1.Numere reale

1. Formule de calcul prescurtat

1) $(a + b)^2=a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a - b)^2=a^2 - 2ab + b^2$;

3) $(a + b + c)^2=a^2 + b^2 + c^2 + 2ab +2ac +2bc$;

4) $(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b +3ab^2 \pm b^3$;

5) $a^n - b^n =(a - b)(a^{n-1} +a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$;

6) $a^n + b^n =(a + b)(a^{n-1} -a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ -n impar;

2. Sume remarcabile și inegalități

1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Inegalitatea medilor.Fie $n\in \mathbb{N}$,$n\geq 2$ și $a_1,a_2,\ldots,a_n\in \mathbb{R}$ avem :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{2}$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

3. Modulul sau valoarea absolută

Fie $a\in \mathbb{R}$, atunci $|a| = \begin{cases} a, & dacă\ a \geq 0 \\ -a, & dacă\ a \leq 0 \end{cases}$

Proprietăți:

1) $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
2) $|a| = |-a|$;
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
4) $\sqrt{a^2}$=|a|;
5) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
6) $|a| \leq c$ și $c > 0 \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$;
7) $|a| \geq c$ și $c > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$;
8) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ sau $a = -b$;
9) $|a + b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$;

4. Parte întreagă și partea fracționară

Fie a∈ $\mathbb{R}$. Cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a se numește parte întreagă a numărului a, notată [a].

Proprietăți:

1) [a]∈ $\mathbb{N}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;
2) [a]=a $\Leftrightarrow a \in \mathbb{N}$;
3) a – 1< [a] ≤ a;
4) [a] ≤ a < [a] +1;
5) [a + k]= [a] + k , $\forall\, a \in \mathbb{R}$;
6) [a] = [b] ⇒ $|a - b| < 1$

Numărul a – [a] se numește partea fracționară a lui a, notată {a}. Prin urmare, orice număr real a se poate scrie a=[a] + {a}.

Proprietăți:

1) $0 \leq \{a\} < 1$;

2) $\{a\} = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$;

3) $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$;

4) $\{a + n\} = \{a\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$;

Identitatea lui Hermite

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\forall\, n \in \mathbb{N}^*/\{1\}.$$

5. Mulțimi

Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin sau lui A sau lui B. $A \cup B = \{x \mid x \in A\ sau\ x \in B\}$.

Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin lui A și lui B. $A \cap B = \{x \mid x \in A\ și\ x \in B\}$.

Diferența mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B. A / B = $\{x \mid x \in A\ și\ x \notin B\}$.

Produsul cartezian mulțimilor A și B este $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A\ și\ y \in B\}$. O mulțime se numește finită, dacă are n elemente , $n \in \mathbb{N}$, în caz contrar, se numește infinită. Numărul de elemente ale unei mulțimi finite se numește cardinalul mulțimii, notat card A sau |A|.

2. Șiruri. Progresii

1. Progresii aritmetice

Un șir de numere reale în care orice termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent adunat cu același număr se numește progresie aritmetică, adică $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall\, n \geq 1, unde\ r\ \in \mathbb{R}\ numit\ rație$.

Propritāți

1) $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall\, n \geq 1;$
2) $a_n = \frac{(a_{n-1}+a_{n+1})}{2}, \forall\, n \geq 2;$
3) $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} n, \forall\, n \geq 1;$
4) $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1};\ \forall\, k \geq 1;$

2. Progresii geometrice

Un șir de numere reale cu primul termen nenul, în care orice termen începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțirea cu același număr nenul, se numește progresie geometrică, adică $b_{n+1} = b_n \cdot q,\ \forall\, n \geq 1, unde\ q\ \in \mathbb{R}^*\ numit\ rație$.

Propritāți

1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall\, n \geq 1;$
2) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}\ , \forall\, n \geq 2;$
3) $S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\ , q \neq 1 \\ n \cdot b_1\ , q = 1 \end{cases}, \forall\, n \geq 1;$
4) $b_1 + b_n = b_k \cdot b_{n-k+1};\ \forall\, k \geq 1;$

3. Funcția de gradul întâi. Funcția de gradul al doilea

1. Funcția de gradul întâi. Funția f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f(x)= ax + b; a,b ∈ $\mathbb{R}, a \neq 0$ se numește funcție de gradul întâi. Graficul funcției de gradul întâi este o dreaptă, de pantă a.

Intersecția graficului cu axele de coordonate sunt punctele A(0 , b), B$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Monotonie: Dacă a>0, f este strict crescătoare

Dacă a<0, f este strict descrescătoare

Semnul:

X	-∞	$-\frac{b}{a}$	∞
f(x)	-sgn(a)	0	Sgn(a)

Sgn(a)=semnul lui a

2. Funcția de gradul al doilea.

Funția f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f(x)= ax^2 + bx + c; a,b,c ∈ $\mathbb{R}, a \neq 0$ se numește funcție de gradul al doilea. Graficul funcției de gradul întâi este o parabolă, de vârf $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Intersecția graficului cu axa O_x reprezintă soluțiile ecuației f(x)=0.

