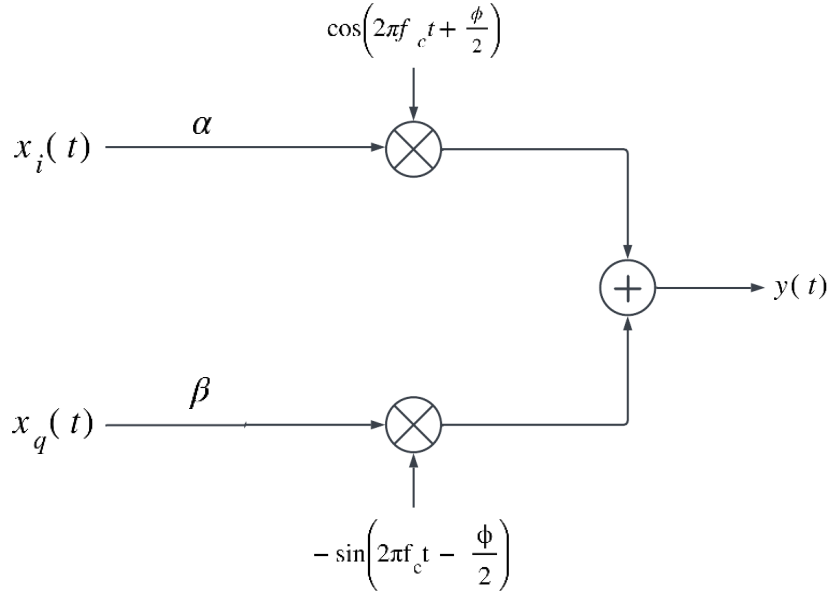


Proof and Formulate Equation

พิจารณา IQ modulator วงจรหนึ่ง มี gain คือ α และ β ที่ขาเข้า และมี phase imbalance คือ ϕ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 IQ modulator ด้วย gain และ phase imbalance

Output Signal คือ

$$y(t) = \alpha x_i(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{\phi}{2}\right) - \beta x_q(t) \sin\left(2\pi f_c t - \frac{\phi}{2}\right)$$

สามารถจัดรูปแบบสมการใหม่ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha x_i(t) \cos(2\pi f_c t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \alpha x_i(t) \sin(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ &\quad - \beta x_q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta x_q(t) \cos(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ &= \left[\alpha x_i(t) \cos(2\pi f_c t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta x_q(t) \cos(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \\ &\quad - \left[\alpha x_i(t) \sin(2\pi f_c t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta x_q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \\ &= \left[\alpha x_i(t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta x_q(t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \cos(2\pi f_c t) \\ &\quad - \left[\alpha x_i(t) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta x_q(t) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

จากการลดรูปก่อนหน้า สามารถเขียนเอนเวลโบลในรูปของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x'_i(t) \\ x'_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & \beta \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \alpha \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \beta \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_q(t) \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $x(t) = x_i(t) + jx_q(t) = e^{j\omega t}$, $x_i(t) = \cos(\omega t)$ และ $x_q(t) = \sin(\omega t)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x'_i(t) \\ x'_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\omega t) + \beta \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\omega t) \\ \alpha \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\omega t) + \beta \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

จากนั้น ทำการหาค่าประกอบของสัญญาณที่ความถี่ $+\omega$

เมื่อสัญญาณเดินทางมาถึงเครื่องรับ ทำการคูณสัญญาณ $x'(t)$ กับ $e^{-j\omega t}$

$$\begin{aligned} Y_{+\omega} &= [x'_i(t) + jx'_q(t)][\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] \\ &= [x'_i(t)\cos(\omega t) + x'_q(t)\sin(\omega t)] + j[-x'_i(t)\sin(\omega t) + x'_q(t)\cos(\omega t)] \\ &= \left[\alpha \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \beta \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] + j \left[-\beta \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \alpha \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

สามารถหาค่ากำลังของสัญญาณ $P_{+\omega}$ ได้ ดังนี้

$$P_{+\omega} = |Y_{+\omega}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos(\phi)$$

จากนั้น ทำการหาค่าประกอบของสัญญาณที่ความถี่ $-\omega$

เมื่อสัญญาณเดินทางมาถึงเครื่องรับ ทำการคูณสัญญาณ $x'(t)$ กับ $e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} Y_{-\omega} &= [x'_i(t) + jx'_q(t)][\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)] \\ &= [x'_i(t)\cos(\omega t) - x'_q(t)\sin(\omega t)] + j[x'_i(t)\sin(\omega t) + x'_q(t)\cos(\omega t)] \\ &= \left[\alpha \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \beta \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] + j \left[\beta \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) + \alpha \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

สามารถหาค่ากำลังของสัญญาณ $P_{-\omega}$ ได้ ดังนี้

$$P_{-\omega} = |Y_{-\omega}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\phi)$$

