计算物理 III

贝塞尔函数

Author[a,1]

[a] 武汉大学，物理科学与技术学院

Contents

1. Bessel 函数的级数解和递推公式

贝塞尔函数是解决二阶线性微分方程的特殊函数，尤其是在具有圆对称性问题中，如圆柱坐标系下的拉普拉斯方程。在量子力学中，贝塞尔函数用于描述在圆柱对称势场中的粒子波函数，特别是氢原子的径向波函数。在电磁学中，贝塞尔函数用于描述在圆柱形波导中的模式传播。例如，TE 模式和 TM 模式的场分布可通过贝塞尔函数进行表达，特别是在处理边界条件时。热传导方程中的贝塞尔函数则帮助解析圆柱形体内的稳态温度分布。

一般的，贝塞尔方程具有以下形式：

Bessel equation:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{1}$$

其中 ν 为任意实数，在通常使用场景中，如求解拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程，nu 往往取整数 n。

1.1. Bessel 方程的级数解

$x=0$ 是 Bessel 方程的正则奇点，因此在 $x=0$ 的邻域内，可以设它的解 [1] 为：

$$y=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{\rho+k} \tag{2}$$

将级数解代入贝塞尔方程可得：

$$\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)^2-\nu^2)c_kx^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho+2}=0 \tag{3}$$

比较方程两边 x^ρ 的系数可得：

$$(\rho^2-\nu^2)c_0=0 \tag{4}$$

因此，$\rho_1=\nu$，$\rho_2=-\nu$。先令 $\rho=\nu$，比较 x 各次幂的系数，得到以下一组递推关系：

$$\begin{gathered}c_0\neq 0\\ c_1=0\\ [(\nu+k)^2-\nu^2]c_k+c_{k-2}=0\end{gathered}$$

如果选择 $c_0=1/2^\nu\Gamma(\nu+1)$，那么我们得到的级数解 $y_1(x)$ 就称为 ν 阶的贝塞尔函数，记作 $J_\nu(x)$.

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu} \tag{5}$$

同理对于特解 $y_2(x)(\rho=-\nu)$，取 $c_0=1/2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)$，得到 $J_{-\nu}(x)$，二者合称为第一类柱函数：

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu} \tag{6}$$

当 $\nu\neq n$ 时，$J_\upsilon(x)$ 和 $J_{-\upsilon}(x)$ 是线性无关的，贝塞尔方程的通解可以写

$$y(x)=a_\nu J_\upsilon(x)+b_\nu J_{-\upsilon}(x) \tag{7}$$

受有限边界条件的约束，常常舍去 $J_{-\upsilon}(x)$。当 $\nu=n$ 时，$J--n(x)=(-1)^nJ_n(x)$，此时正负 n 阶贝塞尔函数不再线性无关，此时可以引入诺伊曼函数作为与 $J_n(x)$ 线性无关的解，它再 $x=0$ 处是发散的。

1.2. 贝塞尔函数的母函数和递推公式

对于整数阶的贝塞尔函数，有一下母函数关系：

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n \tag{8}$$

两边求导，比较 t^{n-1} 的系数可以得到 $J_n(x)$ 的递推关系：

递推关系

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n \tag{9}$$

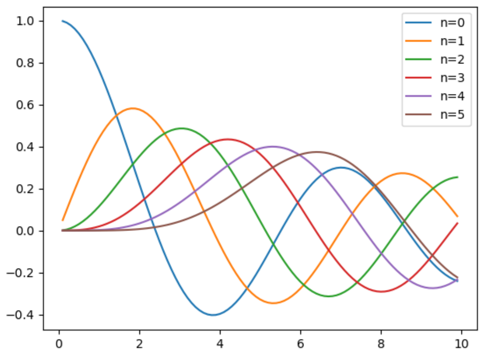
根据 Γ 函数的性质可以证明，这个递推关系可以推广到任意阶贝塞尔函数。

2. Codes and results

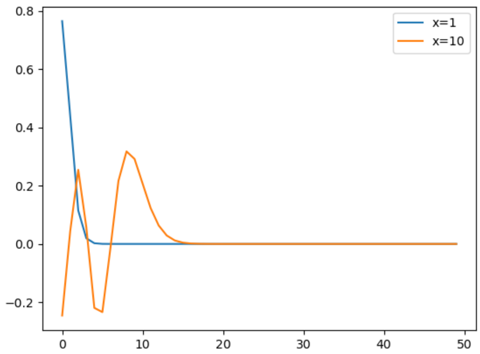
2.1. Method

1. 选择 n=M，令 $J_M(x)=0, J_{M-1}=1$，然后由递归公式求出 $J_{M-2}(x)$
2. 若 $J_n>1/e$，则所有 J_n 乘以 e 重新开始计算
3. 令所有 $n>m$ 的 $J_n=0$
4. 由求和恒等式，所有 J_n 除以 $\sqrt[2]{J_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n^2}$

2.2. Result



(a) $n \in [0, 5], x > 0$ 时,Bessel 函数的图形。$x < 0$ 的图形可以由奇偶性得到。



(b) $x \in \{1, 10\}, n > 0$ 时,Bessel 函数的图形。

Figure 1. $J_n(x)$ 是一个具有无穷个零点的衰减震荡函数。[2]

2.3. Python Codes

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def BesselJ(x,n,M):
    e=0.05
    J=np.zeros((M),float)
    J[M-1]=0
    J[M-2]=1
    sum=0
    for i in range(M-2,0,-1):
        J[i-1]=(2*i/x)*J[i]-J[i+1]
        if J[i-1]**2>=1/e**2:
            for j in range(i-1,M):
                J[j]=J[j]*e
    sum+=J[0]**2
    for i in range(1,M):
        sum+=2*J[i]**2
    for i in range(0,M):
        J[i]=J[i]/np.sqrt(sum)
    return J[n]
def FunX():
    xx=np.arange(0.1,10,0.1)
    aa,bb,cc,dd,ee,ff=[],[],[],[],[],[]
    for i in xx:
        aa.append(BesselJ(i,0,100))
        bb.append(BesselJ(i,1,100))
        cc.append(BesselJ(i,2,100))
        dd.append(BesselJ(i,3,100))
        ee.append(BesselJ(i,4,100))
        ff.append(BesselJ(i,5,100))
    fig,ax0=plt.subplots()
    ax0.plot(xx,aa,xx,bb,xx,cc,xx,dd,xx,ee,xx,ff)
    ax0.legend(('n=0','n=1','n=2','n=3','n=4','n=5'))
    plt.show()
def FunN():
    nn=np.arange(0,50)
    yy,zz=[],[]
    for k in nn:
        yy.append(BesselJ(1,k,100))
        zz.append(BesselJ(10,k,100))
    fig,ax=plt.subplots()
    ax.plot(nn,yy,nn,zz)
    ax.legend(('x=1','x=10'))
    plt.show()
if __name__=='__main__':
    FunX()
    FunN()
```

Code 1. code

References

[1] 贾俊基 姚端正 周国全. 数学物理方法. 科学出版社, 2019.

[2] *PGFPlots - A LaTeX package to create plots.* url: https://pgfplots.sourceforge.net/.