北京大学

硕士研究生毕业论文

题目： 四阶散度方程的混合有限元方法

姓　　名： 刘燕茹

学　　号： 1401210049

院　　系： 数学科学学院

专　　业： 计算数学

研究方向： 有限元方法

导师姓名： 王鸣　教授

胡俊　教授

二〇一七年四月

版权声明

四阶散度方程的混合有限元方法

摘要

四阶散度方程是一种典型的四阶微分方程. 本文对四阶散度算子 $(\nabla\mathrm{div})^2$ 的两种定解问题, 利用文献[26,27]中的框架, 设计混合有限元格式, 进行数值求解.

首先研究形如 $(\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u} - \nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}$ 的四阶散度方程. 基于正则分解和正则性分解, 将高正则空间中的问题转化为低正则空间中的问题, 构造其混合有限元方法对四阶散度方程进行数值求解. 其次, 研究形如

$$\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}, & \text{在}\Omega\text{内}, \\ \nabla\times\underset{\sim}{u} = 0, & \text{在}\Omega\text{内}. \end{cases}$$

的定解问题使用解耦的混合有限元方法对四阶散度方程进行数值求解. 数值结果表明, 这两种混合有限元方法在求解四阶散度问题时均收敛.

关键词： 四阶散度方程, 混合有限元方法, 正则分解, 降阶方法, 解耦方法

Mixed Finite Element Method for Fourth Order Divergence Equations

Abstract

The quad divergence operator is a typical fourth order operator. In this thesis, we study mixed element methods under the frameworks in [26,27] for two well-posed fourth order divergence problems.

Firstly, we discuss the fourth order divergence problems like $(\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u}-\nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f}$. The problem on a high-regularity space are deduced to an equivalent problem on three low-regularity spaces which are connected by a regular decomposition. Then we study decoupled mixed element methods for the fourth order divergence equation

$$\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f}, & \text{in } \Omega, \\ \nabla\times\underset{\sim}{u}=0, & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Numerical examples are given then. The numerical results show that both methods are convergent.

Keywords: Fourth order divergence equation , Mixed finite element method , Regular decomposition , Order reduced method , Decoupled method

目录

第一章　绪论

根据本文的主要内容将绪论分为两部分, 分别为四阶散度算子的两种模型问题、混合有限元方法简介和本文结构.

1.1　四阶散度算子的两种模型问题

四阶散度算子 $(\nabla\mathrm{div})^2$ 是弹性力学模型[21,23,24,25]中的常用算子, 如全应变梯度弹性理论的 Atlan-Aifantis 模型[1]:

$$-\mu \triangle u - (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div})u + l^2\left[\mu \triangle^2 u + (\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div})^2 u\right] = f$$

中的剪切应变项 $(\nabla\mathrm{div})^2 \underset{\sim}{u}$. 在数学上, 我们可以将 $(\nabla\mathrm{div})^2$ 算子写成 $(\mathrm{div}^*\circ\mathrm{div})^*\circ(\mathrm{div}^*\circ\mathrm{div})$. 因此, 四阶散度算子 $(\nabla\mathrm{div})^2$ 和 $\triangle^2$、 $(\nabla\times)^4$ 算子一样, 也是一种经典的四阶算子. 特别地, 在二维空间中, $(\nabla\mathrm{div})^2$ 和常用的 $(\mathrm{curl}\circ\mathrm{rot})^2$ 的本质是一样的.

为保证四阶散度问题的适定性, 我们需要给四阶散度算子 $(\nabla\mathrm{div})^2$ 添加无平凡核空间的约束条件. 设 Ω 是单连通区域, $\partial\Omega$ 是 Ω 的边界. 本文我们考虑以下两种具体的四阶散度方程的模型问题.

$$\textbf{模型问题A:}\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u} - \nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}, & \text{在}\Omega\text{内},\\ \underset{\sim}{u}\cdot n = 0,\ \mathrm{div}\underset{\sim}{u} = 0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}. \end{cases} \tag{1.1}$$

注 1.1.1. $(\nabla\mathrm{div})^2$ *算子添加* $-\nabla\mathrm{div}$ *算子和常数算子后得到的算子* $(\nabla div)^2 - \nabla div + I$ *核空间是平凡的.*

$$\textbf{模型问题B:}\begin{cases} (\nabla \mathrm{div})^2 \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}, & \text{在}\Omega\text{内}, \\ \nabla \times \underset{\sim}{u} = 0, & \text{在}\Omega\text{内}, \\ \underset{\sim}{u}\cdot n = 0,\ \mathrm{div}\underset{\sim}{u} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{1.2}$$

注 1.1.2. 当 $\nabla \times \underset{\sim}{u} = 0$ 时, $(\nabla \mathrm{div})^2$ 算子的核空间是平凡的.

1.2　混合有限元方法简介

有限元方法[22]是求偏微分方程数值解的一个非常重要的方法. 有限元方法的基本思想就是将偏微分方程转化为相应的变分问题, 然后利用有限元空间 V_h 上的分片多项式函数近似无穷维空间 V 上的弱解.

混合有限元方法是一种基于限制或者约束条件的变分形式的有限元方法[9]. 20 世纪 70 年代, Babuška[4] 和 Brezzi[6] 创立了混合有限元收敛性分析的一般理论. 混合有限元方法通过对未知函数及其辅助函数进行求解, 同时得到函数和其辅助函数的相同阶的数值逼近. 同标准的有限元方法相比,该方法的优点有：

1. 通过引入中间变量, 将高阶的偏微分方程进行降阶处理, 降低了有限元空间的光滑性要求, 为数值求解高阶微分方程带来了便利.
2. 相对于标准的有限元只能对微分算子进行后处理, 该方法提高了数值解精度.
3. 有些问题(如 Stokes 问题)本身就是混合形式. 例如在计算多孔介质流速度时, 通常的有限元方法是先求出压力, 然后再根据压力求出速度, 而混合有限元方法可以同时对压力和速度进行求解, 提高了数值解的精度.

近年, 张硕[26,27] 给出了四阶方程的两种形式的混合有限元方法的一般框架, 并用其研究了双调和方程和四阶旋度方程中的混合有限元方法.

