École Pour l'Informatique et les Techniques Avancées

Approximation de fonctions

Ch3: Séries de Fourier

RMD 4

kamel.attar@epita.fr

KAMEL ATTAR

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.
  - La **convergence uniforme**, plus stricte, où la différence entre la série et la fonction devient petite de façon uniforme sur l'intervalle.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.
  - La **convergence uniforme**, plus stricte, où la différence entre la série et la fonction devient petite de façon uniforme sur l'intervalle.
  - La **convergence normale**, qui intervient dans des situations où la série de fonctions a une convergence particulièrement rapide ou stable.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.
  - La **convergence uniforme**, plus stricte, où la différence entre la série et la fonction devient petite de façon uniforme sur l'intervalle.
  - La **convergence normale**, qui intervient dans des situations où la série de fonctions a une convergence particulièrement rapide ou stable.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier en profondeur les propriétés de convergence des séries de Fourier et leur application à l'approximation de fonctions périodiques.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.
  - La **convergence uniforme**, plus stricte, où la différence entre la série et la fonction devient petite de façon uniforme sur l'intervalle.
  - La **convergence normale**, qui intervient dans des situations où la série de fonctions a une convergence particulièrement rapide ou stable.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier en profondeur les propriétés de convergence des séries de Fourier et leur application à l'approximation de fonctions périodiques.

À la fin de ce cours, les étudiants seront capables de :

- **Comprendre** comment les séries de Fourier permettent de décomposer et d'approcher une fonction périodique.

Dans ce cours, nous allons aborder les séries de Fourier, un outil fondamental pour l'approximation des fonctions périodiques.

- Nous commencerons par explorer comment les séries de Fourier permettent d'approximer des fonctions périodiques en les décomposant en sommes de fonctions sinus et cosinus.
- Ensuite, nous introduirons les concepts de base nécessaires à cette décomposition, en abordant les séries trigonométriques et leurs coefficients, ainsi que les critères qui garantissent une bonne approximation.
- Nous verrons comment les séries de Fourier sont capables de représenter différentes fonctions, même celles qui présentent des discontinuités.
- Nous explorerons trois types de convergence pour les séries de Fourier :
  - La **convergence simple**, où la somme des termes tend vers la fonction point par point.
  - La **convergence uniforme**, plus stricte, où la différence entre la série et la fonction devient petite de façon uniforme sur l'intervalle.
  - La **convergence normale**, qui intervient dans des situations où la série de fonctions a une convergence particulièrement rapide ou stable.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier en profondeur les propriétés de convergence des séries de Fourier et leur application à l'approximation de fonctions périodiques.

À la fin de ce cours, les étudiants seront capables de :

- **Comprendre** comment les séries de Fourier permettent de décomposer et d'approcher une fonction périodique.
- **Appliquer** les séries de Fourier pour résoudre des problèmes d'approximation et d'analyse de signaux dans des contextes concrets (physique, ingénierie).

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

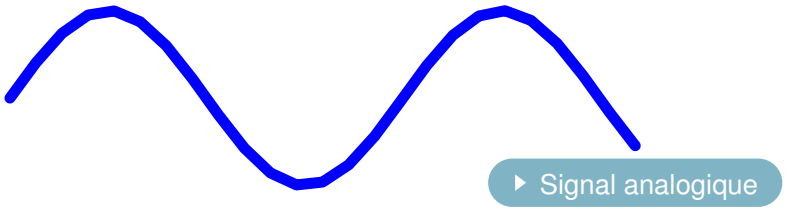
1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.



Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.

On consacre ce chapitre à cette question.

Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.

On consacre ce chapitre à cette question.

Dans ce contexte, un *signal analogique* est généralement représenté par une fonction périodique. Deux questions se posent :

Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.

On consacre ce chapitre à cette question.

Dans ce contexte, un *signal analogique* est généralement représenté par une fonction périodique. Deux questions se posent :

- COMMENT APPROCHER UN SIGNAL ?

Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.

On consacre ce chapitre à cette question.

Dans ce contexte, un *signal analogique* est généralement représenté par une fonction périodique. Deux questions se posent :

- COMMENT APPROCHER UN SIGNAL ?
- COMMENT DISCRÉTISER ET STOCKER UN SIGNAL ?

Dans le cadre de l'étude de l'approximation des fonctions, vous serez amenés cette année à vous poser la question de l'approximation des signaux analogiques.

On consacre ce chapitre à cette question.

Dans ce contexte, un *signal analogique* est généralement représenté par une fonction périodique. Deux questions se posent :

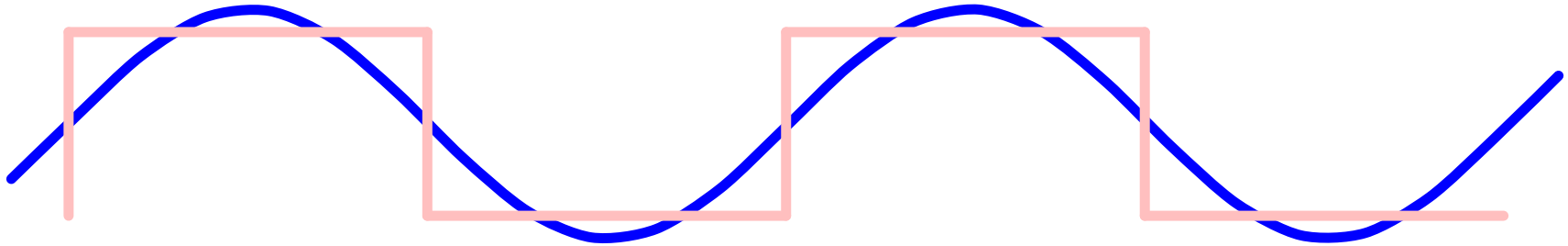
- COMMENT APPROCHER UN SIGNAL ?
- COMMENT DISCRÉTISER ET STOCKER UN SIGNAL ?

La méthode présentée ici, assez classique, permet d'apporter des réponses à ces deux questions.

☞ Pouvons-nous utiliser des ondes sinusoïdales pour créer une onde carrée ?

Notre cible est cette onde carrée :

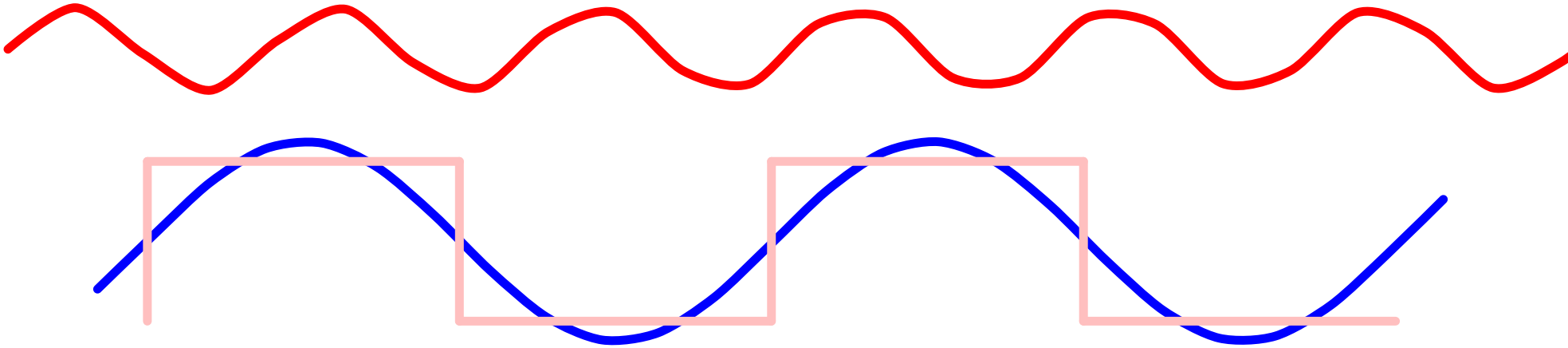
On commence avec $\sin(x)$:



