## การบ้านครั้งที่ 5

1.) กำหนด $f(x,y) = \ln(2x+e)\cos(3y) + 5e^{xy}\sin(3x)$

จงหา 1.1 $\nabla f(0,0)$

1.2 อนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y)$ ที่จุด $(0,0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$

วิธีทำ 1.1

$$f_x(x,y) = \cos(3y)\frac{1}{2x+e}\frac{d}{dx}\underset{2+0}{2x+e} + (5e^{xy}(\cos 3x)\frac{d}{dx}\underset{3}{3x}$$

$$+ \sin(3x)5e^{xy}\frac{d}{dx}\underset{y}{xy}$$

$$= \cos(3y)\frac{1}{2x+e}.(2) + 15e^{xy}\cos(3x) + 5ye^{xy}$$

$$\sin(3x)$$

$$= \cos(3y)\frac{2}{2x+e} + 15e^{xy}\cos(3x) + 5ye^{xy}\sin(3x)$$

$$f_x(0,0) = \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\frac{2}{0+e} + 15\overset{1}{e^0}\overset{1}{\cancel{\cos(0)}} + 5(0)e^0\overset{0}{\cancel{\sin(0)}}$$

$$= \left(\frac{2}{e} + 15\right)$$

$$f_y(x,y) = \ln(2x+e)(-\sin 3y)\frac{d}{dy}\underset{3}{3y} + \sin(3x)5e^{xy}\frac{d}{dy}\underset{x}{xy}$$

$$= -3\ln(2x+e)\sin(3y) + 5xe^{xy}\sin(3x)$$

$$f_y(0,0) = -3\ln(0+e)\underset{0}{\cancel{\sin(0)}} + 5(0)e^0\cancel{\sin(0)}^{0}$$

$$= 0$$

$$\therefore \nabla f(0,0) = \left(\frac{2}{e} + 15, 0\right) \quad \#$$

1.2 จาก $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{1+4}$$

$$= \sqrt{5}$$

NO. ..................

DATE / /

ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

$$\therefore D_{\vec{u}} f(0,0) = \left(\frac{2}{e}+15, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{e}+15\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 0$$

$$= \frac{2}{e\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}} \quad \#$$

---

2.) จงพิจารณาจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของพื้นผิว $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - y + 1$

วิธีทำ ① $f_x(x,y) = \frac{3}{3}x^2 + \frac{2}{2}x - 2(1)$

$$= x^2 + x - 2$$

$$f_y(x,y) = \frac{3}{3}y^2 - 1$$

$$= y^2 - 1$$

② หาจุดวิกฤต $x^2 + x - 2 = 0 \quad -①$

$y^2 - 1 = 0 \quad -②$

แยกตัวประกอบ

| | |
|---|---|
| $x^2 + x - 2 = 0$ | $y^2 - 1 = 0$ |
| $(x+2)(x-1) = 0$ | $(y-1)(y+1) = 0$ |
| $x + 2 = 0$ | $y - 1 = 0$ |
| $x = -2$ | $y = 1$ |
| $x - 1 = 0$ | $y + 1 = 0$ |
| $x = 1$ | $y = -1$ |
| $x = -2, 1$ | $y = 1, -1$ |

$\therefore$ จุดวิกฤต คือ $(-2,1), (-2,-1), (1,1), (1,-1)$ #

③ $D = f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$

จาก $f_x(x,y) = x^2 + x - 2$

$f_y(x,y) = y^2 - 1$

ได้

$f_{xy} = 0$

$f_{xx} = 2x + 1$

$f_{yy} = 2y$

| | | $2x+1$ | $2y$ | | | $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| จุดวิกฤต | $f_{xy}$ | $f_{xx}$ | $f_{yy}$ | $f_{xy}^2$ | $f_{xx}f_{yy}$ | $D$ |
| $(-2,1)$ | 0 | -3 | 2 | 0 | -6 | $6>0$ อานม้า |
| $(-2,-1)$ | 0 | -3 | -2 | 0 | 6 | $-6<0$ สูงสุดสัมพัทธ์ |
| $(1,1)$ | 0 | 3 | 2 | 0 | 6 | $-6<0$ ต่ำสุดสัมพัทธ์ |
| $(1,-1)$<br>x y | 0 | 3 | -2 | 0 | -6 | $6>0$ อานม้า |

④ $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - y + 1$

ที่จุด $(-2,1)$ $D>0$ แสดงว่าเป็นจุดอานม้า

$f(-2,1) = \frac{-2^3}{3} + \frac{1^3}{3} + \frac{-2^2}{2} - 2(-2) - 1 + 1$

$= \frac{-8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} + 4 - 1 + 1$

$= \frac{-7}{3} + 6$

$= \frac{-7}{3} + \frac{18}{3} = \frac{11}{3}$

$\therefore$ จุด $(-2, 1, \frac{11}{3})$ เป็นจุดอานม้า #

ที่จุด $(-2,-1)$ $D<0$ และ $f_{xx}(-2,-1)<0$ แสดงว่าเป็นจุด
สูงสุดสัมพัทธ์

NO. ..........

DATE / /

$$f(-2,-1) = \frac{-2^3}{3} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) - (-1) + 1$$

$$= \frac{-8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} + 4 + 1 + 1$$

$$= \frac{-\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} + 8$$

$$= -3 + 8$$

$$= 5$$

∴ จุด $(-2,-1,5)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ #

ที่จุด $(1,1)$ $D<0$ และ $f_{xx}(1,1)>0$ แสดงว่าเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

$$f(1,1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2(1) - 1 + 1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 - 1 + 1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6}$$

$$= \frac{-5}{6}$$

∴ จุด $(1,1,-\frac{5}{6})$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ #

ที่จุด $(1,-1)$ $D>0$ แสดงว่าเป็นจุดอานม้า

$$f(1,-1) = \frac{1^3}{3} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2(1) - (-1) + 1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1 + 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

∴ จุด $(1,-1,\frac{1}{2})$ เป็นจุดอานม้า #