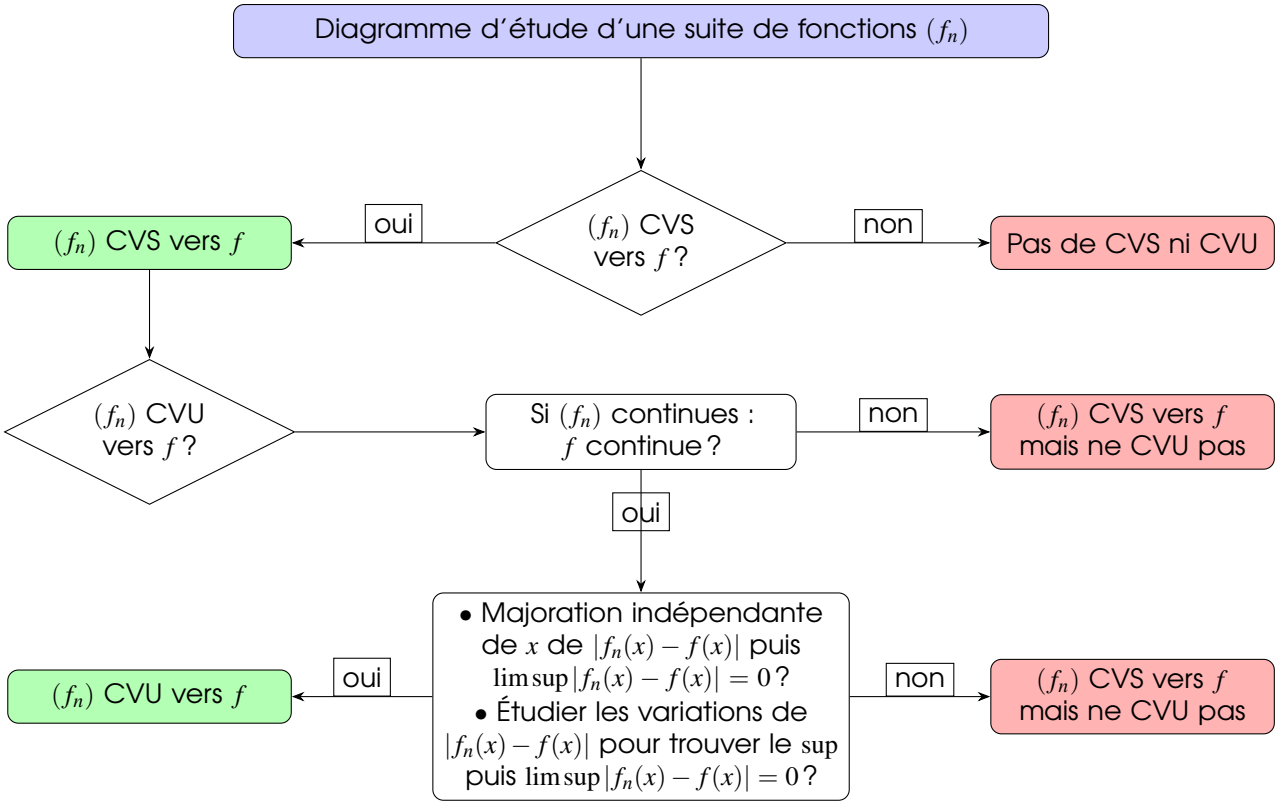
Convergence des suites de fonctions

Kamel ATTAR

Résumé

Ce TD aborde des aspects techniques relatifs aux notions de convergence de suites de fonctions. C'est un TD qui vise à vous faire travailler les modes de convergence simple et uniforme et exacerber les différences entre les deux. Les questions de convergence en norme 1 seront vues en [INTG] et celles en norme 2 partiellement dans la suite de ce cours et en [MASI].



1 Convergence simple

La convergence simple est la plus naïve des convergences de suites de fonctions. C'est celle qui nous ramène au plus vite à nos habitudes : l'étude de convergence des suites numériques. Celle-ci ne découle cependant pas d'une distance définie sur des espaces de fonctions. Elle a par ailleurs le désavantage de ne pas préserver un certain nombre de propriétés que l'on aurait souhaité garder lors du passage à la limite, notamment les questions de régularité. Son intérêt est de donner relativement simplement une limite vers laquelle effectuer les tests de convergence plus poussés, particulièrement les tests de convergence uniforme.

