Homework : SVD (class 27th - Aug - 22) 1

3. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

จงใช้ singular value decomposition ในการแยกเมทริกซ์ A ให้อยู่ในรูป $A = VDU^t$ พร้อมทั้งแสดงวิธีการตรวจคำตอบ

วิธีทำ ศาสตร์ของผลในโจทย์

เราต้องหาเมทริกซ์ U, V และ D ที่ทำให้ $A = VDU^t$

โดยเราทราบว่า

V : ประกอบด้วย eigen vector ของ matrix : $A \cdot A^t$ — ①

U : ประกอบด้วย eigen vector ของ matrix : $A^t \cdot A$ — ②

D : ประกอบด้วย รากที่สองของ ค่า eigen ที่ $\neq 0$ — ③

(ของ $A \cdot A^t$ หรือ $A^t \cdot A$)

จาก $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

เราสามารถหา A^t ได้คือ ; $\boxed{A_t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}}$ — ④

เราจะเริ่มจาก ① หา $A \cdot A^t$ เพื่อหา V

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3)(3)+(2)(2)+(2)(2) & (3)(2)+(2)(3)+(2)(-2) \\ (2)(3)+(3)(2)+(-2)(2) & (2)(2)+(3)(3)+(-2)(-2) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}} \quad — ⑤$$

หา eigen value จาก $\det(A \cdot A^t - \lambda I) = 0$

ซึ่งเราได้มาจากการหา det ที่ = 0 ของ ...

$$= \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot A^t - \lambda I = \begin{bmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{bmatrix} \quad — ⑥$$

กำหนดให้ $\begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0$

หรือคือ $(17-\lambda)^2 - 8^2 = 0$

สูตรบอกว่า $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

ปรับรูปสมการได้ว่า

$$[(17-\lambda)-8][(17-\lambda)+8] = 0$$

$$\underbrace{(9-\lambda)}_{\text{ต้อง }=0}\ \text{หรือ}\ \underbrace{(25-\lambda)}_{\text{ต้อง }=0} = 0$$

ถ้า $9-\lambda = 0$

$\therefore \lambda = 9$

ถ้า $25-\lambda = 0$

$\therefore \lambda = 25$

$\therefore \lambda = 9, 25$

ซึ่งเราจะต้องหาค่าเวกเตอร์ 2 ตัว คือ $\vec{V_1}$ และ $\vec{V_2}$

3

if $\lambda = 9$ (กำหนดให้ใช้กับ $\vec{v}_1$)

แทน $\lambda = 9$ ลงใน (6) จะได้ว่า;

$$A \cdot A^t - \lambda I = \begin{bmatrix} 17-9 & 8 \\ 8 & 17-9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A \cdot A^t - \lambda I = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{—} (7)$$

ซึ่งเราจะหา $\vec{v}_i$ ได้จากสูตร

$$(A \cdot A^t - \lambda I)(\vec{v}_i) = 0 \quad \text{—} (8)$$

และกำหนดให้ $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$ — (9)

แทนค่า (7), $\vec{v}_i = \vec{v}_1$ ลงใน (8);

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $8v_{11} + 8v_{12} = 0$

$8v_{11} + 8v_{12} = 0$ -

(ได้สมการ 2 สมการเหมือนกันคือ $v_{11} + v_{12} = 0$

ในกรณีนี้ จะกำหนดให้ $v_{11} = -1$ และ $v_{12} = 1$

$$\therefore \boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

ถ้าทั้งคู่เป็น 0 เราจะได้ Trivial Solution เราไม่ต้องการ

และ $|\vec{v}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$

$$\therefore |\vec{v}_1| = \sqrt{2}$$

if $\lambda = 25$ (กำหนดให้ใช้กับ $\vec{v}_2$)

แทน $\lambda = 25$ ลงใน 6 จะได้ว่า.

$$A \cdot A^t - \lambda I = \begin{bmatrix} 17-25 & 8 \\ 8 & 17-25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A A^t - \lambda I = \begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{—} (10)$$

และกำหนดให้ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$ — (11)

แทนค่า (10), $\vec{v}_i = \vec{v}_2$ ลงใน (8);

$$\begin{bmatrix}-8 & 8\\ 8 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$-8v_{21}+8v_{22}=0$$
$$8v_{21}-8v_{22}=0$$

ซึ่งจากสมการทั้งสอง จะได้ว่า

$$v_{21}=v_{22}$$

เพื่อให้ง่าย (และไม่เป็น trivial solution)

