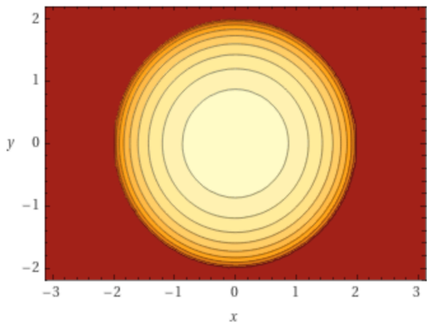
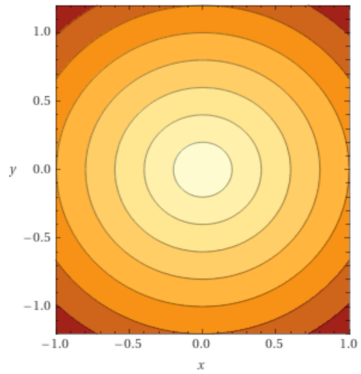
Solutions

Solution 1.

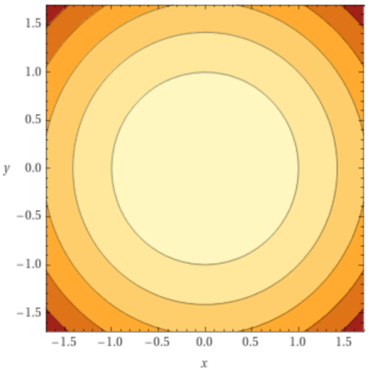
(1)



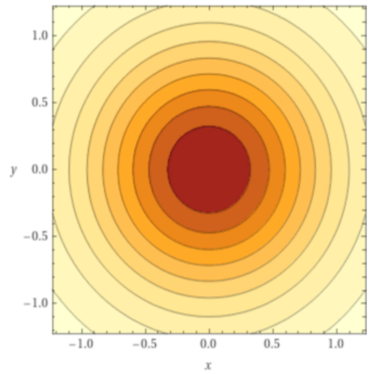
(f_1)



(f_2)

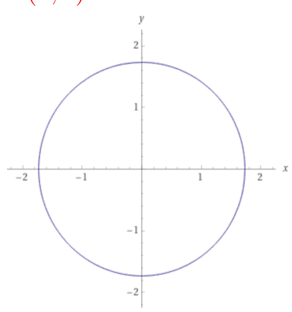


(f_3)

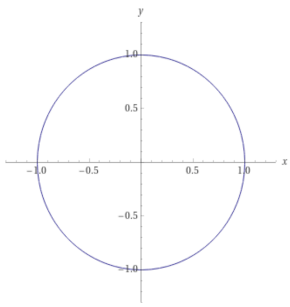


(f_4)

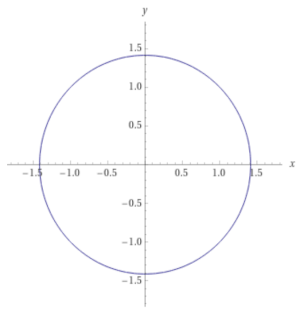
(2) cercles $(0, 0)$



(f_1)



(f_2)



(f_3)

Le tracé pour f_4 correspond à un cercle de rayon infini. Enfin, nous avons $r_4 > r_1 > r_3 > r_2$.

(3) les dérivées x sont $-\infty, -1, -2, -4e^{-4}$ (le plus plat)

(4) les dérivées x sont $-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1, -2e^{-2}$

Solution 2.

(a) $\Rightarrow$ figure (IV)

(b) $\Rightarrow$ figure (II)

(c) $\Rightarrow$ figure (I)

(d) $\Rightarrow$ figure (V)

(e) $\Rightarrow$ figure (III)

Solution 3.

(1) Non : $f = (x + y)^n$ ou $(ax + by)^n$ ou toute fonction de $ax + by$

(2) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

(3) Selle

Solution 4.

(1) Quatre, trois, plans, sphères

(2) Inférieur à 1, égal à 1, supérieur à 1

(3) **(a)** Lignes parallèles **(b)** Hyperboles **(c)** Paraboles

Solution 5. On calcule que

$$\{\boldsymbol{x} : f_1(\boldsymbol{x}) = 12\} = \{\boldsymbol{x} : x_1^2 - x_2^2 = 12\} \qquad \text{et} \qquad \{\boldsymbol{x} : f_2(\boldsymbol{x}) = 16\} = \{\boldsymbol{x} : x_2 = 8/x_1\}$$

Pour trouver les points d'intersection on pose la substitution $x_2 = 8/x_1$ dans $x_1^2 - x_2^2 = 12$ pour obtenir $x_1^4 - 12x_1^2 - 64 = 0$. La solution est $x_1^2 = 16$. Clairement, les deux possibilités pour x_1 sont $x_1 = +4, -4$, à partir desquelles on obtient $x_2 = +2, -2$. Les points d'intersection sont donc localisées en $[4, 2]^\intercal$ et en $[-4, -2]^\intercal$. Les lignes de niveaux associées à $f_1(x_1, x_2) = 12$ et $f_2(x_1, x_2) = 16$ sont sur la **Figure 34**.