Exercice 1.1 — **Convergence simple**

Étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes ; en cas de convergence, identifiez la limite.

❶ $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{cases}$

Quelle remarque peut-on faire sur la régularité des f_n et de la fonction limite ?

❷ $g_n : \begin{cases} [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^n} \end{cases}$

❸ $h_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{\frac{x}{n}} \end{cases}$

☆ ❹ $j_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^2\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$

☆ ❺ $k_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n}\cos\left(\dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$

Solution

Pour étudier la convergence simple de chaque suite de fonctions donnée, nous allons examiner la limite ponctuelle de chaque fonction en fonction de x lorsque $n \to \infty$.

❶ $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

Pour chaque $x \in [0,1]$, observons le comportement de $f_n(x) = x^n$ lorsque $n \to \infty$:

- Si $x = 0$, $f_n(0) = 0^n = 0$.
- Si $x = 1$, $f_n(1) = 1^n = 1$.
- Si $x \in (0,1)$, alors $0 < x < 1$. Donc $x^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (car l'élévation d'un nombre strictement compris entre 0 et 1 à une puissance infiniment grande tend vers 0).

Conclusion : La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarque sur la régularité : Les fonctions $f_n(x) = x^n$ sont toutes continues sur $[0,1]$, mais la fonction limite $f(x)$ n'est pas continue sur $[0,1]$.

❷ $g_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ sur $[0,2]$

Analysons la limite de $g_n(x)$ pour chaque $x \in [0,2]$ lorsque $n \to \infty$:

- Si $x = 0$, alors $g_n(0) = \frac{1}{1+0^n} = 1$.
- Si $x \in (0,1)$, alors $x^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc $g_n(x) \to \frac{1}{1+0} = 1$.
- Si $x = 1$, alors $g_n(1) = \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$.
- Si $x > 1$, alors $x^n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, donc $g_n(x) \to \frac{1}{1+\infty} = 0$.

Conclusion : La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

❸ $h_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$
Calculons la limite de $h_n(x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$:
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\frac{x}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc, $e^{\frac{x}{n}} \to e^0 = 1$.
- Ainsi, $h_n(x) = xe^{\frac{x}{n}} \to x \cdot 1 = x$ lorsque $n \to \infty$.

Conclusion : La suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$h(x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

❹ $j_n(x) = nx^2e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$
Analysons la limite de $j_n(x)$ pour chaque $x \geq 0$ lorsque $n \to \infty$:
- Pour $x = 0$, $j_n(0) = 0$.
- Pour $x > 0$, utilisons un changement de variable $t = nx$, alors $j_n(x) = \frac{t^2}{n}e^{-t} \to 0$ car e^{-t} décroît beaucoup plus rapidement que t^2 croît (croissance comparée).

Conclusion : La suite de fonctions (j_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$j(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

❺ $k_n(x) = \frac{x}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$
Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, examinons la limite de $k_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:
- On a $\frac{x}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \to \cos(0) = 1$.
- Ainsi, $k_n(x) = \frac{x}{n}\cos\left(\frac{x}{n}\right) \to \frac{x}{n} \cdot 1 = 0$. Le cosinus étant borné, par théorème des gendarmes la suite tend vers la fonction nulle.

Conclusion : La suite de fonctions (k_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$k(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

2 Estimer des normes infinies

Étudier la convergence uniforme de suites de fonctions passe par le fait d'estimer une norme infinie de fonctions. On se focalise sur cet aspect au cours de cette section. Quelques éléments complémentaires sont apportés dans l'annexe A.

