Отчет по лабораторной работе номер 5 (Явный метод Рунге-Кутта 4 и 5 порядка)

Иванов Артур, гр. 932221

1 ноября 2025 г.

1 Постановка задачи

1. Найти численное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, используя явный методы Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

Решение найти в узловых точках $x_i = x_0 + ih$ с шагом h. Построить график функции $y(x)$. Методом двойного счета найти погрешности в точках x_i, построить график погрешностей. Найти максимальную погрешность на интервале.

2. Найти численное решение дифференциального уравнения 1-го порядка, используя явный методы Рунге-Кутта 5-го порядка:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

Решение найти в узловых точках $x_i = x_0 + ih$ с шагом h. Построить график функции $y(x)$. Методом двойного счета найти погрешности в точках x_i, построить график погрешностей. Найти максимальную погрешность на интервале.

2 Теория и формулы

Существует несколько формул Рунге-Кутта для решения дифференциального уравнения первого порядка. Наиболее распространенной является формула Рунге-Кутта при $r = 4$, которая имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}\right),$$

где

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \tag{1}$$

$$K_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \tag{2}$$

$$K_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \tag{3}$$

$$K_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right) \tag{4}$$

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле:

$$R_4 \approx \max_{i=\overline{1,\frac{n}{2}}} \frac{\left|y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)}\right|}{15}$$

Дополнительного повышения точности расчетов можно добиться, повысив порядок метода за счет увеличения количества операций на один шаг разностной сетки. Алгоритм расчета для метода Рунге-Кутта-Мерсона 5-го порядка представлен уравнениями:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_3 + k4\right), i = 0, 1, \dots \tag{5}$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i) \tag{6}$$

$$k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_0}{3}\right) \tag{7}$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_0 + k_1}{6}\right) \tag{8}$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0 + 3k_2}{8}\right) \tag{9}$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + \frac{k_0 - 3k_2}{2} + 2k_3\right) \tag{10}$$

Оценка погрешности полученного решения для данного дифференциального уравнения согласно правилу Рунге для данного метода определяется по формуле:

$$R_5 \approx \max_{i=\overline{1,\frac{n}{2}}} \frac{\left|y_{2i}^{(h)} - y_i^{(2h)}\right|}{31}$$

3 Реализация явного метода Рунге-Кутта 4 и 5 порядка

Входные данные такие:

$$y'(x) = e^{-x}cos(x - y^2), \quad y(0) = 0.5, \quad n = 200, \quad x \in [0; 0.8]$$

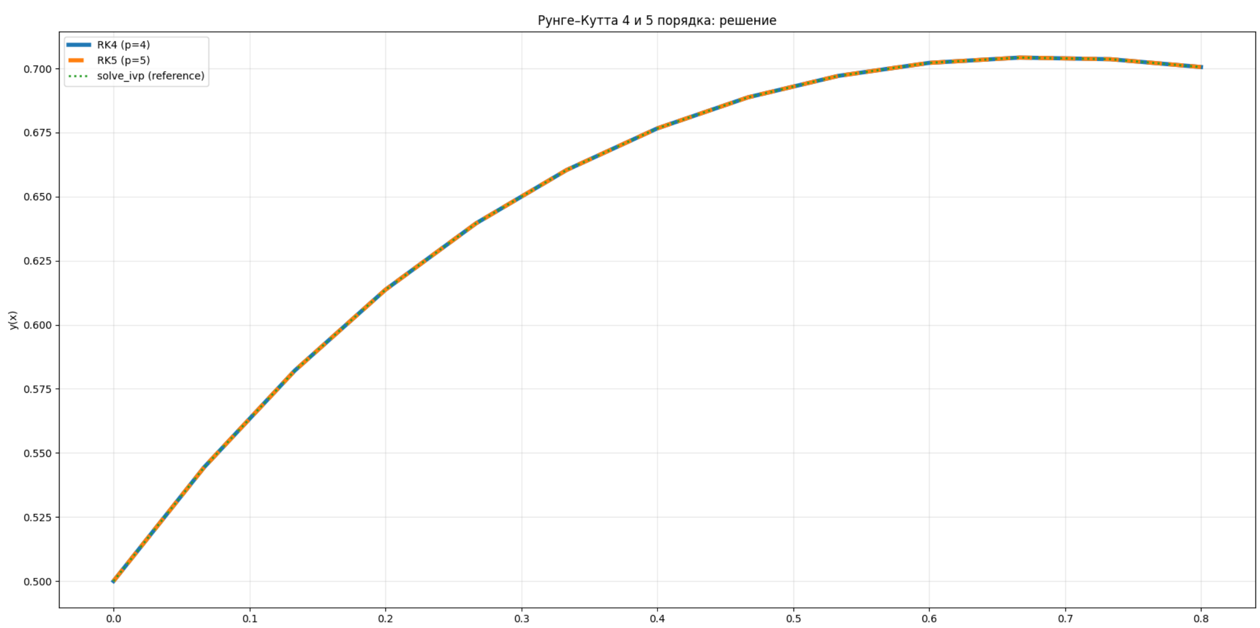

Рис. 1: График решения явного метода Рунге-Кутта 4 и 5 порядка и решение с помощью встроенной функции solve_ivp