$\sin(x)$

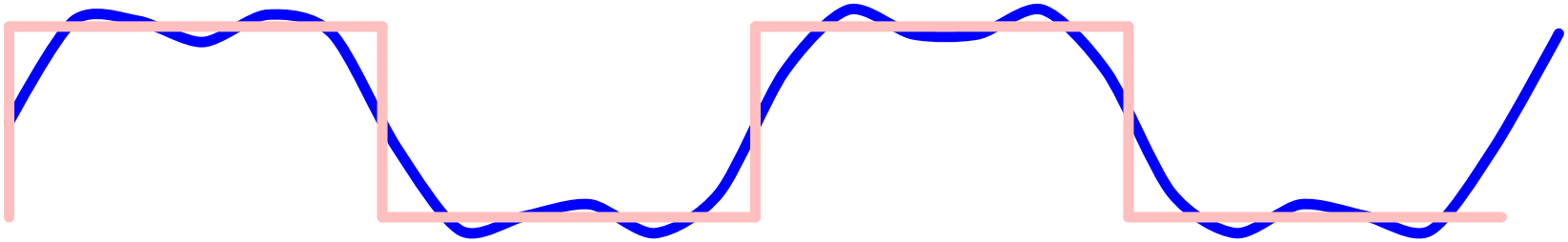
Puis on prend $\frac{1}{3}\sin(3x)$, et on l'ajout pour faire

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$



$\sin(x)$

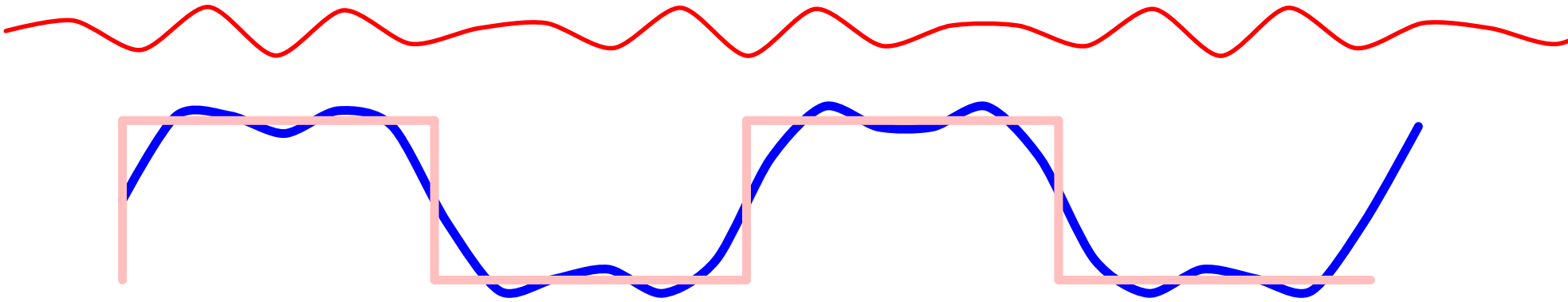
Pouvez-vous voir à quel point cela commence à ressembler un peu à une onde carrée ?



$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$

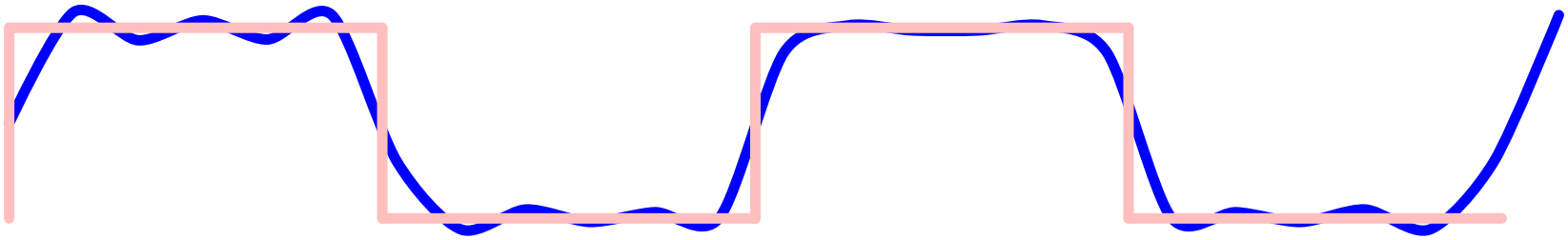
Alors on prend $\frac{1}{5}\sin(5x)$, et on l'ajoute aussi, pour faire

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)$$



$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$

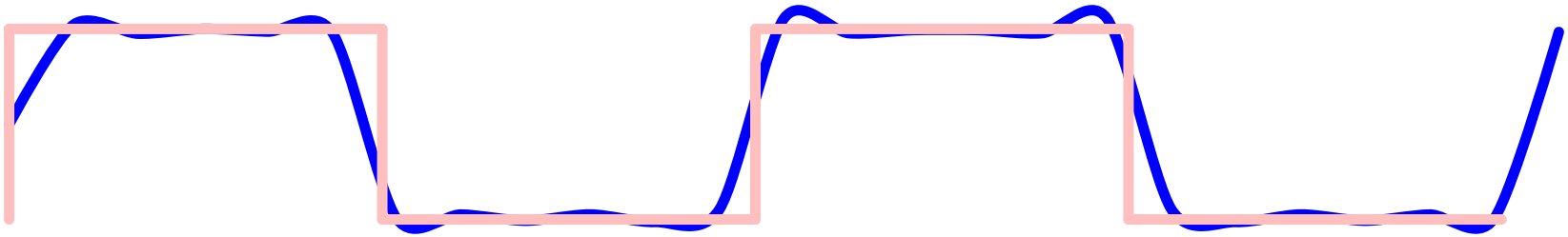
Aller mieux! Ajoutons beaucoup plus d'ondes sinusoïdales.



