

裂缝介质渗流多尺度混合有限元数值模拟研究

张娜, 姚军, 黄朝琴, 王月英

(中国石油大学 石油工程学院, 青岛 266555)

摘要: 针对裂缝介质具有多尺度特点, 建立了 Darcy/Stokes-Brinkman 多尺度耦合模型, 采用多尺度混合有限元方法, 对裂缝介质渗流问题进行了研究。阐述了多尺度混合有限元方法的基本原理, 并推导得到 Darcy/Stokes-Brinkman 方程的多尺度混合有限元计算格式。数值计算结果表明, 大尺度 Darcy 模型能够捕捉到小尺度上裂缝网络渗流特征; 与网格粗化、传统有限元方法相比, 多尺度混合有限元方法的基函数具有能反映单元内参数变化的优点, 在保证计算精度的同时能够减少计算量, 对于裂缝油藏具有良好的适用性。

关键词: 裂缝介质; 多尺度混合有限元; 多尺度; 数值模拟

中图分类号: TE319 **文献标志码:** A **文章编号:** 0254-0053(2013)01-54-11

Multiscale Mixed Finite Element Numerical Simulation for Seepage in Fractured Porous Media

ZHANG Na, YAO Jun, HUANG Zhao-qin, WANG Yue-ying

(College of Petroleum Engineering, China University of Petroleum(East China), Qingdao 266555, China)

Abstract: Multiscale mixed finite element method(MsMFEM) was applied to the numerical simulation of single phase flow in fractured porous media and Darcy/Stokes-Brinkman model was developed, in which Darcy model was approximated pressure and fluxes on a coarse grid and fine-scale effects was captured by Stokes-Brinkman model. The fundamental theory of MsMFEM was explicitly described, and then the multiscale calculating formulas were deduced. The method was applied to two different test cases. The test cases demonstrate that MsMFEM can capture fine-scale features comparing with upscaling methods; it is better not only in calculation speed but also in accuracy, and valid for fractured reservoirs.

Key words: fractured porous media; multiscale mixed finite element method; multiple scale; numerical simulation

裂缝介质在地下流体动力学中是指裂缝发育的岩体, 其裂缝空间尺度从几微米到几十米跨越了多个数量级, 具有强烈的非均质性和多尺度性^[1-7]。这类裂缝介质的裂缝大小分布及其地质成因如表 1 所示。对这类介质进行模拟, 需要对多个尺度的基质岩块系统和裂缝系统进行耦合, 而且其流动既可能存在渗流, 也可能存在大空间的自由流动, 是一个复杂的耦合流动系统, 应用现有的传统数值方法对其进行流动模拟仍存在困难^[8]。近年来, 关于裂缝介质耦合 Darcy-Stokes 模型的数值分析及相关理论用成为计算流体力学和计算数学等领域的研究热点, 但耦合 Darcy-Stokes 模型在处理天然裂缝介质渗流问题时仍存在

收稿日期: 2012-01-01

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2011CB201004); 国家重点自然科学基金(51234007); 高等学校学科创新引智计划项目和中国石油大学(华东)优秀博士学位论文培育计划项目(LW120201)

作者简介: 张娜(1986-), 女, 山东沾化人, 博士生. 研究方向: 计算力学. Email: znpear@163.com

通信作者: 姚军. Email: rcogrf_upc@126.com

以下几个问题:首先,不可能得到整个区域关于基质与裂缝交界面位置、形态的准确信息和界面条件值;其次,若需要分析小尺度裂缝,将给计算带来困难;第三,自由区域可能被填充或者流体中有悬浮颗粒。针对这些问题,许多专家学者基于尺度提升法进行了一系列研究^[9-13]。

表 1 裂缝的分类
Tab.1 Category of fracture

形态	分类	开度/ μm	地质作用
裂 缝	构造溶蚀缝	大小不等	构造溶蚀
	构造缝	<1	构造
	层间缝	$>10\sim 200$	沉积
	压溶缝	$1\sim 10$	沉积成岩

尺度提升的目的是通过在小尺度上进行计算来预测大尺度上的有效性质,但尺度提升后大尺度油藏数值模拟不能充分捕捉油藏小尺度特征。多尺度数值模拟方法^[14-15]有效地解决了这一问题,多尺度方法是以具有原分辨率的全局问题为目标并在大尺度上进行求解,因此该方法在降低计算量的同时还能充分地捕捉到小尺度特征。目前关于多尺度方法在裂缝介质中流体流动问题中的研究国内外还非常少,对此,笔者针对多尺度混合有限元法(MsMFEM)求解裂缝介质单相渗流问题的方法原理和模拟技术进行了研究。

1 数学模型

假设岩石和流体均不可压缩且流动过程恒温;未充填裂缝中的流体流动符合 Navier-Stokes 方程,多孔介质区域中流体流动符合 Darcy 定律;忽略重力和毛管压力的影响;只考虑质量守恒和动量守恒。

多孔介质区域 Ω_p 的数学模型为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_D = q \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v}_D = -\frac{\boldsymbol{K}}{\mu} \nabla p_D \tag{2}$$

自由流动区域 Ω_f 的数学模型为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_S = q \tag{3}$$

$$-\mu \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}_S + \nabla \boldsymbol{v}_S^T) + \nabla p_S = 0 \tag{4}$$

可将式(1)~(4)写成统一形式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = q \tag{5}$$

$$\mu \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{v} + \nabla p - \tilde{\mu} \Delta \boldsymbol{v} = 0 \tag{6}$$

