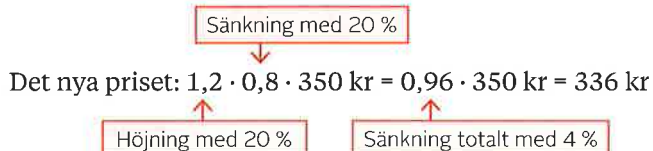


Mer om förändringsfaktor

→ Exempel

Priset på ett spel är 350 kr. Priset höjs först med 20 % och sänks sedan med 20 %. Vad blir det nya priset och hur många procent är den totala förändringen?



Den totala förändringsfaktorn är 0,96. Det betyder att priset har sänkts med $100 \% - 96 \% = 4 \%$.

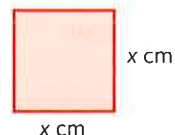
Svar: Det nya priset på spelet är 336 kr och priset har sänkts med totalt 4 %.

- 10** Beskriv hur priset x kr har förändrats. Räkna sedan ut den totala procentuella förändringen.

a) $1,5 \cdot 0,95 \cdot x$ kr b) $1,25 \cdot 0,75 \cdot x$ kr c) $0,6 \cdot 1,35 \cdot x$ kr
d) $1,07 \cdot 1,3 \cdot x$ kr e) $0,93 \cdot 0,82 \cdot x$ kr f) $0,4 \cdot 0,6 \cdot x$ kr

- 11** Sidan i en kvadrat är x cm. Hur många procent ändras arean om sidlängden

a) ökar med 50 % b) minskar med 50 % c) fördubblas



- 12** En kub har kantlängden x cm. Hur många procent ändras volymen om kantlängden

a) ökar med 50 % b) minskar med 50 % c) fördubblas

- 13** Yasmine har 250 kr i månadspeng. Hon får välja mellan att få månadspengen höjd med 7 % per månad i 6 månader eller att få den höjd med 20 kr varje månad i 6 månader. Vilket alternativ är bäst för Yasmine? Motivera.

- 14** Lisa köper en båt för 60 000 kr. Båtens värde minskar med 12 % varje år. Vad är båten värd efter

a) ett år b) två år c) fyra år



Upprepad förändring

Om samma procentuella förändring sker flera gånger, kan man använda förändringsfaktorn. Vi visar med ett exempel.

→ Exempel

Clara sätter in 10 000 kr på banken och räknar med att värdet ska öka med 3 % per år. Hur mycket kommer hon då att ha på banken efter 4 år?

Efter 1 år: $1,03 \cdot 10\,000$ kr

Efter 2 år: $1,03^2 \cdot 10\,000$ kr ← $1,03^2 = 1,03 \cdot 1,03$

Efter 3 år: $1,03^3 \cdot 10\,000$ kr ← $1,03^3 = 1,03 \cdot 1,03 \cdot 1,03$

Efter 4 år: $1,03^4 \cdot 10\,000$ kr $\approx 1,13 \cdot 10\,000$ kr = 11 300 kr ← $1,13 = \text{total förändringsfaktor}$

Svar: Efter 4 år kommer hon att ha 11 300 kr.

15 Hur mycket pengar kommer Clara att ha på banken efter 5 år om värdet

- a) ökar med 2 % varje år b) minskar med 2 % varje år c) minskar med 5 % varje år

16 Hur har värdet förändrats totalt om det nya värdet beräknas

- a) $1,06^4 \cdot 10\,000$ kr b) $0,5^3 \cdot 10\,000$ kr c) $1,03^2 \cdot 0,97^2 \cdot 10\,000$ kr

17 Beräkna det nya värdet.

- a) $1,06^4 \cdot 10\,000$ kr b) $0,5^3 \cdot 10\,000$ kr c) $1,03^2 \cdot 0,97^2 \cdot 10\,000$ kr

