EPITA
ÉCOLE D'INGENIEURS EN INFORMATIQUE

Intégrales généralisées

1 Intégrales à paramètre

Les AAV abordés d'un cette section :

— décider de la bonne définition d'une intégrale généralisée
— identifier les propriétés dont peut jouir une intégrale à paramètres spécifiques dans les cas les plus usuels (Transformée de Fourier ou de Laplace)
— simplifier des expressions impliquant des limites de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres
— valider un raisonnement impliquant des questions de convergences de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres.

Question 1-1

a) Soit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est bien définie et continue $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Quelle équation différentielle satisfait F (vous pouvez utiliser une intégration par partie) ?

b) Soit

$$G(x) = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4t^2}}\, \mathrm{d}t$$

Montrer que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} G(x)$.

Solution 1-1

a)

1. On vérifie les hypothèses du théorème de continuité. On a : $\forall t \in [0,+\infty[, x \mapsto \sin(xt)e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions continues).
   $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \sin(xt)e^{t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,+\infty[, |\sin(xt)e^{t^2}| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (cf. TD2).
   Ainsi d'après le théorème de continuité, F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz :
   $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \sin(xt)e^{t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (question précédente)
   $\forall t \in [0,+\infty[, x \mapsto \sin(xt)e^{t^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ (par composition de fonctions C^1).
   $$\forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\sin(xt)e^{-t^2}) = t\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$$
   La fonction φ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (par exemple par comparaison asymptotique, où même en utilisant la primitive $t \mapsto -\frac{1}{2}e^{-t^2}$)
   La fonction F est donc C^1 et $F'(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. On pose $u(t) = \cos(xt)$ et $v'(t) = te^{-t^2}$. Alors $u' = -x\sin(xt)$ et $v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$. Alors u et v sont bien C^1 sur $[0,+\infty[$. On s'assure qu'on peut utiliser l'intégration par partie : $u(0)v(0) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.
   L'intégrale $\int u'v$ est alors $x\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = xF(t)$.
   On obtient donc l'équation différentielle :
   $$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xF(x)$$

b) Soit $g(x,t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+x^4t^2}}$ définie sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. Alors :
$\forall t \in [0,1], x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1]$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1], |g(x,t)| \leq t^2 = \varphi(t)$.
La fonction φ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable (intégrale de Riemann classique).
Ainsi d'après le théorème de continuité G est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier,
$$\underset{x\to 0}{G}(x) = G(0) = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

Question 1-2 Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformé de Fourier de f est alors définie par
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $g(t) = tf(t)$. On suppose que g est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$\hat{f}'(\omega) = -i\hat{g}(\omega)$$

c) Supposons que les fonctions $t^k f(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'alors $\hat{f}$ est C^∞.

Solution 1-2

a)

1. Posons $g(x,t) = e^{-ixt} f(t)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :
$\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (composition de fonctions continues).
$\forall t \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto e^{-ixt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (composition de fonctions continues)..
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \ \ |g(x,t)| = |f(t)|$ qui est intégrable (hypothèse sur la fonction f).
Le théorème de continuité implique la bonne définition et la continuité de $\hat{f}$

b) $\forall t \in \mathbb{R}, \omega \mapsto e^{-i\omega t} f(t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f(t)e^{-i\omega t}}{\partial \omega} = -itf(t)e^{-i\omega t}$
On a également $\forall \omega \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)e^{-i\omega t}$ et $t \mapsto -itf(t)e^{-i\omega t}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. $\forall (\omega,t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)e^{-i\omega t}| \leq f(t)$ et $|-itf(t)e^{-i\omega t}| \leq tf(t) = g(t)$, par hypothèses les fonctions à droite sont intégrables.
D'après le théorème de dérivation on a $\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall \omega \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -itf(t)e^{-iwt}\,\mathrm{d}t = -i\hat{g}(\omega)$$

Question 1-3 On considère :

$$F(x) = \int_0^{\pi} \sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$. Que vaut $F(0)$?

b) A l'aide d'un taux d'acroissement, en déduire :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\pi} \sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Solution 1-3

a) $\forall t \in [0,\pi], x \mapsto \sin(x\sin(t))$ est C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $\frac{\partial \sin(x\sin(t))}{\partial x} = \sin(t)\cos(x\sin(t))$
$\forall x \in \mathbb{R}$ les fonctions $t \mapsto \sin(x\sin(t))$ et $t \mapsto \sin(t)\cos(x\sin(t))$ sont continues par morceaux sur $[0,\pi]$.
$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi], |\sin(x\sin(t))| \leq 1$ et $\sin(t)\cos(x\sin(t)) \leq 1$ et la fonction constante 1 est continue et intégrable sur $[0,\pi]$.
D'après le théorème de dérivation F est alors C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

Il reste à calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\pi} \sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = F'(0) = \int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

Question 1-4 On considère l'intégrale à paramètre suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition de Γ en étudiant la nature de l'intégrale en fonction de x.

b) A l'aide d'une intégration par partie montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c) En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in N^*$.

Solution 1-4

a) L'intégrale est impropre en 0 (suivant la valeur de x) et en $+\infty$. On commence par une étude sur $]0,1]$.
On a $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$. Sur l'intervalle $]0,1]$ les fonctions $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ sont continues et positives.
Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1-x<1$ c'est-à-dire $x>0$.
Étude sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées $t^2e^{-t}t^{x-1} = e^{-t}t^{x+1} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$. L'intégrale de réference de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et par comparaison de fonctions continues et positives l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge.
Donc le domaine de définition de Γ est $]0,+\infty[$.

b) On utilise l'intégration par partie avec : $u(t) = e^{-t}$ et $v'(t) = t^{x-1}$. Alors $u'(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{t^x}{x}$. La limite de $u(t)v(t)$ en $+\infty$ est 0, et $u(0)v(0) = 0$. La convergence de l'intégrale $\int uv'$ étant montrée on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t^x}{x}\,\mathrm{d}t$$

donc $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$

c) Par calcul on obtient $\Gamma(1) = 1$. Un raisonnement de récurrence montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Question 1-5 On définit l'intégrale de Gauss par :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $h = g + f^2$ définie sur $\mathbb{R}$. A l'aide d'un changement de variable calculer $h'(x)$.

c) Que vaut $h(0)$?

d) En utilisant la continuité de g montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

e) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)$

f) En déduire la valeur de I.

Solution 1-5

a) Soit $g_1(x,t) = \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto g_1(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2}$ est finie.

Pour tout $t \in [0,1]$ on a $\dfrac{\partial g_1(x,t)}{\partial x} = -2x(1+t^2)\dfrac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2}e^{-(tx)^2}$. En analysant les fonctions $x \mapsto xe^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-(tx)^2}$ on montre facilement que toutes les deux sont majorées par 1, donc $|\dfrac{\partial g_1(x,t)}{\partial x}| \leq 2$ qui est intégrable sur l'intervalle $[0,1]$.

D'après le théorème d'intégration g est C^1 et

$$g'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}x$$

b) Par le théorème du calcul intégrale la fonction f est dérivable de dérivée e^{-x^2}. Alors

$$h'(x) = g'(x) + 2f(x)f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(tx)^2}\,\mathrm{d}x + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} = 0$$

en utilisant le changement de variable $u = tx$. Donc h est une fonction constante, et $h(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, ce qui implique que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{\pi}{4}$.

c) La théorème de continuité implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \int_0^1 \lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x,t)\,\mathrm{d}t = 0$.

d) D'après les questions précédentes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.

e) L'intégrale I est positive, donc $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.