1.Radicali și logaritmi

1. Puteri și radicali

Fie a,b $\in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Q}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

Dacă a>1, $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$, iar dacă a>1, $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$

Fie a,b $\in (0, \infty)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

$\sqrt[n]{a^n} = a;\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\ ;$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}\ ;$

Dacă m,n impare și a,b $\in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b;\ \sqrt{a} = |a|\ ;$

2. Logaritmi

Fie a>0, $a \neq 0$ *și* $x > 0$. Atunci y este unic cu proprietatea că $a^y = x$, și se numește logaritmul numărului x în baza a, notat $\log_a x$.

Fie a,b >0 , a,b$\neq 0$, x>0

Proprietați:

1) $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y;$
2) $a^{\log_a x} = x;$
3) $\log_a a = 1;$
4) $\log_a 1 = 0;$

5) $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$; $y > 0$

6) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$; $y > 0$

7) $\log_a a^x = x$;

8) $\log_a x^p = p \cdot log_a x$;

9) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;

Se notează: $\log_{10} x = \lg x$;

$\log_e x = \ln x$;

2.Numere complexe

1. Forma algebrică

Mulțimea $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ este mulțimea numerelor complexe. a=Re z se numește partea reală iar b=Im z se numește coeficientul parții imaginară a numărului cpmplex z.

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow Re\, z_1 = Re\, z_2$ *și* $Im\, z_1 = Im\, z_2$;

2. Conjugatul

Fie $z \in \mathbb{C}$, *atunci* $\bar{z} = a - bi$ *se numește conjugatul lui* $z = a + bi$.

Proprietăți:

1) $Re\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$; $Im\, z = \frac{z-\bar{z}}{2}$;

2) $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$;

3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$;

4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$;

3. Modulul. Fie $z \in \mathbb{C}$, *atunci* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește modulul numărului z=a + bi.

Proprietați:

1) $|z| \geq 0$;
2) $|z| = 0 \iff z = 0$;
3) $|z| = |\bar{z}|$;
4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
5) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
6) $|z^n| = |z|^n$;

4. Puterile lui i

$$i^{4k} = 1 \ , \ i^{4k+1} = i \ , \ i^{4k+2} = -1 \ , \ i^{4k+3} = -i$$

5. Forma trigonometrică

Fie $z \in \mathbb{C}$, z=a + bi, $a, b \in \mathbb{R}$. Există unic determinate numerele reale r>0, t$\in (0\,, 2\pi)$, astfel încât $z = r(cos\ t + isin\ t), cu\ r = \sqrt{a^2 + b^2}, t = arctg\left(\frac{b}{a}\right) + k\pi$ unde:

$$k = \begin{cases} 0, cadran\ I \\ 1, cadran\ II \\ 2, cadran\ III \end{cases}$$

$z = r(\cos t + i \sin t)$este forma trigonometrică a numărului complex z.

Dacă $z_1 = r_1(cos\ t_1 + isin\ t_1)\ z_2 = r_2(cos\ t_2 + isin\ t_2)$, r_1,r_2>0, $t_1, t_2 \in (0\,, 2\pi)$ atunci:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2))$;
2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2))$;
3) $z_1^n = r_1^n(\cos nt_1 + i \sin nt_1)$;
4) Formula lui Moivre. Fie n natural, n≥2.

$$(\cos t_1 + i \sin t_1)^n = \cos nt + i \sin nt;$$

Rădăcinile de ordin n ale numărului complex $z = r(cos\, t + isin\, t)$ sunt:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{t+2k\pi}{n} + i\sin\frac{t+2k\pi}{n}, k \in \{0,1,\ldots n-1\}.$$

3.Funcții

Fie A și B două mulțimi nevide.Spunem că $f: A \to B$ este o funcție dacă fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un unic element $f(x) \in B$.

Numim graficul funției $f: A \to B$ mulțimea $G_f = \{a, f(a) | a \in A\} \subset A \times B$.