18 Familjen Alm köpte sin villa för 850 000 kr för tre år sedan. Villapriserna har stigit ungefär 2,8 % per år. Vilka av uttrycken i rutan visar hur mycket villan är värd nu?

$$\begin{aligned} &850\,000 + 1,028^3 \\ &0,028^3 \cdot 850\,000 \\ &1,028^3 \cdot 850\,000 \\ &1,028 \cdot 1,028 \cdot 1,028 \cdot 850\,000 \end{aligned}$$

19 Adrian och Elin ska köpa en bil som kostar 125 000 kr. De räknar med att värdet på bilen ska minska med 15 % per år. De funderar på hur mycket bilen är värd efter 3 år och gör beräkningar på olika sätt:

Adrian gör så här:

$$15\% + 15\% + 15\% = 45\%$$

$$100\% - 45\% = 55\%$$

$$55\% \text{ av } 125\,000 \text{ kr} = 0,55 \cdot 125\,000 \text{ kr} = 68\,750 \text{ kr}$$

Elin gör så här:

$$1 - 0,15 = 0,85$$

$$0,85^3 \cdot 125\,000 \text{ kr} = 76\,766 \text{ kr}$$

Vem har räknat rätt? Förklara hur Adrian och Elin har tänkt.

Problemlösning med procent

→ Exempel

Det är rea och priset på alla varor sänks med 15 %.
En kamera säljs för 2 550 kr. Vad kostade den före rean?

Det nya priset är 85 % av ursprungspriset.

Anta att priset före rean var x kr. Efter sänkning med 15 % blir priset $0,85x$. Det ger ekvationen

$$0,85x = 2\,550$$

$$\frac{0,85x}{0,85} = \frac{2\,550}{0,85}$$

$$x = 3\,000$$

Svar: Kameran kostade 3 000 kr före rean.



**Nu 15 % rea
Nytt pris 2 550 kr**

Lös uppgifterna med hjälp av ekvationer.

20 Du får 5 % rabatt när du köper ett par högtalare.
Du betalar 1 805 kr. Vad kostade högtalarna från början?

21 Du får 30 % rabatt när du köper en jacka på rea.
Du betalar 623 kr. Vilket var jackans ordinarie pris?

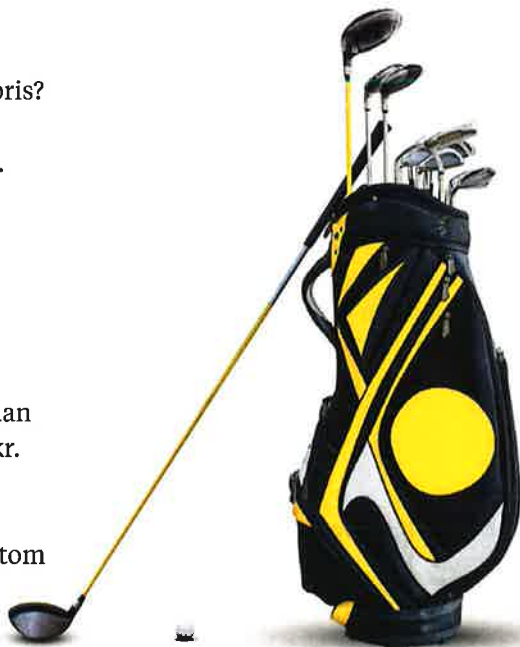
22 Priset på en flygresa höjs med 13 % till 5 198 kr.
Vad kostade resan innan höjningen?

23 Niklas växte med 12 % på ett år. Året därpå växte han ytterligare 12 cm. Efter två år var han 152 cm. Hur lång var han två år tidigare?

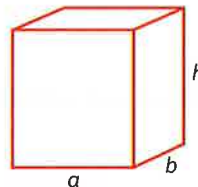
24 Priset på en golfklubba sänks med 25 % och sedan med ytterligare 200 kr. Det nya priset är 1 375 kr.
Vad var priset från början?