2016年, 张硕[26] 基于正则分解和正则性分解给出了四阶方程稳定鞍点形式的混合有限元方法的一般框架, 并证明了其收敛性.

2016年, 张硕[27] 基于稳定分解提出了四阶方程的解耦的混合有限元方法的框架, 将高正则空间中的高正则问题转化为三个相互独立的低正则空间中的低正则问题组成的系统.

1.3 本文的结构

本学位论文主要研究四阶散度方程的混合有限元方法. 本文余下内容的结构如下.

本章的余下部分介绍与本论文有关的常见记号.

第二章, 介绍文献[26,27] 中提出的构造四阶问题混合有限元形式的一般框架及四阶散度方程混合有限元方法的理论基础.

第三章, 根据文献[26] 中基于正则分解和正则性分解的四阶问题的混合有限元方法的一般框架, 构造问题 A 的稳定鞍点形式的混合有限元方法, 并进行数值求解.

第四章, 根据文献[27] 中四阶问题解耦的混合有限元方法的一般框架, 构造问题 B 的解耦的混合有限元方法, 并进行数值求解.

第五章, 对四阶散度方程的混合有限元方法进行总结与展望 .

本学位论文, 我们用 $H_0^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H_0(\mathrm{div},\Omega)$ 表示常用的 Sobolev 空间, 记

- $L_0^2(\Omega) := \{w \in L^2(\Omega) : \int_\Omega w dx = 0\}$,
- $\underset{\sim}{H}_0^1(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^2$,
- $N_0(\mathrm{div},\Omega) = \{\underset{\sim}{u} \in H_0(\mathrm{div},\Omega), \nabla \times \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0}\}$,
- $\mathring{H}_0(\mathrm{div},\Omega) := \{\underset{\sim}{\tau} \in H_0(\mathrm{div},\Omega) : \mathrm{div}\underset{\sim}{\tau} = 0\}$,
- “$\underset{\sim}{\ }$” 表示向量,
- $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 空间的内积,
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示对偶积.

本文还使用符号 $\lesssim$, $\gtrsim$ 和 $\eqsim$. $X_1 \lesssim Y_1$, $X_2 \gtrsim Y_2$分别表示 $X_1 \leqslant C_1 Y_1$, $X_2 \geqslant C_2 Y_2$, 其中 , C_1 和 C_2 是与单元和网格尺寸无关的正常数. $X_3 \eqsim Y_3$ 表示 $X_3 \lesssim Y_3$ 且 $X_3 \gtrsim Y_3$.

第二章　预备知识

文献[26] 中提出了四阶问题基于正则分解和正则性分解的混合有限元方法的基本框架. 该框架基于空间的稳定分解, 对四阶问题进行降阶处理, 转化为稳定的鞍点问题, 再用有限元离散求解. 在文献[26] 的基础上, 文献[27] 中提出了四阶问题的混合有限元方法的一种解耦框架. 该框架将问题进行解耦处理, 分解成了三个相互独立的问题. 本章我们先简单介绍本学位论文中所用到的混合有限元方法的理论和基本框架, 再给出四阶散度方程混合有限元方法的所需的 Sobolev 空间理论.

记 V 是 Hilbert 空间. 我们考虑变分问题: 求 $u \in V$, 满足

$$a(u,v) = f(v), \qquad \forall v \in V. \tag{2.1}$$

2.1　四阶问题的两种混合有限元方法框架

本节的内容参考自文献[26,27].

2.1.1　基于稳定分解的混合有限元方法的框架

记 $V := \{u \in V_1 : Du \in V_2\}$, 其中 $V_1,\ V_2$ 是 Hilbert 空间 , D 是算子.

记 $DV_1 := \{Dv : v \in V_1\}$. 定义

$$Y := DV_1 + V_2 = \{Dv_1 + v_2 :\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

假设1:　存在 Hilbert 空间 H, 使得 $V_2 \subset H$, D 是 V_1 到 H 的闭算子.

由文献[8] 的引理 2.3.1 知, $Y = DV_1 + V_2$ 在范数 $\|\cdot\|_Y$ 下完备, 其中

$$\|y\|_Y := \inf_{v_1\in V_1, v_2\in V_2, y=Dv_1+v_2} \|Dv_1\|_H + \|v_2\|_{V_2}.$$

本文考虑 $a(\cdot,\cdot)$ 具有如下形式:

$$a(u,v) := a_1(u,v) + b(u,Dv) + b(v,Du) + a_2(Du,Dv), \tag{2.2}$$

其中 $a_1(\cdot,\cdot)$ 和 $a_2(\cdot,\cdot)$ 分别是 V_1, V_2 上的对称连续半定双线性泛函, $b(\cdot,\cdot)$ 是 $V_1\times V_2$ 上的有界双线性泛函, $f(v)$ 具有如下形式:

$$f(v) = \langle f_1, v\rangle + \langle f_2, Dv\rangle, f_1 \in V_1',\ f_2 \in V_2'. \tag{2.3}$$

则问题(2.1)变成:
求$u\in V$, 满足 $\forall v\in V$ 有:

$$a_1(u,v) + b(u,Dv) + b(v,Du) + a_2(Du,Dv) = \langle f_1, v\rangle + \langle f_2, Dv\rangle. \tag{2.4}$$

记$c(\cdot,\cdot)$ 为定义在Y上的内积, 基于正则分解 $Y = DV_1 + V_2$, (2.4)有如下等价形式:
求$(u,\phi,\zeta)\in X := V_1\times V_2\times Y$, 满足 $\forall(v,\psi,\eta)\in X$ 有:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_1(u,v) & +b(\phi,v) & +c(\zeta,Dv) & = \langle f_1, v\rangle \\ b(u,\psi) & +a_2(\phi,\psi) & -c(\zeta,\psi) & = \langle f_2,\psi\rangle \\ c(Du,\eta) & -c(\phi,\eta) & & = 0 \end{array}\right. \tag{2.5}$$

定理 2.1.1. *给定 $f_1\in V_1'$, $f_2\in V_2'$, 问题 (2.5) 存在唯一解 $(u,\phi,\zeta)\in X$, 且*

$$\|u\|_{V_1} + \|\phi\|_{V_2} + \|\zeta\|_Y \eqsim \|f_1\|_{V_1'} + \|f_2\|_{V_2'}.$$

从而, u 是原问题 (2.4) 的解.

