04 卡尔曼滤波

- **概述**

贝叶斯滤波特点

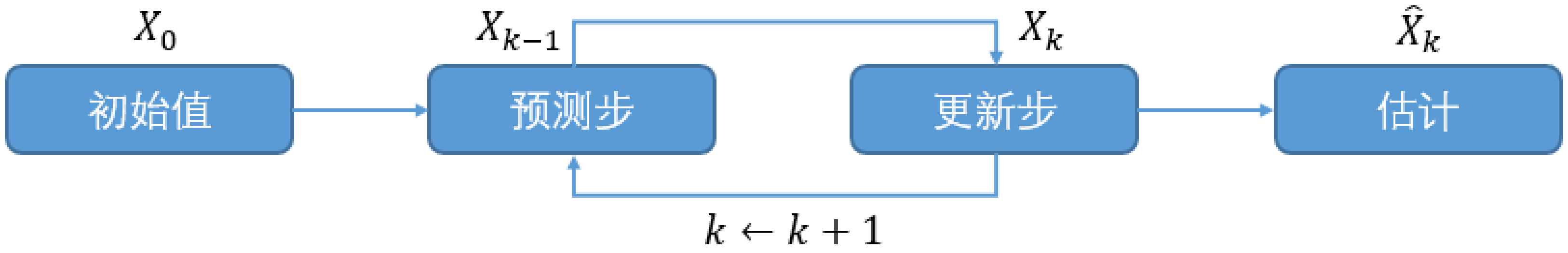
- 状态方程：$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_{k-1}) + \boldsymbol{Q}_k$
- 观测方程：$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}_k) + \boldsymbol{R}_k$
- 其中$\boldsymbol{Q}_k$，$\boldsymbol{R}_k$与$\boldsymbol{X}_0$相互独立，其分布分别为$p_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x})$，$p_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$和$p_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{x})$

卡尔曼滤波假设

- $\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{h}$均为线性，状态方程：$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_k$，观测方程：$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{R}_k$
- $p_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x})$，$p_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{x})$为均值为0的正态分布，$p_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{x})$为正态分布

状态方程维度	观测方程维度	卡尔曼滤波形式
1	1	一维卡尔曼滤波
N	1	多维卡尔曼滤波
N	M	卡尔曼信息融合

- **贝叶斯滤波与高斯过程两大分布**



预测步： $p_k^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(x - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv$

更新步： $p_k^+(x) = \eta * p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)$， $\eta^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)\, dx$

■ 卷积分布

- 相互独立的随机变量$\boldsymbol{X}_1 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$，$\boldsymbol{X}_2 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$
- 叠加变换$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$
- 随机变量$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$

■ 乘积分布

- $\boldsymbol{X}$为p维高斯分布，$\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$；$\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}$为$q$维高斯分布，$\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\Sigma}_2)$
- 条件分布$\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}\big(\boldsymbol{\mu}_{X|Y}, \boldsymbol{\Sigma}_{X|Y}\big)$
- 其中$\boldsymbol{\Sigma}_{X|Y}^{-1} = \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\mu}_{X|Y} = \boldsymbol{\Sigma}_{X|Y}\left(\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})\right)$

- **从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波1**

  - 一维卡尔曼滤波

  - $Q_k \sim \mathcal{N}(0,\ \ Q^2)$，$R_k \sim \mathcal{N}(0,\ R^2)$，$x_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{k-1}^{+}, \sigma_{k-1}^{2+}\right)$

预测步

$$
\begin{aligned}
p_k^-(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(x - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}Q} \exp\left(-\frac{(x - Fv)^2}{2Q^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{k-1}^{+}} \exp\left(-\frac{(v - \mu_{k-1}^{+})^2}{2\sigma_{k-1}^{2+}}\right) dv \\
&= \mathcal{N}\left(F\mu_{k-1}^{+}, F^2\sigma_{k-1}^{2+} + Q^2\right)
\end{aligned}
$$

预测步结论

- $x_k^- \sim \mathcal{N}\left(F\mu_{k-1}^{+}, F^2\sigma_{k-1}^{2+} + Q^2\right)$
- (1) $\mu_k^- = F\mu_{k-1}^{+}$
- (2) $\sigma_k^{2-} = F^2\sigma_{k-1}^{2+} + Q^2$

从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波2

一维卡尔曼滤波

- $Q_k \sim \mathcal{N}(0,\ Q^2)$，$R_k \sim \mathcal{N}(0,\ R^2)$，$x_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{k-1}^{+}, \sigma_{k-1}^{2+}\right)$