สุดท้ายสามารถหา Image-Rejection Ratio (IMRR) ได้จาก

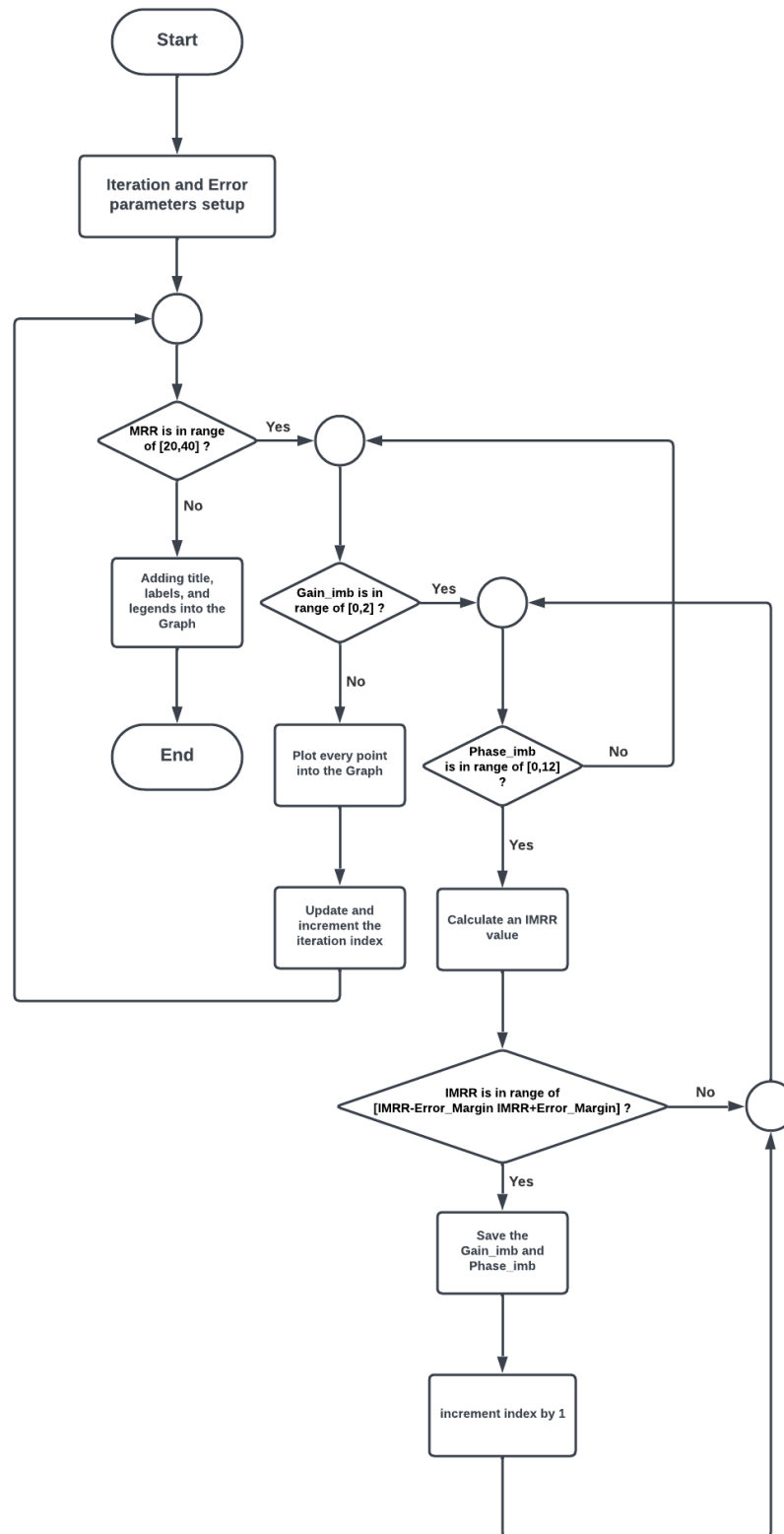
$$IMRR = \frac{P_{+\omega}}{P_{-\omega}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos(\phi)}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(\phi)}$$

กำหนดให้ $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$IMRR = \frac{P_{+\omega}}{P_{-\omega}} = \frac{\gamma^2 + 1 + 2\gamma\cos(\phi)}{\gamma^2 + 1 - 2\gamma\cos(\phi)}$$