เราจะให้ $v_{21}=1$

$\therefore v_{22}=1$

$$\therefore \boxed{\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$$

และ $|\vec{v}_2| = \sqrt{(1)^2+(1)^2}$

$\therefore |\vec{v}_2| = \sqrt{2}$

จากตอนแรกที่เรากำหนดให้

$$v=\begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{bmatrix}$$

$$\therefore v=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

ขั้นที่ ② หา $A^t \cdot A$ เพื่อหา U

$$A^tA=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$A^tA=\begin{bmatrix}(3)(3)+(2)(2) & (3)(2)+(2)(3) & (3)(2)+(2)(-2)\\ (2)(3)+(3)(2) & (2)(2)+(3)(3) & (2)(2)+(3)(-2)\\ (2)(3)+(-2)(2) & (2)(2)+(-2)(3) & (2)(2)+(-2)(-2)\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^t \cdot A=\begin{bmatrix}13 & 12 & 2\\ 12 & 13 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{bmatrix} \rightarrow 12$$

หา eigen value จาก $\det(12-\lambda I)=0$

ซึ่งจากนั้น

$$12-\lambda I;\ \begin{bmatrix}13 & 12 & 2\\ 12 & 13 & -2\\ 2 & -2 & 8\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 13-\lambda & 12 \\ 12 & 13-\lambda \\ 2 & -2 \end{matrix} \quad \text{—— } 13$$

$$= \left[(13-\lambda)(13-\lambda)(8-\lambda) + \underbrace{(12)(-2)(2)}_{-48} + \underbrace{(2)(12)(-2)}_{-48} \right]$$

$$- \left[(2)(13-\lambda)(2) + (-2)(-2)(13-\lambda) + (8-\lambda)(12) \right]$$

$$= \left[(13-\lambda)^2(8-\lambda) - 96 \right] - \left[(13-\lambda)\cdot 4 + (13-\lambda)(4) + (8-\lambda)(12) \right]$$

$$= \left[(-1)\lambda^3 + 34\lambda^2 - 377\lambda + 1352 - 96 \right]$$

-363λ , -296 , $+12\lambda + 1\lambda + 1\lambda$

$$- \left[(52-\lambda) + (52-\lambda) + 96 - 12\lambda \right]$$

$$\boxed{(13-\lambda)^2(8-\lambda)}$$

$$= (169 - 26\lambda + \lambda^2)(8-\lambda)$$

$$= (1352 - 169\lambda) + (-208\lambda + 26\lambda^2) + (8\lambda^2 - \lambda^3)$$

$$= (-1)\lambda^3 + 34\lambda^2 - 377\lambda + 1352$$

$$= (-1)\lambda^3 + 34\lambda^2 - 363\lambda + 1056 \quad (14)$$

จาก det ต้อง $= 0$

$$\therefore (-1)\lambda^3 + 34\lambda^2 - 363\lambda + 1056 = 0$$

กดเครื่อง

$\lambda = 4.6740,$
$14.663 - 3.3061i,$
$14.663 + 3.306i$

if $\lambda = 4.6740$,

แทน $\lambda = 4.6740$ ลงใน (13)

จะได้ $A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} 13-4.6740 & 12 & 2 \\ 12 & 13-4.6740 & -2 \\ 2 & -2 & 8-4.6740 \end{bmatrix}$

$\therefore A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} 8.326 & 12 & 2 \\ 12 & 8.326 & -2 \\ 2 & -2 & 3.326 \end{bmatrix}$ (15)

ต่อไปหาค่าของ $\vec{u}_i$ ได้จากสมการ

$(A^tA - \lambda I)(\vec{u}_i) = 0$ (16)

โดยที่ $\vec{u}_i = \vec{u}_1, \vec{u}_2$ หรือ $\vec{u}_3$

และกำหนดให้ $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix}$

และ $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix}$

แทนค่า $\vec{u}_1 = \vec{u}_i$ และ (15) ลงใน (16)

$$\begin{bmatrix} 8.326 & 12 & 2 \\ 12 & 8.326 & -2 \\ 2 & -2 & 3.326 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$8.326u_{11} + 12u_{12} + 2u_{13} = 0$

