1.Structuri algebrice

1. Grupuri

Fie M o mulțime nevidă. Se numește lege de compoziție pe M orice funcție $*: M \times M \to M$.

O submulțime nevidă H a lui M se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu operația „*” dacă $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$.

Operația „*” se numește **asociativă** dacă $(x * y) * z = x * (y * z)\ \forall x, y, z \in M$.

Operația „*” se numește **comutativă** dacă $x * y = y * x\ \ \forall x, y \in M$.

Operația „*” **admite element neutru** dacă $\exists\ e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x\ \ \forall x \in M$.

Toate elementele lui M sunt simetrizabile dacă $\forall x \in M$, $\exists x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$.

Perechea $(M,*)$, se numește **monoid** dacă:

1) „*” este <u>lege de compoziție</u> pe M
2) „*” este <u>asociativă</u>
3) „*” are <u>element neutru</u>

Dacă are loc 4) „*” este <u>comutativă</u>, atunci $(M,*)$ este **monoid comutativ**.

Perechea $(G,*)$, se numește **grup** dacă:

1) „*” este <u>lege de compoziție</u> pe G
2) „*” este <u>asociativă</u>
3) „*” are <u>element neutru</u>
4) orice element din G este simetric

Dacă are loc 5) „*" este <u>comutativă</u>, atunci $(G,*)$ este **grup comutativ** sau **grup abelian**.

O submulțime $H \subseteq G$ se numește **subgrup** a lui $(G,*)$ dacă:

1)$\forall\, x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$
2)$\forall x \in H \Rightarrow x' \in H$.

Fie $(G,*)$ $și$ $(G_1,\circ)$ două grupuri. O funcție $f: G \rightarrow G_1$ se numește **morfism** de grupuri dacă $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G$. Dacă f este și bijectivă, atunci f este **izomorfism** de grupuri și se notează $G \sim G_1$, adică G izomorf cu G_1.

Dacă $(G,*)$ $și$ $(G_1,\circ)$ sunt două grupuri și $f: G \rightarrow G_1$ morfism de grupuri, atunci:

1) $f(e) = e_1$, unde e, e_1 sunt elementele neutre ale celor două grupuri
2) $f(x') = \left(f(x)\right)'$ $\forall x \in G$, unde x' simetricul lui x în G, iar $\left(f(x)\right)'$ este simetricul lui $f(x)$ $în$ G.

Un morfism (izomorfism) $f: G \rightarrow G$ se numește endomorfism (automorfism) al grupului G.

Fie $(G,\cdot)$ un grup. Se numește **ordinul grupului** cardinalul mulțimii G. Cel ma mic număr natural nenul k cu proprietatea $x^k = e$ se numește **ordinul lui x** în G, notat $ord(x)$.

Teorema lui Lagrange. Dacă H este un subgrup al lui G, atunci numărul elementelor lui H divide numărul elementelor lui G.

<u>2. Inele și corpuri</u>

Tripletul $(A, +,\cdot), A \neq \emptyset$ se numște **inel** dacă:

1) $(A,+)$ grup abelian

2) (A, $\cdot$) monoid

3) Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$\forall x,y,z \in A,\ x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ și $(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$

$(A,+,\cdot)$ se numește **inel comutativ** dacă legea „$\cdot$" este comutativă.

Elementul neutru al operației „+", se numește **elementul nul** și se notează 0_A.

Inelul $(A,+,\cdot)$ **nu are divizori ai lui zero**, dacă $x \neq 0_A$ $și$ $y \neq 0_A$ implică $x\cdot y \neq 0_A$.

Un inel comutativ, cu cel puțin două elemente și fără divizori ai lui zero se numește **domeniu de integritate**.

Elementul neutru al „$\cdot$" se notează 1_A.

Inelul $(A,+,\cdot)$ se numește **corp** dacă $0_A \neq 1_A$ și orice $x \in A, x \neq 0_A$ este simetrizabil în raport cu „$\cdot$".

Fie $(A,+,\cdot)$ și $(A',\oplus,\odot)$ două inele. O funcție $f: A \to A'$ se numește **morfism de inele** dacă:

1) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y), \forall x,y \in A$

2) $f(x\cdot y) = f(x) \odot f(y), \forall x,y \in A$

3) $f(1_A) = 1_{A_1}$

Dacă A $și$ A_1 sunt corpuri, f se numește **morfism de corpuri.** Dacă f este bijectivă, atunci f este **izomorfism** de inele (corpuri).

Orice morfism de corpuri este injectiv.

Un corp nu are divizori ai lui zero.

Orice domeniu de integritate este finit.

