ELSŐ FELADAT

Adjunk példát olyan L_1 és L_2 - V ábécé feletti - nyelvekre, amelyekre $L_1 L_2 = L_2 L_1$. Keressünk nem triviális megoldást is.

Megoldás: Triviális megoldások:

- $L_1 = \emptyset$, $L_1 = \{ \varepsilon \}$ vagy a szimmetria miatt L_2-re teljesül az előző esetek egyike.
- $L_1 = L_2$.
- V ábécé egyelemű.
- Az egyik nyelvben benne szerepel ε, a másik nyelv pedig a V^* (univerzális nyelv).

Egy nem triviális megoldás: Legyen $V = \{ a, b\}$, $L_1 = \{ \varepsilon, a\}$, L_2 pedig legyen azon V feletti szavak halmaza, amelyekben pontosan egy b szerepel. Ekkor $L_1 L_2 = L_2 L_1 = L_2$.

MÁSODIK FELADAT

Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$!

Megoldás: Az állítás hamis. Vegyük a következő ellenpéldát: Legyen $L_1 = \{ a\}$ és $L_2 = \{ b\}$, ekkor $(L_1 \cup L_2)^*$ az akárhány a-t és b-t tartalmazó szavak halmaza, még $L_1^* \cup L_2^*$ a csupa a-t és csupa b-t tartalmazó szavak nyelve lesz.

HARMADIK FELADAT

Tekintsük a következő nyelvet:

$$L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R \text{ és } |w| \text{ páratlan}\}$$

Adja meg azt a G nyelvtant, amely a nyelvet generálja!

Megoldás

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b\}, S)$$

NEGYEDIK FELADAT

Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$, ahol $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a\}$,

$R = \{S \rightarrow ABS \mid AB \quad A \rightarrow aA \mid a \quad B \rightarrow bA\}$.

Az alábbi szavak közül melyek vannak $L(G)$-ben? Állítását indokolja!

1. $aabbaa$,
2. $abaaba$.

Megoldás

1. Nincs L(G)-ben, mert G nem generál olyan szót, amelyben valamely b előfordulást ne a követne.
2. L(G)-ben van, a szabályokkal le lehetr vezetni.

ÖTÖDIK FELADAT

(i) $S \longrightarrow \varepsilon$, *ilyenkor S a kezdőszimbólum, és S szabály jobboldalán nem szerepelhet,*

(ii) $A \longrightarrow t$,

(iii) $A \longrightarrow BC$,

(iv) $AB \longrightarrow AC$,

(v) $BA \longrightarrow CA$,

Adjunk meg a $G=(\{S,A,B\},\{x,y,z\},S,H)$ környezetfüggő nyelvtannal ekvivalens Kuroda-féle normálalakú nyelvtant, ahol
$H=\{ S \to ABABx, ABA \to AyyyA, Ayyy \to Byyy, \mathbf{A \to z, A \to BB, B \to x}\}$.

Megoldás:

(I.) Első lépésben megadunk egy G_1 nyelvtant, ami ekvivalens a G nyelvtannal és terminális csak $X \to a$ alakú szabályban fordul elő ($X \in N$, $a \in T$). Ehhez a G nyelvtan minden olyan x_i terminális betűjéhez, amely szerepel olyan szabályban, ami nem normálalakú, új X_i nemterminálist vezetünk be és felvesszük az $X_i \to x_i$ szabályokat, valamint a H szabályhalmaz elemeit átvesszük úgy, hogy a szabályokban az x_i betűk azon előfordulásait, melyek nem normálalakú szabályban szerepelnek, X_i-re cseréljük. Jelen esetben laz új nemterminálisok az X és az Y:
$G_1=(\{S,A,B,X,Y\},\{x,y,z\},S,H_1)$, ahol
$H_1=\{ \mathbf{X \to x, Y \to y}, S \to ABABX, ABA \to AYYYA, AYYY \to BYYY, \mathbf{A \to z, A \to BB, B \to x} \}$