25 Rasmus får en löneförhöjning på 4 % och dessutom 500 kr extra. Nu tjänar han 24 212 kr.
Beräkna hans lön före höjningen.

26 Efter jul säljer en affär sina julsaker med 25 % rabatt.
En vecka senare är det 50 % rabatt på reapriset.
Med hur många procent har priset på julsakerna sänkts jämfört med ursprungspriset?



- 27** En gräsmatta har formen av en rektangel. Om man ökar längden med 50 % och bredden med 20 % har gräsmattan arean 2 160 m². Hur stor area hade den före ökningen?
- 28** Med hur många procent ändras volymen av en kub om man ökar kantens längd med
- a) 50 % b) 100 % c) 200 %
- 29** Maria gör askar som har formen av rätblock. En röd ask har kantlängder som är 25 %, 30 % respektive 50 % längre än kantlängderna på en blå ask. Den röda asken har volymen 1 200 cm³. Hur stor volym har den blå asken? Avrunda till hela tiotal.
- 30** En förpackning har formen av ett rätblock. Kanten a förlängs med 20 % och kanten b med 30 %. Höjden h minskas med 25 %.
- a) Med hur många procent ändras förpackningens volym?
b) Med hur många procent ska höjden minskas för att volymen inte ska ändras? Avrunda till hela procent.
- 31** Priset på en cykel höjs med 30 % och sänks därefter med 10 %. Tänk dig i stället att priset på cykeln först höjs med 10 %. Hur ska priset sedan förändras för att varan ska få samma slutpris?
- 32** För tre år sedan köpte familjen Storm en skogsfastighet. Värdet har sedan dess ökat med 20 %. Den har nu ett värde på 4 miljoner kr. Vad fick familjen betala för fastigheten för tre år sedan?



Mer om jämförelser

33 Tre filter renar luften från en fabrik. Det första filtret tar bort 30 % av partiklarna. Det andra tar bort 40 % av de partiklar som då är kvar och det tredje filtret tar bort 50 % av de som sedan återstår. Hur många procent av den totala mängden partiklar kommer ändå att släppas ut?

34 Kajsa och Stina odlar äpplen. Kajsas största äpple väger 245 g. Stinas största äpple är 26 % tyngre. Hur många procent lättare är Kajsas äpple jämfört med Stinas?

35 Basim jobbar tre veckor på sommarlovet. Den första veckan tjänar han 720 kronor, den andra tjänar han 850 kr och den tredje tjänar han 1 090 kr. Hur många procent

- a) mer tjänar han den andra veckan jämfört med den första veckan?
- b) mindre tjänar han den första veckan jämfört med den tredje veckan?
- c) av den totala lönen tjänar han under den tredje veckan?

36 Johan säljer tvättmaskiner och har nu 15 % rea. Ordinarie pris för en maskin är 6 900 kr. När han märker att Anna säljer samma maskin med 25 % rabatt på samma ordinarie pris, så sänker han priset ytterligare med 10 % på reapriset.

Johans EI, 15 % rabatt
10 % på reapriset

Annas EI, 25 % rabatt

- a) Vilken affär ger det bästa erbjudandet? Förklara varför.
- b) Beräkna reapriset på tvättmaskinen i de olika affärerna.
- c) Med hur många procent sänks priset i Johans affär?

37 Kulaskolan har friluftsdag och årskurs 8 åker skidor. Tabellen visar hur stor andel av de olika klasserna som ska hyra skidor.

Klass	Antal i klassen	Andel i procent som ska hyra
8a	30	20 %
8b	24	25 %
8c	28	25 %
8d	20	80 %

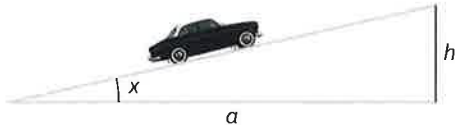
Hur många procent av alla elever i åk 8 ska hyra skidor?