Exercice 2.1 — **Norme infinie**

Calculer – si possible – les normes infinies des fonctions suivantes :

❶ $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n+x} \end{cases}$

❷ $g_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} nx^n \ln(x) \text{ si } x \neq 0; \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

❸ $h_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^k \mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

☆ ❹ $j_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{x}{n}} - 1 \end{cases}$

Solution

❶ Considérons la fonction $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$. La fonction est croissante en x sur $\mathbb{R}_+$, car la dérivée de $f_n(x)$ par rapport à x est :

$$f_n\prime(x) = \frac{n}{(n+x)^2} > 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Puisque $f_n(x)$ est croissante, elle atteint son maximum lorsque $x \to \infty$. Calculons cette limite :

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{n+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{x}+1} = 1.$$

Voici le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	1

Donc, la norme infinie est :

$$\|f_n\|_\infty = 1.$$

❷ On étudie les variations de g_n sur $[0,1]$:

$$\forall x \in [0,1], \quad g_n\prime(x) = n\left(x^n \cdot \frac{1}{x} + \ln(x)\cdot nx^{n-1}\right) = nx^{n-1}(1+n\ln(x)).$$

Pour trouver les points critiques, nous résolvons $g_n\prime(x) = 0$:

$$1+n\ln(x) = 0 \implies \ln(x) = -\frac{1}{n} \implies x = e^{-\frac{1}{n}}.$$

Cette quantité s'annule en $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$ (et en 0 si $n \geq 2$). Évaluons $g_n(x)$ en ce point :

$$g_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n \ln\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = ne^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right) = -e^{-1}.$$

Puisque $\ln(x) < 0$ pour $x \in (0,1)$, la valeur maximale de $nx^n\ln(x)$ est atteinte en $x = e^{-\frac{1}{n}}$ et vaut $-e^{-1}$.

Voici le tableau de variations :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$		1
$g_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g_n(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0

D'où on déduit que $\|g_n\|_\infty = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

❸ $h_n(x) = nx^k e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$, en fonction de

k

Pour trouver$\|h_n\|_\infty$, nous devons maximiser la fonction $h_n(x) = nx^k e^{-nx}$.

Calculons la dérivée de $h_n(x)$ par rapport à x :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h_n'(x) = n(kx^{k-1} - nx^k)\mathrm{e}^{-nx} = nx^{k-1}(k-nx)\mathrm{e}^{-nx}.$$

Pour trouver les points critiques, nous résolvons $h_n\prime(x) = 0$:

$$k - nx = 0 \implies x = \frac{k}{n}.$$

Évaluons $h_n(x)$ en ce point :

$$h_n\left(\frac{k}{n}\right) = n\left(\frac{k}{n}\right)^k e^{-k} = \frac{k^k}{n^{k-1}} e^{-k}.$$

La fonction atteint donc son maximum en $x = \frac{k}{n}$. D'où le tableau de variations (on néglige la valeur de la dérivée en $x = 0$) :

x	0		$\frac{k}{n}$		$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	$\nearrow$	$n\left(\frac{k}{n}\right)^k \mathrm{e}^{-k}$	$\searrow$	0

On déduit que la norme infinie est :

$$\|h_n\|_\infty = \frac{k^k}{n^{k-1}} e^{-k}.$$

On voit en particulier que cette quantité tend vers 0 uniquement si $k > 1$.

❹ $j_n(x) = e^{\frac{x}{n}} - 1$ sur $\mathbb{R}$

Pour trouver $\|j_n\|_\infty$, nous examinons la fonction $j_n(x) = e^{\frac{x}{n}} - 1$.

Puisque $e^{\frac{x}{n}} \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $e^{\frac{x}{n}} \to 1$ lorsque $x \to -\infty$, la fonction atteint son minimum en $x \to -\infty$, et la valeur est :

$$\lim_{x \to -\infty} j_n(x) = 0 - 1 = -1.$$

Pour $x \to \infty$, $e^{\frac{x}{n}} \to \infty$, donc $j_n(x) \to \infty$.

Ainsi, la norme infinie est infinie : $\|j_n\|_\infty = \infty$.

3 Pratiquer la convergence

Dans la pratique, on ne sait pas *a priori* à quel type de convergence on aboutira : seule l'expérience permet de le déterminer. Néanmoins, on peut aiguiller les tests de convergence de manière à affiner peu à peu les résultats, et les calculs intermédiaires donnent souvent des informations qui peuvent être reprises dans la suite des raisonnements. On cherchera donc d'abord à déterminer une limite éventuelle par convergence simple avant de vérifier si la convergence est uniforme ou non.