$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)$

En utilisant des ondes sinusoïdales à 17, nous obtenons

$$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots + \frac{1}{17}\sin(17x)$$

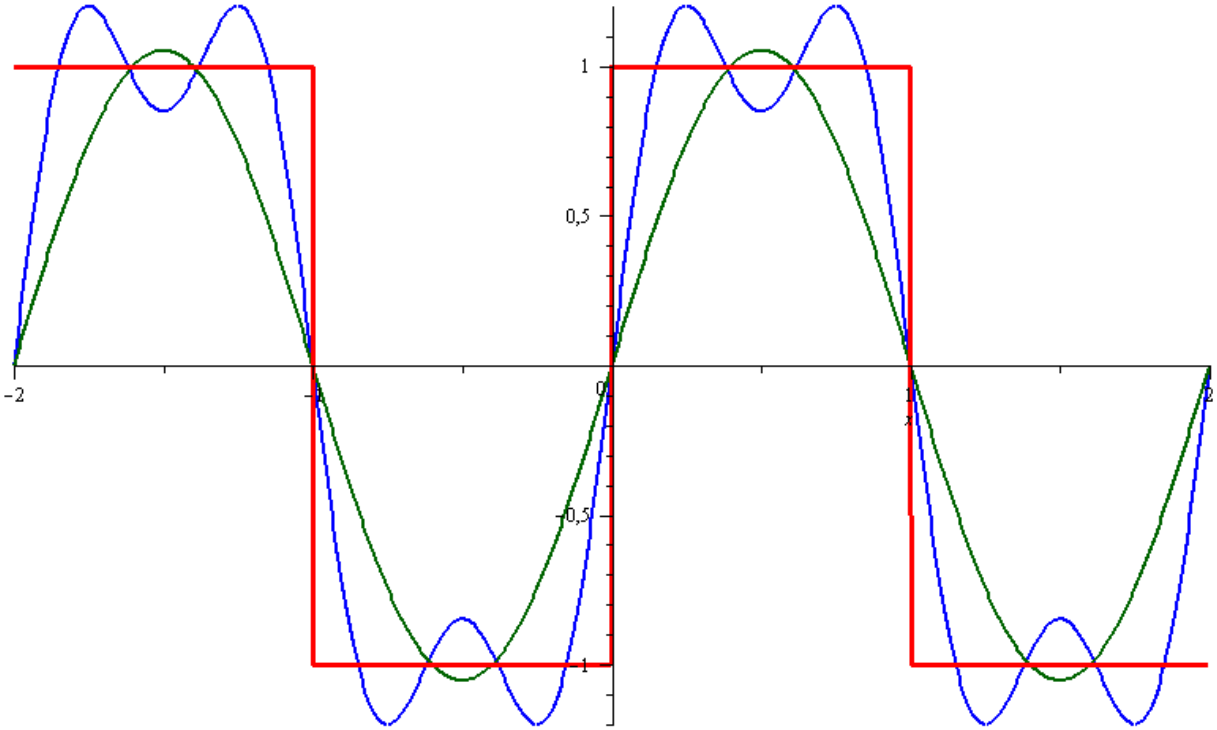


$\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots + \frac{1}{17}\sin(17x)$

Et si on peut ajouter des ondes sinusoïdales infinies dans ce motif, on aura une onde carrée !

On peut donc dire que : une onde carrée $= \sin(x) + \sin(3x)/3 + \sin(5x)/5 + \cdots$ (*infiniment*)

C'est l'idée d'une série de Fourier.



En ajoutant des ondes sinusoïdales (et/ou cosinus) infinies, on peut créer d'autres fonctions, même si elles sont un peu bizarres.

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Definition

Un *polynôme trigonométrique* est une combinaisons linéaires de fonctions $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \quad \mapsto \quad \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)$$

où n est un entier naturel, et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des coefficients complexes.

Definition

Un *polynôme trigonométrique* est une combinaisons linéaires de fonctions $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \quad \mapsto \quad \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)$$

où n est un entier naturel, et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des coefficients réels.

Une *série trigonométrique* est une série infinie de fonctions de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \quad \mapsto \quad \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \ldots$ et $\mu_0, \ldots, \mu_n, \ldots$ sont des coefficients réels.

Definition

Un *polynôme trigonométrique* est une combinaisons linéaires de fonctions $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$, de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \quad \mapsto \quad \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)$$

où n est un entier naturel, et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des coefficients réels.

Une *série trigonométrique* est une série infinie de fonctions de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \quad \mapsto \quad \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx)$$

où $\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \ldots$ et $\mu_0, \ldots, \mu_n, \ldots$ sont des coefficients réels.

Ces séries sont utilisés pour approximer des fonctions périodiques, particulièrement dans l'analyse des signaux.

✎ Wooclap 1.

Quelle est l'expression correcte de $e^{i\theta}$ en termes de fonctions trigonométriques ?

1. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
2. $e^{i\theta} = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$
3. $e^{i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
4. $e^{i\theta} = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$

▸ Solution

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

✎ Wooclap 2.

Quelle est l'expression correcte de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ à l'aide de l'exponentielle complexe ?

❶ $\cos(kx)$

❷ $\sin(kx)$

- $\dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$
- $\dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$
- $\dfrac{e^{ikx}}{2} + \dfrac{e^{-ikx}}{2} i$
- $e^{ikx} + e^{-ikx}$

▸ Solution

Après substitution $\cos(kx) = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et $\sin(kx) = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

Après substitution $\cos(kx) = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et $\sin(kx) = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx) &= \lambda_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + \mu_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\
&= \lambda_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) - i\mu_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right) \\
&= e^{ikx} \left(\frac{\lambda_k - i\mu_k}{2} \right) + e^{-ikx} \left(\frac{\lambda_k + i\mu_k}{2} \right) \\
&= \alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx}
\end{aligned}$$

Après substitution $\cos(kx) = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et $\sin(kx) = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx) &= \lambda_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) + \mu_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\
&= \lambda_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right) - i\mu_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right) \\
&= e^{ikx} \left(\frac{\lambda_k - i\mu_k}{2} \right) + e^{-ikx} \left(\frac{\lambda_k + i\mu_k}{2} \right) \\
&= \alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx}
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx) + \mu_k \sin(kx) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{+n} \left(\alpha_k e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx} \right) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx} \quad (c_0 = \lambda_0)$

Definition ((Variante))

Une *série trigonométrique* est une série de fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \quad \mapsto \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

où les c_i sont des coefficients complexes.

$\mathbb{C}$ vs $\mathbb{R}$

Vous trouverez des relations entre les coefficients réels et complexes d'une même série trigonométrique dans les vidéos de cours.

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

- On considère la série trigonométrique S donnée par $\lambda_0 + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$.

- On considère la série trigonométrique S donnée par $\lambda_0 + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$.
- La suite d'inégalités (entre séries, donc sommes partielles)

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad \left|\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)\right| \leq |\lambda_n \cos(nx)| + |\mu_n \sin(nx)| \leq |\lambda_n| + |\mu_n|\,.$$

permet de justifier le fait suivant

Theorem : Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique

Si les séries $\underbrace{\sum_{n\geq 0} |\lambda_n|}_{|\lambda_0|+\sum_{n\geq 1}|\lambda_n|}$ et $\sum_{n\geq 1} |\mu_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique

$$\lambda_0 + \sum_{n\geq 1} [\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)]$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue de x sur $\mathbb{R}$.

Theorem : Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique

Si les séries $\underbrace{\sum_{n\geq 0} |\lambda_n|}_{|\lambda_0|+\sum_{n\geq 1}|\lambda_n|}$ et $\sum_{n\geq 1} |\mu_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique

$$\lambda_0 + \sum_{n\geq 1} [\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)]$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme est une fonction continue de x sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit une série trigomométrique converge normalement si la série numérique de ses coefficients converge absolument.

✎ **Wooclap 3.** Selon vous, laquelle des séries trigonométriques suivantes est une série convergente ?