其中 \boldsymbol{v} 为速度/(m/s); q 为源汇项/(1/s); \boldsymbol{K} 为油藏渗透率张量/(μm^2); p 为压力/(MPa); μ 为流体黏度/($\text{mPa} \cdot \text{s}$); $\tilde{\mu}$ 为有效黏度/($\text{mPa} \cdot \text{s}$)。 \boldsymbol{K} 和 $\tilde{\mu}$ 的选取与区域类型有关。式(5)和(6)即为 Stokes-Brinkman 方程^[16]。

在自由流动区域 Ω_f ,令 \boldsymbol{K} 趋近于无穷, $\tilde{\mu}$ 等于流体黏度 μ ,即

$$\tilde{\mu} = \mu, \quad \boldsymbol{K} = \infty \tag{7}$$

那么 Stokes-Brinkman 方程简化为 Stokes 方程。在多孔介质区域 Ω_p ,令 \boldsymbol{K} 等于多孔介质的渗透率,那么式(6)可写成

$$\nabla p = -\mu \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{v} + \tilde{\mu} \Delta \boldsymbol{v} \tag{8}$$

可以发现,上式与 Darcy 方程的区别是多了黏滞项 $\tilde{\mu} \Delta \boldsymbol{v}$,若令 $\tilde{\mu}$ 等于 0,式(6)可简化为耦合 Darcy-Stokes 方程,则再次进入界面条件导致计算困难。若令 $\tilde{\mu}$ 等于 μ ,式(8)中 $-\mu \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{v}$ 比 $\tilde{\mu} \Delta \boldsymbol{v}$ 大好几个数量级^[9],那么 $\nabla p \approx -\mu \boldsymbol{K}^{-1} \boldsymbol{v}$,因此本文中取 $\tilde{\mu} = \mu$ 。

根据上述分析,将 Darcy 方程(式(1)~(2))和 Stokes-Brinkman 方程(式(5)~(6))分别作为大尺度和小尺度流动模型。

2 多尺度混合有限元法

混合多尺度有限元法在大尺度上采用 Darcy 方程对压力和速度进行近似,在小尺度上通过求解局部 Stokes-Brinkman 方程得到基函数来捕捉小尺度特征。

2.1 空间离散及线性方程组

令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d=2,3)$ 是有界闭区域, \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $T_h = \{\Omega_i\}$ 是 Ω 的一粗网格剖分. $L^2(\Omega)$ 为定义在 Ω 上的平方可积函数空间, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ 为标准 Sobolev 空间, 本文定义如下函数空间

$$H^{\text{div}}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^d, \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}$$

$$Q = L^2_0(\Omega) = \{ p \mid p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \}$$

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^{\text{div}}(\Omega) : \mathbf{v}_S \in (H^1(\Omega))^2; \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_S; \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_D = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \}$$

其中下标 S、D 分别对应于 Stokes、Darcy, 则方程(1)~(2)的变分形式为: 求 $(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) \in Q \times V$, 满足

$$a_D(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}) - b(\tilde{p}, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q \tag{9}$$

$$b(l, \tilde{\mathbf{v}}) = (q, l), \quad \forall l \in V \tag{10}$$

其中

$$a_D(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mu \mathbf{K})^{-1} \tilde{\mathbf{v}} \, d\Omega, \quad b(\tilde{p}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (q, l) = \int_{\Omega} q l \, d\Omega$$

对于 Darcy 问题, 采用最低阶 Raviart-Thomas(RT)基函数。为了使得法向速度 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 在单元界面处连续, 引入单元表面压力 λ , 相当于引入一个 Lagrange 乘数, 不对 \mathbf{v} 、 p 产生影响^[17]。令 $\mathbf{v} = \sum Q_i \Psi_i$, $p = \sum p_k \delta_k$, 可得到离散方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\mathbf{p} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 \mathbf{Q} 为外向流量向量; \mathbf{p} 为单元压力向量; λ 为表面压力向量; $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, 其中 $b_{ij} = \int_{\Omega} \Psi_i \cdot (\mu \mathbf{K})^{-1} \Psi_j \, d\Omega$; $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$, 其中 $c_{ij} = \int_{\Omega} \delta_j \nabla \cdot \Psi_i \, d\Omega$; $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}$, 其中 $d_{ij} = \int_{\partial\Omega} |\Psi_i \cdot \mathbf{n}_j| \, ds$ 。 Ψ_i 和 Ψ_j 是外向速度基函数, \mathbf{n}_j 是单元表面 j 的法向量, δ_j 满足

$$\delta_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_i \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_i \end{cases}$$

对于 Stokes-Brinkman 方程, 其变分形式与 Darcy 方程的相似: 求 $(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) \in Q \times V$, 满足

$$a_{\text{SB}}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}) - b(\tilde{p}, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q \tag{12}$$

$$b(l, \tilde{\mathbf{v}}) = (q, l), \quad \forall l \in V \tag{13}$$

其中

$$a_{\text{SB}}(\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mu \mathbf{K})^{-1} \tilde{\mathbf{v}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\mu} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{v}} \, d\Omega$$

$b(\tilde{p}, \mathbf{u})$ 与 (q, l) 与上面相同。

假设渗透率张量 \mathbf{K} 为对角阵, 具有以下形式

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}$$

将速度 \mathbf{v} 看作是由 v_1 和 v_2 两部分构成的。令 $v_k = \sum v_{ik} \phi_i (k=1,2)$, $p = \sum p_k \phi_k$, 可以得到线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{C}_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ -\mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中 $\mathbf{B}_k = \{b_{ij,k}\}$, $b_{ij,k} = \int_{\Omega} \psi_i \cdot (\mu \mathbf{K}_k)^{-1} \psi_j dx + \int_{\Omega} \tilde{\mu} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} \right) d\Omega$

$\mathbf{C}_k = \{c_{ij,k}\}$, $c_{ij,k} = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \phi_j d\Omega$