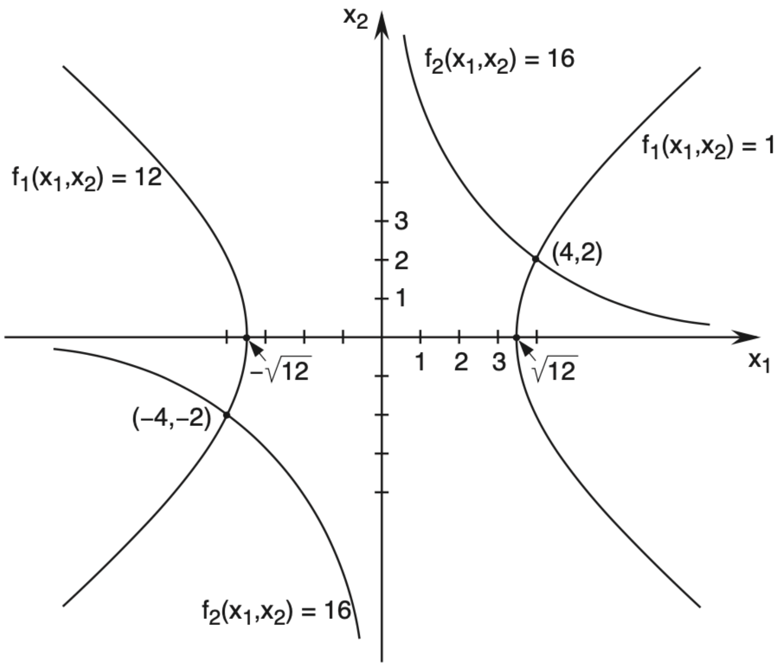


Figure 34: Lignes de niveau

Solution 6.

(1) 2/3 **(3)** 1/2 **(5)** e^{-32} **(7)** 1.0

(2) 1 **(4)** $-1/2$ **(6)** 11.0

(8) La limite n'existe pas car lorsque x et y s'approchent tous deux de zéro, la fonction s'approche de $\ln 0$, qui est indéfini (s'approche de l'infini négatif).

Solution 7.

(1) On a $\frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2} = \frac{(x^2)^2-(2y^2)^2}{x^2+2y^2} = \frac{(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2} = x^2-2y^2 \to 0$ pour $(x,y)\to(0,0)$

(2) On a $\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \to 0$ pour $(x,y)\to(0,0)$

(3) On approche l'origine par les trois directions orthogonales Ox, Oy et Oz. Si $f = \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2-z^2}$ alors $f(x,0,0)=1$, $f(0,y,0)=-1$ et $f(0,0,z)=1$, donc la limite est différente selon la direction d'approche de l'origine. On en conclut que la limite n'existe pas.

Solution 8.

(1) **(a)** 0 **(b)** 0 **(c)** 2/5

(2) La limite n'existe pas. La fonction approche deux valeurs différentes selon des chemins différents.

(3) **(a)** 0 **(b)** 0 **(c)** 1/2

(4) La limite n'existe pas car la fonction s'approche de deux valeurs différentes le long des chemins.

Solution 9.

(1) La fonction f est continue dans la région $y > -x$.

(2) La fonction f est continue en tout point du plan xy excepté sur les droites $x = 0$ et $y = 0$.

Solution 10.

(1) Puisque la fonction $\arctan x$ est continue sur $(-\infty,\infty)$, $g(x,y) = \arctan \frac{xy^2}{x+y}$ est continue où $z = \frac{xy^2}{x+y}$ est continu. La fonction interne z est continue sur tous les points du plan xy sauf où $y=-x$. Ainsi, $g(x,y)$ est continue pour tous les points du plan de coordonnées sauf aux points où $y=-x$.

(2) Tous les points $P(x,y,z)$ dans l'espace.

Solution 11. On note que l'on peut représenter $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ sous la forme

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \boldsymbol{x}^\intercal \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})^\intercal (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\intercal \boldsymbol{Q}^2 \boldsymbol{y} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On note que la matrice $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ n'est pas singulière. Maintenant on peut vérifier les conditions :

(1) On a $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle_2 = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})^\intercal (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|^2 \geq 0$ et

$$\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

(2) On a $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle_2 = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})^\intercal (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^\intercal (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}\rangle_2$

(3) On a $\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle_2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^\intercal \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^\intercal\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}^\intercal\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{z} = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle_2 + \langle \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle_2$

(4) On a $\langle \boldsymbol{x}|\lambda\boldsymbol{y}\rangle_2 = (\lambda\boldsymbol{x})^\intercal \boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}^\intercal\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{y} = \lambda\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle_2$

Solution 12. L'inégalité trinagulaire permet d'écrire

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}\| \leq \|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

On a donc $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. D'un autre coté, on peut également à partir de ce qui précède que

$$\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

Combiner les deux inégalités conduit à $|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$.

Solution 13.