Imaginea funcției $f: A \to B$ este $Im\, f = \{y \in B |\, \exists x \in A\, astfel\, \text{încât}\, f(x) = y\}$.

Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ sund două funcții,compusa lor $g \circ f: A \to C$ este definită prin $(g \circ f) = g(f(x)), \forall x \in A$.

Funcția $f: A \to B$, se numește inversabilă dacă există o funcție $g: B \to A$ astfel încât $g(f(x)) = f(g(x)) = x$. Se notează $f^{-1}(x)$ și are loc relația $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$.

1. Funcții injective, surjective, bijective

Funcția $f: A \to B$ este injectică dacă și numai dacă este îndeplinită una din condițiile:

- Pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $x_1 = x_2$.
- Pentru orice $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $x_1 \neq x_2$, rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Pentru orice $y \in B$, ecuția $f(y) = y$ are cel mult o suluție $x \in A$.

- Orice paralelă dusă la axa O_X printr-un punct al codomeniului intersectează graficul funcției <u>în cel mult un punct.</u>

Dacă f este monotonă, atunci f este injectivă. Reciproca are loc.

Funcția $f: A \rightarrow B$ este <u>surjectivă</u> dacă și numai dacă este îndeplinită una din condițiile:

- Pentru orice $y \in B,\ există\, x \in A\ astfel\, încât\ f(x) = y$.
- $Im\ f\ = B$.
- Orice paralelă dusă la axa O_X printr-un punct al codomeniului intersectează graficul funcției în <u>cel puțin un punct</u>.

Funcția $f: A \rightarrow B$ este <u>bijectivă</u> dacă și numai dacă este îndeplinită una din condițiile:

- $f\ injectivă$ și $f\ surjectivă$.
- Pentru orice $y \in B$, ecuația $f(x) = y$ are o unică soluție .
- Orice paralelă dusă la axa O_X printr-un punct al codomeniului intersectează graficul funcției în <u>exact un punct</u>.

Funcția f este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă!!!

2. <u>Monotonia funcțiilor</u>

Fie $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că:

- f este <u>strict crescătoare</u> dacă $\forall\ x_1, x_2 \in D$ cu $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$;

- f este <u>strict descrescătoare</u> dacă $\forall\, x_1, x_2 \in D$ cu $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f este <u>crescătoare</u> dacă $\forall\, x_1, x_2 \in D$ cu $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) < f(x_2)$;
- f este <u>descrescătoare</u> dacă $\forall\, x_1, x_2 \in D$ cu $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$;

3. Paritatea funcțiilor

Fie $f, g: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că:

- *f este <u>pară</u> dacă $f(x) = f(-x), \forall x \in D$;*
- *f este <u>impară</u> dacă $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$;*
- *f este <u>periodică</u>* de perioadă T dacă $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$ *;*

Cea mai mică perioadă pozitivă se numește <u>perioada principală.</u>

4. Inversele funțiilor trigonometrice

- Funcția $arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este funcția inversă funcției $sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$.

  Proprietăți:

  1) $\arcsin(\sin(x)) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

  2) $\sin(\arcsin(x)) = x, \forall x \in [-1,1]$;

  3) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x),\ \forall x \in [-1,1]$;

- Funcția $arccos: [-1,1] \to [0, \pi]$ este funcția inversă funcției $cos: [0, \pi] \to [-1,1]$.

  Proprietăți:

  2) $\arccos(\cos(x)) = x, \forall x \in [0, \pi]$;

2) $\cos(\arccos(x)) = x, \forall x \in [-1,1]$;

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x), \forall x \in [-1,1]$;

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1]$;

- Funcția $arctg: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este funcția inversă funcției $tg: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

Proprietăți:

3) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x), \forall x \in \mathbb{R}$;

- Funcția $arcctg: \mathbb{R} \to (0, \pi)$ este funcția inversă funcției $cos: (0, \pi) \to \mathbb{R}$.