$\mathbf{q} = \{ql\}$, $ql = \int_{\Omega} \phi l q dx$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是由速度分量 v_{i1}, v_{i2} 构成的速度向量; \mathbf{p} 是由压力分量 p_i 构成的压力向量, $k=1,2$ 表示空间维度。

2.2 MsMFEM 基函数

令 $k = \{E_k\}$ 是 Ω 的互不重叠的细网格剖分, 剖分满足只要 $E_k \cap \Omega_i \neq \emptyset$, 就有 $E_k \subset \Omega_i$, 如图 1 所示。令 $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, 每个交界面 Γ_{ij} 对应于一个速度基函数 Ψ_{ij} , 每个粗网格 Ω_i 对应于一个压力基函数 ϕ_i 。

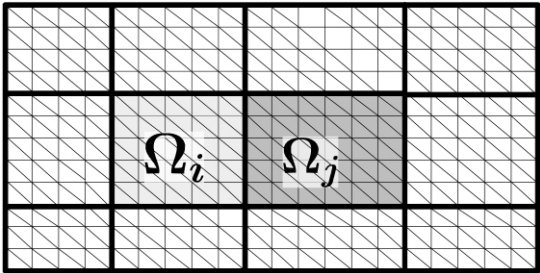


图 1 网格剖分示意图

Fig. 1 Schematic showing fine and coarse scale meshes

局部流动问题中的交界面处压力 ϕ_{ij} 在混合公式(14)中未出现, 因此仅需求解基函数 ϕ_{ij} 。将每个粗网格的压力看作常函数, 从而压力基函数 ϕ_i 满足

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i \\ 0, & x \notin \Omega_i \end{cases} \tag{15}$$

因为区域 $\Omega_{ij} = \Omega_i \cup \Gamma_{ij} \cup \Omega_j$ 包含自由流动区域, 因此采用 Stokes-Brinkman 方程, 速度的基函数 Ψ_{ij} 满足下面的局部流动问题

$$\mu \mathbf{K}^{-1} \Psi_{ij} + \nabla \phi_{ij} - \tilde{\mu} \Delta \Psi_{ij} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \cdot \Psi_{ij} = \begin{cases} w_i(x), & x \in \Omega_i \\ -w_j(x), & x \in \Omega_j \\ 0, & x \notin \Omega_{ij} \end{cases} \tag{17}$$

$$\Psi_{ij}(x) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega_{ij} \tag{18}$$

其中 \mathbf{n} 为 $\partial\Omega_{ij}$ 单位外法向量; \mathbf{n}_{ij} 为由 Ω_i 指向 Ω_j 的 Γ_{ij} 单位法向量。因为速度是速度基函数的线性组合, 那么有

$$\nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Omega_i} = \sum_j Q_j \nabla \cdot \Psi_{ij} = w_i(x) \sum_j Q_j = w_i(x) \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = w_i(x) \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \tag{19}$$

可以看出, $w_i(x)$ 相当于 Ω_i 上的一加权函数, 将 $\text{div}(\mathbf{v})$ 以某种方式分布到小尺度网格上, 满足 $\int_{\Omega_i} w_i(x) dx = 1$ 。对于不可压缩流动问题, $w_i(x)$ 的选取有多种方式^[18-19], 其中最为常用的是

$$w(x)_i = \begin{cases} 1/|\Omega_i|, & \int_{\Omega_i} q dx = 0 \\ q(x)/\int_{\Omega_i} q(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx \neq 0 \end{cases} \tag{20}$$

但这一选取方法存在一问题,若网格内存在低渗透区域,计算的流速偏高,本文针对这一问题进行了改进。以一个简单模型为例(图 2),在区域 $\Omega_{ij}=[0,1]\times[0,1]$ 内满足

$$\nabla \cdot k \nabla p=0 \tag{21}$$

$$p(0,y)=1, \quad p(1,y)=1 \tag{22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x,0)=\frac{\partial p}{\partial y}(x,1)=0 \tag{23}$$

其中当 $y<0.5$ 时 $k(x,y)=k_1$, 当 $y\geq 0.5$ 时 $k(x,y)=k_2$ 。这一问题速度具有唯一解

$$v(x,y)=-k \nabla p=\begin{cases} v_1=(k_1,0)^T & y<0.5 \\ v_2=(k_2,0)^T & y\geq 0.5 \end{cases} \tag{24}$$

根据式(20), $w_i=w_j=1/|\Omega_i|=2$; 而根据解析解(24), 上下两部分相应的通量比为 k_1/k_2 。若单元内存在渗透率差异, 采用式(20)计算将产生局部误差。为避免这一误差, 本文选取

$$w(x)_i=\begin{cases} \sigma(x)/\int_{\Omega_i} \sigma(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx = 0 \\ q(x)/\int_{\Omega_i} q(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx \neq 0 \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\sigma(x)=\text{trace}(\mathbf{K}(x))/d$, $\text{trace}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 特征值之和。这样高渗透区域权重大于低渗透区域, 有效避免均一化产生的误差。

2.3 全局大尺度方程

为了建立多尺度方程组, 首先将局部流动问题求解得到的多尺度基函数分为两部分

$$\Psi_{ij}=\Psi_{ij}^H-\Psi_{ji}^H \tag{26}$$

其中

$$\Psi_{ij}^H(E)=\begin{cases} \Psi_{ij}(E), & E\in\Omega_{ij}\backslash\Omega_j \\ 0, & E\notin\Omega_i \end{cases}$$
$$\Psi_{ji}^H(E)=\begin{cases} -\Psi_{ij}(E), & E\in\Omega_j \\ 0, & E\notin\Omega_j \end{cases}$$