(1) La valeur de z augmentent lorsque nous nous déplaçons dans le sens des x croissants, donc f_x est positif. Les valeurs de z diminuent lorsque nous nous déplaçons dans le sens des y croissants, donc f_y est négatif. Nous voyons dans le diagramme de contour que $f(2,1) = 10$. Nous estimons les dérivées partielles :

$$f_x \approx \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{14-10}{4-2} = 2 \qquad f_y \approx \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{6-10}{2-1} = -4$$

(2) À partir du diagramme isoligne, les valeurs approximatives de f proches de x sont $f(3,5) = 10$, $f(6.3,5) = 8$, $f(0.4,5) = 12$. Les approximations du quotient de différence sont

$$f_x(3,5) \approx \frac{f(6.3)-f(3)}{6.3-3} = -0.61 \qquad f_x(3,5) \approx \frac{f(0.4)-f(3)}{0.4-3} = -0.77$$

Une autre approximation raisonnable est obtenue en faisant la moyenne des deux quotients de différence :

$$f_x(3,5) \approx \text{moyenne} = \frac{-0.61-0.77}{2} = -0.7$$

Solution 14.

(1) $3+2xy^2,\ -1+2yx^2$

(2) $3\cos(3x-y),$
$1-\cos(3x-y)$

(3) $3x^2y^2-2x,\ 2x^3y-e^y$

(4) $(1+x)e^{x+4},\ 0$

(5) $-\frac{1}{x^2},\ -\frac{1}{y^2}$

(6) $\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

(7) $\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$

(8) $\frac{1}{x+2y},\ \frac{2}{x+2y}$

(9) $\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}$

(10) $y^x\ln y,\ xy^{x-1}$

(11) $\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}$

(12) $1/x,\ 1/y$

Solution 15.

(1) $f_{xx} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = 3,\ f_{yy} = 4$

(2) $f_{xx} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = 6,\ f_{yy} = 18$

(3) $f_{xx} = 6(x+iy),\ f_{xy} = f_{yx} = 6i(x+iy),\ f_{yy} = -6(x+iy)$

(4) $f_{xx} = a^2 e^{ax+by}$, $f_{xy} = f_{yx} = ab\, e^{ax+by}$, $f_{yy} = b^2 e^{ax+by}$

(5) $(f = 1/r)$ $f_{xx} = \frac{2x^2-y^2}{r^5}$, $f_{xy} = \frac{3xy}{r^5}$, $f_{yy} = \frac{2y^2-x^2}{r^5}$

(6) $f_{xx} = n(n-1)(x+y)^{n-2} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy}$

(7) $f_{xx} = -a^2 \cos ax \sin by$, $f_{xy} = f_{yx} = ab \sin ax \sin by$, $f_{yy} = -b^2 \cos ax \sin by$.

(8) $f_{xx} = \frac{2}{(x+iy)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2i}{(x+iy)^3}$, $f_{yy} = \frac{2i^2}{(x+iy)^3} = \frac{-2}{(x+iy)^3}$. Notez que $f_{xx} + f_{yy} = 0$

Solution 16.

(1) $f_x = \frac{1}{\sqrt{t}}(\frac{-2x}{4t})e^{-x^2/4t}$. Alors $f_{xx} = f_t = \frac{-1}{2t^{3/2}}e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}e^{-x^2/4t}$

(2) $f_t = -2f$, $f_{xx} = f_{yy} = -e^{-2t}\sin x \sin y$, $\alpha = -13$

(3) $e^{-m^2t-n^2t}\sin mx \cos ny$ résout $f_t = f_{xx} + f_{yy}$. Aussi $f = \frac{1}{t}e^{-(x^2+y^2)/4t}af_t = f_{xx} + f_{yy} = (-\frac{1}{t^2} + \frac{x^2+y^2}{4t^3})e^{-(x^2+y^2)/4t}$

(4) $\sin(x+t)$ se déplace vers la gauche

Solution 17.

(1) $(B-A)h_y(C^*) = (B-A)[f_y(b, C^*) - f_y(c, C^*)] = (B-A)(b-a)f_{yx}(c^*, C^*)$

(2) continu f_{xy} et f_{yx}

Solution 18.

(1) $f(a,b)$; $\frac{1}{x-1}$ ou $\frac{1}{(x-1)(y-2)}$

(2) Le long de $y = mx$ la fonction est $\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} \to 0$ (le rapport est proche de $\frac{mx^3}{m^2x^2}$ pour x petit). mais sur la parabole $y = x^2$ la fonction est $\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$. Donc cette fonction $f(x,y)$ n'a pas de limite : elle n'est pas continue en $(0,0)$.

(3) **(a)** $f(0,0) = 1$

(b) $f(0,0) = 1$

(c) pas définie pour $x < 0$

Solution 19.

(1) $z - 1 = y - 1$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

(2) $(x-3) + (y-4) + (z-10) = 0$ ou $x + y + z = 17$ (c'est un plan ...), $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

(3) $z - 2 = \frac{1}{3}(x-6) - \frac{2}{3}(y-3)$, $\boldsymbol{N} = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

(4) $(z-1) = x + 2y$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

(5) $2(x-1) + 4(y-2) + 2(z-1) = 0$, $\boldsymbol{N} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

(6) $2(x-1) + 4(y-2) + 4(z-1) = 0$, $\boldsymbol{N} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

(7) $z - 1 = x - 1$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$

(8) $8\pi(r-2) + 4\pi(h-2) = V - 8\pi$, $\boldsymbol{N} = 8\pi\boldsymbol{i} + 4\pi\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

Solution 20.

