矢量的直积——并矢

矢量的直积是矢量之间最简单的一种乘法运算，其结果是张量，所以也叫做矢量的**张量积**，俗称**并矢**。举例说明如下：

设三维白线性空间中的任意两个矢量的线性表出分别为

$$\boldsymbol{a} = a^1\boldsymbol{g}_1 + a^2\boldsymbol{g}_2 + a^3\boldsymbol{g}_3 = a^i\boldsymbol{g}_i$$

与

$$\boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{g}_1 + b^2\boldsymbol{g}_2 + b^3\boldsymbol{g}_3 = b^i\boldsymbol{g}_i$$

则两个矢量的直积就是一个并矢，属于二阶张量的一种，可记为

$$\bar{\bar{T}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

注意：并矢的先后次序一般不可交换。即

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

并矢既不是点积，也不是叉积，而是矢量的直积或直乘。因为其结果已经超出了原来的矢量空间，所以属于外积的一种。所谓直积运算就是一个矢量的所有线性组合项遍乘另一个矢量的所有线性组合项，类似于多项式乘法。如上例即

$$\begin{aligned}\bar{\bar{T}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} &= (a^1\boldsymbol{g}_1 + a^2\boldsymbol{g}_2 + a^3\boldsymbol{g}_3)(b^1\boldsymbol{g}_1 + b^2\boldsymbol{g}_2 + b^3\boldsymbol{g}_3)\\ &= a^1b^1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1 + a^1b^2\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 + a^1b^3\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_3 + a^2b^1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_1 + a^2b^2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2\\ &+ a^2b^3\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3 + a^3b^1\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_1 + a^3b^2\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_2 + a^3b^3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3\end{aligned}$$

可见三维空间中的一个二阶张量共有 9 个分量。本例的基矢都是自然基矢（协变基矢），分量都是逆变分量，所以这个张量属于一个二阶逆变张量。

如果用爱因斯坦求和约定，上述并矢（二阶张量）还可以简洁地表示为

$$\bar{\bar{T}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = a^i\boldsymbol{g}_i b^j\boldsymbol{g}_j = a^i b^j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$$

注意：两对哑标相乘时必须区别开。

其中基矢的并矢$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$叫做**基张量**，本例中的基张量是两个基矢的并矢，所以属于**二阶基张量**。基张量对应的线性组合系数T^{ij}叫做张量的**分量**。对于两个 n 维矢量的并矢，有时也用完整的一组$\mathbf{n}^2$个分量表示其运算结果（一个二阶张量），即

$$T = T^{ij}，\ (i,j = 1,2,\dots,n)$$

矢量的直积运算还可以采用分量矩阵形式表示。如上例可表示为

$$T = T^{ij} = [a^i b^j] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} [b^1 \quad b^2 \quad b^3] = \begin{bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{bmatrix}$$

一组 9 个基张量也可以用矩阵表示为

$$[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \boldsymbol{g}_2 \\ \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} [\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \boldsymbol{g}_3] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix}$$

矢量的直积运算可以推广到多个矢量的并矢，即高阶张量。如三个矢量的直积（三重并矢）***abc*** 是一个三阶张量

$$\overset{\equiv}{T} = \boldsymbol{abc}$$

四个矢量的并矢 ***abcd*** 是一个四阶张量

$$\overset{\equiv\!\!\!-}{T} = \boldsymbol{abcd}$$

依此类推。为简便起见，张量可以只用一个大写字母（比如 T）表示，代表阶数的横线通常可以省略。