38 Dilan höjde sin lön från 28 500 kr till 31 200 kr. Dilans systems lön höjdes också och blev nu 33 800 kr. Hon fick lika stor ökning i procent som sin bror. Beräkna hennes lön före höjningen.





- A** Per kör upp för en backe med lutningen 6 %.
Vad blir a om kartan visar att höjdskillnaden h var



- a) 30 m b) 60 m c) 180 m

Vägmärket brant lutning visar hur brant en backe är. 10 % lutning betyder att kvoten $\frac{h}{a} = 0,1$.

- B** En av Nordens brantaste skidbackar, "Väggen", finns i Sälenfjällen. Den har i sin brantaste del en lutning på 100 %. Hur stor är vinkeln x ?

- C** Antalet råttor i en stad ökade snabbt. De ökade med 10 % per år. Hur länge dröjde det innan antalet råttor fördubblades?



- D** Halveringstiden för ett radioaktivt ämne är den tid det tar för hälften av atomkärnorna i ämnet att sönderfalla. Ett visst radioaktivt ämne har en halveringstid på 4 timmar. Beräkna hur många procent av ämnet som återstår efter

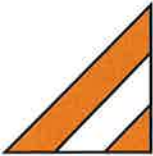
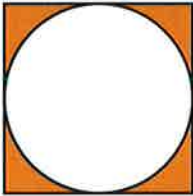
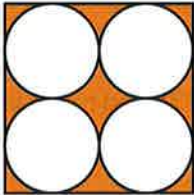
- a) 8 timmar b) 12 timmar c) ett dygn

- E** Om ett värde först ökar med 10 % och sedan minskar med 5 %, så blir det samma resultat som om värdet först minskar med 5 % och sedan ökar med 10 %. Visa med förändringsfaktor att det är så.

- F** Ett värde minskar med 20 %. Med hur många procent måste det höjas för att priset ska bli detsamma igen? Motivera.



Svarta sidorna

- 1** På en viss arbetsplats finns det 22 % fler kvinnor än män. Hur stor är den procentuella andelen kvinnor på den arbetsplatsen?
- 2** En saltlösning innehåller 25 % salt. Carla tar bort $\frac{1}{4}$ av lösningen och ersätter den med rent vatten. Hur många procent salt innehåller lösningen nu?
- 3** Figuren visar en likbent rätvinklig triangel. Två av triangelns sidor är delade i tre lika stora delar. Hur stor andel av triangelns area är färgad?
- 
- 4** Sidan i en kub är lika lång som diametern i en cylinder. Hur många procent längre måste cylinderns höjd vara än kubens sida för att cylindern ska ha samma volym som kuben?
- 5** a) Om A är 20 % mindre än B, hur många procent större är B än A?
b) Om C är 40 % större än D, hur många procent mindre är D än C?
c) B är 80 % av A och C är 20 % av B. Beräkna $\frac{A}{C}$.
- 6** Hur många procent större är kvadratens
a) omkrets än cirkelns omkrets?
b) area än cirkelns area?
- 
- 7** Hur många procent större är
a) summan av cirklarnas omkrets än kvadratens omkrets?
b) kvadratens area än summan av cirklarnas areor?
- 
- 8** Befolkningen i en by minskade ett år med 20 % för att nästa år öka med 20 % till 1 200 personer. Hur många var de i byn för två år sedan?
- 9** En varas pris höjs med 25 % och sänks därefter med 30 %. Tänk dig att varan i stället först höjs med 50 %. Hur ska priset sedan förändras för att varan ska få samma slutpris?

10 Leif väger 100 kg och bestämmer sig för att banta. Målet är att gå ner till 90 kg. Problemet är att Leif är en "jojobantare". Han går först upp 10 % under våren och går sedan ner 10 % under hösten. Så håller han på, år efter år. Kommer Leif någonsin att nå målet som är 90 kg? Motivera ditt svar.

11 En kvadrats sidor ökar med 5 %. Sidorna i en annan lika stor kvadrat minskar med 5 %. Hur många procent större är den stora kvadratens area, jämfört med den lilla kvadratens area?