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cos(nx)$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}e^{inx}$

▸ Solution

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Theorem : Application de la règle d'Abel

Soient (λ_n) et (μ_n) deux suites de nombres positifs (ou de signe constant) qui tendent vers zéro et décroissent. Alors, la série trigonométrique

$$\lambda_0 + \sum_n (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

- De plus, cette convergence est uniforme sur chaque intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$.
- Par conséquent, la somme de cette série est une fonction continue de x sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Example

Considérons les suites définies par :

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mu_n = \frac{1}{n}$$

Ces suites sont positives, décroissantes et tendent vers zéro. Le théorème d'Abel nous permet d'affirmer que la série trigonométrique

$$\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} \sin(nx) \right)$$

- converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
- convergence uniformement sur chaque intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$.
- La somme de cette série, $S(x)$, est donc une fonction continue de x sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

✎ **Wooclap 4.** Soit $\lambda_0 + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$ une série trigonométrique qui converge uniformément vers une fonction f. (i.e. $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n\geq 1} \lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx)$)

1. Que dire des propriétés de f dans ce cas ?
2. Calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx$ et $\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx$
3. Que pouvez-vous en déduire sur les coefficients de la série trigonométrique de départ?

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Au vu des relations exhibées précédemment entre les coefficients d'une série trigonométrique et sa somme uniforme éventuelle, il est tout à fait naturel de regarder les choses dans le sens inverse :

Au vu des relations exhibées précédemment entre les coefficients d'une série trigonométrique et sa somme uniforme éventuelle, il est tout à fait naturel de regarder les choses dans le sens inverse :

Étant donné une fonction f périodique on définit une série trignométrique dont les coefficients sont donnés par ce qui précède,c'est la série de Fourier de f.

Au vu des relations exhibées précédemment entre les coefficients d'une série trigonométrique et sa somme uniforme éventuelle, il est tout à fait naturel de regarder les choses dans le sens inverse :

Étant donné une fonction f périodique on définit une série trignométrique dont les coefficients sont donnés par ce qui précède,c'est la série de Fourier de f.

☞ Quelle relation y a-t-il entre f et sa série de Fourier?

Definition

Soit $f : \mathbb{R} \to$ une fonction 2π-périodique continue par morceaux. On appelle *série de Fourier de f* la série trigonométrique $F(f)$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par la série numérique

$$\left[F(f)\right](t) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \qquad \forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Les coefficients

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

sont appelés *coefficients de Fourier* de f.

Les coefficients

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

sont appelés *coefficients de Fourier* de f.

- Les coefficients de Fourier sont définis par les intégrales de fonctions $2\pi-$périodiques sur le segment $\left[0, 2\pi\right]$.

Les coefficients

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

sont appelés *coefficients de Fourier* de f.

- Les coefficients de Fourier sont définis par les intégrales de fonctions $2\pi-$périodiques sur le segment $\left[0, 2\pi\right]$.
- Intégrer ces fonctions le long de tout autre segment $\left[x, x+2\pi\right]$ pour $x \in \mathbb{R}$, ne modifie pas les valeurs de a_n et b_n.

Les coefficients

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

sont appelés *coefficients de Fourier* de f.

- Les coefficients de Fourier sont définis par les intégrales de fonctions $2\pi-$périodiques sur le segment $\left[0, 2\pi\right]$.
- Intégrer ces fonctions le long de tout autre segment $\left[x, x+2\pi\right]$ pour $x \in \mathbb{R}$, ne modifie pas les valeurs de a_n et b_n.
- La définition du coefficient a_0 est une question de convention.

Calculer les coefficients de Fourier des fonctions 2π-periodiques données par

1. la fonction impaire valant 1 sur $]0, \pi[$.
2. la fonction paire valant x sur $[0, \pi]$.

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Definition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que $f : \left[a, b\right] \to$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ dans $\left[a, b\right]$ tels que

- f est $\mathcal{C}^1$ *(f soit dérivable à dérivée continue)* sur chaque intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$

Definition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que $f : \left[a, b\right] \to$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ dans $\left[a, b\right]$ tels que

- f est $\mathcal{C}^1$ *(f soit dérivable à dérivée continue)* sur chaque intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$
- f et f' admettent des limites à gauche et à droite en chaque point x_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. *(f' se prolonge par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$)*

Definition

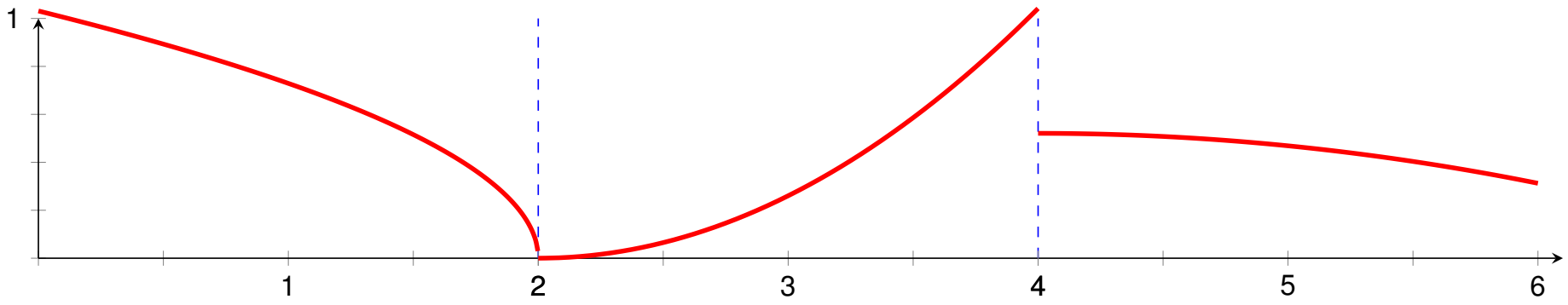
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que $f : \left[a, b\right] \to$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux, s'il existe des points $x_1, \ldots, x_n$ dans $\left[a, b\right]$ tels que

- f est $\mathcal{C}^1$ *(f soit dérivable à dérivée continue)* sur chaque intervalle $\left]x_i, x_{i+1}\right[$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$
- f et f' admettent des limites à gauche et à droite en chaque point x_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. *(f' se prolonge par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$)*

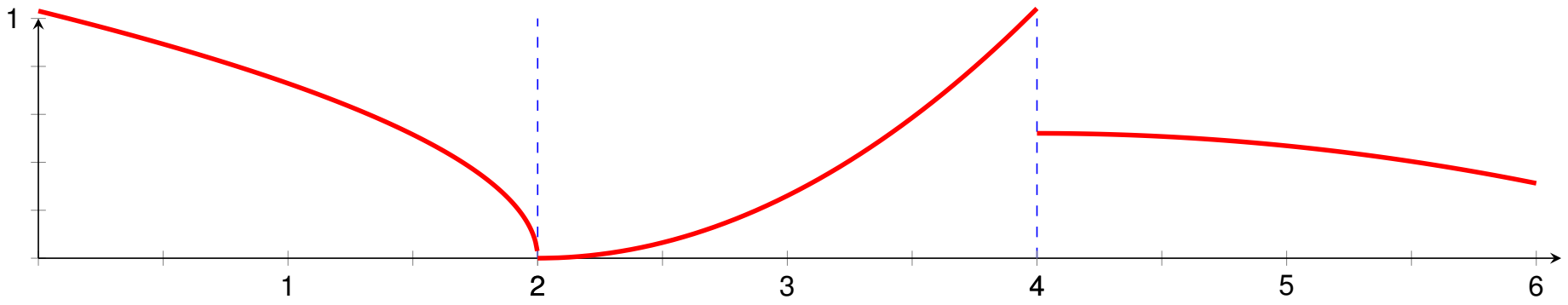
De même que dans le cas des fonctions continues par morceaux :

une fonction $f : \mathbb{R} \to$ est dite $\mathcal{C}^1$ par morceaux si la restriction de f à chaque segment de $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Voici, un exemple de fonction continue par morceaux, qui n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux.