(1) $z = z_0 + F_z t$, plan $6(x-4) + 12(y-2) + 8(z-3) = 0$, ligne normale $x = 4 + 6t$, $y = 2 + 12t$, $z = 3 + 8t$.

(2) Plan tangent $4(x-2)+2(y-1)+4(z-2) = 0$; ligne normale $x = 2+4t$, $y = 1+2t$, $z = 2+4t$; $(0,0,0)$ à $t = -1/2$.

(3) $dw = y_0\,dx + x_0\,dy$; Règle du produit; $\Delta w - dw = (x - x_0)(y - y_0)$

Solution 21.

(1) **(a)** Q augmente; $Q_s = -250/3$, $Q_t = -5/3$, $P_s = -0.2Q_s = 50/3$, $P_t = -0.2Q_t = 1/3$

(b) $Q = 50 - 250/3(s - 0,4) - 5/3(t - 10)$

(2) $P = \frac{200s+t}{5s+1}$, $Q = -\frac{5(t-40)}{5s+1}$, $\frac{\partial P}{\partial s} = -\frac{5(t-40)}{(5s+1)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{1}{5s+1}$. À $s = 0.4\,t, t = 10$ cela donne $\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{6}{(0.6)^2} = \frac{5-}{3}$ et $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$.

(3) Les valeurs $s = 1$, $t = 10$ donne $Q = 40$, d'où

$$\begin{aligned} P_s &= -Q_s = sQ_s + Q = Q_s + 40 \\ P_t &= -Q_t = sQ_s + 1 = Q_s + 1 \end{aligned}$$

On a donc $Q_s = -20$, $Q_t = -1/2$, $P_s = 20$, $P_t = 1/2$

Solution 22.

(1) $f_i(4,1)$ indique le taux de variation de f dans la direction x en $(4,1)$. Ainsi,

$$f_i(4,1) \approx \frac{f(5,1) - f(4,1)}{1}$$

Le point $(5,1)$ est à environ $2/3$ du chemin entre le contour pour $f = 3$ et le contour pour $f = 4$, donc nous estimons $f(5,1) = 3.7$. Ainsi

$$f_i(4,1) \approx \frac{3.7 - 2}{1} = 1.7$$

Nous pouvons obtenir une meilleure estimation si nous faisons la moyenne de ce résultat avec le quotient des différences obtenues en allant dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$f_i(4,1) \approx f(4,1) - f(3,1) = \frac{2-1}{1} = 1$$

En faisant la moyenne des deux estimations, on obtient $f_i(4,1) \approx 1.35$

(2) $f_j(4,1)$ indique le taux de variation de f dans la direction y en $(4,1)$. Ainsi,

$$f_j(4,1) \approx \frac{f(4,2) - f(4,1)}{1}$$

Le point $(4,2)$ est à environ $1/3$ du chemin entre le contour pour $f = 2$ et le contour pour $f = 3$, donc nous estimons $f(4.2) = 1.3$. Ainsi

$$f_j(4,1) \approx \frac{1.3 - 2}{1} = -0.7$$

Nous pouvons obtenir une meilleure estimation si nous faisons la moyenne de ce résultat avec le quotient des différences obtenues en allant dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$f_j(4,1) \approx f(4,1) - f(4,0) = \frac{2-4}{1} = -2$$

En faisant la moyenne des deux estimations, on obtient $f_j(4,1) \approx -1.35$

(3) Puisque $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$, on s'éloigne du point $(4,1)$ vers le point $(5,0)$. Puisque les points $(4,1)$ et $(5,0)$ sont distants de $\sqrt{2}$, on a

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(5,0) - f(4,1)}{\sqrt{2}}$$

Le point $(5,0)$ est à peu près à mi-chemin entre le contour pour $f = 5$ et le contour pour $f = 6$, nous estimons donc $f(5,0) = 5.5$. Ainsi

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{5.5 - 2}{\sqrt{2}} = 2.5$$

Nous pouvons obtenir une meilleure estimation en faisant la moyenne de ce résultat avec le quotient de différence obtenu en allant dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(4,1) - f(3,2)}{\sqrt{2}} = \frac{2 - 0.5}{\sqrt{2}} = 1.1$$

La moyenne de ces deux résultats donne une estimation $f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx 1.8$.

(4) Puisque $\boldsymbol{u} = (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$, on s'éloigne du point $(4,1)$ vers le point $(3,2)$. Puisque les points $(4,1)$ et $(3,2)$ sont distants de $\sqrt{2}$, on a

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(3,2) - f(4,1)}{\sqrt{2}}$$

Le point $(3,2)$ est à peu près à mi-chemin entre le contour pour $f = 0$ et le contour pour $f = 1$, nous estimons donc $f(3,2) = 0.5$. Ainsi

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{0.5 - 2}{\sqrt{2}} = -1.1$$

Nous pouvons obtenir une meilleure estimation en faisant la moyenne de ce résultat avec le quotient de différence obtenu en allant dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(4,1) - f(5,0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 - 5.5}{\sqrt{2}} = -2.5$$

La moyenne de ces deux résultats donne une estimation $f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx -1.8$.

