

Отчет по лабораторной работе номер 9 (Метод Кранка-Никольсона)

Иванов Артур, гр. 932221

4 ноября 2025 г.

1 Теория

Необходимо численно решить линейное ДУ с граничным условием на правом конце:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(T) = \bar{x}$$

Нам необходимо найти $x(0)$, чтобы численно, уже в прямом времени решить уравнение при равноотстоящих узлах.

Рекуррентная схема решения уравнения методом Кранка-Никольсона в прямом времени имеет вид:

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) \approx \Lambda x(t),$$

где $e^{Ah} \approx \Lambda = [12E - 6Ah + A^2h^2]^{-1}[12E + 6Ah + A^2h^2]$

Применяя метод Кранка-Никольсона, вычислим $n \times n$ матрицу:

$$\Lambda = \left(E - \frac{h}{2}A + \frac{h^2}{12}A^2\right)^{-1} \left(E + \frac{h}{2}A + \frac{h^2}{12}A^2\right)$$

Затем выбирается целое N так, чтобы шаг интегрирования $h = \frac{T}{2^N}$ был достаточно малым, чтобы обеспечить малую ошибку аппроксимации $O(h^5)$

Если матрица Λ вычислена, то потребуется N матричных умножений для вычисления $\Phi(0, T) = \Phi(0, h2^N)$. Для этого расчеты необходимо вести в точках $h, 2h, 4h, 8h, \dots, 2^N h$

Схема расчетов: $\Phi(0, 2^k h) = \Lambda^{2^k}$

После вычисления фундаментальной матрицы $\Phi(0, T) = \Lambda^{2^N}$ вычисляем $x(0)$ по следующей формуле:

$$x(0) = \left(\Lambda^{2^N}\right)^{-1} x(T)$$

Решение искомого уравнения определяется по рекуррентной схеме:

$$x(k+1) = \Lambda x(k), \quad x(0) = \left(\Lambda^{2^N}\right)^{-1} x(T)$$

Число итераций уже будет не N , а 2^N

2 Постановка задачи

Определить матрицу Λ для выбранного шага (шаг определяется по выбранному значению N , в нашей задаче выбрать $N = 10$). Выполнить численное решение уравнение по методу Кранка-Никольсона 5-го порядка точности для вектора начальных условий $x(0)$ в прямом времени с шагом h на интервале $[0, T]$. В отчете привести график решения.