3. Inelul claselor de resturi modulo n

Pentru orice număr natural n, $n \geq 2$ și un număr întreg a, se notează (a mod n) restul împărțirii lui a la n. Notăm $\hat{k} = \{a \in \mathbb{Z} |\ a\ mod\ n = k\}\ \ și\ \mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$.

Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, unde $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}\ și\ \hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}_n$ se numește **inelul claselor de resturi modulo n**.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2\ și\ a \in \mathbb{Z}$. Elementul $\hat{a}$ este **inversabil** în $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow (\hat{a}, \hat{n}) = 1$.

Mulțimea elementelor inversabile se notează $U(\mathbb{Z}_n)$.

$(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp $\Leftrightarrow$ n număr prim. (dacă n nu este prim nu rezultă că $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ nu este corp)

2.Polinoame

Fie k unul din din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p\ prim$.

Expresia $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0$, unde $a_i \in K, n \in \mathbb{N}$ se numește **polinom** în nedeterminare X și cu coeficienți în K.

Mulțimea acestor polinoame se notează K[X].

Dacă $f \in K[X]$, atunci $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0$ se numește **forma algebrică** a polinomului f; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ se numesc **coeficienții** polinomului f.

Fie $(K[X], +, \cdot)$ inelul polinoamelor în nedeterminatele X cu coeficienți din K.

Dacă $f = 0$ spunem că f are gradul $-\infty$, iar dacă $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X^1 + a_0,\ a_n \neq 0$, spunem că f are **gradul** n, notat grad f=n.

- $grad(f+g) \leq \max(grad\ f, grad\ g)$
- $grad(f \cdot g) = grad\ f + grad\ g,\ \forall f, g \in K[X]$
- *Dacă K[X] domeniu de integritate, atunci* $grad(f + g) = \text{grad f}$

Teorema împărțirii cu rest. Fie $f, g \in K[X], g \neq 0$ și K corp comutativ. Atunci există și sunt unic determinante polinoamele $q, r \in K[X]$ astfel încât $f = gq + r$, cu grad r < grad g.

Fie $f, g \in K[X]$.

Spunem că g divide pe f dacă există $h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$.

Polinomul $d \in K[X]$ este **cel mai mare divizor comun** al lui f *și* g dacă:

- $d|f$ *și* $d|g$
- $d_1|f$ *și* $d_1|g \Rightarrow d_1|d\ \ \forall d_1 \in K[X]$

Polinomul $m \in K[X]$ este **cel mai mic multiplu comun** al lui f *și* g dacă:

- $f|m$ *și* $g|m$
- $f|m_1$ *și* $g|m_1 \Rightarrow m|m_1\ \ \forall m_1 \in K[X]$

Numărul $a \in K$ este **rădăcină** a lui $f \in K[X]$,dacă $f(a) = 0$

Teorema lui Bezout. Dacă $f \in K[X]$ *și* $a \in K$, atunci a este rădăcină a lui $f \Leftrightarrow (X - a)|f$. Restul împărțirii lui f *la* $X - a$ este $f(a)$.

Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X^1 + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, $a_n \neq 0$. Notând $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f, au loc **relațiile lui Viete:**

$$s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$s_n = x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, atunci ele sunt soluțiile ecuației

$$X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n = 0$$

Spunem că $\alpha \in \mathbb{C}$ este **rădăcină multiplă** de ordin r pentru $f \in \mathbb{C}[X]$, dacă $(X-\alpha)$^$r| f$ $și$ $(X-\alpha)^{r+1} \nmid f$ sau $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0$ $și$ $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, un polinom nenul cu coeficienți reali și $\alpha = a + bi$ o rădăcină a lui f.

Atunci:

1) $\bar{\alpha} = a - bi$ este rădăcină a lui f
2) $\alpha, \bar{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate

Fie f un polinom nenul cu coeficienți raționali și $\alpha = a + b\sqrt{d}$ $\left(a, b, d \in \mathbb{Q}, d > 0, \sqrt{d} \notin \mathbb{Q}\right)$ o rădăcină a lui f.

Atunci:

1) $a - b\sqrt{d}$ este rădăcină a lui f

2) $a + b\sqrt{d}$ și $a - b\sqrt{d}$ au aceleași ordin de multiplicitate

Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi și $\alpha = \frac{p}{q}$ o rădăcină rațională a lui $f, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$.

Atunci:

1) p divide coeficientul termenului liber a_0
2) q divide coeficientul dominant a_n

3.Primitive. Integrala definită

1. Primitive

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Spunem că $f: I \to \mathbb{R}$ **admite primitive** dacă există o funcție derivabilă $F: I \to \mathbb{R}$ astfel încât $F'(x) = f(x)$.