2.1.2 解耦的混合有限元方法的框架

因为 DV_1 在 Y 上是闭的, 则有正交分解 $Y = DV_1 \oplus (DV_1)^{\perp}$, 同时 $Y' = (DV_1)^0 \oplus ((DV_1)^{\perp})^0$.

假设2: D 是 V_1 上的单射, $a_1(u,v)=0,\ \forall u,v \in V_1$, $b(\phi,v)=0,\ \forall v \in V_1, \phi \in V_2$. $a_2(Du,Dv)$ 是 V 上的强制双线性形式.

在此假设下, 问题 (2.5) 变为:
求 $(u,\phi,\zeta_1,\zeta_2) \in X_1 := V_1 \times V_2 \times (DV_1) \times (DV_1)^{\perp}$, 满足 $\forall (v,\psi,\eta_1,\eta_2) \in X_1$ 有:

$$\begin{cases} & & c(\zeta_1,Dv) & & = \langle f_1, v\rangle, \\ & +a_2(\phi,\psi) & -c(\zeta_1,\psi) & -c(\zeta_2,\psi) & = \langle f_2,\psi\rangle, \\ c(Du,\eta_1) & -c(\phi,\eta_1) & & & = 0, \\ & c(\phi,\eta_2) & & & = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

.

定理 2.1.2. *问题 (2.4) 按照 (2.6) 可以解耦成如下三个独立的子系统:*

1. 求 $\zeta_1 \in DV_1$, 满足:

$$c(Dv,\zeta_1) = \langle f_1, v\rangle, \forall v \in V_1. \tag{2.7}$$

2. 求 $(\phi,\zeta_2) \in V_2 \times (DV_1)^{\perp}$, 满足 $\forall (\psi,\eta_2) \in V_2 \times (DV_1)^{\perp}$ 有:

$$\begin{cases} a_2(\phi,\psi) & -c(\zeta_2,\psi) & = c(\zeta_1,\psi) + \langle f_2,\psi\rangle, \\ -c(\phi,\eta_2) & & = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

3. 求 $u \in V_1$, 满足:

$$c(Du,\eta_1) = c(\psi,\eta_1),\ \forall \eta_1 \in V_1. \tag{2.9}$$

2.2 四阶散度方程的混合有限元方法相关理论

2.2.1 有限元空间

$\mathcal{G}_h$ 表示 Ω 的正则剖分, $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{G}_h} \bar{K}$.

单纯形 K 中, 用 $P_k(K)$ 表示 K 上所有次数不超过 k 的多项式构成的空间.记 $q_0=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$, $q_i=\lambda_j\lambda_k\lambda_l$,其中 $\{j,k,l\}=\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}$, $i=1,2,3,4$.

形函数空间$\mathbb{F}(K)$的定义为:

$$\mathbb{F}(K):=\{\underset{\sim}{u}+v\underset{\sim}{x}:\underset{\sim}{u}\in\mathbb{R}^3,v\in\mathbb{R}\}$$

有限元空间定义如下:

- $\mathsf{L}_h:=\{w\in H^1(\Omega):w|_K\in P_1(K),\ \forall K\in\mathcal{G}_h\}$;
- $\mathsf{L}_{h0}:=\mathsf{L}_h\cap H_0^1(\Omega)$;
- $\mathbb{RT}_h:=\{\underset{\sim}{w}\in H(\mathrm{div},\Omega):\underset{\sim}{w}|_K\in\mathbb{F}(K),\ \forall K\in\mathcal{G}_h\}$;
- $\mathbb{RT}_{h0}:=\mathbb{RT}_h\cap H_0(\mathrm{div},\Omega)$;
- $\mathcal{L}_h^0$ 表示分片常数空间;
- $\mathcal{L}_{h0}^0:=\mathcal{L}_h^0\cap L_0^2(\Omega)$.

2.2.2　稳定分解

引理 2.2.1. [28] 下面的 *Helmholtz* 分解在 $\underset{\sim}{L}^2(\Omega)$ 和 $H_0(\mathrm{div},\Omega)$ 中是正交的:

$$H_0(\mathrm{div},\Omega)=\mathring{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\oplus^\perp N_0(\mathrm{div},\Omega).$$

引理 2.2.2. [15] 给定 $\underset{\sim}{\tau}\in H_0(\mathrm{div},\Omega)$, 存在 $\underset{\sim}{\phi}\in\underset{\sim}{H}_0^1(\Omega)$, 使得 $\mathrm{div}\underset{\sim}{\phi}=\mathrm{div}\underset{\sim}{\tau}$, $\|\underset{\sim}{\phi}\|_{1,\Omega}\leqslant C\|\underset{\sim}{\tau}\|_{\mathrm{div},\Omega}$, 其中 C 是正常数.

引理 2.2.3. *(Friedrichs 引理[9])* 存在常数 C, 使得 :

$$\|\underset{\sim}{v}\|_{0,\Omega}\leqslant C\|\mathrm{div}\underset{\sim}{v}\|_{0,\Omega},\ \forall\underset{\sim}{v}\in N_0(\mathrm{div},\Omega)\tag{2.10}$$

引理 2.2.4. [28] $\mathrm{div}N_0(\mathrm{div},\Omega)+H_0^1(\Omega)=L^2(\Omega)$.

注 2.2.5. $L^2(\Omega)$ 具有稳定分解 $\mathrm{div}H_0(\mathrm{div},\Omega)+H_0^1(\Omega)=L^2(\Omega)$.

即给定 $p\in L^2(\Omega)$, 存在 $\underset{\sim}{u}\in H_0(\mathrm{div},\Omega)$, $r\in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$p=\mathrm{div}\underset{\sim}{u}+r,\ 且\ \|\underset{\sim}{u}\|_{\mathrm{div},\Omega}+\|r\|_{1,\Omega}\leq C\|p\|_{0,\Omega}.\tag{2.11}$$

引理 2.2.6. 有限元空间 $\mathbb{RT}_{h0}$ 有如下等价形式

$$\mathring{\mathbb{RT}}_{h0} = \begin{cases} \nabla^{\perp}\mathsf{L}_{h0} & d=2; \\ \nabla \times \mathbb{N}_{h0} & d=3. \end{cases} \tag{2.12}$$

引理 2.2.7. *(离散的 Friedrichs 不等式[9])* 对于 $\underset{\sim}{\tau}_h \in N_{h0}(\mathrm{div})$ 有 $\|\underset{\sim}{\tau}_h\|_{0,\Omega} \leqslant C\|\mathrm{div}\underset{\sim}{\tau}_h\|_{0,\Omega}$.