令 Ψ 是以所有基函数 Ψ_{ij}^H 作为列向量的矩阵。根据多尺度方法的原理, 小尺度速度和压力场可由相应的基函数近似表示出来, 那么 v^f, p^f 可近似为

$$v^f\approx\Psi Q^C, \quad p^f\approx I p^C \tag{27}$$

其中 I 是粗网格到细网格的变换矩阵, 若第 i 个粗网格包含第 j 个细网格, $I_{ij}=1$, 否则 $I_{ij}=0$ 。对于粗网格表面压力 λ^C 可表示为

$$\lambda^C=\{\lambda_i\}, \quad \lambda_i^c=\int_{\Gamma_{ij}} \lambda^f \Psi_{ij} \cdot n ds \tag{28}$$

令 J 是粗网格表面到细网格表面的变换矩阵, 若第 i 个粗网格表面包含第 j 个细网格表面, $J_{ij}=1$, 否则 $J_{ij}=0$, 那么大尺度表面压力与小尺度表面压力对应关系可表示为

$$\lambda^f=J\lambda^C$$

根据式(11)、(14), 对小尺度方程进行组装得到多尺度方程组

$$\begin{bmatrix} \Psi^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^f \begin{bmatrix} v^f \\ -p^f \\ \lambda^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I^T q^f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{29}$$

结合式(27)、(28), 得到大尺度方程组为

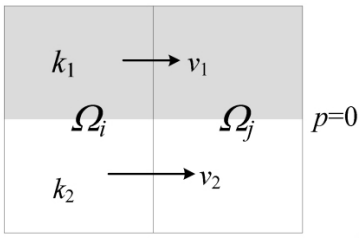


图 2 相邻粗网格示意图
Fig. 2 Schematic of two neighbouring grid blocks

$$\begin{bmatrix} B^C & C^C & D^C \\ C^{cT} & 0 & 0 \\ D^{cT} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^c \\ -p^c \\ \lambda^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q^c \\ 0 \end{bmatrix}$$

(30)

式中 $B^C = \Psi^T B^f \Psi$; $C^C = \Psi^T C^f I$; $D^C = \Psi^T C^f J$; $q^c = I^T q^f$; $B^f = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$; $C^f = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$; $q^f = q$ 。

3 数值算例

3.1 Darcy 流动

第一个算例是为检验建立的多尺度模型的准确性,同时检验黏滞项 $\tilde{\mu} \Delta v$ 对 Darcy 流的影响。本算例分别采用 MsMFEM 和粗化方法来模拟非均质各向异性介质单相渗流问题,同时将本文编写程序得到的计算结果与 Eclipse 数值模拟软件精细求解得到的结果进行对比分析。选用 SPE 第 10 标准算例(SPE10) Model 2 的第 28 层地质模型^[20],左下角和右上角分别有一注入井和采出井,注入速度为 $1 \text{ m}^3/\text{d}$,注入采出速度相等。第 28 层的小尺度渗透率分布如图 3(a)所示,模型小尺度剖分为 $220 \times 60 = 13\,200$ 个单元, x 和 y 方向分别划分 220 个和 60 个网格;利用 MsMFEM 计算时采用的粗网格分别为 $11 \times 6 = 66$ 。图 3(b)–(d)为不同计算方法得到的速度矢量图,图 3(e)~(f)分别为图 3(c)、3(d)黑框内部分的放大图。

从图 3(e)~(f)细节放大部分可以看到,由于 MsMFEM 可以通过多尺度基函数来重构小尺度速度场,MsMFEM 得到的速度场与原始精细网格求解结果基本一致;而粗化法只能在粗网格上求解得到大尺