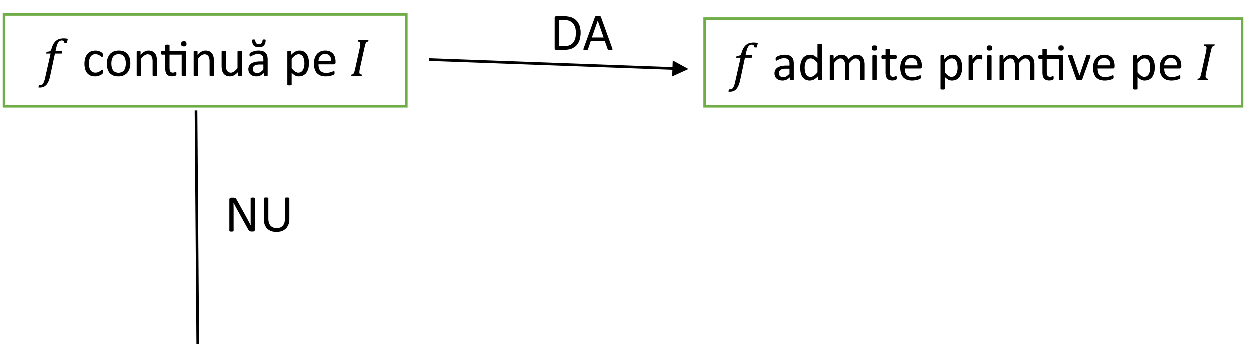
Mulțimea primitivelor unei funcții se notează $\int f(x)dx$.

Dacă $F: I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Orice funcție continuă admite primitive.

Orice funcție care admite primitive are prorpietatea lui Darboux. Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe I, atunci f nu admite primitive pe I.

Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ are un punct de discontinuitate de speța I, atunci f nu admite primitive.



f are proprietatea Lui Darboux $\xrightarrow{\text{NU}}$ f nu admite primtive pe I

DA ↓

Există $F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă și cu $F'(x) = f(x) \forall x \in I$ $\xrightarrow{\text{NU}}$ f nu admite primtive pe I

DA ↓

F este o primitivă a lui f

<u>Formula de integrare prin părți:</u> Dacă $f, g: I \to \mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile, iar $f' \cdot g$ are primitive, atunci și $f \cdot g'$ are primitive și $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.

<u>Formula de schimbare de variabilă:</u> Fie funcțiile $u: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$. Dacă u este derivabilă, iar f are primitiva F, atunci $(f \circ u)u'$ are primitiva $F \circ u$, adică $\int f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)dx = F(u(x)) + C$.

Integrarea funcțiilor raționale:

$$\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\, dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + a_0 x + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n dx} = -\frac{\frac{1}{n-1}A}{(x-a)^{n+1}} + C, \forall n \geq 2$$

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$$

Nr.	**Integrale nedefinite**
1	$\int dx = x + C$
2	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$
5	$\int e^x dx = e^x + C$
6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$
8	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
9	$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
10	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C$
12	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C$
14	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
15	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
16	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
17	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\|\cos x\| + C$
18	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\|\sin x\| + C$
19	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
20	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
21	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C$
22	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$
23	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$

2. Funcții integrabile

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ o **diviziune** a intervalului [a,b] și $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) cu\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ un **sistem de puncte intermediare** asociate diviziunii Δ.

Notăm $||\Delta|| = \max\{|x_i - x_{i-1}|, i = \overline{1, n}\}$ **norma diviziunii** Δ. Pentru funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ notăm $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ **suma Riemann** asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare.

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *este* **intregrabilă** pe [a,b] dacă $\lim\limits_{||\Delta|| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi)$ este finită.

În acest caz notăm $\lim\limits_{||\Delta|| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi) = \int_a^b f(x)dx$.

Formula lui Leibnitz-Newton. Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție intregrabilă care admite primitive, atunci $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, unde F este o primitivă a lui f.

Orice funcție continuă pe un interval [a,b] este integrabilă.

Orice funcție monotonă pe un interval [a,b] este integrabilă.

Orice funcție continuă pe un interval [a,b], cu excepția unui număr finit de puncte de discontinuitate de speța I, este integrabilă.

Orice funcție integrabilă pe un interval [a,b] este mărginită.

Proprietăți

Dacă $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x) \le g(x), \forall x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Dacă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă și $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

4.Aplicații ale integralei definite

Aria suprafeței plane cuprinsă între graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații x=a și x=b este $A_{\Gamma f} = \int_a^b |f(x)| dx$.

Aria suprafeței plane cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ este $A_{\Gamma f,g} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul axei Ox este $V_f = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.