Exercice 3.1 — **Convergence des fonctions**

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

❶ $i_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \end{cases}$

❷ $g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{n+x} \end{cases}$

❸ $h_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\cos(nx) \end{cases}$

Convergence des fonctions

☆ ❹ $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x^2 e^{-nx} \end{cases}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{N}$.

☆ ❺ $j_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} \end{cases}$

Solution

❶ **Convergence simple** : Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, nous examinons la limite de $i_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} i_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Donc, $i_n(x) \to |x|$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, la suite de fonctions (i_n) converge simplement vers la fonction limite : $i(x) = |x|$.

Convergence uniforme : Pour étudier la convergence uniforme, nous considérons :

$$|i_n(x) - |x|| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2}.$$

On peut écrire :

$$|i_n(x) - |x|| = \left| \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{1}{n}$$

On a utilisé l'effet que :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n},$$

on déduit que :

$$|i_n(x) - i(x)| \leq \frac{1}{n},$$

et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers i sur $\mathbb{R}$.

❷ **Convergence simple** :
Pour chaque $x \geq 0$, considérons la limite de $g_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = 1.$$

Ainsi, $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \geq 0$. La convergence est donc simple vers :

$$g(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Convergence uniforme :
Nous cherchons :

$$\|g_n - 1\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left| \frac{n}{n+x} - 1 \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left| -\frac{x}{n+x} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{x}{n+x}.$$

Pour chaque $x \geq 0$, $\left(\frac{x}{n+x}\right)' = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$. Voici le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\left(\frac{x}{n+x}\right)'$	$+$	
$\dfrac{x}{n+x}$	0 ↗	1

On en déduit que $\|g_n - 1\|_\infty = 1 \neq 0$. Ainsi, g_n ne converge pas uniformement vers 1 sur $\mathbb{R}_+$.

❸ **Convergence simple** :
Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, considérons la limite de $h_n(x)$ lorsque $n \to \infty$. $\cos(nx)$ étant toujours compris entre -1 et 1, on a par théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(nx) = 0.$$

Donc, $h_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La convergence est simple vers :

$$h(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Convergence uniforme : L'inégalité précédente nous donne même un encadrement de la fonction h_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{n} \leq h_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

On a donc $\|h_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, et il y a même égalité puisqu'elle est atteinte en 0 entre autres (sur $\frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$ en réalité).
En conclusion :

$$\|h_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc la convergence est uniforme.

❹ **Convergence simple** : Pour chaque $x \geq 0$, nous considérons la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$f_n(x) = n^\alpha x^2 e^{-nx}$$

.

- Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout n , donc $f_n(x) \to 0$.
- Pour $x > 0$, $e^{-nx} \to 0$ beaucoup plus rapidement que $n^\alpha x^2 \to \infty$ (quelle que soit la valeur de α), donc $f_n(x) \to 0$.

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction limite :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Convergence uniforme : Pour déterminer si la convergence est uniforme, on calcule l'évolution de la différence maximale entre f_n et la fonction nulle en étudiant les variations de f_n.

Considérons :

$$|f_n(x) - 0| = n^\alpha x^2 e^{-nx}.$$

Pour la convergence uniforme, nous cherchons à majorer $n^\alpha x^2 e^{-nx}$ de manière indépendante de x . Fixons $x > 0$. En étudiant la fonction $f_n(x) = n^\alpha x^2 e^{-nx}$ par rapport à n ,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = n^\alpha x(2 - nx)\mathrm{e}^{-nx}$$

Ainsi, comme le montre le tableau de variations suivant, f_n admet son maximum en $x = \frac{2}{n}$. En substituant, on obtient :

$$\sup_{x\geq 0} n^\alpha x^2 e^{-nx} = \frac{4}{\mathrm{e}^2} n^{\alpha-2}.$$

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}^2} n^{\alpha-2}$	$\searrow$	0

On en déduit :

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \frac{4}{e^2} n^{\alpha-2}$$

Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 2$.
Donc la convergence est uniforme ssi $\alpha < 2$.