引理 2.2.8. *[28]* 记 Q_h 是 L^2 在 $\mathcal{L}_h^0$ 的投影. 则 $\mathrm{div}N_{h0}(\mathrm{div}) + Q_h\mathsf{L}_{h0} = \mathcal{L}_h^0$.
即给定 $p_h \in \mathcal{L}_h^0$，存在 $\underset{\sim}{u}_h \in N_{h0}(\mathrm{div})$, $r_h \in \mathsf{L}_{h0}$ 使得

$$p_h = \mathrm{div}\underset{\sim}{u}_h + Q_h r_h, \text{ 且 } \|\underset{\sim}{u}_h\|_{\mathrm{div},\Omega} + \|r_h\|_{1,\Omega} \leq C\|p\|_{0,\Omega}. \tag{2.13}$$

第三章　模型问题A的混合有限元方法

本章我们基于稳定分解 $\mathrm{div} H_0(\mathrm{div},\Omega)+H_0^1(\Omega)=L^2(\Omega)$ 讨论模型问题 A 的混合有限元方法.

$$\textbf{模型问题 A :}\begin{cases}(\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u}-\nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f}, & \text{在}\Omega\text{内},\\ \underset{\sim}{u}\cdot n=0,\ \mathrm{div}\underset{\sim}{u}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上}.\end{cases}\tag{3.1}$$

3.1　变分问题

记 $W_A:=\{\underset{\sim}{u}\in H_0(\mathrm{div},\Omega):\mathrm{div}\underset{\sim}{u}\in H_0(\Omega)\}$.

问题(3.1) 的基本变分形式为:

给定 $\underset{\sim}{f}_1\in \underset{\sim}{H}^{-1}(\Omega)$, $f_2\in H^{-1}(\Omega)$, 求 $\underset{\sim}{u}\in W_A$ 满足 $\forall\underset{\sim}{v}\in W_A$ 有:

$$(\nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{u},\nabla\mathrm{div}\underset{\sim}{v})+(\mathrm{div}\underset{\sim}{u},\mathrm{div}\underset{\sim}{v})+(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})=\langle\underset{\sim}{f}_1,\underset{\sim}{v}\rangle+\langle f_2,\mathrm{div}\underset{\sim}{v}\rangle,\tag{3.2}$$

其中, $\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}_1+\nabla f_2$.

基于引理 2.2.4 中的稳定分解分解 $\mathrm{div} H_0(\mathrm{div},\Omega)+H_0^1(\Omega)=L^2(\Omega)$, (3.2)的降阶形式为:

求$(\underset{\sim}{u},r,p)\in X_A:=H_0(\mathrm{div},\Omega)\times \mathrm{H}_0^1(\Omega)\times \mathrm{L}^2(\Omega)$, 满足 $\forall(\underset{\sim}{v},s,q)\in X_A$:

$$\begin{cases}(\mathrm{div}\underset{\sim}{u},\mathrm{div}\underset{\sim}{v})+(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}) & & +(p,\mathrm{div}\underset{\sim}{v}) & =(\underset{\sim}{f}_1,\underset{\sim}{v}),\\ & (\nabla r,\nabla s) & -(p,s) & =(f_2,s),\\ (\mathrm{div}\underset{\sim}{u},q) & -(r,q) & & =0.\end{cases}\tag{3.3}$$

注 3.1.1. 由定理 *2.1.1* 知，对于给定的$\underset{\sim}{f}_1 \in \underset{\sim}{H}^{-1}(\Omega)$，$f_2 \in H^{-1}(\Omega)$，降阶形式*(3.3)*存在唯一解 $(\underset{\sim}{u}, r, p) \in X_A$，且

$$\|\underset{\sim}{u}\|_{\mathrm{div},\Omega} + \|r\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \eqsim \|\underset{\sim}{f}_1\|_{-1,\Omega} + \|f_2\|_{-1,\Omega}.$$

从而，$\underset{\sim}{u}$ 是原问题 *(3.1)* 的解.

3.2 有限元方法

变分问题 (3.3) 的混合有限元离散为:

求 $(\underset{\sim}{u}_h, r_h, p_h) \in X_{Ah} := \mathbb{RT}_{h0} \times \mathcal{L}_h^0 \times \mathsf{L}_{h0}$，满足 $\forall(\underset{\sim}{v}_h, s_h, q_h) \in X_{Ah}$:

$$\begin{cases} (\mathrm{div}\underset{\sim}{u}_h, \mathrm{div}\underset{\sim}{v}_h) + (\underset{\sim}{u}_h, \underset{\sim}{v}_h) & & +(p_h, \mathrm{div}\underset{\sim}{v}_h) & = (\underset{\sim}{f_1}, \underset{\sim}{v}_h), \\ & (\nabla r_h, \nabla s_h) & -(p_h, s_h) & = (f_2, s_h), \\ (\mathrm{div}\underset{\sim}{u}_h, q_h) & -(r_h, q_h) & & = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

引理 3.2.1. 设 $(\underset{\sim}{u}, r, p)$ 和 $(\underset{\sim}{u}_h, r_h, p_h)$ 分别是 *(3.3)* 和 *(3.4)* 的解，则

$$\|\underset{\sim}{u}-\underset{\sim}{u}_h\|_{\mathrm{div},\Omega}+\|r-r_h\|_{1,\Omega}+\|p-p_h\|_{0,\Omega} \leqslant Ch(\|\underset{\sim}{u}\|_{1,\Omega}+\|\mathrm{div}\underset{\sim}{u}\|_{1,\Omega}+\|\mathrm{div}\underset{\sim}{u}\|_{2,\Omega}+\|p\|_{1,\Omega}). \tag{3.5}$$

