EPITA
ÉCOLE D'INGENIEURS EN INFORMATIQUE

Intégrales généralisées

1 Définition et propriétés

Les exercices qui suivent vont vous accompagner dans la prise en main de l'objet "intégrale généralisée" (ou intégrale impopre). Vous allez retrouver les techniques d'intégration pour les intégrales de Riemann, adaptées aux intégrales généralisées et aussi les méthodes de comparaisons, très similaires à celles des séries. En application directe, on s'intéresse aux propriétés de la loi exponentielle.

Les AAV abordés d'un cette section :

— décider de la bonne définition d'une intégrale généralisée
— calculer les moments et grandeurs probabilistes liées à une variable aléatoire à densité

Question 1-1 Intégrales de référence : exponentielle
Déterminer la nature des intégrales suivantes en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$

Solution 1-1

a) Dans le cas où $\alpha \neq 0$ on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x}-1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{0t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha < 0$$

b) De la même manière on montre

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0$$

On peut également utiliser le changement de variables.

Question 1-2 Que pensez vous de l'affirmation suivante :

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Solution 1-2 C'est une erreur qu'on retrouve souvent. Il suffit de donner des exemples avec les intégrales de Riemann, par ex. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Question 1-3 Déterminer la nature des intégrales suivantes. Dans le cas de convergence donner leur valeur.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\,\mathrm{d}x$

Solution 1-3

a) $\displaystyle\int_0^t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)$. Même si $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ l'intégrale ne converge pas, en effet la fonction $\sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

b) Il s'agit d'une intégrale de Riemann de référence avec $\alpha = \frac{4}{5}$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}\,\mathrm{d}x$ diverge, ce qui implique la divergence de l'intégrale donnée.

c) Cette fois il s'agit d'une intégrale de Riemann convergente.

$$\int_1^X \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\,\mathrm{d}x = -4\left(\frac{1}{X^{1/4}} - \frac{1}{1^{1/4}}\right)$$

En passant à la limite on obtient la valeur de l'intégrale : 4.

Question 1-4 Déterminer la nature des intégrales suivantes à l'aide d'un critère de comparaison.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t$

d) $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t+e^t}\,\mathrm{d}t$

e) $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t-e^{-t}}\,\mathrm{d}t$

f) Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x$ avec $\alpha > 0$

g) $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$

h) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution 1-4

a) Sur l'intervalle $[1,+\infty[$ on a $0 \leq \frac{\cos^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. La deuxième intégrale converge (Riemann) par comparaison de fonction de même signe on déduit la convergence de la première intégrale.

b) Sur l'intervalle $[0,+\infty[$ on a $0 \leq \frac{e^{-t}}{1+t^2} \leq e^{-t}$ et la deuxième intégrale converge (question 1-1)

c) Sur $[1,+\infty[$ on a $-1 \leq \sin(t)$. La fonction exponentielle étant croissante, sur le même intervalle on a :

$$0 \leq \frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin(t)}}{t}$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (Riemann) donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi.

d) Sur l'intervalle $[\pi,+\infty[$ on a $0 \leq \frac{1}{t+e^t} \leq \frac{1}{e^t}$. Par comparaison de fonctions continues positives la convergence de $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{e^t}\,\mathrm{d}t$ on obtient la convergence de l'intégrale donnée.

e) Cette fois-ci $0 \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t-e^t}$ et par le même type de raisonnement on déduit la divergence de l'intégrale.

f) On a $e^{-\alpha x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-\alpha x^2} = o(e^{-x})$ en $+\infty$.

Sur $[0,+\infty[$ l'intégrale de e^{-x} converge, les fonctions étant positives et coninues, l'intégrale de $e^{-\alpha x^2}$ converge aussi.

On peut utiliser le même argument sur $]-\infty,0]$ en remarquant que $e^{-\alpha x^2} = o(e^x)$ en $-\infty$ et conclure la convergence des intégrales de Gauss.

g) C'est le moment de rappeler les croissances comparées et qu'on conséquence on choisit une fonction t^{α}. On remarque qu'il faut traiter les deux bornes séparement :
Sur l'intervalle $]0,1]$ on a $\lim_{x\to 0} x^{1/2}\ln(x)e^{-x} = 0$ d'où $\ln(x)e^{-x} = o(\frac{1}{x^{1/2}})$ en 0. Les deux fonctions qu'on compare sont continues, de signe constant sur $]0,1]$. La convergence de $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x$ implique la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
Sur $[1,+\infty[$ on peut remarquer que $x^2\ln(x)e^{-x} = \frac{\ln(x)}{x}x^3e^{-x} \to 0$ en $+\infty$ donc $\ln(x)e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$. Les fonctions sont continues et de signe constant sur l'intervalle, la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ implique la convergence de l'intégrale en question.