❺ **Convergence simple** : Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, considérons la limite de $j_n(x)$ lorsque $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} j_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\sqrt{n}}{nx^2\left(\frac{1}{nx^2}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{n}x^2} = 0.$$

Donc, $j_n(x) \to 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La convergence est simple vers :

$$j(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Convergence uniforme : La fonction étant impaire, on se contentera de l'étude des variations de j_n sur $\mathbb{R}_+$, que l'on pourrait compléter par symétrie.
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, j_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(1+nx^2)^2}(1-nx^2)$$

qui s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Ayant $j_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2}$ on déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{n}}$		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$j_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$j_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

(On excusera le fait que la hauteur des valeurs dans le tableau est mal représentée mais le package pour flemmards que j'ai utilisé ne permet pas de maîtriser cette donnée.)
Bref, dans tous les cas $\|j_n - 0\|_\infty = \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 3.2 — **Convergence d'une suite de fonctions sinus**

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

❶ La suite $(f_n)_{n\in N^*}$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ et si oui, vers quelle fonction ?
❷ La convergence de la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ est-t-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
Indice : Commencez par étudier la convergence uniforme sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Utilisez ensuite ce résultat pour déduire s'il y a convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}$.
❸ La convergence de la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ est-t-elle uniforme sur $[-1,1]$?

Solution

❶
- Pour $x = 0$: on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite réelle $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 0 .
- Pour $x \neq 0$: Rappelons que pour tout réel u, on a l'approximation suivante pour les petits angles :

$$\sin(u) \sim u \quad \text{lorsque } u \to 0.$$

En posant $u = \frac{x}{n}$, lorsque $n \to \infty$, on a $\frac{x}{n} \to 0$. Donc :

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x}{n}.$$

Par conséquent :
$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) \sim x$ et la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x.

En définitive, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.

❷ Pour déterminer si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, nous devons vérifier si :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x$$

est impaire et dérivable de dérivée $g_n'(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \leq 0$, cette dérivée s'annulant aux points $x_{n,k} = 2nk\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec $g_n\left(x_{n,k}\right) = 2nk\pi$.
On a donc

$$\sup_{x\in[-2nk\pi,2nk\pi]} |g_n(x)| = 2n|k|\pi \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

❸ Sur $[-1,1]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_n est décroissante et

$$\sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x)| = |g_n(1)| = n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

La convergence est donc uniforme.

Exercice 3.3 — **Convergence d'une suite de fonctions logarithmiques**

❶ Étudier la convergence simple puis uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (g_n) donnée par :

$$g_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} nx^n\ln(x) \text{ si } x \neq 0; \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

❷ Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $[0,a]$.

Solution

❶ **Convergence simple** : Pour la convergence simple, on cherche à déterminer si, pour tout $x \in [0,1]$, $g_n(x)$ converge vers une fonction limite $g(x)$.

- Cas $x = 0$: Pour $x = 0$, on a par définition $g_n(0) = 0$ pour tout n, donc la suite $(g_n(0))$ converge trivialement vers $g(0) = 0$.
- Cas $0 < x \leq 1$: Pour $x \in (0,1]$, considérons $g_n(x) = nx^n\ln(x)$. Lorsque $n \to \infty$, on étudie la limite de cette expression.
  Si $x = 1$, on a $g_n(1) = n \cdot 1^n \cdot \ln(1) = n \cdot 0 = 0$. Donc, $g_n(1) \to 0$.
  Si $0 < x < 1$, étudions la limite de $nx^n\ln(x)$. Sachant que $x^n \to 0$ quand $n \to \infty$ et que $\ln(x)$ est une

constante pour un x fixé, on peut montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} nx^n \ln(x) = 0.$$

En effet, nx^n tend rapidement vers 0 puisque $x^n \to 0$ de façon exponentielle.

Ainsi, pour tout $x \in (0,1]$, $g_n(x) \to 0$.

CONCLUSION SUR LA CONVERGENCE SIMPLE : La suite $(g_n(x))$ converge simplement vers la fonction nulle $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

En ce qui concerne la **convergence uniforme**, le calcul a été fait à l'Exercice 3 ; $\|g_n - 0\|_\infty = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ donc la convergence n'est pas uniforme.