证明. 由文献[26] 的引理 10 ,

$$\begin{aligned} & \|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}_h\|_{\mathrm{div},\Omega} + \|r - r_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \\ \leq \; & C[\inf_{(\underset{\sim}{v}_h, s_h, q_h) \in X_{A_h}} (\|\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}_h\|_{1,\Omega} + \|r - s_h\|_{1,\Omega} + \|p - q_h\|_{0,\Omega}) \\ & + \sup_{s_h \in \mathcal{L}_h^0} \frac{(s - \Pi_h s_h, p)}{\|s_h\|_{1,\Omega}} + \sup_{q_h \in \mathsf{L}_{h0}} \frac{(r - \Pi r, q_h)}{\|q_h\|_{0,\Omega}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

由文献[26]引理 19 得

$$(s - \Pi_h s_h, p) \leq \|s_h - \Pi_h s_h\|_{0,\Omega} \|q_h\|_{0,\Omega} \leq Ch|s_h|_{1,\Omega} \|p\|_{0,\Omega} \tag{3.7}$$

$$(r-\Pi r, q_h) \leq \|r-\Pi_h r\|_{0,\Omega}\|q_h\|_{0,\Omega} \leq Ch\|r\|_{1,\Omega}\|q_h\|_{0,\Omega} \tag{3.8}$$

综合 (3.6), (3.7), (3.8) 得到 (3.5), 完成证明. □

3.3 数值算例

本节我们分别给出在凸区域和非凸 L 型区域上使用 (3.4) 的混合有限元方法求解问题 A 的数值实验.

3.3.1 算例1．方型区域

考虑区域 $\Omega=[-1,1]\times[-1,1]$, 右端项 $\underset{\sim}{f}$ 的选择满足问题的真解为

$$\underset{\sim}{u}=\begin{bmatrix}(x-1)^2(x+1)^3(y-1)^2(y+1)^2\\(x-1)^3(x+1)^2(y-1)^2(y+1)^2\end{bmatrix}.$$

数值结果如下:

剖分细度	$\|u-u_h\|_{\mathrm{div},\Omega}$	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u-u_h\|_{\infty,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{0,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{1,\Omega}$
8×8	1.13041e+00	5.79524e-01	6.08720e-01	8.80091e-01	5.43207e+00
16×16	5.35476e-01	2.71169e-01	3.13141e-01	2.89022e-01	3.07994e+00
32×32	2.49090e-01	1.30757e-01	1.48684e-01	7.82913e-02	1.59165e+00
64×64	1.21181e-01	6.46339e-02	7.31868e-02	1.99893e-02	8.02570e-01
128×128	6.01279e-02	3.22187e-02	3.61494e-02	5.02409e-03	4.02139e-01

表 3.1: 算例1的数值误差

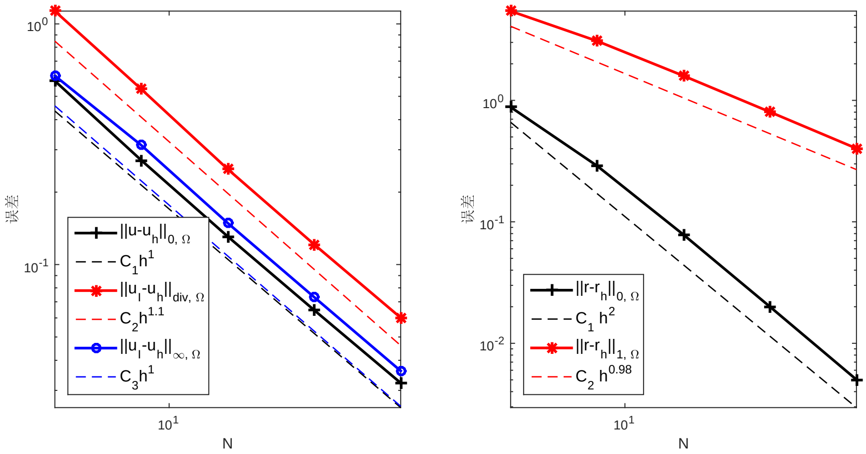

图 3.1: 算例1的误差的阶

3.3.2　算例2．L 型区域

考虑区域 $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]\backslash[0,1]\times[-1,0]$，右端项 f的选择满足问题的真解为

$$\underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} (x-1)^2x^2(x+1)^3(y-1)^2y^2(y+1)^2 \\ (x-1)^2x^2(x+1)^2(y-1)^2y^2(y+1)^3 \end{bmatrix}.$$

L 型区域图及数值结果如下:

剖分细度	$\Vert u-u_h\Vert_{\mathrm{div},\Omega}$	$\Vert u-u_h\Vert_{0,\Omega}$	$\Vert u-u_h\Vert_{\infty,\Omega}$	$\Vert r-r_h\Vert_{0,\Omega}$	$\Vert r-r_h\Vert_{1,\Omega}$
8×8	6.37256e-02	1.26737e-02	2.09623e-02	5.67936e-02	6.04315e-01
16×16	2.89772e-02	4.83298e-03	1.13895e-02	1.89805e-02	3.55551e-01
32×32	1.28283e-02	1.95841e-03	4.50259e-03	5.16335e-03	1.85316e-01
64×64	6.10677e-03	8.99060e-04	1.97996e-03	1.32004e-03	9.36437e-02
128×128	3.01054e-03	4.38435e-04	9.09601e-04	3.31897e-04	4.69468e-02

