Solutions

Solution 1.

(1) $\frac{8}{3}$ et $\frac{2}{3}$,

(2) $2(e^2-1)^2$ et 1,

(3) 1 et $\ln\frac{3}{2}$,

(4) $\frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}(8^{3/2} - 5^{3/2} - 4^{3/2} + 1)$

(4) Voici le détail du calcul pour la première intégrale

$$\int_0^1 \int_1^2 y\, e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_1^2\, dy = \int_0^1 \left(e^{2y} - e^y\right)\, dy = \left[\frac{e^{2y}}{2} - e^y\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

On remarque que si on inverse l'ordre d'intégration, le calcul requiert une *intégration par partie*. En effet on a

$$\int_1^2 \int_0^1 y\, e^{xy}\, dy\, dx = \int_1^2 \left\{\left[y\, \frac{e^{xy}}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{xy}}{x} dy\right\}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{e^{xy}}{x} - \frac{e^{xy}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Une seconde intégration par partie est nécessaire pour arriver au résultat voulu

$$\int_1^2 \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{1}{x}\, e^x\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\, dx - \int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\, dx - \int_1^2 \frac{dx}{x^2}\, dx = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

Au passage on note que les intégrales $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx$ et $\int \frac{e^x}{x}\, dx$, liées à la fonction *exponentielle intégrale* $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$, ne peuvent pas être évaluées à la main. En effet, il n'existe pas de primitive pour les fonctions e^x/x^2 et e^x/x.

Solution 2.

(1) $\int_{x=1}^{2} \int_{y=1}^{2x} dy\, dx = 2$ et inverser donne $\int_{y=1}^{2} \int_{x=1}^{2} dx\, dy + \int_{y=2}^{4} \int_{y/2}^{2} dx\, dy = 2$

(2) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x} dy\, dx = \frac{1}{4}$ et inverser donne $\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{y^{1/3}} dx\, dy = \frac{1}{4}$

(3) $\int_0^\infty \int_{e^{-2x}}^{e^{-x}} dy\, dx = \frac{1}{2}$ et inverser donne $\int_{y=0}^{1} \int_{x=-\frac{1}{2}\ln y}^{-\ln y} dx\, dy = \frac{1}{2}$

(4) $\int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} dy\, dx = \frac{8}{3}$ et inverser donne $\int_{y=-1}^{0} \int_{x=-\sqrt{1+y}}^{\sqrt{1+y}} dx\, dy + \int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx\, dy = \frac{8}{3}$

(5) $\int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} dx\, dy = \frac{4}{3}$ et inverser donne $\int_{x=0}^{1} \int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\, dx = \frac{4}{3}$

(6) $\int_{-1}^{1} \int_{x=y}^{|y|} dx\, dy = 1$ et inverser donne $\int_{-1}^{0} \int_{-1}^{x} dy\, dx + \int_0^1 \int_{-1}^{-x} dy\, dx = 1$

Solution 3.

(1) $f(a,b) - f(a,0) - f(0,b) + f(0,0)$

(2) $\int_0^b (f(a,y) - f(0,y))\, dy$

Solution 4. **(1)** $\int_0^1 \int_0^1 (2x - 3y + 1)\, dx\, dy = \frac{1}{2}$ **(2)** $\int_0^1 \int_0^1 x\, e^y - y\, e^x\, dx\, dy = 0$

Solution 5.

(1) $M = \iint \rho(x,y)\, dx\, dy = \int_1^3 \int_1^2 x^2\, dx\, dy = \frac{14}{3}$

(2) Nous avons $\overline{y} = \frac{m_x}{M} = \frac{\int_1^3 \int_1^2 yx^2 dx\, dy}{14/3}$ et $\overline{x} = \frac{m_y}{M} = \frac{\int_1^3 \int_1^2 x^3 dx\, dy}{14/3}$ so $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{45}{28}, 2)$

Solution 6. $\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f(\frac{i-1/2}{n}, \frac{j-1/2}{n})$ est exacte pour $f = 1, x, y, xy$.

Solution 7. L'intégrale $\int_0^1 \int_0^1 x^2\, dxdy$ possède l'erreur typique de la méthode du point milieu $-\frac{(\Delta x)^2}{12}$ pour l'intégrale de x^2. L'intégrale sur y $\int_0^1 dy = 1$ est évaluée exactement. Donc l'erreur est $-\frac{1}{12n^2}$ (et la même chose pour $\iint y^2\, dxdy$). L'intégrale de xy est calculée exactement. L'erreur décroit avec un exposant de $p = 2$, l'ordre de précision.

Solution 8. **(1)** $2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} 1\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}$ **(2)** $(\overline{x}, \overline{y}) = (0, \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}) \approx (0, 0.60)$

Solution 9. $50\,000\,\pi$

Solution 10. La hauteur est $z = (1 - ax - by)/c$. On intègre sur la base triangulaire ($z = 0$ donne le coté $ax + by = 1$): volume $= \int_{x=0}^{1/a} \int_{y=0}^{(1-ax)/by} \frac{1-ax-by}{c} dx = \int_0^{1/a} \frac{1}{c}[y - axy - \frac{1}{2}by^2]_0^{(1-ax)/b} dx = \int_0^{1/a} \frac{1}{c} \frac{(1-ax)^2}{2b} dx = [-\frac{(1-ax)^3}{6abc}]_0^{1/a} = \frac{1}{6abc}$.