(5) Puisque $\boldsymbol{u} = (-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{5}$, on s'éloigne du point $(4,1)$ dans la direction $(-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{5}$, c'est-à-dire vers le point $(2,2)$. Sur le graphique, nous voyons que $f(4,1) = 2$ et $f(2,2) = 0$. Puisque les points $(4,1)$ et $(2,2)$ sont distants de $\sqrt{5}$, nous avons

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(2,2) - f(4,1)}{\sqrt{5}} = \frac{0 - 2}{\sqrt{5}} = -0.9$$

Nous pouvons obtenir une meilleure estimation en faisant la moyenne de ce résultat avec le quotient de différence obtenu en allant dans l'autre sens, c'est-à-dire

$$f_{\boldsymbol{u}}(4,1) \approx \frac{f(4,1) - f(6,0)}{\sqrt{5}} = \frac{2 - 8}{\sqrt{5}} = -2.7$$

La moyenne de ces deux résultats donne une estimation $f_{\boldsymbol{u}}(4,1) = -1.8$

Solution 23.

(1) $\boldsymbol{\nabla} f = 2x\,\boldsymbol{i} - 2y\,\boldsymbol{j}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = \sqrt{3}x - y$, $D_{\boldsymbol{u}} F(P) = \sqrt{3}$

(2) $\boldsymbol{\nabla} f = f_x\,\boldsymbol{i} + f_y\,\boldsymbol{j} = 3\,\boldsymbol{i} + 4\,\boldsymbol{j}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = 3 \times (3/5) + 4 \times (4/5) = 5$ pour tout P.

(3) $\boldsymbol{\nabla} f = e^x \cos y\,\boldsymbol{i} - e^x \sin y\,\boldsymbol{j}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = -e^x \sin y$, $D_{\boldsymbol{u}} F(P) = -1$

(4) $\boldsymbol{\nabla} f = 10y^9\,\boldsymbol{j}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = -10y^9$, $D_{\boldsymbol{u}} F(P) = 10$

(5) $f = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$, $\boldsymbol{\nabla} f = [x/f]\,\boldsymbol{i} + [(x-3)/f]\,\boldsymbol{j}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = x/f$, $D_{\boldsymbol{u}} F(P) = 1/\sqrt{5}$

Solution 24.

(1) $\boldsymbol{\nabla} f = \dfrac{-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

(2) $\boldsymbol{\nabla} f = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{i} + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{j}$

(3) $\boldsymbol{\nabla} f = -\dfrac{(x-1)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{[(x-1)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \dfrac{(x+1)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{[(x+1)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$

Solution 25.

(1) $\boldsymbol{u} = (\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$, $D_{\boldsymbol{u}} f = \sqrt{a^2+b^2}$

(2) $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{\sqrt{5}}$, $D_{\boldsymbol{u}} f = \sqrt{5} = 2.23606\ldots$

(3) $\boldsymbol{\nabla} f = (e^{x-y}, -e^{x-y}) = (e^{-1}, -e^{-1})$ at P; $\boldsymbol{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $D_{\boldsymbol{u}} = \sqrt{2}e^{-1}$

(4) $\boldsymbol{\nabla} f = \frac{-x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}}{\sqrt{5-x^2-y^2}} = \frac{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}{0}$ et P est un point approximatif ! Le taux d'augmentation est infini (à condition que x^2+y^2 reste en dessous de 5; la direction doit pointer dans ce cercle).

Solution 26. La c-dérivée de $f(cx, cy) = cf(x,y)$ est $x\frac{\partial f}{\partial x}(cx,cy) + y\frac{\partial f}{\partial y}(cx,cy) = f(x,y)$. Pour $c = 1$ cela devient $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$.

- Test sur $f = \sqrt{x^2+y^2}$: $x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Test sur $f = \sqrt{xy}$: $x(\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{x}}) + y(\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}) = \sqrt{xy}$.

Autres exemples : $f(x,y) = \sqrt{ax^2+bxy+cy^2}$ ou $f = Ax + By$ ou $f = x^{1/4}y^{3/4}$.

Solution 27. On pose

$$\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{x} = a_1x_1 + \cdots + a_nx^n = f_a \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b}^\intercal\boldsymbol{x} = b_1x_1 + \cdots + b_nx^n = f_a$$

où f_a et f_b sont des fonctions linéaires de $x_1, \ldots, x_n$. On peut donc écrire que

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}^\intercal\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}(f_af_b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_af_b) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(f_af_b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial x_1} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_a}{\partial x_n} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_a}{\partial x_n} \end{pmatrix} f_b + f_a \begin{pmatrix} \frac{\partial f_b}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_b}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En d'autre termes

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}^\intercal\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}^\intercal\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla}(f_af_b) = (\boldsymbol{\nabla} f_a)\,f_b + f_a\,(\boldsymbol{\nabla} f_b)$$

Maintenant on note que comme f_a et f_b sont linéaires, on a donc

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_i} = a_i \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f_b}{\partial x_i} = b_i$$

On en tire les résultats simples

$$\boldsymbol{\nabla} f_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\nabla} f_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

On donc $\nabla(f_a f_b) = \boldsymbol{a}\, f_b + f_a\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}^\intercal \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}$. Si on résume le calcul on a donc

$$\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{\nabla}[(\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}^\intercal \boldsymbol{x})] = [\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x})](\boldsymbol{b}^\intercal \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x})[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{b}^\intercal \boldsymbol{x})] = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}^\intercal \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a}^\intercal \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{b}$$