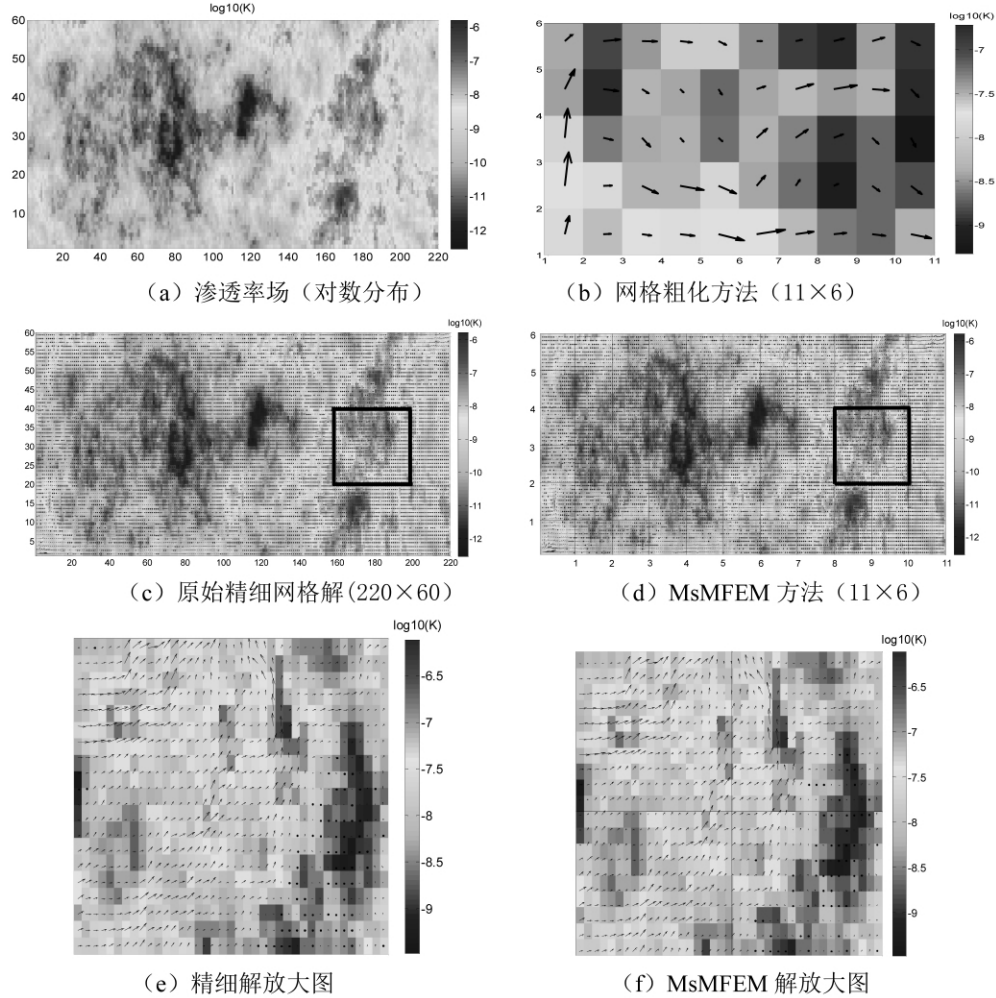


图 3 渗透率场(220×60)及计算结果对比

Fig. 3 Lognormal permeability field(220×60) and solutions of various simulations

度解,无法进行小尺度解重构,不能充分捕获小尺度特征。

为了验证 MsMFEM 的准确性,本文对 SPE10 第 1~35 层在三种不同粗网格剖分下的计算结果进行了对比分析,采用的相对误差公式如下

$$e_p = \frac{\int |p(x) - p_{ref}(x)| \, dx}{\int |p_{ref}(x)| \, dx}$$
$$e_v = \frac{\int \|v - v_{ref}\|_2 \, dx}{\int \|v_{ref}\|_2 \, dx}$$

图 4、图 5 分别为 MsMFEM 在不同粗网格上求解得到的速度和压力相对误差曲线。从两幅图中可以看出,MsMFEM 所得到的压力和速度场与原始精细网格求解结果基本一致,说明本文方法是准确有效的;随着粗网格数目增多,MsMFEM 相对参考解的误差越小。在粗网格 22×6 、 44×12 时,MsMFEM 压力和速度的相对误差维持在 3% 左右。

经过对 35 个层的模拟结果进行对比发现,黏滞项 $\tilde{\mu} \Delta v$ 中的 $\tilde{\mu} = \mu$ 相对 $\tilde{\mu} = 0$ 时的计算结果误差数量级为 10^{-12} ,因此,黏滞项 $\tilde{\mu} \Delta v$ 在裂缝模型模拟中产生的误差可以忽略。

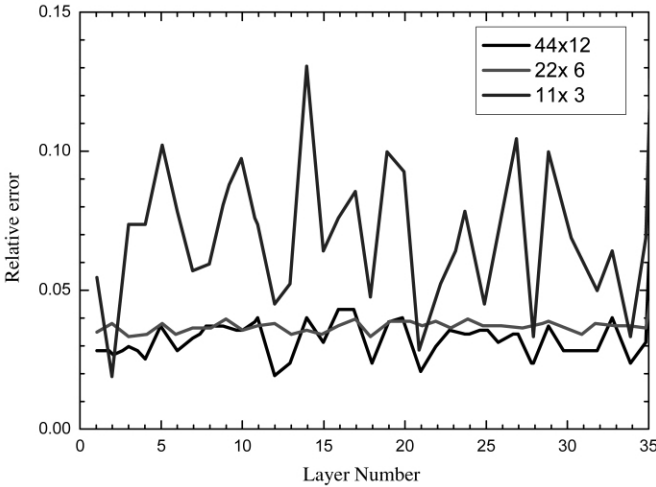


图 4 三种不同网格剖分的速度相对误差曲线

Fig. 4 Velocity relative errors for MsMFEM on three different coarse grids

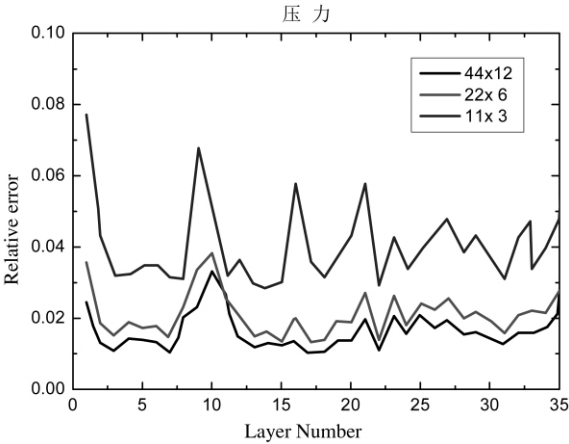


图 5 三种不同网格剖分的压力相对误差曲线

Fig. 5 Pressure relative errors for MsMFEM on three different coarse grids

3.2 裂缝模型

3.2.1 简单裂缝模型

图 6 所示的裂缝模型,模型大小为 50 m×50 m,油藏厚度为 10 m,均匀各向同性基岩的孔隙度 $\phi=0.2$,渗透率 $K=1\ \mu\text{m}^2$,裂缝长度从 10 m 到 30 m 不等,张开度均为 1 cm,流体密度 $\rho=1000\ \text{kg/m}^3$,黏度 $\mu=1\ \text{mPa}\cdot\text{s}$,上下边界为封闭边界,左右边界为定压边界,压力分别为 1 MPa、0.1 MPa。裂缝模型的网格剖分如图 7 所示。图 8 中给出了 Comsol 有限元软件和 MsMFEM 求解得到的压力分布和流线分布图。

从图 8 可以看出,尽管在部分细微处有差别,但 MsMFEM 所得到的解与原始细网格求解得到的结果基本一致,压力和速度相对误差都在 4% 以内,可见模拟结果较好;同时,MsMFEM 比精细求解计算速度提高了约 1.6 倍,从而可看出,MsMFEM 在保证计算精度的同时大大节省了计算时间。