表 3.2: 算例2的数值误差

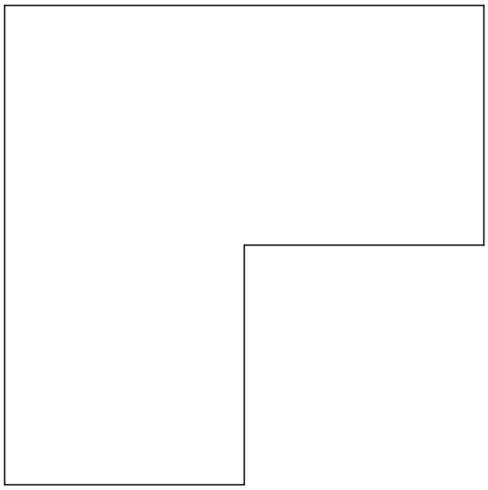

图 3.2:　L 型区域

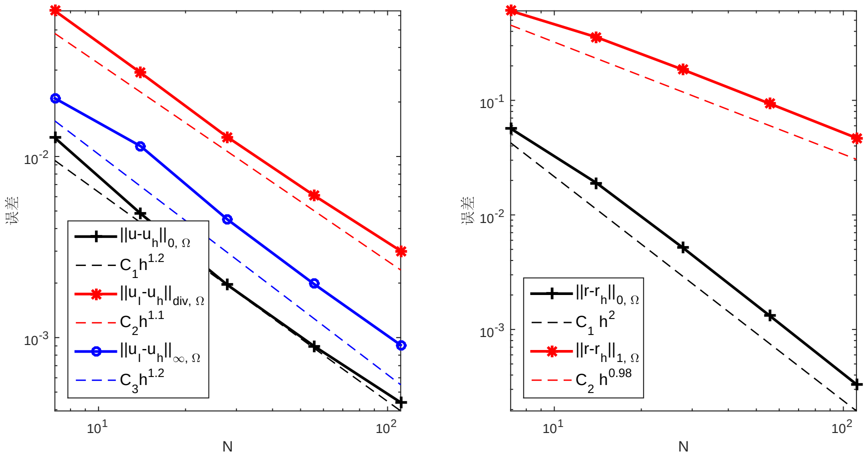

图 3.3: 算例2的误差的阶

第四章 模型问题B的混合有限元方法

本章我们讨论问题 B 的混合有限元方法.

$$
\textbf{模型问题 B}:\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f} & 在\Omega内, \\ \nabla\times\underset{\sim}{u}=0 & 在\Omega内, \\ \underset{\sim}{u}\cdot n=0,\ \mathrm{div}\underset{\sim}{u}=0 & 在\ \partial\Omega\ 上. \end{cases} \tag{4.1}
$$

4.1 变分问题

记$X_B := N_0(\mathrm{div},\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 基于引理 2.2.4 中的稳定分解, 得到模型问题 B 的变分形式如下:

求 $(\underset{\sim}{u},\phi,p)\in X_B$, 满足 $\forall(\underset{\sim}{v},\psi,q)\in X_B$:

$$
\begin{cases} & & (p,\mathrm{div}\underset{\sim}{v}) & =\left\langle \underset{\sim}{f_1},\underset{\sim}{v}\right\rangle, \\ & (\nabla\phi,\nabla\psi) & -(p,\psi) & =\langle f_2,\psi\rangle, \\ (\mathrm{div}\underset{\sim}{u},q) & -(\phi,q) & & =0, \end{cases} \tag{4.2}
$$

其中, $\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}_1+\nabla f_2$.

根据定理 2.1.2, 我们可以将 (4.2) 解耦成以下三个相互独立的子系统:

1. 求 $p_1\in L_0^2(\Omega)$, 满足:

$$
(p_1,\mathrm{div}\underset{\sim}{v})=(\underset{\sim}{f}_1,\underset{\sim}{v}),\ \forall\underset{\sim}{v}\in H_0(\mathrm{div},\Omega). \tag{4.3}
$$

2. 求$(\varphi,\lambda)\in H_0^1(\Omega)\times\mathbb{R}$, 满足 $\forall(\psi,\mu)\in H_0^1(\Omega)\times\mathbb{R}$有:

$$\begin{cases} (\nabla\varphi,\nabla\psi) & -(\lambda,\psi) & =(p_1,\psi)+(f_2,\psi) \\ -(\varphi,\mu) & & =0 \end{cases} \tag{4.4}$$

3. 求 $\underset{\sim}{u}\in H_0(\mathrm{div},\Omega)$, 满足:

$$(\mathrm{div}\underset{\sim}{u},q)=(\varphi,q),\ \forall q\in L_0^2(\Omega), \tag{4.5}$$

和

$$(\mathrm{div}\underset{\sim}{u},\nabla^\perp s)=0,\ \forall s\in H_0^1(\Omega). \tag{4.6}$$

注 4.1.1. 子系统 *1* 的唯一可解性由 $\nabla\times\underset{\sim}{f}_1=0$ 保证.

4.2 有限元方法

根据上一节的三个系统, 问题 B 的解耦的混合有限元离散为:

1. 求 $p_{1h}\in\mathcal{L}_{h0}^0(\Omega)$, 满足:

$$(p_{1h},\mathrm{div}\underset{\sim}{v}_h)=(\underset{\sim}{f}_1,\underset{\sim}{v}_h),\ \forall\underset{\sim}{v}_h\in\mathbb{RT}_{h0}. \tag{4.7}$$

2. 求 $(\varphi_h,\lambda_h)\in\mathrm{L}_{h0}(\Omega)\times\mathbb{R}$, 满足对于 $\forall(\psi_h,\mu_h)\in L_{h0}(\Omega)\times\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (\nabla\varphi_h,\nabla\psi_h) & -(\lambda_h,\psi_h) & =(p_{1h},\psi_h)+(f_2,\psi_h), \\ -(\varphi_h,\mu_h) & & =0. \end{cases} \tag{4.8}$$

3. 求 $\underset{\sim}{u}_h\in\mathbb{RT}_{h0}$, 满足:

$$(\mathrm{div}\underset{\sim}{u}_h,q_h)=(\varphi_h,q_h),\ \forall q_h\in\mathcal{L}_{h0}^0(\Omega), \tag{4.9}$$

和

$$(\mathrm{div}\underset{\sim}{u}_h,\nabla^\perp s_h)=0,\ \forall s_h\in\mathrm{L}_{h0}(\Omega). \tag{4.10}$$

注 4.2.1. 子系统 *(1)* 和 *(3)* 是唯一可解的.

4.3 数值算例

本节我们分别在凸区域和非凸 L 型区域中用 (4.5) 的混合有限元方法求解问题 B 的数值实验.