Proprietăți:

4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(x)) = x, \forall x \in (0, \pi)$;

2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg}(x), \forall x \in \mathbb{R}$;

$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$;

3. Ecuații. Inecuații

1. Ecuații iraționale

Rezolvarea unei ecuații de tipul $\sqrt[n]{f(x)} = g(x), x \in D$, presupune:

- *Stabilirea condițiilor de existență;*

- *Eliminarea radicalului prin ridicarea la puterea n;*

2. Ecuații exponențiale

Dacă $a^{f(x)} = b, a > 0\ a \neq 1\ și\ b > 1, atunci\ f(x) = \log_a b$.

Dacă $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0\ a \neq 1\ , atunci\ f(x) = g(x)$.

3. Ecuații logaritmice

Se vor pune condițiile de existența: $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$.

Dacă $\log_a f(x) = \log_a g(x),\ \ g(x) > 0, atunci\ f(x) = g(x)$.

Dacă $\log_{f(x)} g(x) = b\ , f(x) \neq 1\ și\ g(x) > 0$, atunci $g(x) = f(x)^b$.

4. Ecuații trigonometrice

$\sin t = a\ , a \in [-1,1] \Leftrightarrow t \in \{(-1)^k \arcsin a + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \ ;$

$\cos t = a\ , a \in [-1,1] \Leftrightarrow t \in \{\pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \ ;$

$tg\ t = a, a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in \{arctg\ a + k\pi, k \in \mathbb{Z};$

$ctg\ t = a, a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in \{arcctg\ a + k\pi, k \in \mathbb{Z};$

4. Combinatorică

Fie D o mulțime finită cu n elemente și $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$.

Se numește permutare a mulțimii D orice mulțime ordonată care se poate forma cu elementele sale $P_n = n!$.

Se numește aranjament de n luate câte k orice mulțime ordonată din k elemnte ale lui D. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Se numește combinare de n elemnte luate câte k orice submulțime a lui D formată din k elemente. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Observație: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Fie A o mulțime cu m elemente și B o mulțime cu n elemente.

Dacă $n \leq m$, numărul funcților injective $f: A \to B, este\ A_m^n$.

Dacă $n = m$, numărul funcților bijective $f: A \to B, este\ P_m$.

Dacă $n < m$, numărul funcților strict crescătoare/descrescătoare $f: A \to B, este\ C_m^n$.

Binomul lui Newton

Fie $a, b \in \mathbb{R}\ și\ \ n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n$

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$

Probabilități $p = \frac{numărul\ cazurilor\ favorabile}{numărul\ cazurilor\ posibile}$ $, p < 1;$

5. Geometrie analitică

Fie punctele $A(x_A, y_a)\ și\ B(x_b, y_b). Atunci:$

- Panta dreptei AB este $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix}$=0 sau $\frac{y - y_B}{y_B - y_A} = \frac{x - x_B}{x_B - x_A}$

- Mijlocul M al segmentului [AB], are coordonatele $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$
- Punctul M care împarte segmentul [AB], în raportul k, $\frac{AM}{MB} = k$ are coordonatele $x_M = \frac{1}{k+1}x_A + \frac{k}{(k+1)}x_B$, $y_M = \frac{1}{k+1}y_A + \frac{k}{(k+1)}y_B$
- Ecuația dreptei ce trece prin A și are panta m este $y - y_A = m(x - x_A)$.Dacă ecuația are dreapta d: ax + by + c = 0, atunci panta este $m = -\frac{a}{b}$.

Fie dreptele d_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $și$ d_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, atunci :

$d_1||d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow m_{d1} = m_{d2};$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_{d1} \cdot m_{d2} = -1;$

Distanța de la punctul $A(x_A, y_A)$ la dreapta d: ax + by + c = 0 este $d(A,d) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|, unde\ \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Punctele A, B, C sunt coliniare dacă $\Delta = 0$.