更新步

$$
\begin{aligned}
p_k^{+}(x) &= \eta * p_{R_k}\left(y_k - h(x)\right) * p_k^{-}(x) \\
&= \eta * \frac{1}{\sqrt{2\pi}R}\exp\left(-\frac{(y_k - Hx)^2}{2R^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k^{-}}\exp\left(-\frac{(x-\mu_k^{-})^2}{2\sigma_k^{2-}}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(\frac{H\sigma_k^{2-}y_k + R^2\mu_k^{-}}{H^2\sigma_k^{2-} + R^2}, \frac{\sigma_k^{2-}R^2}{H^2\sigma_k^{2-} + R^2}\right)
\end{aligned}
$$

更新步结论

(3) 卡尔曼增益$K_k = \frac{H\sigma_k^{2-}}{H^2\sigma_k^{2-}+R^2}$

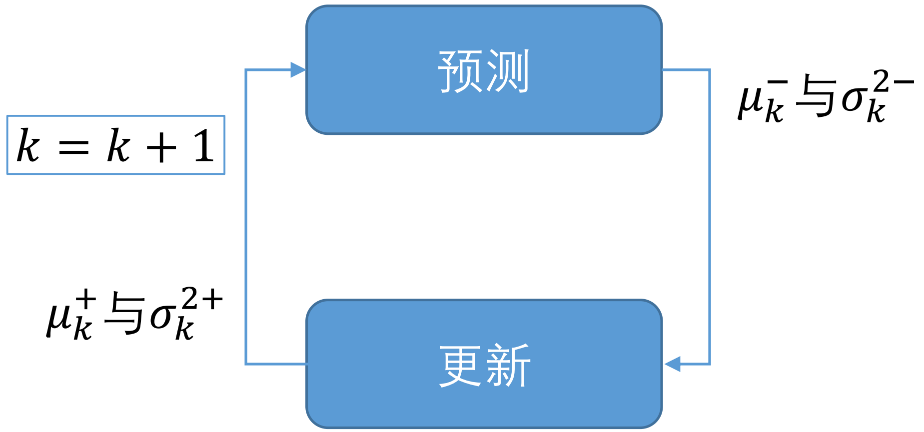
- $x_k^{+} \sim \mathcal{N}\left(\frac{H\sigma_k^{2-}y_k+R^2\mu_k^{-}}{H^2\sigma_k^{2-}+R^2}, \frac{\sigma_k^{2-}R^2}{H^2\sigma_k^{2-}+R^2}\right)$
- (4) $\mu_k^{+} = \mu_k^{-} + K_k(y_k - H\mu_k^{-})$
- (5) $\sigma_k^{2+} = (1 - K_k H)\sigma_k^{2-}$

- **从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波3**

  - 一维卡尔曼滤波
  - $Q_k \sim \mathcal{N}(0,\ Q^2)$，$R_k \sim \mathcal{N}(0,\ R^2)$，$x_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}\left(\mu_{k-1}^{+}, \sigma_{k-1}^{2+}\right)$
  - 状态方程：$X_k = FX_{k-1} + Q_k$
  - 观测方程：$Y_k = HX_k + R_k$

卡尔曼滤波

- (1) 一步预测状态：$\mu_k^{-} = F\mu_{k-1}^{+}$
- (2) 一步预测方差：$\sigma_k^{2-} = F^2\sigma_{k-1}^{2+} + Q^2$
- (3) 更新卡尔曼增益：$K_k = \frac{H\sigma_k^{2-}}{H^2\sigma_k^{2-} + R^2}$
- (4) 更新状态：$\mu_k^{+} = \mu_k^{-} + K_k(y_k - H\mu_k^{-})$
- (5) 更新方差：$\sigma_k^{2+} = (1 - K_kH)\sigma_k^{2-}$



- **从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波4**

  - 多维卡尔曼滤波

  - $\boldsymbol{Q}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)$，$\boldsymbol{R}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)$，$\boldsymbol{x}_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+})$

预测步

$$p_k^{-}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})\right) p_{\boldsymbol{f}_{k-1}}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{v}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{v})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right) (2\pi \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+})^T (\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+})^{-1} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+})\right) d\boldsymbol{v}$$

$$= \mathcal{N}\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)$$

预测步结论

- $\boldsymbol{x}_k^{-} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)$
- (1) $\boldsymbol{\mu}_k^{-} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}$
- (2) $\boldsymbol{\Sigma}_k^{-} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}$

- **从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波5**

  - 多维卡尔曼滤波

  - $\boldsymbol{Q}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)$，$\boldsymbol{R}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)$，$\boldsymbol{x}_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+})$