$12u_{11} + 8.326u_{12} - 2u_{13} = 0$

$2u_{11} - 2u_{12} + 3.326u_{13} = 0$

จะได้ว่า $u_{11} = 0.2664$

$u_{12} = -0.1437$

$u_{13} = -0.2466$

และ $|\vec{u}_1| = \sqrt{(0.2664)^2 + (-0.1437)^2 + (-0.2466)^2}$

$\therefore |\vec{u}_1| = 0.3643$

$\therefore \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} (0.2664/0.3643) \\ (-0.1437/0.3643) \\ (-0.2466)/(0.3643) \end{bmatrix}$

$$\therefore \vec{U}_1 = \boxed{\begin{bmatrix} 0.7313 \\ -0.3945 \\ -0.6769 \end{bmatrix}} \rightarrow *$$

if $\lambda = 14.663 - 3.306i$

แทน λ ลงใน (13) จะได้ว่า

$$A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} 13-(14.663-3.306i) & 12 & 2 \\ 12 & 13-(14.663-3.306i) & -2 \\ 2 & -2 & 8-(14.663-3.306i) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} -1.663-3.306i & 12 & 2 \\ 12 & -1.663-3.306i & -2 \\ 2 & -2 & -6.663-3.306i \end{bmatrix} \quad (17)$$

แทนค่า $\vec{U}_2 = \vec{U}_i$ และ (17) ลงใน (16) ;

$$\begin{bmatrix} -1.663-3.306i & 12 & 2 \\ 12 & -1.663-3.306i & -2 \\ 2 & -2 & -6.663-3.306i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1.663-3.306i)U_{21} + 12U_{22} + 2U_{23} = 0$$

$$12U_{21} + (-1.663-3.306i)U_{22} + (-2)U_{23} = 0$$

$$2U_{21} - 2U_{22} + (-6.663-3.306i)U_{23} = 0$$

จะได้ค่า

$$U_{21} = 0, \ U_{22} = 0, \ U_{23} = 0$$

และ $|\vec{U}_2| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$

$\therefore |\vec{U}_2| = 0$ ไม่นำมาพิจารณา

$$\therefore \vec{U}_2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \rightarrow *$$

if $\lambda = 14.663 + 3.3061^{\circ}$

แทน λ ลงใน (13) จะได้ว่า

$$A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} 13-(14.663+3.363i) & 12 & 2 \\ 12 & 13-(14.663+3.306i) & -2 \\ 2 & -2 & 8-(14.663+3.306i) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^tA - \lambda I = \begin{bmatrix} -1.663+3.306i & 12 & 2 \\ 12 & -1.663+3.306i & -2 \\ 2 & -2 & -6.663+3.306i \end{bmatrix}$$

แทนค่า $\vec{U}_3 = \vec{U}_i$ และ (17) ลงใน (16) ;

$$\begin{bmatrix} -1.663+3.306i & 12 & 2 \\ 12 & -1.663+3.306i & -2 \\ 2 & -2 & -6.663+3.306i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{31} \\ U_{32} \\ U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากการแก้สมการ (ดูวิธีเดียวกับหน้าที่ 7)

เราจะได้ว่า $U_{31} = 0$, $U_{32} = 0$, $U_{33} = 0$

$\therefore |\vec{U}_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2}$

$\therefore |\vec{U}_3| = 0$ (ไม่สามารถพิจารณา) $\rightarrow \therefore \boxed{\vec{U}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ → ✱

แทน $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$ ลงใน

$U = \langle \vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3 \rangle$ — (18)

จะได้ว่า

$$\therefore U = \begin{bmatrix} 0.7313 & 0 & 0 \\ -0.3945 & 0 & 0 \\ -0.6769 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น U^t จะมีค่าเป็น

$$U^t = \begin{bmatrix} 0.7313 & -0.3945 & -0.6769 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

หา D

เราทราบว่า D ประกอบไปด้วย
จากรากที่สอง ของ eigen value ของ $A \cdot A^t$ หรือ $A^t \cdot A$
และจากการคำนวณ ⑥ เราทราบมาแล้วว่า
eigen value ค่าของ $A \cdot A^t$ มีค่าคือ

$$\boxed{\lambda = 9, 25}$$

สิ่งที่เราจะเลือกตัวนี้

$$\therefore D = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ \sqrt{25} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ จาก $A = VDU^t$

จะได้ว่า

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7313 & -0.3945 & -0.6769 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ans}}$$

(ทด) ค่าที่เราทราบตอนนี้

$$A = VDU^t$$

$A \cdot A^t$

$$\therefore V = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$(A^t \cdot A)^t$

$$U^t = \begin{bmatrix} 0.7313 & -0.3945 & -0.6769 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$