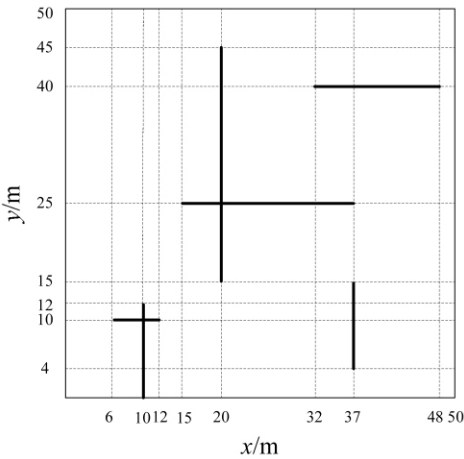


图 6 裂缝模型示意图
Fig. 6 Schematic of a fractured reservoir

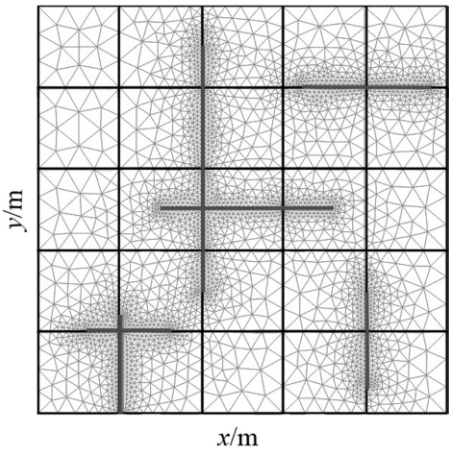


图 7 MsMFEM 网格剖分
Fig. 7 MsMFEM gridding

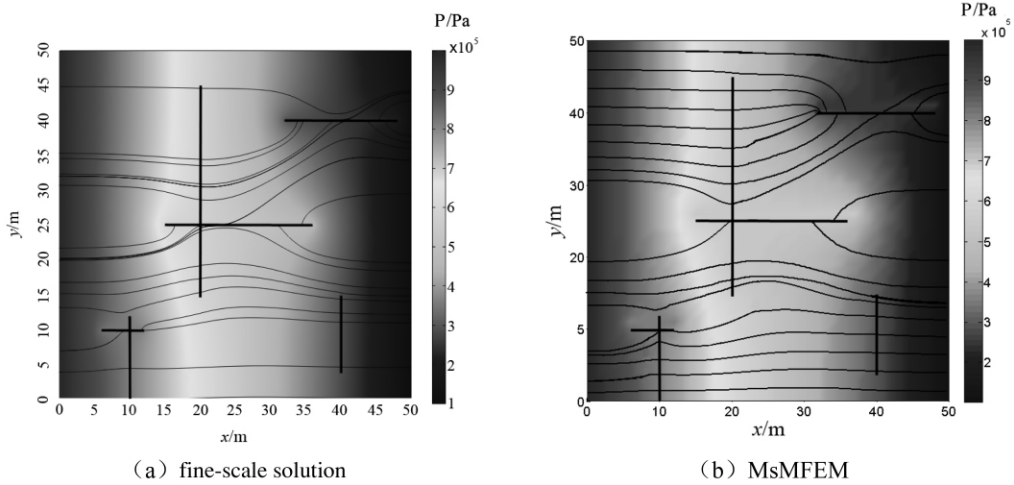


图 8 原始细网格和 MsMFEM 求解的的压力场和流线对比
Fig. 8 Pressure and velocity comparisons for the fine-scale and MsMFEM solutions

为检验 MsMFEM 的鲁棒性,本文对不同粗网格剖分条件下,MsMFEM 求得速度的相对误差进行了对比,如图 9 所示。速度相对误差由式(31)计算得到。从图 9 可以看出,当 x 、 y 方向剖分数目比越大,相对误差越大;当两个方向剖分数目相近时,模拟效果较好。对于裂缝介质渗流问题,其流动模式很大程度受大裂缝影响,因此对具有大裂缝的裂缝介质,采用数目较少的粗网格剖分进行模拟效果最为理想。

$$\epsilon(v)=\frac{\left\|\boldsymbol{v}_x-\boldsymbol{v}_x^{\text{ref}}\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{v}_x^{\text{ref}}\right\|_2}+\frac{\left\|\boldsymbol{v}_y-\boldsymbol{v}_y^{\text{ref}}\right\|_2}{\left\|\boldsymbol{v}_y^{\text{ref}}\right\|_2}$$

(31)

其中 $\boldsymbol{v}^{\text{ref}}$ 为参考速度, \boldsymbol{v}_x 、 \boldsymbol{v}_y 分别表示 x 、 y 方向上的平均速度, $\|\cdot\|_2$ 为范数。

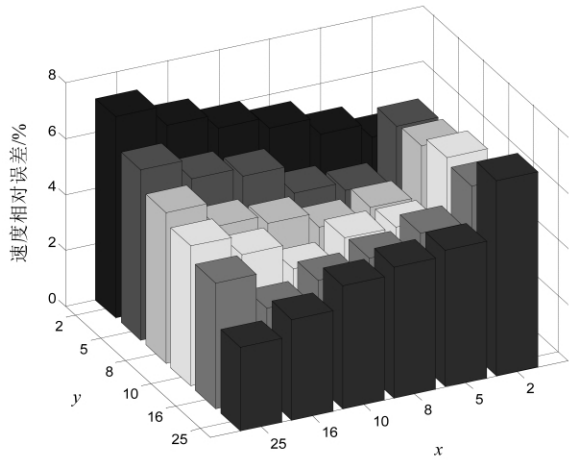


图 9 不同粗网格剖分下,MsMFEM 得到的速度相对误差
Fig. 9 MsMFEM velocity error for different coarse meshes