4.3.1 算例1．方型区域

考虑区域 $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]$.

$$U(x,y) = (x-1)^3(x+1)^3(y-1)^3(y+1)^3.$$

真解 $\underset{\sim}{u}$ 的选择满足 $\underset{\sim}{u} = \nabla U$, 这样的 $\underset{\sim}{u}$ 的选择使得 $\nabla\times\underset{\sim}{u} = 0$. 右端项 $\underset{\sim}{f}$的选择满足问题的真解为 $\underset{\sim}{u}$. 数值结果如下:

剖分细度	$\|u-u_h\|_{\mathrm{div},\Omega}$	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u-u_h\|_{\infty,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{0,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{1,\Omega}$
8×8	2.68060e+00	6.34665e-01	7.33702e-01	1.92677e+00	1.78028e+01
16×16	1.17801e+00	2.59464e-01	3.10042e-01	5.39503e-01	9.24538e+00
32×32	5.56504e-01	1.18362e-01	1.34231e-01	1.38975e-01	4.66561e+00
64×64	2.73679e-01	5.75526e-02	6.20037e-02	3.50086e-02	2.33816e+00
128×128	1.36252e-01	2.85649e-02	2.97877e-02	8.76886e-03	1.16975e+00

表 4.1: 算例1的数值误差

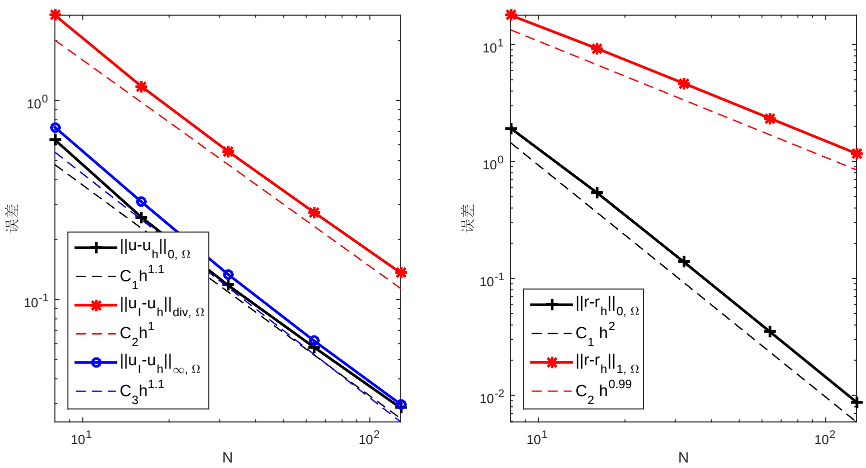

图 4.1: 算例1的误差的阶

4.3.2　算例2．L 型区域

考虑区域 $\Omega = [-1,1]\times[-1,1]\backslash[0,1]\times[-1,0]$, 如下图所示.

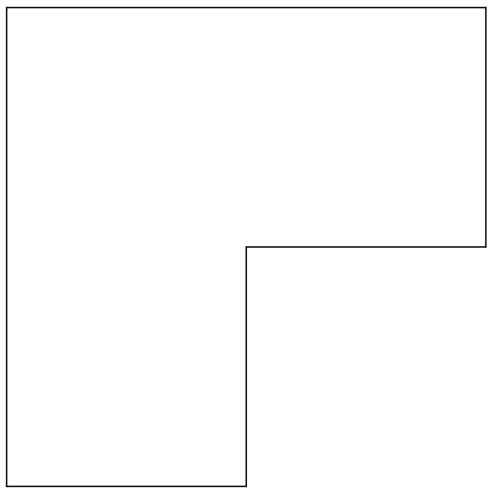

图 4.2:　L 型区域

$$U(x,y) = (x-1)^3x^3(x+1)^3(y-1)^3y^3(y+1)^3.$$

真解 $\underset{\sim}{u}$ 的选择满足 $\underset{\sim}{u} = \nabla U$, 这样的 $\underset{\sim}{u}$ 的选择使得 $\nabla\times\underset{\sim}{u} = 0$. 右端项 $\underset{\sim}{f}$ 的选择满足问题的真解为 $\underset{\sim}{u}$.数值结果如下:

剖分细度	$\|u-u_h\|_{\mathrm{div},\Omega}$	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$	$\|u-u_h\|_{\infty,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{0,\Omega}$	$\|r-r_h\|_{1,\Omega}$
8×8	8.58980e-02	1.29797e-02	1.47299e-02	9.38465e-02	9.06749e-01
16×16	3.98510e-02	4.87397e-03	7.52344e-03	3.37944e-02	5.97730e-01
32×32	1.67250e-02	1.75553e-03	3.09554e-03	9.49332e-03	3.20181e-01
64×64	7.68106e-03	7.42054e-04	1.30513e-03	2.44957e-03	1.62846e-01
128×128	3.74188e-03	3.51284e-04	5.92496e-04	6.17373e-04	8.17698e-02

表 4.2: 算例2的数值误差

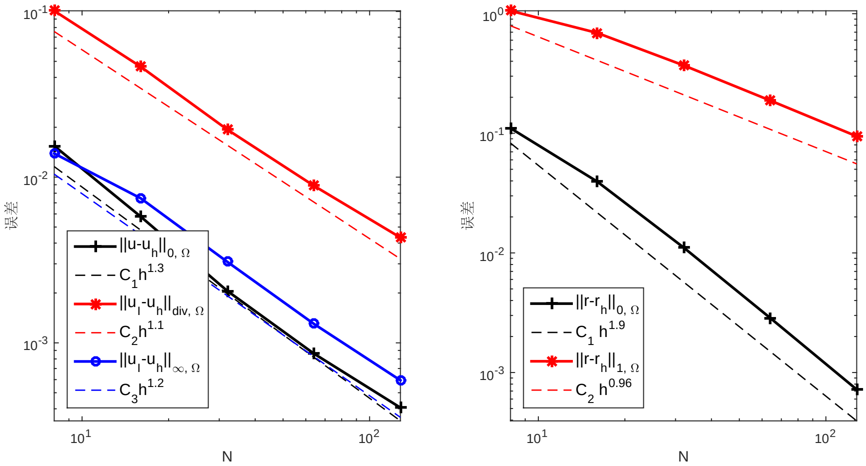

图 4.3: 算例2的误差的阶

第五章　总结与展望

5.1　总结

四阶散度方程是一种典型的四阶方程. 本文主要研究四阶散度算子的两种定解问题. 并针对这两种四阶散度算子的定解问题使用混合有限元方法进行数值求解. 在第三章中, 针对模型问题 A

$$\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\utilde{u} - \nabla\mathrm{div}\utilde{u} + \utilde{u} = \utilde{f}, & 在\Omega内, \\ \utilde{u}\cdot n = 0,\ \mathrm{div}\utilde{u} = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上. \end{cases} \tag{5.1}$$