La matrice Hessienne est la matrice des dérivées partielles du second ordre de f telle que

$$\boldsymbol{H} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(f_a f_b) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}(f_a f_b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}(f_a f_b) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}(f_a f_b) \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_n} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_n}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_1}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_a}{\partial x_n} f_b + f_a \frac{\partial f_b}{\partial x_n}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_1 f_b + f_a b_1\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_n f_b + f_a b_n\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_1 f_b + f_a b_1\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(a_n f_b + f_a b_n\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \frac{\partial f_b}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial f_a}{\partial x_1} & \cdots & a_n \frac{\partial f_b}{\partial x_1} + b_n \frac{\partial f_a}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n \frac{\partial f_b}{\partial x_n} + b_n \frac{\partial f_a}{\partial x_n} & \cdots & a_n \frac{\partial f_b}{\partial x_n} + b_n \frac{\partial f_a}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 b_1 + b_1 a_1 & \cdots & a_n b_1 + b_n a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_n + b_n a_n & \cdots & a_n b_n + b_n a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_n b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_n & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 a_1 & \cdots & b_n a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_n a_n & \cdots & b_n a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^\intercal + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\intercal
\end{aligned}$$

On a donc finalement $\boldsymbol{H} f = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\intercal + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^\intercal$.

Solution 28.

(1) $\frac{df}{dt} = 2\,x(1) + 2\,y(2t) = 2t + 4t^3$

(2) $\frac{df}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(1) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(2t) = \frac{t+2t^3}{\sqrt{t^2+t^4}} = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

(3) $\frac{df}{dt} = y\,\frac{dx}{dt} + x\,\frac{dy}{dt} = -1$

(4) Puisque $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ alors nous devons trouver $\frac{df}{dt} = 0$. La chain rule donne $\frac{1}{y}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2e^t}(e^t) - \frac{e^t}{4e^{2t}}(2e^t) = 0$

(5) $\frac{df}{dt} = \frac{1}{x+y}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{x+y}\frac{dy}{dt} = 1$

(6) $\frac{df}{dt} = (4t^3)(1) + (0)(1) = 4t^3$

Solution 29.

(1) $\frac{df}{dt} = u_1\frac{\partial f}{\partial x} + u_2\frac{\partial f}{\partial y} + u_3\frac{\partial f}{\partial z}$

(2) $\frac{\partial f}{\partial T} = 1$ avec x et y fixes; $\frac{df}{dt} = 6$

(3) $f_t = f_x t + f_y(2t) = f_{xt}t + f_x + 2f_{yt}t + 2f_y = (f_{xx}t + f_{yx}(2t))t + f_x + 2(f_{xy}t + f_{yy}(2t))t + 2f_y$

(4) $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$; θ est fixe

Solution 30.

(1) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

(2) $f = x^2 + y^2 + (x^2+y^2)^2$ donc $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4x(x^2+y^2)$

(3) $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2z(2x) = 2x + 4x(x^2+y^2)$

(4) y est constant pour $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$

Solution 31.

(1) $(\frac{\partial P}{\partial V})_T = -\frac{\partial f}{\partial V}/\frac{\partial f}{\partial P}$ et de même $(\frac{\partial V}{\partial T})_P = -\frac{\partial f}{\partial T}/\frac{\partial f}{\partial V}$ et $(\frac{\partial T}{\partial P})_V = -\frac{\partial f}{\partial P}/\frac{\partial f}{\partial T}$. Multipliez ces trois équations: le côté droit donne -1.

(2) 1

Solution 32. On a

$$Df(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \frac{d\boldsymbol{g}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Par la « chain rule »

$$\frac{d}{dt}F(t) = Df(\boldsymbol{g}(t))\,\frac{d\boldsymbol{g}}{dt}(t) = \left[\frac{3t+5}{3}, \frac{2t-6}{2}\right] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5t - 1$$

Solution 33. On a

$$Df(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \frac{d\boldsymbol{g}}{ds}(s,t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{g}}{dt}(s,t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par la « chain rule »

$$\frac{\partial}{\partial s} f(\boldsymbol{g}(s,t)) = Df(\boldsymbol{g}(t)) \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s}(s,t) = \frac{1}{2}\left[2s+t, 4s+3t\right] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 8s + 5t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{g}(s,t)) = Df(\boldsymbol{g}(t)) \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}(s,t) = \frac{1}{2}\left[2s+t, 4s+3t\right] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 5s + 3t$$

Solution 34. On a

$$Df(\boldsymbol{x}) = \left[3x_1^2 x_2 x_3^2 + x_2, x_1^3 x_3^2 + x_1, 2x_1^3 x_2 x_3 + 1\right] \qquad \text{et} \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \begin{bmatrix} e^t + 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Par la « chain rule »

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(t)) &= Df(\boldsymbol{x}(t)) \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) \\ &= \left[3x_1^2(t)x_2(t)x_3^2(t) + x_2(t)\,,\ x_1^3(t)x_3^2(t) + x_1(t)\,,\ 2x_1^3(t)x_2(t)x_3(t) + 1\right] \cdot \begin{bmatrix} e^t + 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [3(e^t + t^3)^3 t^2 (t+1)^2 + t^2](e^t + 3t^2) + [(e^t + t^3)^3 (1+t)^2 + (e^t + t^3)](2t) \\ &\quad +2(e^t + t^3)^3 t^2 (1+t) + 1 \end{aligned}$$

Solution 35.