Forma canonică a funcției este $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Monotonie: Dacă a > 0, f strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Dacă a < 0, f strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

Semul:

1) Dacă $\Delta < 0$, funția păstrează semnul lui a.
2) Dacă $\Delta = 0$, funția se anulează în $x = -\frac{b}{2a}$, și are semnul lui a.ș
3) Dacă $\Delta > 0$

x	∞		x_1		x_2		-∞
f(x)		sgn(a)	0	-sgn(a)	0	sgn(a)	

sgn(a)= semnul lui a

4. Ecuația de gradul întâi. Ecuația de gradul al doilea

1. Ecuația de gradul întâi

Ecuația $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ are soluție unică $x = -\frac{b}{a}$.

2. Ecuația de gradul al doilea

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ are:

1) Două rădăcini reale și distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta > 0$.
2) Două rădăcini reale și egale $x = -b/2a$, dacă $\Delta = 0$.

3) Două rădăcini imaginare și distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, dacă $\Delta < 0$.

Descompunerea ecuației: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Relațiile lui Viete. $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

5. Vectori

Regula triunghiului. Dacă A, B, C sunt puncte în plan, atunci: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Regula paralelogramului. În paralelogramul ABCD, are loc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Dacă M este mijlocul segmentului [AB], pentru orice punct O din plan are loc relația:

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.Are loc si reciproca.

Vectorii $\vec{u}$ $și$ $\vec{v}$ sunt coliniari dacă există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ unic astfel încât $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Vectorul $\overrightarrow{r_a} = \overrightarrow{OA}$ se numește vectorul de poziție al punctului A în raport cu O.

Dacă M împarte segmentul [AB], în raportul k, atunci $\overrightarrow{r_M} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{r_A} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{r_B}$.

Dacă G este centrul de greutate al ΔABC, atunci $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}+\overrightarrow{r_C}}{3}$.

Dacă A(x_a , y_a), B(x_b , y_b), atunci $\overrightarrow{AB}(x_b - x_a, y_b - y_a)$.

Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ $este$ $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.

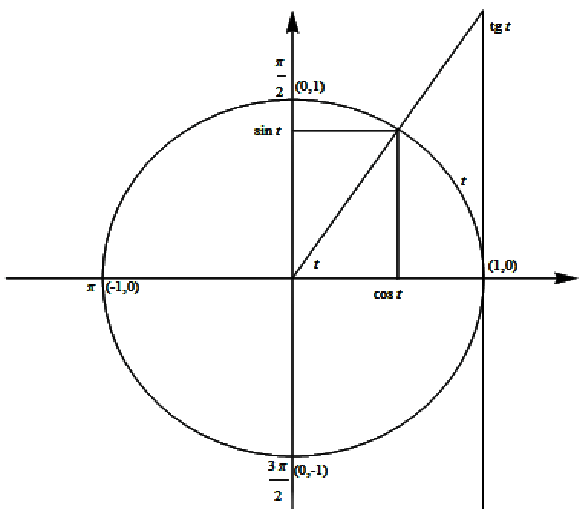
Dacă $\vec{u}(x_1, y_1)$ $și$ $\vec{v}(x_2, y_2)$ sunt doi vectori , atunci $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\widehat{uv})$, reprezintă produsul scalar. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

Dacă $\cos(\widehat{uv}) < 0 \Rightarrow (\widehat{uv}) > \frac{\pi}{2}$, iar dacă $\cos(\widehat{uv}) > 0 \Rightarrow (\widehat{uv}) < \frac{\pi}{2}$.

Vectori perpendiculari: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Vectori paraleli: $\vec{u}||\vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

6. Formule trigonometrie



Cercul trigonometric.

Propritāți:

1) $-1 \leq \sin x \leq 1; \ -1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3) $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$; $tg(-x) = -tg(x)$

Formule :

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \ \pm \cos a \cdot \sin b$;

$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \ \mp \sin a \cdot \sin b$;

$tg(a \pm b) = \frac{tg\ a \pm tg\ b}{1 \mp tg\ a \cdot tg\ b}$;

sin 2a = 2sin a · cos a;

cos 2a = $\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$;

sin 3a = sin a (3 – 4 sin^2 a);

cos 3a = cos a (4 cos^2 a - 3);

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2x}{2}$;

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$;

$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$;

$tg\ a \ \pm tg\ b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$;

$\sin a \ \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$;

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$;

$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$;

Notație: t=tg$\left(\frac{a}{2}\right)$

$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; cos a=$\frac{1-t^2}{1+t^2}$; tg a=$\frac{2t}{1-t^2}$;

t=$\frac{1-\cos a}{\sin a}$=$\frac{\sin a}{1+\cos a}$;

7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie

Considerăm ΔABC cu laturile AB=c, AC=b, BC=a.

1. Teorema cosinusului.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

2. Teorema sinusului

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,R raza cercului circumscris ΔABC

3. Formule pentru aria ΔABC

$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$;

$A_{\Delta ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{ab \cdot \sin C}{2} = \frac{ac \cdot \sin B}{2}$;

$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, unde\ p = \frac{a+b+c}{2}$;

$A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$;

4. Formule pentru R și r

$R = \frac{abc}{4A_{\Delta ABC}}$; r=$\frac{A_{\Delta ABC}}{p}$;