h) De nouveau il faut étudier l'intégrale dans les deux bornes, par exemple sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$. Sur $]0,1]$ on a l'équivalence de fonctions continues et positives au voisinage de 0 :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \sim \frac{x^2}{x^2} \sim 1 \text{ en } 0$$

La convergence de $\int_0^1 dx$ implique la convergence de l'intégrale sur $]0,1]$
Sur $[1,+\infty[$ on a

$$x^{3/2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = x^{-\frac{1}{2}}\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = o(\frac{1}{x^{3/2}})$. On retrouve les mêmes arguements : fonctions continues, positives, intégrale de Riemann convergente et on en déduit la convergence de l'intégrale de la question.

Question 1-5 Un signal est représenté par une fonciton

$$x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

L'énergie d'un signal est donnée par la formule

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Déterminer si les signaux suivants sont d'énergie finie.

a) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos(\omega t)$
b) $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t)$ sur $[0,+\infty[$ et 0 sur $]-\infty,0[$ e (Ici $A > 0$ est l'amplitude du signal, ω la fréquence angulaire et $\alpha > 0$ la facteur de dégradation (perte, amortissement) du signal. On retrouve ce signal dans des systèmes mechaniques, acoustique, séismologie etc.)

Solution 1-5

a) C'est le moment de faire une représentation graphique et de profiter de la périodicité de la fonction $\cos(\omega t)$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Alors $\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{2}(1+cos(2\omega t))\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ Si $x > nT$ alors $\int_0^x \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t \geq n\frac{T}{2}$ donc l'intégrale diverge i.e. le signal est d'énergie infinie.
b) Sur $[0,+\infty[$ on a $(Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t))^2 \leq A^2e^{-2\alpha t}$. Par comparaison de fonctions continues et positive on déduit la convergence de l'intégrale. Le signal est donc d'énergie finie.

Question 1-6 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{3+2x^2}{(1+x^2)(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$

Solution 1-6

a) $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

b) On utilise le changement de variables $y = \frac{t}{\sqrt{2}}$ sur l'intégrale de Riemann :

$$\int_0^x \frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan(\frac{x}{\sqrt{2}}) - \arctan(0))$$

La dernière expression converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}$ donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

c) Par linéarité des intégrales généralisées, en additionnant les deux intégrales on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{3+2x^2}{(1+x^2)(2+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Question 1-7

a) Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

b) En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x$ (IPP)

c) En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ ($u = x^2$).

Solution 1-7

a) $|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ converge (Riemann), ce qui implique la convergence absolue de l'intégrale en question.

b) $\int_1^X \frac{\cos(x)}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{sin(x)}{x^{1/2}}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{sin(x)}{x^{1/2}} = 0$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{1/2}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature. On utilise la question précédente pour conclure la convergence.

c) On pose $u = x^2$. Il s'agit d'une fonction C^1 bijective sur l'intervalle donné. Donc $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{(u)}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Par comparaison avec le deuxième intégrale converge....

Question 1-8 La loi exponentielle est une loi de densité f avec

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que f satisfait bien la propriété d'une fonction de densité :

$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

b) Calculer l'expérence de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Calculer la variance de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution 1-8

a) La fonction est nulle sur $]-\infty, 0[$. Sur $[0, +\infty[$ on a $\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} (1 - e^{-\lambda X}) = 1$ ce qui montre la propriété.

b) On utilise IPP avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$. Comme $\lim_{x \to +\infty}(-xe^{-\lambda x}) = 0$ les deux intégrales de $u'v$ et uv' sur $[0, +\infty[$ sont de même nature. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} ([-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^X) = \frac{1}{\lambda}$$

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

c) En général, comme $(x - E(X))^2 f(x) = (x^2 - 2E(X)x + (E(X))^2) f(x)$ (et sous réserve de convergence)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 2E(X) \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x + (E(X))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - (E(X))^2$$

On s'occupe donc de la première intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ qui s'annule sur $]-\infty, 0]$. Sur $[0, +\infty[$ on fait IPP avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Alors $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{-\lambda x}$. On vérifie bien que $[u(x)v(x)]_0^{+\infty}$ a un sens,la limite en $+\infty$ est 0. On a

$$\int_0^X x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^X + 2\int_0^X x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est donc de même nature que $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$
Pour finir $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$