(1) $(0,0)$ est un minimum

(2) $(1,1)$ est un point-col

(3) $(3,0)$ est un point-col

(4) $(0,2)$ est un point-col

(5) Aucun point fixe

(6) $(0,0)$ est un point-col

(7) $(0,0)$ est un maximum

(8) $(-6,-6)$ est un minimum

(9) $(0,0,2)$ est un minimum

(10) $(-6,6)$ est un point-col

(11) Tous les points sur la ligne $x = y$ sont des minima

(12) $(0,0)$ est un point-col

(13) $(0,0)$ est un point-col

(14) $f_x = \cos x$ et $f_y = \sin y$; les points stationnaires ont $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ et $y = m\pi$; maximum quand $f = 2$, point-col quand $f = 0$, minimum quand $f = -2$.

(15) $(0,0)$ est un point-col; $(2,0)$ est un minimum; $(0,-2)$ est un maximum; $(2,-2)$ est un point-col

(16) $f_x = 8y - 4x^3$ et $f_y = 8x - 4y^3$; les points stationnaires sont $(0,0)$ = point selle, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ = maximum, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ = le minimum

Solution 36.

(1) La superficie maximale $(12-3y)y$ est de 12

(2) Volume $= zyz = xy(1-3x-2y) = xy-3x^2-2xy^2$; $V_x = y-6x-2y^2$ et $V_y = z-4xy$; à $(0,1,0)$ et $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ le volume est $V=0$ (minimum); à $(\frac{1}{48}, \frac{12}{48}, \frac{21}{48})$ le volume est $V = \frac{7}{3072}$ (maximum)

(3) $\begin{cases} 2(x+y)+2(x+2y-5)+2(x+3y-4)=0 \\ 2(x+y)+4(x+2y-5)+6(x+3y-4)=0 \end{cases}$ donne $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$
est un minimum car $E_{xx}E_{yy} = 6\times 28 > E_{xy}^2 = 12^2$

(4) Minimiser $f(x,y) = (xy-1)^2+(2x+y+1)2^+(x+2y-1)^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(xy-1)+4(2x+y+1)+2(x+2y-1)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2(x-y-1)+2(2z+y+1)+4(x+2y-1)=0$. Solution: $x=y=0$

Solution 37.

(1) **(a)** Minimum à $(0,1/2)$;
(b) Minimum à $(0,1)$;
(c) Minimum à $(0,1)$;

(2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y+4$
(a) Point stationnaire $(-1,-2)$ donne $f_{min} = -5$
(b) Sur la frontière $y=0$ le minimum de x^2+2x est -1 à $(-1,0)$
(c) Sur la frontière $x\geq 0, y\geq 0$ le minimum est 0 en $(0,0)$

(3) $\frac{df}{dt} = 0$ quand $\tan t = \sqrt{3}$; $f_{\max} = 2$ à $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $f_{\min} = -2$ à $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$

(4) $F(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 5/2-\sqrt{2}$; $F(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 5/2+\sqrt{2} = f_{\max}$; $F(1,0) = F(0,1) = 1 = f_{\min}$

Solution 38.

(1) Tous les dérivées valent 1 en $(0,0)$. Quadratique $= 1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2$

(2) Tous les dérivées sont e^2 à $(1,1)$; $f\approx e^2[1+(x-1)+(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(y-1)^2]$

(3) $\frac{\partial}{\partial x}(\sin x\cos y) = 1$ en $(0,0)$ mais $f = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0$. Quadratique $= x$. Vérifiez: $\sin x\cos y \approx (x-\frac{x^3}{6}+\dots)(1-\frac{y^2}{2}+\dots) = x$ à la précision quadratique.

(4) $x=1$, $y=1$: $f_x = 2$, $f_y=-2$, $f_{xx} = 2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=2$; série muts récupère x^2+y^2.

Solution 39.

(1) $F(x+h,y+k)\approx f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

(2) **(a)** Ligne $x-2y=$ constant; **(b)** $x+y=$ constant

(3) $(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})(0,0)$; puis $(\frac{x^2}{2}f_{xx}+\frac{y^2}{2}f_{yy}+\frac{z^2}{2}f_{zz}+xyf_{xy}+xzf_{xz}+yzf_{yz})(0,0,0)$

(4) **(a)** $\frac{x^2}{2}f_{xx}+xyf_{xy}+\frac{y^2}{2}f_{yy}|_{(0,0)}$
(b) $f_{xx}>0$ et $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$ en $(0,0)$;

(c) $f_x = f_y = 0$;

Solution 40.