Solution 11.

(1) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{4}$

(2) $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = \frac{\pi}{4}$; $\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-y}^{y} dx\, dy + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\, dy$

(3) $S =$ quart de cercle avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$; $\int_1^1 \int_1^{\sqrt{1-v^2}} du\, dv$

(4) $\overline{y} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(5) R est symétrique sur l'axe y; $\int_1^1 \int_1^{\sqrt{1-v^2}} u\, du\, dv = \frac{1}{3}$ divisé par aire donne $(\overline{u}, \overline{v}) = (\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$

(6) $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{2a}{3b} \sin b, \frac{2a}{3b}(1 - \cos b)\right)$

Solution 12.

(1) $(0, 0), (1, 2), (1, 3), (0, 1)$; l'aire du parallélogramme est 1.

(2) On a les relations $x = au+bv$ et $y = cu+dv$. Le coin $(x, y) = (1, 2)$ correspond à $(u, v) = (1, 0)$ d'où $a = 1$ et $c = 2$; le coin $(0, 1)$ correspond à $(u, v) = (1, 0)$ d'où $b = 0$ et $d = 1$; Au point $u = v = 1$ on a $x = au + bv = 1$ et $y = cu + dv = 3$ ce qui correspond au coin $(1, 3)$. Alors $J = ad - bc = 1 \times 1 - 0 \times 2 = 1$. L'aire du carré unité est 1 et l'aire de la région R également.

Solution 13. Nous avons $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

Solution 14. $B^2 = 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\theta} e^{-r^2} r\, dr d\theta = \int_0^{\pi/4} (e^{-1/\cos^2\theta} - 1) d\theta$

Solution 15. R est une bande infinie au-dessus de l'intervalle $[0, 1]$ sur l'axe des x. Ses limites sont $x = 1$ soit $r \cos\theta = 1$ ou $r = 1/\cos\theta = \sec\theta$. Les limites sont donc $0 \leq r \leq \sec\theta$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. L'intégrale devient alors $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sec\theta} \frac{r\, dr d\theta}{r^3} = \int_0^{\pi/2} (\infty)\, d\theta =$ infini. Pour un example fini intégrez $(x^2 + y^2)^{-1/2} = 1/r$.

Solution 16. $\iint xy\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (u \cos\alpha - v \sin\alpha)(u \sin\alpha + v \cos\alpha)\, dudv = \frac{1}{4}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

Solution 17. On trouve $\int_0^{2\pi} \int_4^5 r^2\, rdr\, d\theta = \frac{122\pi}{3}$

Solution 18.

(1) sur le côté droit **(2)** en bas **(3)** dans le coin inférieur droit

Solution 19. **(1)** $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dx\,dy\,dz = 8$ **(2)** $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} dx\,dy\,dz = 4$

Solution 20. **(1)** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y} dx\,dy\,dz = \frac{1}{6}$ **(2)** $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}\int_{y}^{1} dz\,dy\,dx = \frac{1}{6}$; $z = y$ et $z = 1$

Solution 21.

(1) On découpe le cylindre en tranches qui sont des disques unités, d'aire π, parallèles au plan xy. On rappelle que, en coordonnées cartésiennes, l'aire du disque unité s'exprime par l'intégrale double

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy = \int_{-1}^{+1} 2\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \pi$$

Ensuite, afin de d'obtenir le volume total du cylindre, on intègre sur la coordonnées z selon

$$\int_{0}^{6}\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} dx\,dy\,dz = \int_{0}^{6} \pi\,dz = 6\pi$$

Ce résultat peut se retrouver facilement puisque le volume d'un cylindre est donné le produit de l'aire de sa base avec sa hauteur.

(2) Ici, le découpage du volume selon des tranches parallèles au plan xy conduit à des bornes d'intégration compliquées et donc à une intégral assez complexe. Alternativement, en choisissant des tranches parallèles au plan zy de forme rectangulaire, on facilite le calcul du volume sensiblement. L'aire de ces tranches rectangulaires est donnée par l'intégrale double

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x} dz\,dy = 2x\sqrt{1-x^2}$$

Les bornes d'intégration sur l'intégrale ci-dessus peuvent se déduire de figures en projection (sans perspective). On note également que ces tranches rectangulaire ont un aire variable, paramétrisée par x. Pour obtenir le volume, on intégrate sur cette variable x, soit

$$\iiint_R dV = \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{x} dz\,dy\,dx = \int_{0}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Solution 22.

(1) $\frac{abc}{6}$; $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = (\frac{a}{4},\frac{b}{4},\frac{c}{4})$

(2) L'équation équivaut à $4^2 = (x'-0)^2 + (y'-0)^2 + (z'-0)^2$ et c'est l'équation d'une sphère dans le $x'y'z'$ espace centré à l'origine et de rayon 4. Par conséquent, le volume dans l'espace xyz est $\frac{128\pi}{9}$; L'hypervolume est $\int_0^1\int_0^{1-w}\int_0^{1-zw}\int_0^{1-yzw} dx\,dy\,dz\,dw = \frac{1}{24}$

Solution 23.

