Homework 2.1

Name : Puriwat Songrawee
ID : 6505607 1

ค้นหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดดังต่อไปนี้

2.1) Determine the coefficients a to d of the central difference scheme:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_j = au_{j-2} + bu_{j-1} + cu_{j+1} + du_{j+2}, \qquad (1)$$

using Taylor series expansion. What is the order of accuracy of the scheme? Is the scheme diffusive? Assume a uniformly spaced grid (Δx is constant).

Sol

เราจะแยกพิจารณา U_{j-2} , U_{j-1} , U_{j+1} และ U_{j+2} ดังนี้

$$U_{j+1} = U(x+h) = U(x) + hU'(x) + \frac{h^2}{2}U''(x) + \frac{h^3}{3!}U'''(x) + \frac{h^4}{4!}U^{(4)}(x)(\xi^+) \quad (2)$$

(c)

$$U_{j-1} = U(x-h) = U(x) - hU'(x) + \frac{h^2}{2}U''(x) - \frac{h^3}{3!}U'''(x) + \frac{h^4}{4!}U^{(4)}(x)(\xi^-) \quad (3)$$

b

$$u_{j+2} = u(x+2h) = u(x) + 2h\,u'(x) + \frac{(2h)^2}{2}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(x)(\xi^+)$$

$$= u(x) + 2h\,u'(x) + \frac{4h^2}{2}u''(x) + \frac{8}{3!}h^3u'''(x) + \frac{16h^4}{4!}u^{(4)}(x)(\xi^+) \quad (4)$$

(d)

$$u_{j-2} = u(x-2h) = u(x) - 2h\,u'(x) + \frac{(2h)^2}{2}u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(4)}(x)(\xi^-)$$

$$= u(x) - 2h\,u'(x) + \frac{4h^2}{2}u''(x) - \frac{8}{3!}h^3u'''(x) + \frac{16}{4!}h^4u^{(4)}(x)(\xi^-) \quad (5)$$

(a)

แทนค่า 2, 3, 4, 5 ลงใน 1 จะได้ว่า

$$u'(x) = a\left[u(x) - 2h\,u'(x) + 4\frac{h^2}{2}u''(x) - 8\frac{h^3}{3!}u'''(x)\right] +$$

$$b\left[u(x) - h\,u'(x) + 1\frac{h^2}{2}u''(x) - 1\frac{h^3}{3!}u''(x)\right] +$$

$$c\left[u(x) + h\,u'(x) + 1\frac{h^2}{2}u''(x) + 1\frac{h^3}{3!}u'''(x)\right] +$$

$$d\left[u(x) + 2h\,u'(x) + 4\frac{h^2}{2}u''(x) + 8h^3u'''(x)\right] + O(h^4)$$

$$= (a+b+c)\,u(x) + (-2a-b+c+2d)\,h\,u'(x) + (4a+b+c+4d)\frac{h^2}{2}u''(x)$$

$$+ (-8a-b+c+8d)\frac{h^3}{3!}u'''(x) + O(h^4)$$

Then;

$$\left.\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ ((-2a) + (-b) + c + 2d)h &= 1 \\ (4a + b + c + 4d)\frac{h^2}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Error is $\boxed{(-8a-b+c+8d)\frac{h^3}{3!}u'''(x)}$ Ans

จากข้อกำหนดที่ให้ จะได้ ผลลัพธ์ คือ

$$a = -d \qquad c = \frac{1}{2h} - 2d$$

$$b = 2d - \frac{1}{2h}$$

โดยที่ $h \neq 0$ (ไม่สามารถแก้ได้มากกว่านี้)

ซึ่งเราจะไม่สามารถหารูปทั่วไปของ $u'(x)$ ที่เป็นคำตอบสุดท้ายได้

แต่หากกำหนดให้ ค่าใดค่าหนึ่งใน $a, b, c, d = 0$ จะได้ดังนี้

$a = 0$

$b = -\frac{1}{2h}$ $\quad d = 0$

$c = \frac{1}{2h}$ $\quad$ และ $h \neq 0$

$$u'(x) = \frac{-\frac{1}{2}u(x-h) + \frac{1}{2}u(x+h)}{h} + O(h^2)$$

Ans

$b = 0$

$a = -\frac{1}{4h}$ $\quad d = \frac{1}{4h}$

$c = 0$ $\quad$ และ $h \neq 0$

$$u'(x) = \frac{-\frac{1}{4}u(x-2h) + \frac{1}{4}u(x+2h)}{h} + O(h^2)$$

Ans

$c = 0$

$a = -\frac{1}{4h}$ $\quad b = 0$

$d = \frac{1}{4h}$

จะได้คำตอบ แบบเดียวกับ $b = 0$

$d = 0$

จะได้ $b = -\frac{1}{2h}$ $\quad a = 0$

$c = \frac{1}{2h}$ $\quad h \neq 0$

ตอบเหมือนเคส $a = 0$