4 Графики погрешностей

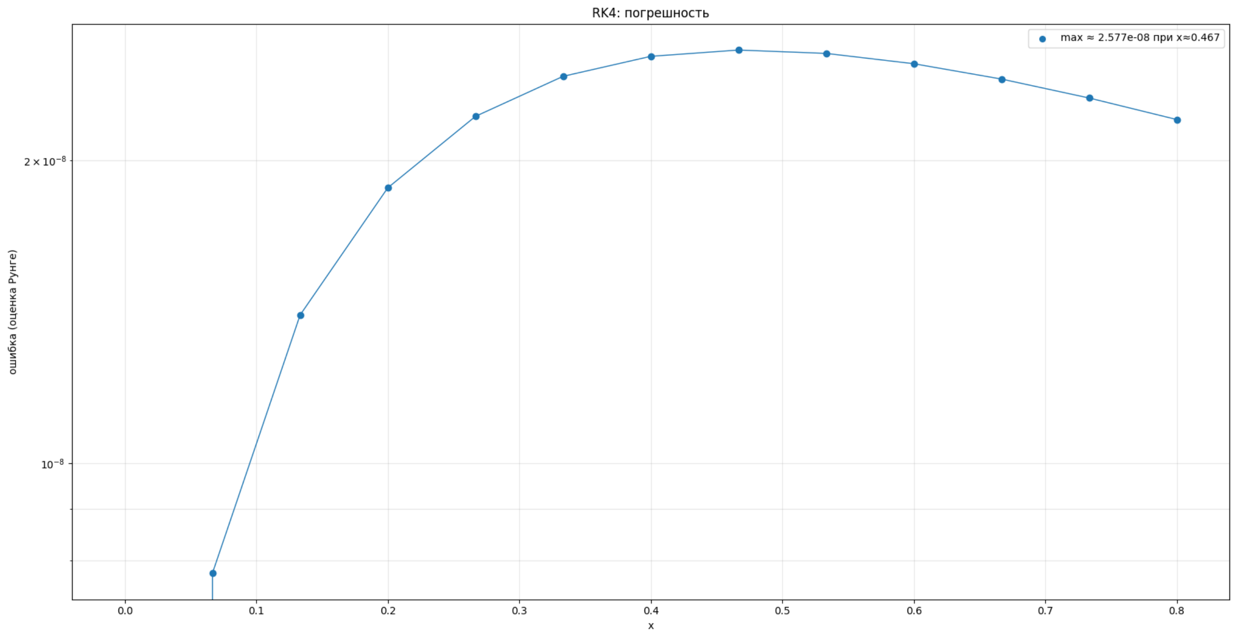

Рис. 2: График погрешности явного метода Рунге-Кутта 4 порядка

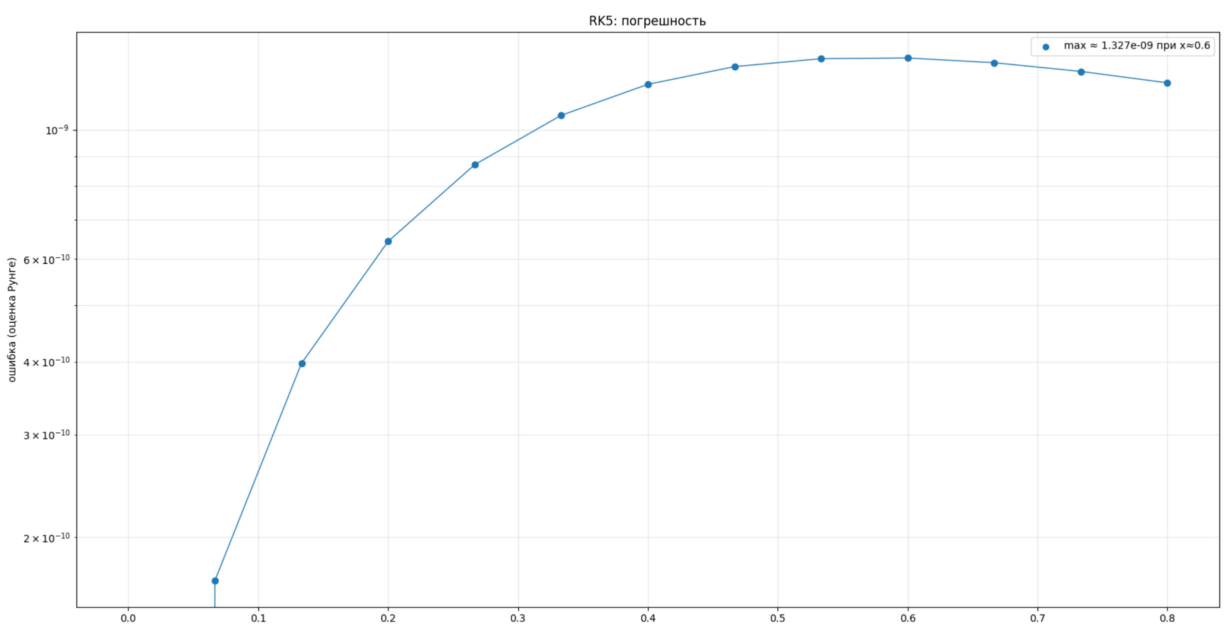

Рис. 3: График погрешности явного метода Рунге-Кутта-Мерсона 5 порядка

5 Выводы

1. Кривые решений явного метода Рунге-Кутта и встроенного решения совпадают на всем промежутке, что говорит о хорошей точности методов

2. Величины ошибок:

   (a) RK5: max $\approx = 1.327 \times 10^{-9}$ при $x \approx 0.6$

   (b) RK4: max $\approx 2.577 \times 10^{-8}$ при $x \approx 0.467$

   Отношение этих ошибок: $2.577 \times 10^{-8}/1.327 \times 10^{-9} \approx 19.4$, т.е. метод 5-го порядка дает примерно в 20 раз меньшую ошибку. что ожидаемо для метода более высокого порядка

6 Код программы

Код программы размещен в публичном репозитории на моем гитхаб (папка lab5_RungeKutt)