(1) $\dfrac{\partial I}{\partial x} = x$; $\dfrac{\partial I}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 I}{\partial y \partial z} = 0$

(2) $\dfrac{\partial I}{\partial x} = \displaystyle\int_0^z \int_0^y f(x,y',z')\,dy'\,dz'$; $\dfrac{\partial I}{\partial y} = \displaystyle\int_0^z \int_0^y f(x',y,z')\,dx'\,dz'$; $\dfrac{\partial^2 I}{\partial y \partial z} = \displaystyle\int_0^x f(x',y,z)\,dx'$

Solution 24. La valeur moyenne f est $\iiint_V f(x,y,z)\,dV / \iiint_V dV$ = intégrale de $f(x,y,z)$ divisé par le volume.

Solution 25. Volume d'un cube unité $= \sum_{i=1}^{1/\Delta x} \sum_{j=1}^{1/\Delta x} \sum_{k=1}^{1/\Delta x} (\Delta x)^3 = 1$.

Solution 26. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^y dx dy dz = 6$.

Solution 27.

(1) $(r,\theta,z) = (D,0,0)$; $(\rho,\phi,\theta) = (D,\frac{\pi}{2},0)$

(2) $(r,\theta,z) = (D,\frac{3\pi}{2},0)$; $(\rho,\phi,\theta) = (D,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$

(3) $(r,\theta,z) = (0,\theta,D)$; $(\rho,\phi,\theta) = (D,0,\theta)$

(4) $(r,\theta,z) = (5,\cos^{-1}\frac{3}{5},5)$; $(\rho,\phi,\theta) = (5\sqrt{2},\frac{\pi}{4},\cos^{-1}\frac{3}{5})$

Solution 28.

(1) 45° cône dans une sphère unitaire: $\frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(2) La surface $z = 1 + r^2 = 1 + z^2 + y^2$ est une paraboloïde (parabole tournée autour de l'axe z). La région est au-dessus du demi-disque $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$. Le volume est $\frac{3}{4}\pi$.

(3) Cône sans sommets: $\frac{7\pi}{3}$

(4) C'est le volume du demi-cylindre (à cause de $0 \le \theta \le \pi$): hauteur π, rayon π, volume $\frac{1}{2}\pi^4$.

(5) $\frac{1}{4}$ hémisphère: $\frac{\pi}{6}$

(6) La surface supérieure $\rho = 2$ est le sommet d'une sphère. La surface inférieure $\rho = \ sec\phi$ est le plan $z = \rho\cos\phi = 1$ (l'angle $\phi = \frac{\pi}{3}$ est la rencontre de la sphère et avion, où $\ sec\phi = 2$). Le volume est $2\pi\int_0^{\pi/3}(\frac{8-\ sec^3\phi}{3})\sin\phi\,d\phi = \frac{5\pi}{3}$.

(7) $\frac{\pi^2}{8}$

(8) La région $1 \le \rho \le 3$ est une sphère creuse (coquille sphérique). Les limites $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ gardent la partie qui se trouve au-dessus d'un cône 45°. Le volume est $\frac{52\pi}{3}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$

(9) Hémisphère de rayon π: $\frac{2}{3}\pi^4$

(10) De la boule unitaire $\rho \le 1$ garder la partie au-dessus du cône $\phi = 1$ radian et à l'intérieur du coin $0 \le \theta \le 1$ radian. Volume $= \frac{1}{4}\int_0^1 \sin\phi\,d\phi = \frac{1}{4}(1-\cos 1)$.

Solution 29. Nous avons $\pi(R^2 - z^2)$ et $4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}$.

Solution 30.

(1) La loi du cosinus (voir indice) donne $\cos\alpha = \frac{D^2+q^2-\rho^2}{2qD}$. Puis intégrez $\frac{\cos\alpha}{q^2}$: $\iiint(\frac{D^2-\rho^2}{2q^3 D} + \frac{1}{2qD})\ ,dV$. La deuxième intégrale est $\frac{1}{2D}\iiint\frac{dV}{q} = \frac{4\pi R^3/3}{2D^2}$. La première intégrale sur ϕ utilise le même $u = D^2 - 2\rho D\cos\phi + \rho^2 = q^2$ que dans le texte: $\int_0^\pi \frac{\sin\phi}{q^3}d\phi = \int\frac{du}{2\rho D\,u^{3/2}} = [\frac{-1}{\rho D u^{1/2}}]_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \frac{1}{\rho D}(\frac{1}{D-\rho} - \frac{1}{D-\rho}) = \frac{2}{D(D^2-\rho^2)}$. Les intégrales θ donnent $\frac{4\pi R^3}{3D^2}$ (comme Newton s'y attendait).

(2) $\frac{\partial q}{\partial D} = \frac{\rho - D\cos\phi}{q} = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \cos\alpha$.