12 En förpackningsfirma prövar olika storlekar på presentaskar. Längden på en ask minskas med 20 % medan bredden ökas med 20 %. Hur mycket måste höjden ändras för att volymen ska förbli konstant?



13 En bok kostar x kronor. Priset ökar med 20 %. Vilket eller vilka av uttrycken A–D visar det nya priset?

(A) $\left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot x$ (B) $\frac{x}{100} + \frac{20x}{100}$ (C) $x \cdot 20 + 100$ (D) $1,2x$

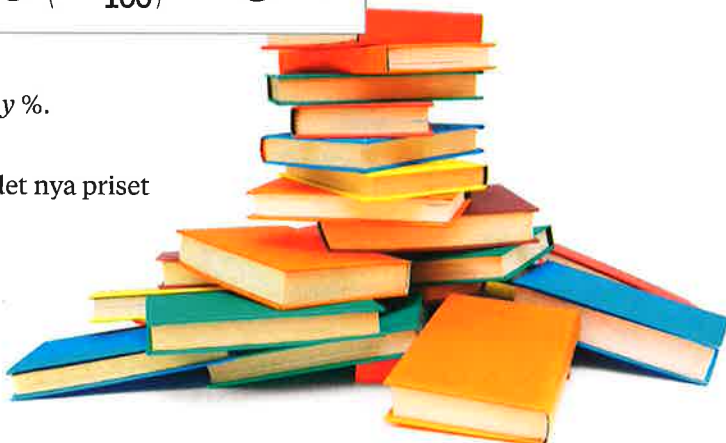
14 En vara kostar 40 kr. Priset ökar med x %. Vilket av uttrycken A–D visar
a) prisökningen b) det nya priset

(A) $x \cdot 40$ (B) $\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot 40$ (C) $\frac{x}{100} \cdot 40$ (D) $40 + \frac{x}{100}$

15 En vara kostar a kr. Priset minskar med y %. Vilket av uttrycken A–D visar
a) prisminskningen b) det nya priset

(A) $a - \frac{y}{100}$ (B) $a \cdot \frac{y}{100}$ (C) $\left(1 - \frac{y}{100}\right) \cdot a$ (D) $a \cdot y$

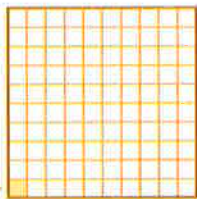
16 En bok kostar x kr. Priset ökar med y %.
Skriv ett uttryck som visar
a) prisökningen b) det nya priset



● Procent

En procent = 1 % = $\frac{1}{100} = 0,01$

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$



Vid procenträkning använder man begreppen andelen, delen och det hela.

● Beräkna andelen i procent

När man ska beräkna hur stor andelen är i procent kan du göra på olika sätt.

$$\text{Andelen} = \frac{\text{delen}}{\text{det hela}}$$

→ Exempel

Rabatten på en fotboll är 50 kr av 200 kr.

Hur många procent är rabatten?

$$\frac{50 \text{ kr}}{200 \text{ kr}} = \frac{50 \text{ kr} / 2}{200 \text{ kr} / 2} = \frac{25 \text{ kr}}{100 \text{ kr}} = 25\%$$

Förkorta med 2 för att få hundra delar.

Rabatten på en tidning är 12 kr av 25 kr.

Hur många procent är rabatten?

$$\frac{12 \text{ kr}}{25 \text{ kr}} = \frac{12 \text{ kr} \cdot 4}{25 \text{ kr} \cdot 4} = \frac{48 \text{ kr}}{100 \text{ kr}} = 48\%$$

Förläng med 4 för att få hundra delar.

● Beräkna förändringen i procent

→ Exempel

Hur många procent lägre har priset på byxorna blivit?

