Séries de fonctions

K. ATTAR

Résumé

Ce TD aborde des aspects techniques relatifs aux notions de convergence de séries de fonctions. C'est un TD qui vise à vous faire travailler les modes de convergence simple, uniforme et normale.

Table des matières

1 Convergence des séries de fonctions 1
2 Propriétés conservées 2
3 Divers 2

1 Convergence des séries de fonctions

Une série de fonctions est un type particulier de suite de fonctions : par définition c'est la suite des sommes partielles. Les questions de convergence simple ou uniforme d'une série de fonctions se décrivent donc par le même biais. Cela étant dit, la description d'une série de fonctions par son terme général (l'incrément) fait apparaître une nouvelle notion de convergence : ***la convergence normale***. Cette dernière est ***plus*** forte que la convergence uniforme dans le sens où elle l'implique, elle est également plus simple à calculer en règle générale. Néanmoins la réciproque est fausse, une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement.

Également rencontrée, la notion de convergence absolue fait écho à son pendant pour les séries numériques. Elle est indépendante de la convergence uniforme (aucune des deux n'implique l'autre) et donc d'intérêt assez limité.

Question 1-1 Que dire de la convergence des séries de fonctions suivantes ? On pourra discuter du résultat selon les intervalles de départ choisis.

1. $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$
2. $\sum\limits_{n\geq 0} n^{\alpha}x^n(1-x)$ en fonction du paramètre α (sur $[0,1]$)

3. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^n}{n}$
4. $\sum_{n\geq 0}\left(nx^2\mathrm{e}^{-nx}\right)$

Question 1-2 On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in[0,1], f_n(x)=\frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Est-ce que la série $\sum f_n$ converge normalement ?
2. Justifier la convergence uniforme de celle-ci.

2 Propriétés conservées

Question 2-3 On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n \qquad \text{avec} \qquad f_n(x)=\frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Question 2-4 Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Question 2-5 Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x)=e^{-n}\sin\left(n^2x\right)$$

est dérivable.

3 Divers

Question 3-6 On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec

$$f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^4}$

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

5. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$