เมื่อ γ คือ Gain imbalance และ ϕ คือ Phase imbalance

Flow Chart of IMRR Calculation and Plotting Program



รูปที่ 2 Flow Chart of IMRR Calculation and Plotting Program

MATLAB implementation for IMRR Calculation and Plotting

```

% ===== %
% This program was built by Sirapop Saengthongkam to calculate and plot
% the Image Rejection Ratio (IMRR) which is the ratio of the
% intermediate-frequency (IF) signal level produced by the desired input
% frequency to that produced by the image frequency.
%
% Image rejection formulas:
% Image Frequency Rejection Ratio: IRR expressed in dB
%  $IRR = \sqrt{1 + (p^2)(Q^2)}$ , where
%  $p = (f_{Image} / f_{RF}) - (f_{RF} / f_{Image})$ ;
% Q is the quality factor, in this situation, give Q = 1;
% The Image Rejection Ratio for a given value of gain imbalance 'G',
% and phase imbalance 'theta' is determined by,
%  $IMRR = 10\log((1+2G\cos(\theta)+G^2) / (1-2G\cos(\theta)+G^2))$ ;
% ===== %
clear; clc; close all;

% Parameters
index = 1;      % An iteration index
index_irr = 1;  % An iteration index
err = 0.001;    % An error margin parameter

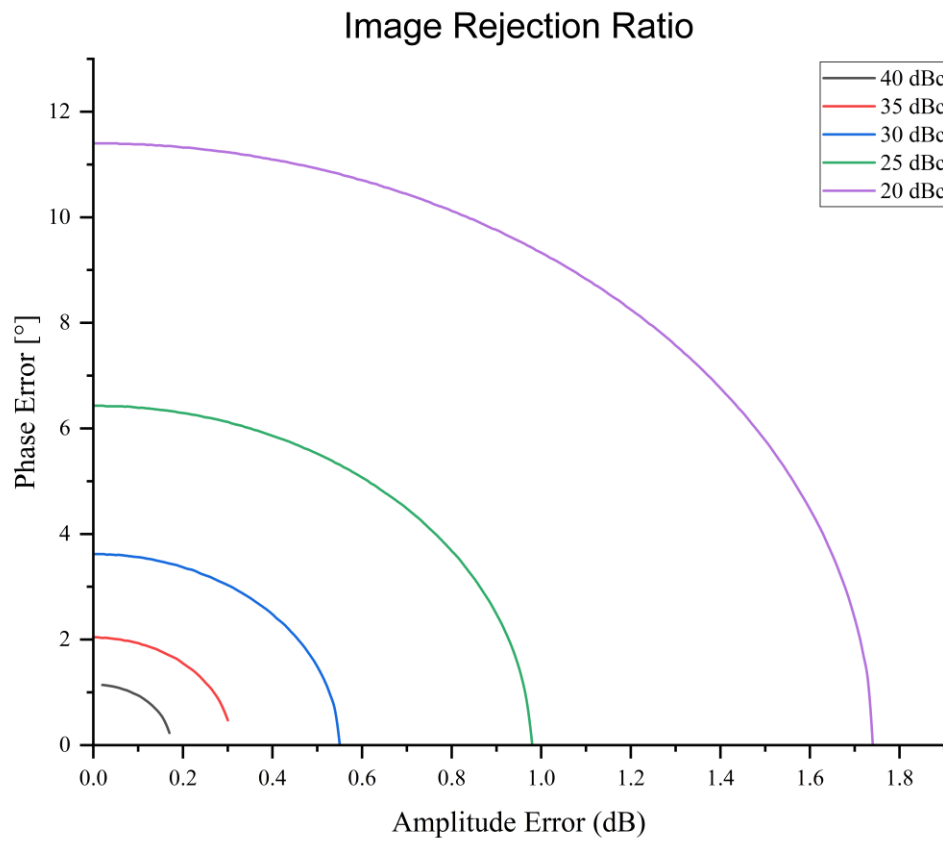
% Evaluate Gain and Phase imbalance from iteration algorithm below.
for IMRR = 40:-5:20
    for G = 0:0.001:2
        for theta = 0:0.001:12
            % Image-Rejection Ratio equation:
            check = 10*log10((1+10^(G/20)*2*cos(theta*pi/180)+(10^(G/20))^2) ...
                / (1-(10^(G/20))*2*cos(theta*pi/180)+(10^(G/20))^2));

            % If IRR is in the range of error margin then save the Gain and
            % Phase imbalance value and increment an iteration index.
            if ((check < IMRR+err)&&(check > IMRR-err))
                Gain_imb(index, index_irr) = G;
                Phase_imb(index, index_irr) = theta;
                index = index + 1;
            end
        end
    end
    % Plot every point into the Graph
    plot(Gain_imb(:,index_irr), Phase_imb(:,index_irr))
    hold on;

    % Update and increment the iteration index
    index = 1;
    index_irr = index_irr + 1;
end

% Adding title, labels, and legends. into the Graph
title('Image-Rejection Ratio')
xlabel('Amplitude Error [dB]')
ylabel('Phase Error [degree]')
legend("40 dB", "35 dB", "30 dB", "25 dB", "20 dB")

```

MATLAB IMRR Plotting Result

รูปที่ 3 Graph of Image-Rejection Ratio