Voici, un exemple de fonction continue par morceaux, qui n'est pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux.



Proposition

Soit $T > 0$. Une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, et seulement si, sa restiction à un segment de longueur T l'est.

Theorem : de Lejeune-Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to$ une fonction 2π-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier en x est une série numérique convergente, de plus, si f est continue en x,

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \Big)$$

et sinon, *(si f n'est pas continue en x)*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \Big)$$

où x^+ et x^- sont respectivement les limites de f à droite et à gauche en x.

Theorem : de Lejeune-Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to$ une fonction 2π-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier en x est une série numérique convergente,

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) \Big) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

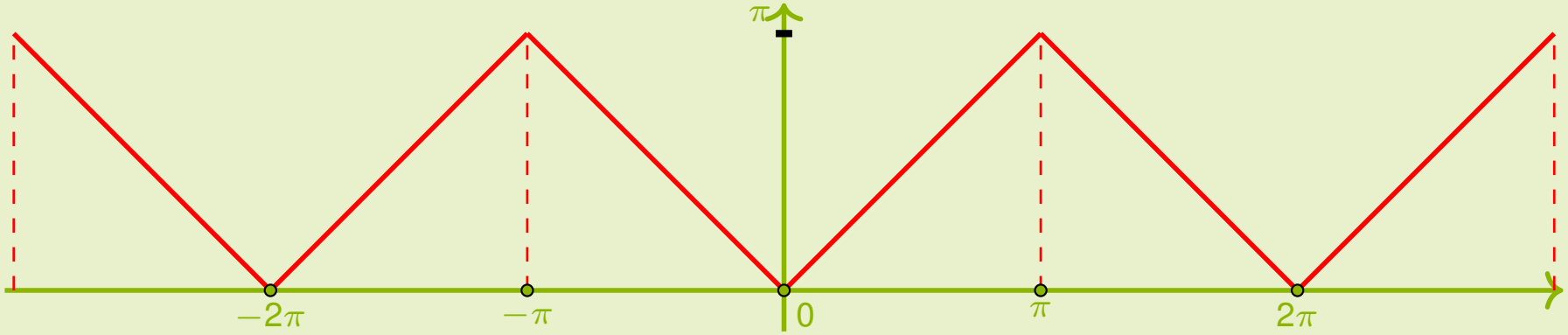
où x^+ et x^- sont respectivement les limites de f à droite et à gauche en x.

Example

On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x\,, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ par morceaux



Elle admet donc un développement en série de Fourier.

Example

On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} -x\,, & -\pi \leq x \leq 0 \\ x\,, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

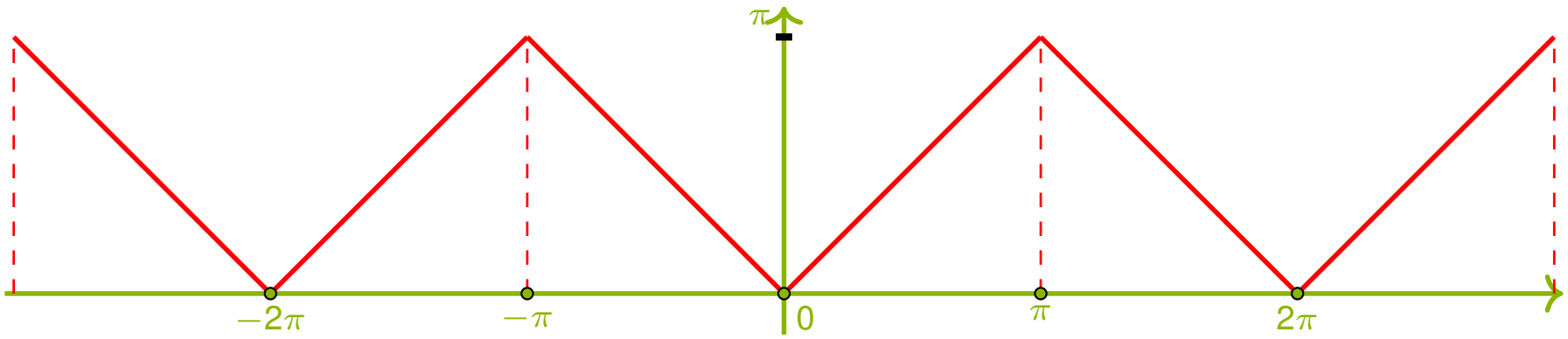
Ses coefficients de Fourier (voir le Wooclap précédent) sont:

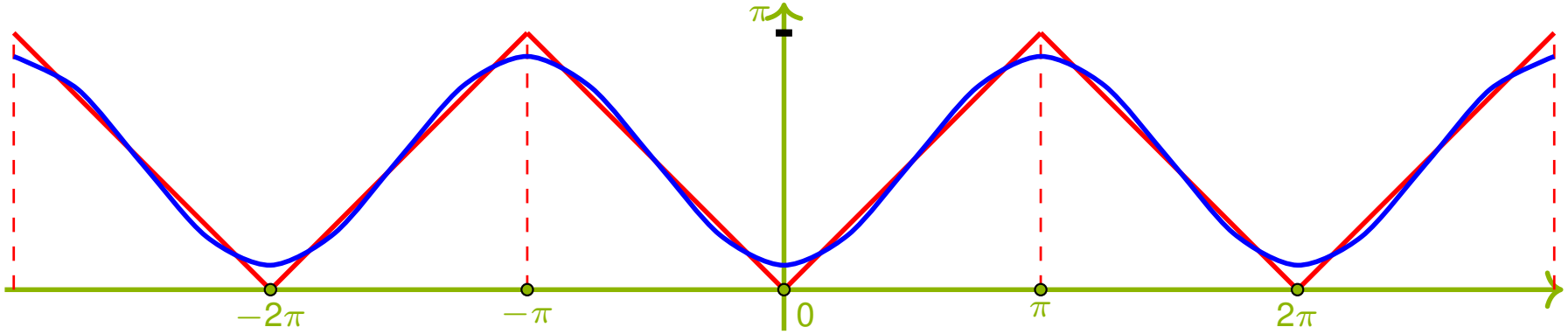
$$a_0 = \frac{\pi}{2}\,, \quad a_n = \begin{cases} 0\,, & n \text{ pair} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}\,, & n \text{ impair}\,. \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = 0$$

On a donc le développement en série de Fourier :