(II.) Második lépésben megadunk egy G_2 nyelvtant, ami ekvivalens az eredeti nyelvtannal, normálformájú és nem szerepel benne $Y \to Y_1Y_2...Y_n$, $n \geq 3$ alakú szabály. Jelen esetben $S \to ABABX$ szabályból indulunk ki:
$G_2=(\{S,A,B,X,Y,Z_1,Z_2,Z_3\},\{x,y,z\},S,H_2)$, ahol
$H_2=\{ \mathbf{X \to x, Y \to y, S \to AZ_1, Z_1 \to BZ_2, Z_2 \to AZ_3, Z_3 \to BX}, ABA \to AYYYA, AYYY \to BYYY,$
$\mathbf{A \to z, A \to BB, B \to x} \}$

(III.) Harmadik lépésben megadjuk az eredeti nyelvtannal ekvivalens G' Kuruda-féle normá alakú nyelvtant.
Ehhez a G_2 nyelvtanból indulunk ki.
A H_2 szabályhalmaz $X_1X_2 ... X_n \to Y_1Y_2 ... Y_m$, $n \geq 2$, $m \geq 3$ alakú szabályait helyettesítjük új szabályokkal, a többi szabályt pedig változtatás nélkül tvesszük a H' szabályhalmazba..
$ABA \to AYYYA$ átalakítása: $AB \to AZ_4$, $Z_4A \to YZ_5$, $Z_5 \to YZ_6$, $Z_6 \to YA$
$AYYY \to BYYY$ átalakítása*:* $AY \to BZ_7$, $Z_7Y \to YZ_8$, $Z_8Y \to YY$,

Összesítve: $G'=(\{S,A,B,X,Y,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,Z_6,Z_7,Z_8\},\{x,y,z\},S,H')$, ahol
$H'=\{ \mathbf{X \to x, Y \to y, S \to AZ_1, Z_1 \to BZ_2, Z_2 \to AZ_3, Z_3 \to BX, AB \to AZ_4}, Z_4A \to YZ_5, \mathbf{Z_5 \to YZ_6, Z_6 \to YA}, AY \to BZ_7, Z_7Y \to YZ_8, \mathbf{Z_8Y \to YY, A \to z, A \to BB, B \to x} \}$

IV. Most a $QW \to RT$ szabályokat átalakítjuk úgy, $QW \to RW \to RT$. Azaz*:*

$Z_4A \to YZ_5$ helyett $Z_4A \to YA$, $YA \to Y Z_5$

$AY \to BZ_7$, *helyett* $AY \to BY$, $BY \to B Z_7$

$Z_7Y \to YZ_8$, helyett $Z_7Y \to YY$, $YY \to YZ_8$

A végeredményben a szabályok alakja:

$\mathbf{X \to x, Y \to y, S \to AZ_1, Z_1 \to BZ_2, Z_2 \to AZ_3, Z_3 \to BX, AB \to AZ_4}$, $Z_4A \to YA$, $YA \to Y Z_5$, $\mathbf{Z_5 \to YZ_6, Z_6 \to YA}$, $AY \to BY$, $BY \to B Z_7$, $Z_7Y \to YY$, $YY \to YZ_8$, $\mathbf{Z_8Y \to YY, A \to z, A \to BB, B \to x} \}$

<u>Megjegyzés</u>: Láncszabály most nem volt, egyébként láncmentesíteni is kellett volna. Epszilon-menetsíteni sem kellett, mert nem volt ε-szabály, és így persze az új kezdőjel bevezetése sem került szóba.

Formális nyelvek gyakorló feladatok 1

HATODIK FELADAT

Küszöbölje ki a törlő szabályokat (azaz végezzen epszilon-mentesítést) a G=({S, A, B}, {a, b}, S,H) grammatikából!

$S \to \varepsilon$, $S \to AB$, $A \to SAB$, $A \to a$, $B \to S$, $B \to b$

Megoldás.