更新步

$$p_k^{+}(\boldsymbol{x}) = \eta * p_{\boldsymbol{R}_k}\big(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big) * p_k^{-}(\boldsymbol{x})$$

$$= \eta * \left(2\pi\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}^{-1}(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})\right)(2\pi\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_k^{-})^T(\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_k^{-})\right)$$

$$= \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_k^{+}, \boldsymbol{\Sigma}_k^{+})$$

(3) 卡尔曼增益$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_k^{-}\boldsymbol{H}^{T} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)^{-1}$

更新步结论(高斯分布的乘积分布)

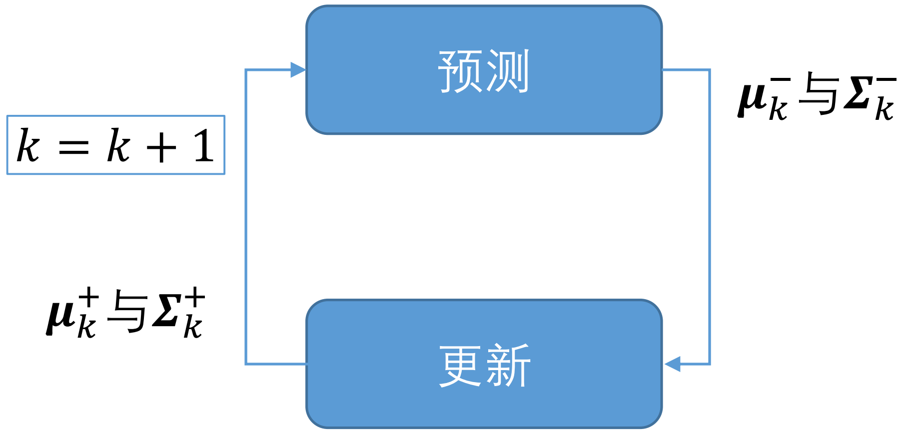
- $\boldsymbol{x}_k^{+} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\Sigma}_k^{+}\left((\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1}\boldsymbol{\mu}_k^{-} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}^{-1}\boldsymbol{y}_k\right), \left((\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}^{-1}\boldsymbol{H}\right)^{-1}\right)$
- (4) $\boldsymbol{\mu}_k^{+} = \boldsymbol{\Sigma}_k^{+}\left((\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1}\boldsymbol{\mu}_k^{-} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}^{-1}\boldsymbol{y}_k\right) = \boldsymbol{\mu}_k^{-} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\mu}_k^{-})$
- (5) $(\boldsymbol{\Sigma}_k^{+})^{-1} = (\boldsymbol{\Sigma}_k^{-})^{-1} + \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}^{-1}\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{\Sigma}_k^{+} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\boldsymbol{\Sigma}_k^{-}$

从贝叶斯滤波到卡尔曼滤波6

- 多维卡尔曼滤波
  - $\boldsymbol{Q}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}\right)$, $\boldsymbol{R}_k \sim \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)$, $\boldsymbol{x}_{k-1}^{+} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}, \boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+})$
  - 状态方程：$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_k$
  - 观测方程：$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{R}_k$

卡尔曼滤波

- (1) 一步预测状态：$\boldsymbol{\mu}_k^{-} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{k-1}^{+}$
- (2) 一步预测方差：$\boldsymbol{\Sigma}_k^{-} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}^{+}\boldsymbol{F}^{T} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Q}_k}$
- (3) 更新卡尔曼增益：$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k^{-}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_k^{-}\boldsymbol{H}^{T} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{R}_k}\right)^{-1}$
- (4) 更新状态：$\boldsymbol{\mu}_k^{+} = \boldsymbol{\mu}_k^{-} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{\mu}_k^{-})$
- (5) 更新方差：$\boldsymbol{\Sigma}_k^{+} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\boldsymbol{\Sigma}_k^{-}$



● 卡尔曼信息融合

- 信息融合：针对估计问题的数据融合，利用多个信息源(多传感器)集合中所包含的有用信息进行估计
- 韩崇昭 《多源信息融合》
- 本部分仅仅介绍观测扩维(并行滤波)
  - 状态方程：$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_k$
  - 观测方程：$\boldsymbol{Y}_{1k} = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{X}_{1k} + \boldsymbol{R}_{1k}$，$\boldsymbol{Y}_{2k} = \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{X}_{2k} + \boldsymbol{R}_{2k}$，假设传感器相互独立

处理方式：观测方程扩展维度

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{R}_k \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{1k} \\ \boldsymbol{Y}_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \\ & \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_k + \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{1k} & \\ & \boldsymbol{R}_{2k} \end{bmatrix}$$