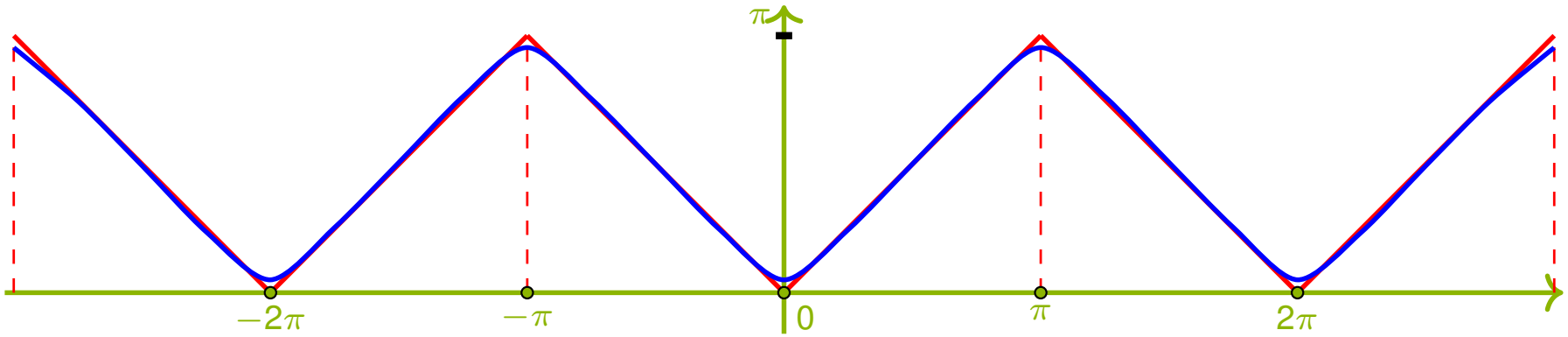
$$\Big[F(f)\Big](x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \cdots\right]$$

La série ci-dessus converge partout et sa somme est égale à la fonction considérée.

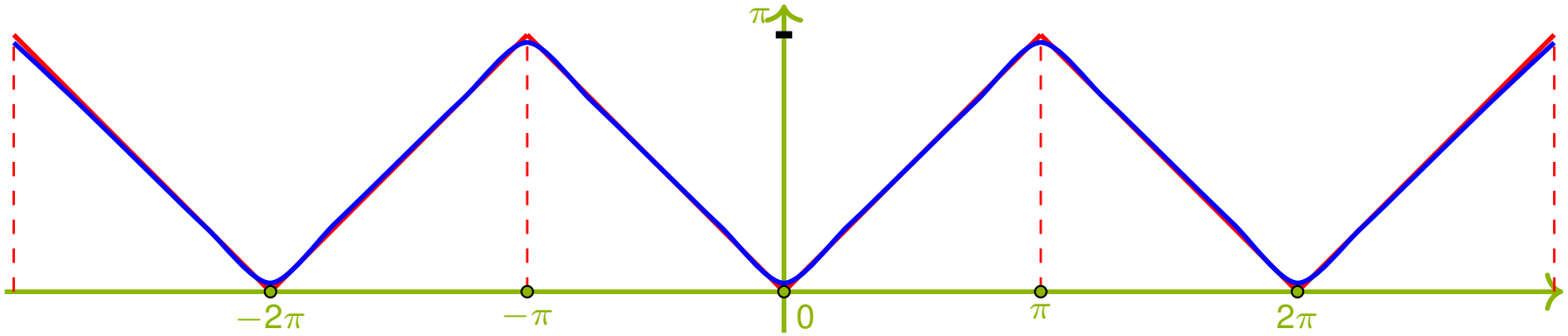

π
−2π
−π
0
π
2π



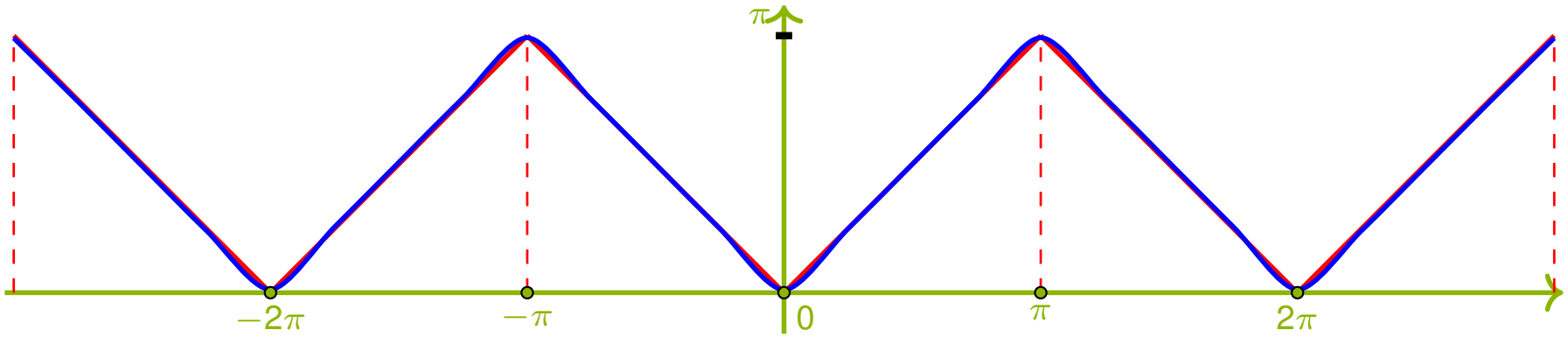
$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\,[\cos(x)]$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x)\right]$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x)\right]$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \cdots + \frac{1}{17^2}\cos(17x)\right]$$

✎ **Wooclap 5.** On reprend la fonction f de wooclap précédent *(2π-periodiques, impaire valant* 1 *sur* $[0, \pi]$*).*

1. Montrer que f est bien $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
2. Montrer que

$$\left[F(f)\right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin\left((2n+1)x\right).$$

3. Prenons $x = \frac{\pi}{2}$, déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

1 Problématique

2 Séries trigonométriques
Définition
Écriture exponentielle complexe d'une série trigonométrique
Condition suffisante de convergence d'une série trigonométrique
Application de la règle d'Abel.

3 Une série trigonométrique attachée à une fonction
Calcul des coefficients d'une série trigonométrique
Point de départ de l'analyse de Fourier

4 Convergence simple des Séries de Fourier
Obtenir de meilleures convergences

Il y a deux manières d'obtenir une meilleure convergence des séries de Fourier

- avoir des fonctions plus régulières que les fonctions périodiques et C^1 par morceaux

Theorem : Quand on rajoute de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to$ une fonction 2π-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f converge uniformément vers f

Il y a deux manières d'obtenir une meilleure convergence des séries de Fourier

- avoir des fonctions plus régulières que les fonctions périodiques et C^1 par morceaux
- modifier les series de Fourier de manière à limiter les comportements pathologiques aux points de discontinuités.