Pris från början: 600 kr

Nytt pris: 480 kr

Prisskillnad: 600 kr – 480 kr = 120 kr

Sänkning i procent = $\frac{\text{prisskillnad}}{\text{pris från början}} =$

$$= \frac{120 \text{ kr}}{600 \text{ kr}} = 0,20 = 20\%$$

Svar: Priset på byxorna har blivit 20 % lägre.

Ibland går det inte att förkorta eller förlänga ett bråk till hundra delar. Då får man i stället skriva talet i decimalform och avrunda till hundra delar.

→ Exempel

I klass 8a går det 28 elever. Av dem är 11 flickor. Hur stor andel av eleverna i 8a är flickor?

$$\frac{11}{28} \approx 0,39 = 39\%$$

Ungefär 39 % av eleverna i 8a är flickor.

● Beräkna delen

När du ska beräkna hur mycket 37 % av 500 kr är, kan du göra på olika sätt.

Metod 1

$$1\% \text{ av } 500 \text{ kr} = \frac{500 \text{ kr}}{100} = 5 \text{ kr}$$

$$37\% \text{ av } 500 \text{ kr} = 37 \cdot 5 \text{ kr} = 185 \text{ kr}$$

Metod 2

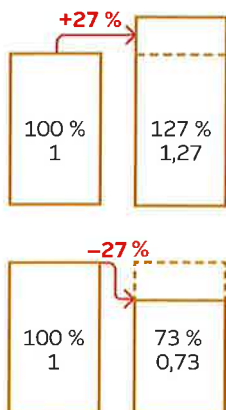
$$37\% \text{ av } 500 \text{ kr} = 0,37 \cdot 500 \text{ kr} = 185 \text{ kr}$$

Metod 2 är effektivast.



● Förändringsfaktor

När man ska räkna ut en procentuell ökning eller minskning kan man räkna ut det nya värdet direkt med hjälp av förändringsfaktor.



● Beräkna förändringen med förändringsfaktor

→ Exempel

Pris från början: 160 kr

Nytt pris: 200 kr

Hur många procent har priset ökat?

$$\frac{\text{nytt pris}}{\text{pris från början}} = \frac{200 \text{ kr}}{160 \text{ kr}} = 1,25$$

Förändringsfaktorn är 1,25. Då är höjningen $1,25 - 1 = 0,25 = 25 \%$.

Svar: Priset har ökat med 25 %

Pris från början: 200 kr

Nytt pris: 160 kr

Hur många procent har priset sänkts?

$$\frac{\text{nytt pris}}{\text{pris från början}} = \frac{160 \text{ kr}}{200 \text{ kr}} = 0,8$$

Förändringsfaktorn är 0,8. Då är sänkningen $1 - 0,8 = 0,2 = 20 \%$.

Svar: Priset har sänkts med 20 %

● Jämför med procent

→ Exempel

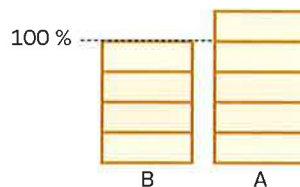
Hur många procent dyrare är tröjan i affär A jämfört med affär B?

$$\frac{\text{pris i affär A}}{\text{pris i affär B}} = \frac{250 \text{ kr}}{200 \text{ kr}} = 1,25$$

Dividera med det du jämför med.

Förändringsfaktorn är 1,25.
Priset är
 $1,25 - 1 = 0,25 = 25 \%$
högre.

Svar: Det är 25 % dyrare i affär A jämfört med affär B.



Hur många procent billigare är tröjan i affär B jämfört med affär A?

$$\frac{\text{pris i affär B}}{\text{pris i affär A}} = \frac{200 \text{ kr}}{250 \text{ kr}} = 0,8$$

Dividera med det du jämför med.

Förändringsfaktorn är 0,8.
Priset är
 $1 - 0,8 = 0,2 = 20 \%$
lägre.

Svar: Det är 20 % billigare i affär B jämfört med affär A.