3 Решение

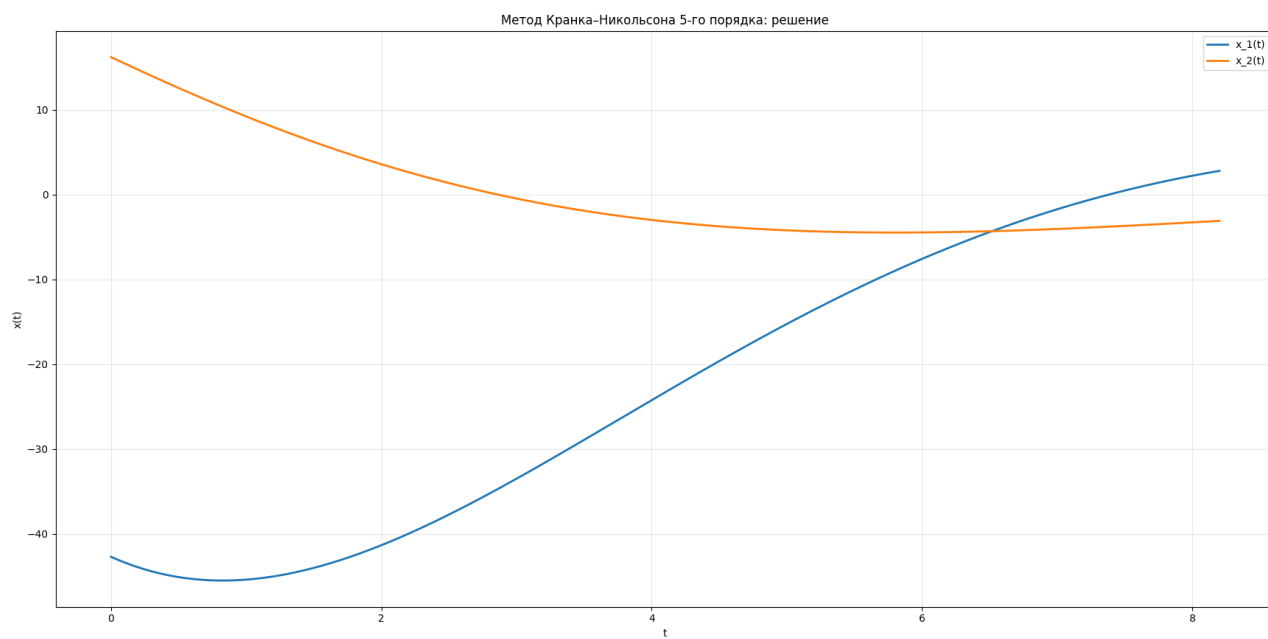


Рис. 1: Графики решения метода Кранка-Никольсона

Приближенное $x(0) : (-42.73205393, 16.21956437)$, шаг $h = 0.0080078125$, число шагов 1024

4 Погрешность

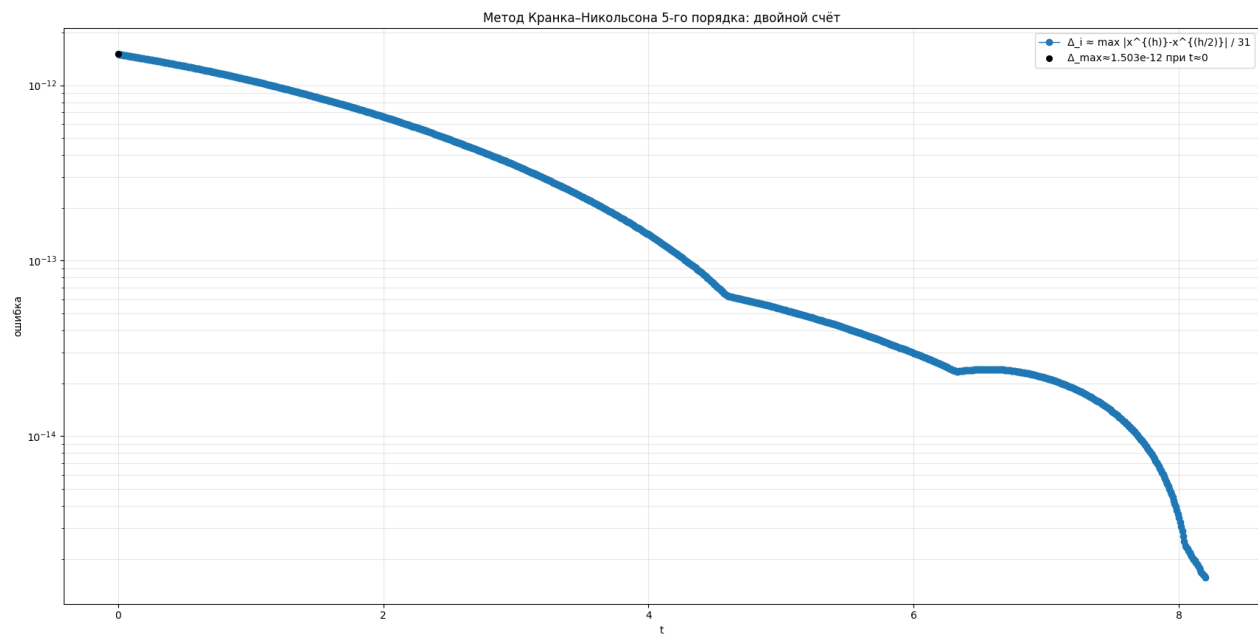


Рис. 2: Погрешность

5 Код программы

Код программы размещен в [публичном репозитории](#) на моем гитхаб (папка lab9_KN)