Theorem : Quand on rajoute de la continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to$ une fonction 2π-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. Alors, pour chaque $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f converge uniformément vers f

Avant de partir

Avant de partir

1. Retravaillez les vidéos et les contenus de remédiation.

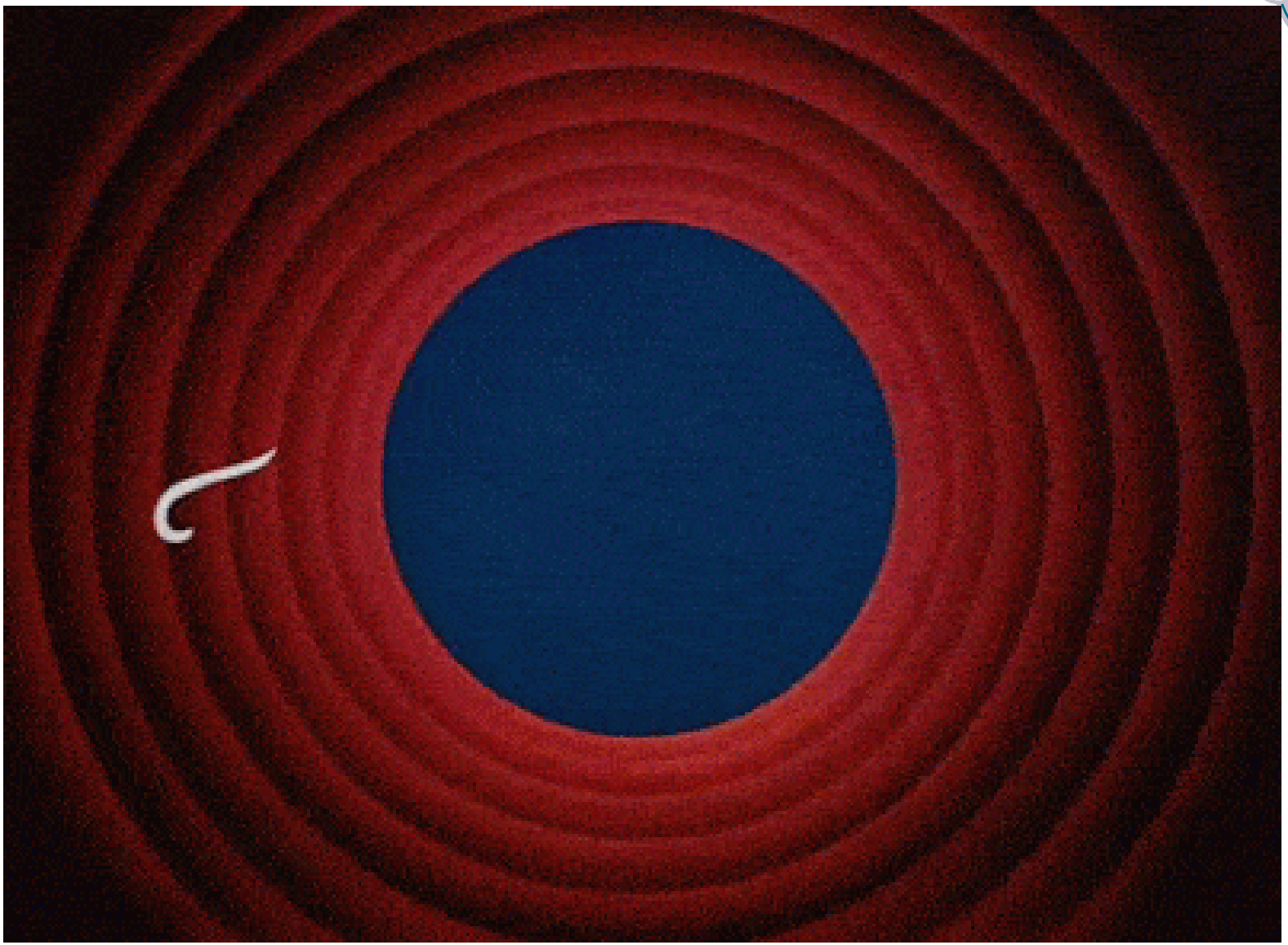
Avant de partir

1. Retravaillez les vidéos et les contenus de remédiation.
2. Tentez les exercices du TD.

Avant de partir

1. Retravaillez les vidéos et les contenus de remédiation.
2. Tentez les exercices du TD.

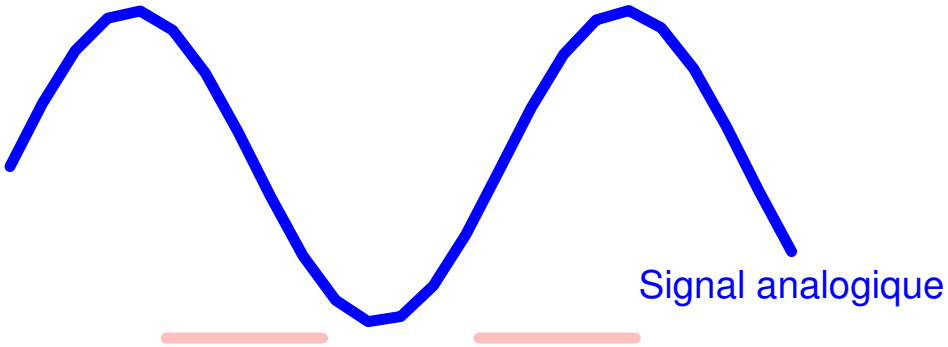
Rappel: Vous avez une évaluation sommative avant votre piscine.



I y a deux type de signaux : Analogique et Numérique.
Les signaux sont utilisés pour transporter des informations d'un appareil à un autre.

- Le signal analogique est une onde continue au cours d'une période donnée.
- Le signal numérique est discret par nature.

La différence clé entre les signaux analogiques et numériques est que le signal analogique est représenté par les ondes sinusoïdales alors que le signal numérique est représenté par des ondes carrées.



Go Back

On rappelle, qu'étant donné un nombre réel $T > 0$, une fonction $f : \mathbb{R} \to$ est dite T-périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

On rappelle, qu'étant donné un nombre réel $T > 0$, une fonction $f : \mathbb{R} \to$ est dite T-périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

Les fonctions sin et cos sont des exemples de fonctions 2π-périodiques. La fonction tan est π-périodique.

On rappelle, qu'étant donné un nombre réel $T > 0$, une fonction $f : \mathbb{R} \to$ est dite T-périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

Les fonctions sin et cos sont des exemples de fonctions 2π-périodiques. La fonction tan est π-périodique.

Theorem :

Soit $T > 0$. Une fonction T-périodique $f : \mathbb{R} \to$ est continue par morceaux si, et seulement si, sa restriction à un segment de longueur T est continue hormis en un nombre fini de points.

Go Back

Dans la pratique, les définitions et résultats de l'analyse de Fourier s'énoncent dans le cas 2π-périodique. *On s'est d'ailleurs limités au cas des séries trigonométriques 2π-périodiques*. Voici comment se ramener au cas 2π-périodique quand on est face à une fonction $f : \mathbb{R} \to$ qui est T-périodique pour $T > 0$:

Dans la pratique, les définitions et résultats de l'analyse de Fourier s'énoncent dans le cas 2π-périodique. *On s'est d'ailleurs limités au cas des séries trigonométriques 2π-périodiques*. Voici comment se ramener au cas 2π-périodique quand on est face à une fonction $f : \mathbb{R} \to$ qui est T-périodique pour $T > 0$:

on définit $\bar{f}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

$\bar{f}$ est 2π-périodique.

Dans la pratique, les définitions et résultats de l'analyse de Fourier s'énoncent dans le cas 2π-périodique. *On s'est d'ailleurs limités au cas des séries trigonométriques 2π-périodiques*. Voici comment se ramener au cas 2π-périodique quand on est face à une fonction $f : \mathbb{R} \to$ qui est T-périodique pour $T > 0$:

on définit $\bar{f}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

$\bar{f}$ est 2π-périodique.

on applique les définitions et énoncés d'intérêt, dans le cas 2π-périodique, à $\bar{f}$.