3.2.2 复杂裂缝模型

图 10 所示的裂缝模型,模型大小为 50 m×50 m,油藏厚度为 10 m,均匀各向同性基岩的孔隙度 $\phi=0.1$,渗透率 $K=1\ \mu\text{m}^2$,裂缝分布如图 10 所示,张开度均为 1 cm,其它参数与 3.2.1 节算例相同。左下角和右上角分别有一注入井和采出井,注入速度为 $30\ \text{m}^3/\text{d}$,注入采出速度相等。裂缝模型粗网格剖分为 8×8 。

从裂缝模型(图 10)可以发现,对模型进行粗网格剖分时,可能出现裂缝跨越多个粗网格的情况,尤其是裂缝在对角方向连接两个无公共面的粗网格,如图 11 所示。许多实验发现多尺度方法计算裂缝及其周边速度偏大。这是由于 MsMFEM 仅计算处理相邻的粗网格,而网格 (i,j) 到网格 $(i+1,j+1)$ 的流体会绕流到网格 $(i+1,j)$ 或者 $(i,j+1)$,如图 11 箭头所示。同样的影响也出现在处理 Darcy 流问题中,相关分析可参考文献[21],在此不再赘述。为了解决上述问题,本文在计算基函数时,将裂缝视为一个粗网格。以图 11 为例,将网格 (i,j) 视为两个网格重叠在一起,一个由裂缝周围的孔隙介质构成,一个则由裂缝构成,将这两个重叠的网格分别与相邻网格 $(i+1,j)$ 和 $(i,j+1)$ 进行计算。这一处理方法是行之有效的,具体处理分析请参考文献[22]。

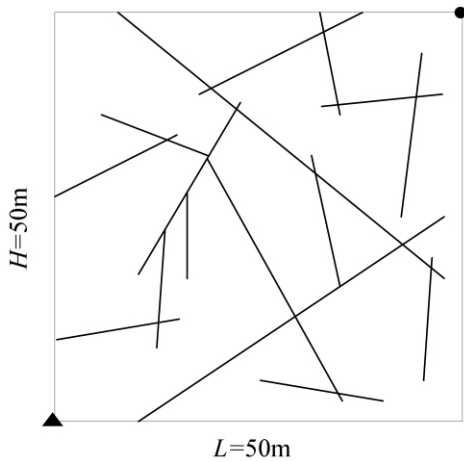


图 10 二维复杂裂缝模型
Fig. 10 Fractured porous media with complex fracture network

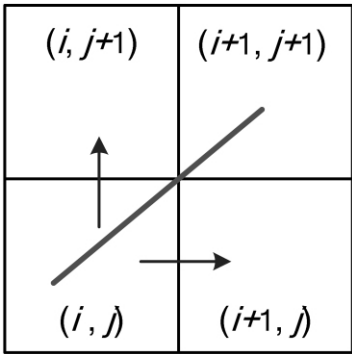


图 11 裂缝分布示意图
Fig. 11 Schematic of a fracture distribution

图 12 中给出了 Comsol 有限元软件和 MsMFEM 求解得到的压力分布和流线分布图。数值计算结果表明:注入水沿裂缝迅速窜进,裂缝存在导致油藏的强烈非均质性和各项异性,对注水开发有显著影响。MsMFEM 所得到的解与原始细网格求解得到的结果基本一致,压力和速度相对误差都在 3% 以内。图 13 给出了不同粗网格剖分条件下,MsMFEM 与精细求解的计算时间对比,可以看出 MsMFEM 比精细求

解计算速度有所提高,这说明 MsMFEM 适用于复杂裂缝油藏的数值模拟。

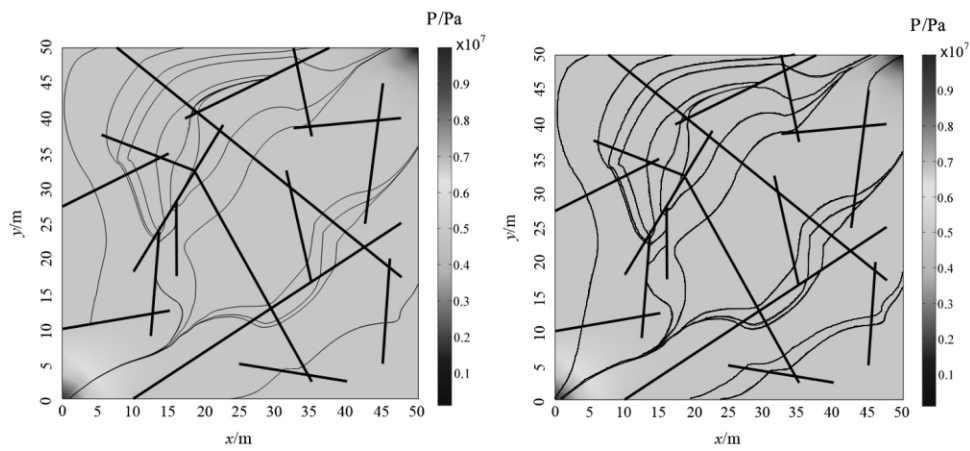


图 12 原始细网格和 MsMFEM 求解的的压力场和流线对比

Fig. 12 Pressure and velocity comparisons for the fine-scale and MsMFEM solutions