H={S, B} az a halmaz, melyből ε levezethető. Mivel S benne van H-ban és szerepel szabály jobb oldalán, ezért új kezdőjelet kell bevezetni. $S' \to S$ és $S' \to \varepsilon$

Foglalkoznunk kell azokal a szabályokkal, ahol a jobboldalon H* beli nyelvtani jelek vannak:

$S \to AB$ miatt $S \to A$ is kell.

$A \to SAB$ miatt $A \to AB$, $A \to SA$ is kell.

Összegezve: $S' \to S$, $S' \to \varepsilon$, $S \to A$, $S \to AB$, $S \to A$, $A \to SAB$, $A \to AB$, $A \to SA$.

HETEDIK FELADAT

Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$, ahol $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a\}$,

$$R = \{S \to ABS \mid AB$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bA\}.$$

Az alábbi szavak közül melyek vannak $L(G)$-ben? Állítását indokolja!

1. $aabaab$, 2. $aaaaba$,

Megoldás

1. Nincs L(G)-ben, mert G nem generál b-vel végződő szót.
2. L(G)-ben van, mert levezethető a szabályokkal.

NYOLCADIK FELADAT

Adjunk meg a G nyelvtannal ekvivalens Chomsky-féle normálalakú nyelvtant, ahol a szabályok a következők:

$S \to BB$, $A \to S$, $A \to xxzz$, $A \to y$, $B \to AxzxA$, $B \to A$

Megoldás

I.)

Legyenek az új nemterminálisok az X és a Z, ekkor:

$X \to x$, $Z \to z$, $S \to BB$, $A \to S$, $A \to XXZZ$, $A \to y$, $B \to AXZXA$, $B \to A$

II.)

$X \to x$, $Z \to z$, $S \to BB$, $A \to S$, $A \to XZ_1$, $Z_1 \to XZ_2$, $Z_2 \to ZZ$, $A \to y$, $B \to AZ_3$, $Z_3 \to XZ_4$, $Z_4 \to ZZ_5$, $Z_5 \to XA$, $B \to A$

III.)

$U(S)=\{A,B\}$, $U(A)=\{B\}$.

U(S)={A, B} az a halmaz. melynek elemeiből S-t láncszabállyal le lehet vezetni. Ezért ahol a baloldalon S van, oda A-t is kell írni, illetve B-t is. Tehát $S \to BB$ miatt $A \to BB$ és $B \to BB$ szabályokat is be kell vezetni.

U(A)={B}, mert van $B \to A$ szabály. Ezért ahol a baloldalon A van, oda B-t is kell írni. Tehát $A \to XZ_1$ miatt $B \to XZ_1$ is kell. $A \to y$ miatt $B \to y$ is kell.

Formális nyelvek gyakorló feladatok 1

$X \to x, Z \to z, S \to BB, A \to BB, B \to BB, A \to XZ_1, B \to XZ_1, Z_1 \to XZ_2, Z_2 \to ZZ,$
$A \to y, B \to y, B \to AZ_3, Z_3 \to XZ_4, Z_4 \to ZZ_5, Z_5 \to XA$ ★

KILENCEDIK FELADAT

Írjuk le a következő nyelvet környezetfüggetlen nyelvtannal:

$$L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$$

Megoldás

$$S \longrightarrow aSb|A|B, \ A \longrightarrow aA|a, \ B \longrightarrow bB|b$$

TIZEDIK FELADAT

Elemezzük CYK algoritmussal az *aabbcc* szót az alábbi *G* nyelvtan esetén:

$S \to AB \mid BC$
$A \to XA \mid a$
$X \to a$
$C \to YC \mid c$
$Y \to c$
$B \to UV \mid VW$
$U \to XX$
$W \to YY$
$V \to ZZ$
$Z \to b$

Megoldás Az aabbcc levezethető, mert a táblázat bal felső sorában a kezdőjel (S) szerepel.

S					
S	S				
B	—	B			
—	—	—	—		
A,U		V		C,W	
A,X	A,X	Z	Z	C,Y	C,Y
a	a	b	b	c	c