Dans la pratique, les définitions et résultats de l'analyse de Fourier s'énoncent dans le cas 2π-périodique. *On s'est d'ailleurs limités au cas des séries trigonométriques 2π-périodiques*. Voici comment se ramener au cas 2π-périodique quand on est face à une fonction $f : \mathbb{R} \to$ qui est T-périodique pour $T > 0$:

on définit $\bar{f}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = f\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

$\bar{f}$ est 2π-périodique.

on applique les définitions et énoncés d'intérêt, dans le cas 2π-périodique, à $\bar{f}$.

on retrouve f à p
$\bar{f}$ via la relation

$$f(x) = \bar{f}\left(\frac{T}{2\pi}\right.$$

Solution 1.

1. $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
2. $e^{i\theta} = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$
3. $e^{i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
4. $e^{i\theta} = \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$

Go Back

Solution 2.

- $\cos(kx) = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$
- $\sin(kx) = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$

Go Back

Solution 3. Selon vous, laquelle des séries trigonométriques suivantes est une série convergente ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\cos(nx)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}e^{inx}$

Go Back

Solution 4.

1. • Périodicité. Si la série $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge en un point x de $\mathbb{R}$, elle converge aussi au point $x + 2k\pi$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et sa somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

vérifie $S(x + 2k\pi) = S(x)$.

- Continuité. La somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle sur lequel cette série converge uniformément.
- Dérivabilité. Si la série obtenue par dérivation terme à terme $\sum_n (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$ est uniformément convergente sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, sa somme est la dérivée de la fonction

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

sur l'intervalle I (en supposant que S soit définie sur I). Go Back

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Soit $m > 0$, si $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$ alors

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Soit $m > 0$, si $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$ alors

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Soit $m > 0$, si $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$ alors

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Big(\lambda_n \cos(nx)\cos(mx) + \mu_n \sin(nx)\cos(mx)\Big)dx$$

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Soit $m > 0$, si $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$ alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx &= \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Big(\lambda_n \cos(nx)\cos(mx) + \mu_n \sin(nx)\cos(mx)\Big)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_n}{2}\Big(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\Big) \\
&\qquad + \frac{\mu_n}{2}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)dx
\end{aligned}$$

❷ Rappelons la formule

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \quad \text{et} \quad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Soit $m > 0$, si $f(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n \cos(nx) + \mu_n \sin(nx))$ alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx &= \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \Big(\lambda_n \cos(nx)\cos(mx) + \mu_n \sin(nx)\cos(mx)\Big)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_n}{2}\Big(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\Big) \\
&\qquad + \frac{\mu_n}{2}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)dx \\
&= \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\lambda_m \frac{1+\cos(2mx)}{2} + \mu_m \frac{\sin(2mx)}{2}\right)dx}_{n=m} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \cdots dx}_{n\neq m}
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx = \frac{1}{m}\,[\sin(mx)]_0^{2\pi} = 0$

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx = \frac{1}{m}\,[\sin(mx)]_0^{2\pi} = 0$
- Si $n \neq m$ on a pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\,[\sin(kx)]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = -\frac{1}{k}\,[\cos(kx)]_0^{2\pi} = 0$$

Donc

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \cdots dx}_{n \neq m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_n}{2}\Big(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\Big) + \frac{\mu_n}{2}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)dx = 0$$

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos(mx)dx = \frac{1}{m}\,[\sin(mx)]_0^{2\pi} = 0$
- Si $n \neq m$ on a pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\,[\sin(kx)]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = -\frac{1}{k}\,[\cos(kx)]_0^{2\pi} = 0$$

Donc

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \cdots dx}_{n\neq m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_n}{2}\Big(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\Big) + \frac{\mu_n}{2}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)dx = 0$$

- Si $n = m$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\lambda_n}{2}\Big(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\Big) + \frac{\mu_n}{2}\Big(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x\Big)dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\lambda_m \frac{1+\cos(2mx)}{2} + \mu_m \frac{\sin(2mx)}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\lambda_m}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2mx)\right]_0^{2\pi} - \frac{\mu_m}{4}\,[\cos(2mx)]_0^{2\pi} = \pi\lambda_m$$

Finallement

- Si $m > 0$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx = \pi\lambda_m \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx = \pi\mu_m$$

- Si $m = 0$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} (\lambda_n\cos(nx) + \mu_n\sin(nx))\,dx = 2\pi\lambda_0$$

et

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx = \int_0^{2\pi} 0dx = 0$$

Go Back

❸ On conclut que

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\
\lambda_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx \\
\mu_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx
\end{aligned}$$

Go Back

❶

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi n}[1-\cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ paire} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ impaire} \end{cases}$$

Go Back

❷

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}[1-\cos(n\pi)] = -\frac{2}{n^2\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ paire} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n \text{ impaire} \end{cases}$$

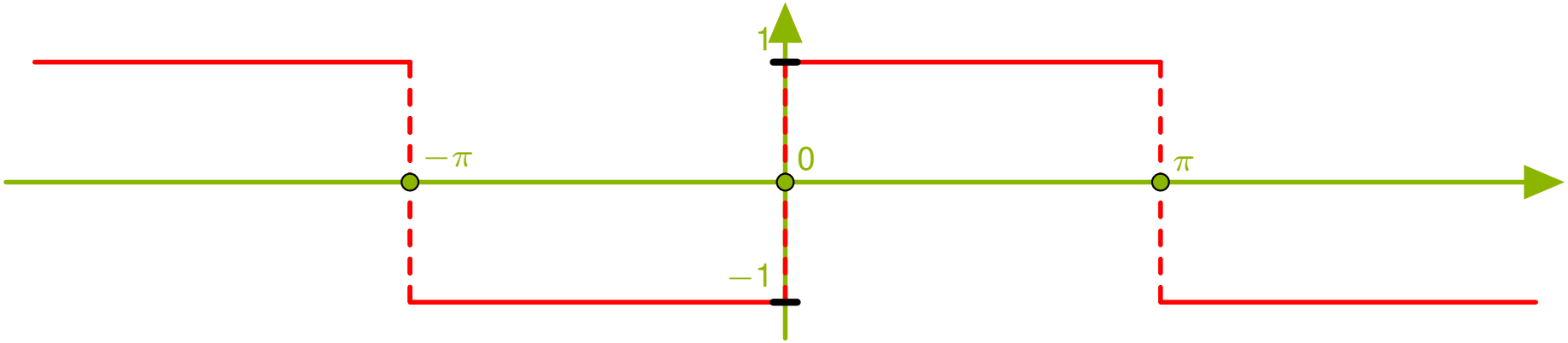
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

Go Back

1. C'est une fonction périodique de période 2π définie comme suit

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1\,, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Cette fonction dérivable à dérivée continue sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ de plus f et f' admettent des limites à gauche et à droite en $x = 0$, $x = -\pi$ et $x = \pi$.



Go Back

❷ D'après le Wooclap précédent, on a trouvé :

$$a_0 = 0\,, \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ paire} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ impaire} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned}\Big[F(f)\Big](x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\big(nx\big) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \cdots\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\big((2k+1)x\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin\big((2n+1)x\big)\,.\end{aligned}$$

❸ On a f est continue en $x = \frac{\pi}{2}$, alors d'apres le thórème de Dirichlet

$$\Big[F(f)\Big]\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Go Back