ÉCOLE D'INGENIEURS EN INFORMATIQUE

Intégrales généralisées

1 Suites d'intégrales

Les AAV abordés d'un cette section :

— décider de la bonne définition d'une intégrale généralisée
— décider de la convergence d'une suite d'intégrales et d'en exhibe (si possible) la limite
— simplifier des expressions impliquant des limites de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres
— valider un raisonnement impliquant des questions de convergences de suites d'intégrales ou des intégrales à paramètres.
— reconnaître les hypothèses et arguments utilisés dans les preuves de convergences en probabilités

Question 1-1 Calculer les limites suivantes :

a)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

b)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\ln(1+\frac{x}{n})}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Question 1-2 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la suite de fonction définie par $f_n(x) = (n+1)x^n$ sur $[0,1[$ et $f_(1) = 0$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout n.

b) Montrer que f_n converge simplement vers $f(x) = 0$.

c) A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\,?$$

Expliquer.

Question 1-3 Soit

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{t}{n})}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

Justifier l'existance de I_n et déterminer la limite.