❷ La fonction g_n est décroissante sur $[0, \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}]$ puis croissante sur $[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}, 1]$. Cependant, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc pour un a fixé $(0 < a < 1)$, pour n assez grand[a] la fonction g_n sera décroissante sur $[0,a]$ et atteindra son minimum en a. On a alors, pour n assez grand $(n > n_0)$:

$$\|g_n - 0\|_\infty = \sup_{x\in[0,a]} |g_n(x)| = |g_n(a)| = -na^n \ln(a)$$

Or cette quantité tend bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui assure la convergence uniforme de la suite de fonctions sur l'intervalle $[0,a]$.

a. à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 = \left\lceil \dfrac{-1}{\ln(a)} \right\rceil$)

Exercice 3.4 — **Convergence d'une suite de fonctions rationnelles et racine carrée**

Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ des suites de fonctions définies par $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$.

Solution

Convergence simple La convergence simple consiste à étudier la limite ponctuelle de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

- Cas 1 : $x = 0$
  Lorsque $x = 0$, la fonction devient :
  $$f_n(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + \frac{1}{n^2}}} = 0.$$
  Ainsi, $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
- Cas 2 : $x \neq 0$
  Si $x \neq 0$, calculons la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$. Nous avons :
  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$
  Comme $\frac{1}{n^2} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, il en résulte que :
  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}.$$
  Or, $\frac{x}{|x|} = 1$ si $x > 0$ et $\frac{x}{|x|} = -1$ si $x < 0$.

CONCLUSION SUR LA CONVERGENCE SIMPLE La limite de $f_n(x)$ est la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n(x))$ converge simplement vers la fonction $f(x)$ définie ci-dessus pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, la convergence n'est pas uniforme puisque la limite f n'est pas continue en 0 .

Exercice 3.5 **Convergence et intégration d'une suite de fonctions exponentielles**

On considère la suite des fonctions $f_n : x \longmapsto n^2 x e^{-nx}$ sur $[0,1]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
3. Conclure quant à l'uniformité de la convergence de la suite (f_n).

Solution

1. (f_n) converge vers la fonction nulle (par croissance comparée pour $x > 0$).
2. $$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\mathrm{d}x = n^2 \int_0^1 x e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= n^2 \left[x \frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 - n^2 \int_0^1 \frac{-1}{n} e^{-nx}\mathrm{d}x \\ &= n^2 \left[\left(\frac{-x}{n} - \frac{1}{n^2} \right) e^{-nx} \right]_0^1 \\ &= n^2 \left(-\frac{n+1}{n^2} e^{-n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1 - (n+1)e^{-n}. \end{aligned}$$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ (par croissance comparée). Or (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur le segment $[0,1]$, si la convergence était uniforme on aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = 0$, ce qui est incompatibble avec le résultat précédent. Donc la convergence ne peut être uniforme.

Exercice 3.6 ★ ★ **Convergence en fonction d'un paramètre**

Soit k un entier positif ou nul et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}$. Pour quelles valeurs de k cette suite converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Solution

Pour déterminer les valeurs de k pour lesquelles la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x^k}{x^2+n}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$, nous devons d'abord analyser la convergence Simple de $f_n(x)$ lorsque $n \to \infty$, puis vérifier la convergence uniforme.

Étape 1 : Convergence Simple Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

Lorsque $n \to \infty$, le terme $x^2 + n \to \infty$. Donc, $\frac{x^k}{x^2+n} \to 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Étape 2 : Convergence Uniforme Pour déterminer si la convergence est uniforme, nous devons vérifier si :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^k}{x^2+n} \right| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Cela nous amène à trouver le supremum de $\left|\frac{x^k}{x^2+n}\right|$ sur tout $x \in \mathbb{R}$.

