1. กำหนด $f(x,y) = \ln(2x+e)\cos(3y) + 5e^{xy}\sin(3x)$

จงหา 1.1 $\nabla f(0,0)$

วิธีทำ $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0))$

$f_x(x,y) = \left(\frac{1}{2x+e} \cdot 2\right)\cos(3y) + 5e^{xy}\cos(3x)3 + \sin(3x)5e^{xy}y$

$f_y(x,y) = -\ln(2x+e)\sin(3y)3 + 5\sin(3x)e^{xy}x$

$f_x(0,0) = \frac{2}{0+e}\cos(0) + \underbrace{5e^{0}}_{5(1)}\underbrace{\cos(0)3}_{(1)(3)} + 5\sin(0)5e^{0}(0)$

$= (\frac{2}{e}+15)\cancel{\times} + \cancel{15} + 0$

$f_y(0,0) = -\underbrace{\ln(e)}_{-1}\underbrace{\sin(0)}_{0}\underbrace{3}_{3} + 5\sin(0)e^{0}(0) = 0$ ☆

$\therefore \nabla f(0,0) = (\frac{2}{e} + 15, 0)$

1.2 $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ทิศเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$

$D_{\hat{u}} f(0,0) = (\frac{2}{e} + 15, 0) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

$= \frac{2}{e\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$

$f_x(x,y) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 2 \quad = x^2 + x - 2$

$f_y(x,y) = \frac{3y^2}{3} + (-1) \quad = y^2 - 1$

หาจุดวิกฤต

$x^2 + x - 2 = 0 \quad -①$

$y^2 - 1 = 0 \quad -②$

$x^2 + x - 2 = 0$	$y^2 - 1 = y^2 + 0y - 1 = 0$
$(x+2)(x-1) = 0$	$= (y-1)(y+1) = 0$
$x = -2, 1$	$y = 1, -1$

จุดวิกฤตคือ $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$

3. $D = f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b)$

$f_{xy}(x,y) = 0 \qquad f_{xx}(x,y) = 2x + 1 \qquad f_{yy}(x,y) = 2y$

จุดวิกฤต	f_{xy}	f_{xx} $2x+1$	f_{yy} $2(y)$	f_{xy}^2	$f_{xx} \cdot f_{yy}$	D
$(-2, 1)$	0	-3	2	0	-6	$6 > 0$
$(-2, -1)$	0	-3	-2	0	6	$-6 < 0$
$(1, 1)$	0	3	2	0	6	$-6 < 0$
$(1, -1)$	0	3	-2	0	-6	$6 > 0$

4. $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - y + 1$

ที่จุด $(-2,1)$ $D > 0$ แสดงว่าเป็นจุดอานม้า

$f(-2,1) = \frac{-8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2} + 4 = -\frac{7}{3} + 6 = \frac{-7}{3} + \frac{18}{3} = \frac{11}{3}$

$\therefore$ $(-2, 1, \frac{11}{3})$ เป็นจุดอานม้า

ที่จุด $(-2,-1)$ $D < 0$ และ $f_{xx}(-2,-1) < 0$ แสดงว่าเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

$f(-2,-1) = \frac{-8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{2} + 4 + 1 + 1 = -3 + 8 = 5$

$\therefore$ $(-2, -1, 5$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ที่จุด $(1,1)$ $D < 0$ และ $f_{xx}(1,1) > 0$ แสดงว่า เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

$f(1,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - 1 + 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{6}$

$\therefore$ $(1, 1, -\frac{5}{6})$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ที่จุด $(1,-1)$ $D > 0$ แสดงว่าเป็นจุดอานม้า

$f(1,-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1 + 1 = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $(1, -1, \frac{1}{2})$ เป็นจุดอานม้า