\left(\frac{3}{\sqrt{3}} - \lambda\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}} + \lambda\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0) = 0$$

$0 = 0$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{\sqrt{3}}\lambda - \frac{8}{\sqrt{3}}\lambda - \lambda^2 = 0$$

$$\frac{24}{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}\lambda - \lambda^2 = 0$$

$$(-1)\lambda^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)\lambda + 8 = 0$$

∴ หา λ จาก

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

แก้สมการ โดยแทน

$a = (-1)$ $\quad c = 8$

$b = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

จะได้ว่า

$$\boxed{\lambda = -\frac{8}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}} \quad \text{—— (13)}$$

จากคำตอบ 2 ค่าข้างล่างนี้

สำหรับ $\lambda = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ เมื่อแทน λ ลงใน (12)

จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{8}{\sqrt{3}}\right) & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \underbrace{\cancel{\frac{8}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)}}_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{11}{\sqrt{3}}U_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}U_2 = 0 \quad \text{——} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(11U_1 - 1) = 0$$

$$11U_1 = 1$$

$$U_1 = \frac{1}{11}$$

$$U_1 = \frac{1}{11} \rightarrow (13)$$

$$\cancel{\frac{11}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\cancel{11}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}U_2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}U_2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1 - U_2) = 0 \quad \therefore U_2 = 1$$

#

$$\boxed{\therefore \text{ สำหรับ } \lambda = -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ จะได้ไอเกนเวกเตอร์คือ } \begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Ans

และสำหรับ $\lambda = \sqrt{3}$ เมื่อแทน λ

ลงใน (2) จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} - (\sqrt{3}) & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{3-3}{\sqrt{3}}}\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{8+3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{11}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} U_2 = 0 \quad \text{— (14)}$$

$$\frac{11}{\sqrt{3}} U_2 = 0 \quad \text{— (15)}$$

∴ จาก (14), (15)

เมื่อแก้สมการ จะทำให้ได้ $U_2 = 0$

ซึ่งนั่นทำให้ได้ $U_1 = 0$ ด้วย

∴ สำหรับ $\lambda = \sqrt{3}$

จะได้ไอเกนเวกเตอร์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ans