基于正则分解和正则性分解, 给出了四阶散度问题的混合有限元方法, 并进行数值实验. 在第四章中, 给四阶散度方程 $(\nabla\mathrm{div})^2\utilde{u} = \utilde{f}$ 添加了 $\nabla\times\utilde{u} = 0$ 条件, 构造定解问题 B. 针对模型问题 B

$$\begin{cases} (\nabla\mathrm{div})^2\utilde{u} = \utilde{f}, & 在\Omega内, \\ \nabla\times\utilde{u} = 0, & 在\Omega内, \\ \utilde{u}\cdot n = 0,\ \mathrm{div}\utilde{u} = 0, & 在\ \partial\Omega\ 上. \end{cases} \tag{5.2}$$

给出了四阶散度问题的解耦的混合有限元方法, 并进行了数值实验.

数值实验表明, 模型问题 A 和模型问题 B 的这两种混合有限元方法都具有一阶收敛性质.

5.2　展望

在本文讨论的基础上, 希望进一步展开下面几个方面的工作:

1. 将二维问题的讨论拓展到三维空间;
2. 有限元离散时, 选择更多样的有限元进行离散;
3. 可以将该方法应用于其他的四阶方程.

参考文献

[1] Altan S B, Aifantis E C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity[J]. Scripta Metallurgica et Materialia, 1992, 26(2): 319-324.

[2] Amara M, Dabaghi F. An optimal C 0 finite element algorithm for the 2D biharmonic problem: theoretical analysis and numerical results[J]. Numerische Mathematik, 2001, 90(1): 19-46.

[3] Argyris J H, Fried I, Scharpf D W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method[J]. The Aeronautical Journal (1968), 1968, 72(692): 701-709.

[4] Babuška I, Aziz A K. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method[C]//The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972). 1972: 1-359.

[5] Babuška I. The finite element method with Lagrangian multipliers[J]. Numerische Mathematik, 1973, 20(3): 179-192.

[6] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers[J]. Revue fran?aise d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, 1974, 8(2): 129-151.

[7] Behrens E M, Guzmán J. A mixed method for the biharmonic problem based on a system of first-order equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2011, 49(2): 789-817.

[8] Bergh J, L?fstr?m J. Interpolation spaces. An introduction[J]. Grundlehren Math. Wiss, 1987, 223.

[9] Boffi D, Brezzi F, Fortin M. Mixed finite element methods and applications[M]. Berlin: Springer, 2013.

[10] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems, 1978.

[11] Cheng X, Han W, Huang H. Some mixed finite element methods for biharmonic equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 126(1): 91-109.

[12] Ciarlet P G, Raviart P A. A mixed finite element method for the biharmonic equation[C]//Proceedings of Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in PDE. 1974: 125-145.

[13] Fischer P. C1 continuous methods in computational gradient elasticity[D]. Lehrstuhl für Techn. Mechanik, Univ. Erlangen-Nürnberg, 2011.

[14] Falk R S. Approximation of the biharmonic equation by a mixed finite element method[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15(3): 556-567.

[15] Girault V, Raviart P A. Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms[J]. Springer series in computational mathematics , 1986 (5).

[16] Hellan K. Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method[J]. ACTA POLYTECHNICA SCANDINAVICA-CIVIL ENGINEERING AND BUILDING CONSTRUCTION SERIES, 1967 (46): 1

[17] Herrmann L R. Finite-element bending analysis for plates[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1967, 93(5): 13-26.

[18] Johnson C. On the convergence of a mixed finite-element method for plate bending problems[J]. Numerische Mathematik, 1973, 21(1): 43-62.

[19] Monk P. A mixed finite element method for the biharmonic equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1987, 24(4): 737-749.

[20] Morley L S D. The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems[J]. Aeronautical Quarterly, 1968, 19(02): 149-169.

[21] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, 16(1): 51-78.

[22] 石钟慈, 王鸣. 有限元方法[M]. 科学出版社, 2010.

[23] 王敏中, 王炜, 武际可. 弹性力学教程[M]. 北京大学出版社, 2011.

[24] 徐芝纶. 弹性力学教程[J]. 1984.

[25] 杨孟洲, 王鸣. 二维线性全应变梯度弹性理论的有限元方法 [D], 北京, 北京大学,2014.

[26] Zhang S. Regular decomposition and a framework of order reducd methods for fourth order problems[J]. arXiv preprint arXiv:1611.00154, 2016.

[27] Zhang S. Decoupled mixed element schemes for fourth order problems[J]. arXiv preprint arXiv:1611.10029, 2016.

[28] Zhang S. Mixed schemes four fourth order div equations[J]. preprint, 2017.

致谢

“逝者如斯夫, 不舍昼夜”. 转眼三年的硕士生涯即将结束. 三年中, 在燕园浓郁的学术氛围里, 我不断地认知学术、认知自我.

感谢我的导师王鸣老师和胡俊老师对我的指导. 您们的学识和人品使我有一种“仰之弥高, 钻之弥坚”之感. 您们严谨求实的治学态度以及永无止境的进取精神是我应当终身学习的宝贵财富. 这份师生恩情使我永生难忘.

感谢师兄张硕老师. 您不仅耐心地帮我解答了许多科研问题, 与我讨论论文中的细节, 还多次与我分享科研心得, 这些无形的财富很大程度上促进了我的进步.

感谢师门的师兄师姐师弟们. 无论是在学习上还是生活上你们都给予了我很大的帮助, 在此向你们致以真诚的谢意并祝你们学业有成.

我还要深深地感谢支持和鼓励我的家人和男友, 是你们的默默付出和陪伴, 使我能够无牵挂地学习. 我爱你们!

最后, 向所有关心、帮助和批评过我的人们表示感激和谢意.

感谢一路上有你们!

谨以此文纪念恩师王鸣老师.

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

（必须装订在提交学校图书馆的印刷本）

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校在 □ 一年 / □ 两年 / □ 三年以后在校园网上全文发布。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名： 导师签名： 日期： 年 月 日