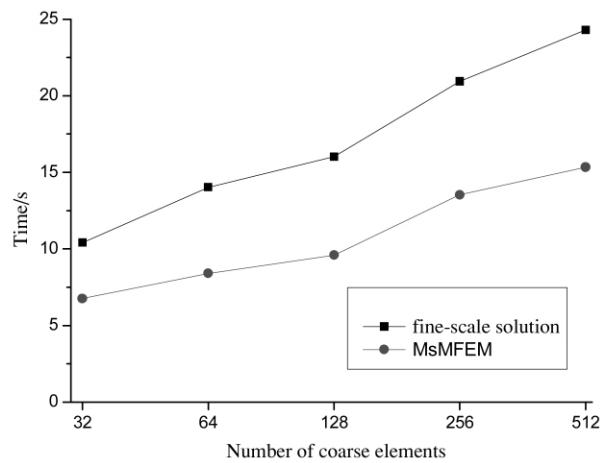


图 13 不同粗网格剖分下精细求解和 MsMFEM 求解的计算时间对比

Fig. 13 Total CPU time used by MsMFEM and reference method

4 结论

(1) 将 Darcy 方程与 Navier-Stokes 方程进行多尺度耦合,建立了 Darcy/Stokes-Brinkman 多尺度模型,并基于多尺度混合有限元法,对该模型进行多尺度混合有限元分析,通过算例验证了模型和算法的准确性及适用性。结果表明裂缝的存在改变了流体流动方向与速度,对裂缝油藏开发造成很大影响。因此正确认识裂缝介质的流体流动特征对裂缝油藏开发效果评价等具有重要意义;

(2) MsMFEM 的基函数在于对基函数的处理上,能够反映单元内参数变化导致的速度分布特征,在处理非均质问题上有显著的优越性。对于裂缝性油藏,MsMFEM 方法具有很好的适用性。

参考文献:

[1] 姚军, 黄朝琴, 王子胜, 等. 缝洞型油藏的离散缝洞网络流动数学模型[J]. 石油学报, 2010, 31(4): 15—20.

[2] HUANG Z Q, YAO J, LI Y J, et al. Numerical calculation of equivalent permeability tensor for fractured vuggy porous media based on homogenization theory [J]. Commun Comput Phys, 2011, 9(1): 180—224.

[3] ARBOGAST T, LEHR H L. Homogenization of a Darcy-Stokes system modeling vuggy porous media[J]. Computational Geosciences, 2006, 10(3): 291—302.

[4] ARBOGAST T, BRUNSON D S. A computational method for approximating a Darcy-Stokes system governing a vuggy porous medium

- [J]. Computational Geosciences, 2007, 11(3): 207–218.
- [5] HUANG Z Q, YAO J, WANG Y Y, et al. Numerical study on water flooding development of fractured reservoir with discrete-fracture model [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2011, 28(1): 148–156.
- [6] KAPER T, MARDAL K A, WINTHER R. Unified finite element method discretizations of coupled Darcy–Stokes flow [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2009, 25(2): 311–326.
- [7] POPOV P, BI L, EFENDIEV Y, et al. Multiphysics and multiscale methods for modeling fluid flow through naturally fractured vuggy carbonate reservoirs [C]//SPE Middle East Oil and Gas Show and Conference, Bahrain, 2007; SPE 105378.
- [8] 姚军, 张娜, 黄朝琴, 等. 非均质油藏的多尺度混合有限元数值模拟方法 [J]. 石油学报, 2012, 33(3): 442–447.
- [9] HUANG Z Q, YAO J, LI Y J, et al. Permeability analysis of fractured vuggy porous media based on homogenization theory [J]. Sci China Tech Sci, 2010, 53(3): 839–847.
- [10] POPOV P, EFENDIEV Y, QIN G. Multiscale modeling and simulations of flows in naturally fractured karst reservoirs [J]. Commun Comput Phys, 2009, 6(1): 162–184.
- [11] WU Y S, QIN G, EWING R E, et al. A multiple-continuum approach for modeling multiphase flow in naturally fractured vuggy petroleum reservoirs [C]//SPE International Oil & Gas Conference and Exhibition in China, Beijing, 2006; SPE 104173.
- [12] YAO J, HUANG Z Q, LI Y J, et al. Discrete fracture-vug network model for modeling fluid flow in fractured vuggy porous media [C]//2010; SPE 130287.
- [13] HUANG Z Q, YAO J, WANG Y Y, et al. Numerical study on two-phase flow through fractured porous media [J]. Sci China Tech Sci, 2011, 54(9): 2412–2420.
- [14] CHEN Z, HOU T Y. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients [J]. Math Comput, 2003, 72: 541–576.
- [15] HOU T Y, WU X H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media [J]. Journal of Computational Physics, 1997, 134(1): 169–189.
- [16] HWANG W R, ADVANI S G. Numerical simulations of Stokes–Brinkman equations for permeability prediction of dual-scale fibrous porous media [J]. Physics of Fluids, 2010, 11(22): 113101.
- [17] BREZZI F, FORTIN M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [18] AARNES J E. On the use of a mixed multiscale finite element method for greater flexibility and increased speed or improved accuracy in reservoir simulation [J]. Multiscale Model Simul, 2004, 2(3): 421–439.
- [19] AARNES J E, KROGSTAD S, LIE K A. Multiscale mixed/mimetic methods on corner-point grids [J]. Comput Geosci, 2008, 12(3): 297–315.
- [20] CHRISTIE M, BLUNT M. Tenth spe comparative solution project: a comparison of upscaling techniques [J]. SPE Reser Eval Eng, 2001, 4: 308–317.
- [21] KIPPE V, AARNES J E, LIE K A. A comparison of multiscale methods for elliptic problems in porous media flow [J]. Computational Geosciences, 2008, 12(3): 377–398.
- [22] NATVIG J R, SKAFLESTAD B, BRATVEDT F, et al. Multiscale mimetic solvers for efficient streamline simulation of fractured reservoirs [C]//Paper SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, Texas, USA, 2–4 February, 2009; SPE 119132.