(1) $f = (1-2s)^2 + 2(1-4s)^2 a \frac{df}{ds} = 0$ at $s = \frac{3}{10}$. Les étapes se terminent à $x = 1-2s = \frac{4}{10}$, $y = 1-4s = -\frac{2}{10}$

(2) $\Delta x = -1$, $\Delta y = -1$

(3) Un maximum a $f_{xx} < 0$ et $f_{yy<0}$, donc ils ne peuvent pas s'additionner à zéro. Un minimum a $f_{xx} > 0$ et $f_{yy} > 0$. Les fonctions xy et $x^2 - y^2$ résolvent $f_{xx} + f_{yy} = 0$ et peuvent avoir des point-cols.

(4) $f = x^2(12-4x)$ a $f_{\max} = 16$ en $(2,4)$; la ligne a une pente -4, $y = \frac{16}{x^2}$ a une pente $-\frac{32}{8} = -4$

Solution 41. Il n'y a aucune contrainte sur les variables x_1 or x_2, on peut donc calculer directement le gradient et appliquer la condition

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_1, x_2) = \mathbf{0}$$

Les composantes du gradient $\boldsymbol{\nabla} f(x_1, x_2)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1^2 - 4 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_2^2 - 16$$

Il existe donc quatre point critiques

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

La matrice Hessienne est

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

On note que $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_1) > 0$ et donc, $\boldsymbol{x}_1$ est un minimum local. Ensuite, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_4) < 0$ et donc, $\boldsymbol{x}_4$ est un maximum local. La matrice Hessienne est singulière au points $\boldsymbol{x}_2$ et $\boldsymbol{x}_3$, donc ces points ne sont ni des maxima ni des minima.

Solution 42. Dans les deux cas on calcule d'abord $Df(\boldsymbol{x})$ et $D^2 f(\boldsymbol{x})$ et on calcule ensuite le développement en $\boldsymbol{x}_0$.

(1) On calcule le gradient et la matrice Hessienne

$$Df(\boldsymbol{x}) = [4x_1^3 + 4x_1x_2^2, 4x_1^2x_2 + 4x_2^3] \qquad \text{et} \qquad D^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 + 4x_2^2 & 8x_1x_2 \\ 8x_1x_2 & 4x_1^2 + 12x_2^2 \end{bmatrix}$$

Le développement de f en $\boldsymbol{x}_0$ donne

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= 4 + [8,8] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x_1 - 1, x_2 - 1] \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} + \dots \\ &= 8x_1^2 + 8x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 + 8x_1x_2 + 12 + \dots \end{aligned}$$

(2) On calcule le gradient et la matrice Hessienne

$$Df(\boldsymbol{x}) = [e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} + 1, -e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} + 1]$$

$$D^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} & -e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} \\ -e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} & e^{x_1-x_2} + e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}$$

Le développement de f en $\boldsymbol{x}_0$ donne

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= 2 + 2e + [2e+1, 1] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1 - 1, x_2] \begin{bmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \dots \\ &= 1 + x_1 + x_2 + e(1 + x_1^2 + x_2^2) + \dots \end{aligned}$$

Solution 43.

(1) Le gradient et la matrice Hessienne de f sont

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Donc $\boldsymbol{\nabla} f([1,1]^\intercal) = [11, 25]^\intercal$ et $\boldsymbol{F}([1,1]^\intercal)$ reste les mêmes que ci-dessus.

(2) La direction de la pente la plus raide est celle du gradient. Donc la dérivée directionnelle, par rapport à un vecteur unitaire dans cette direction, est

$$\left(\frac{\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\|} \right)^\intercal \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}))^\intercal \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\|} = \|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\|$$

En $\boldsymbol{x} = [1,1]^\intercal$, on a $\|\boldsymbol{\nabla} f([1,1]^\intercal)\| = \sqrt{11^2 + 25^2} \simeq 21.31$.

(3) La condition $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ conduit à $\boldsymbol{x} = [3/2, -1]^\intercal$. En ce point la matrice Hessienne possède un déterminant négatif, on ne peut donc pas conclure.

Solution 44.

(1) Une fonction différentiable f décroit le plus rapidement dans la direction du gradient négatif. Dans notre problème on a

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2 + x_2^3 \\ x_1^2 + 3x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$$

Donc, la direction pour la pente (descendante) est la plus raide est $-\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = -[5, 10]^\intercal$.

(2) Le taux d'accroissement of f at $\boldsymbol{x}^{(0)}$ dans la direction $-\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)})$ est

$$(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)}))^\intercal \frac{-(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)}))}{\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)})\|} = -\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)})\| = -\sqrt{125} = -5\sqrt{5}$$

(3) Le taux d'accroissement de f en $\boldsymbol{x}^{(0)}$ dans la direction $\boldsymbol{d}$ est

$$(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}^{(0)}))^\intercal \frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|} = [5, 10] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{1}{5} = 11$$

Solution 45.

(1) On peut écrire f sous la forme

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{x}^\intercal \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\intercal \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 7$$

Le gradient et la matrice Hessienne de f sont

$$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Donc $\boldsymbol{\nabla} f([0,1]^\intercal) = [7,6]^\intercal$. La dérivée directionnelle est $[1,0]^\intercal\,\boldsymbol{\nabla} f([0,1]^\intercal) = 7$.

(2) La condition $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ conduite à l'unique solution $\boldsymbol{x}^* = (1/4)\,[-5,2]^\intercal$. Le déterminant de la matrice Hessienne est négatif en ce point. La fonction f n'a donc pas de minimum en ce point.