Analyse par Cas :

- Pour $k = 0$:

$$f_n(x) = \frac{x^0}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+n}.$$

  Comme $\frac{1}{x^2+n} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x^2+n} \right| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  La convergence est donc uniforme pour $k = 0$.
- Pour $k = 1$:

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}.$$

  Pour trouver le supremum, nous calculons la dérivée :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+n}\right) = \frac{(x^2+n) - x\cdot 2x}{(x^2+n)^2} = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2}.$$

  Le point critique se produit lorsque $x^2 = n$, soit $x = \sqrt{n}$ ou $x = -\sqrt{n}$.
  À $x = \sqrt{n}$, on a :

$$f_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{n}$		$\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

  donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ et la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ et sur toute partie bornée $\mathbb{R}$ pour $k = 1$.
- Pour $k = 2$ et x dans $\mathbb{R}$, on a $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+n}$ et $f_n'(x) = \frac{2xn}{(x^2+n)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x)\right| = 1 \neq 0$ et la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

- Pour $k > 2$: On remarque que
$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = x^{k-2} = \infty\,.$$
On en déduite que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \infty$ et parsuite la convergence n'est pas uniforme pour $k < 2$.
AUTRE MÉTHODE : La dérivée de $f_n(x)$ est :
$$f_n'(x) = \frac{kx^{k-1}(x^2+n) - 2x^{k+1}}{(x^2+n)^2} = \frac{x^{k-1}\left(k(x^2+n) - 2x^2\right)}{(x^2+n)^2} = \frac{x^{k-1}\left((k-2)x^2+kn\right)}{(x^2+n)^2}.$$
Pour trouver les points critiques, nous devons résoudre $f_n'(x) = 0$. Comme le dénominateur $(x^2+n)^2$ est toujours positif, nous pouvons nous concentrer sur le numérateur :
$$x^{k-1}\left((k-2)x^2+kn\right) = 0.$$
Il y a deux cas possibles pour que cette équation soit égale à zéro :
Cas 1 : $x^{k-1} = 0$. Cela donne $x = 0$
Cas 2 : $(k-2)x^2 + kn = 0$. Résolvons cette équation pour x :
$$(k-2)x^2 = -kn \implies x^2 = \frac{kn}{2-k}.$$
Si $k > 2$, alors $2-k < 0$, et il faut que $kn \leq 0$, ce qui ne peut pas être vrai car $k > 2$ et $n > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $k \geq 2$, la convergence n'est pas uniforme.

Conclusion :
La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ seulement pour $k = 0$ et pour $k = 1$. Pour tout $k \geq 2$, la convergence n'est pas uniforme.

A Remarque : calculer une norme infinie

Il est ***important*** de saisir le fait qu'une majoration (resp. minoration) est souvent suffisante pour conclure à la convergence (resp. non-convergence) d'une suite de fonctions. Cela est d'autant plus important que le calcul explicite d'une norme infinie n'est pas toujours aisé. Étant donné une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, dès qu'on a une inégalité du type
$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$$
on en déduit systématiquement l'inégalité $\|f\|_\infty \leq M$. Elle traduit simplement le fait que M est un majorant de $|f|$. Obtenir ce type d'inégalité dépend de notre aisance technique quant à la majoration des expressions analytiques usuelles et de nos connaissances quant au comportement des fonctions usuelles.

Voici quelques rappels de stratégies que l'on peut mettre en place pour calculer une borne supérieure ayant un majorant candidat M :
— exhiber un élément $x \in I$ tel que $|f(x)| = M$
— exhiber une suite (x_n) de $I^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(|f(x_n)|\right)$ converge vers M

Autrement on peut s'attarder sur les démarches suivantes :
— étudier la fonction f, si elle est dérivable en établir le tableau de variations, celui-ci permettra d'identifier des majorants et éventuellement des maxima (ou plus généralement des extrema)
— exhiber une suite (x_n) de $I^{\mathbb{N}}$ telle que $\left(|f(x_n)|\right)$ tend vers $+\infty$

— découper en union finie de segments sur lesquels l'étude de $|f|$ est plus simple, puis reconstruire une majoration de $\|f\|_\infty$ morceau par morceau.

Toutes ces démarches sont potentiellement mobilisables lors de l'estimation ou du calcul exact des normes infinies de fonctions, notamment dans le cas de l'étude de la convergence uniforme de suites de fonctions. Elles sont à garder en mémoire lorsque vous attaquez vos exercices, ainsi qu'à garder en tête lors de vos différents cours, les enseignants pourront être amenés à les utiliser sans vous le notifier.