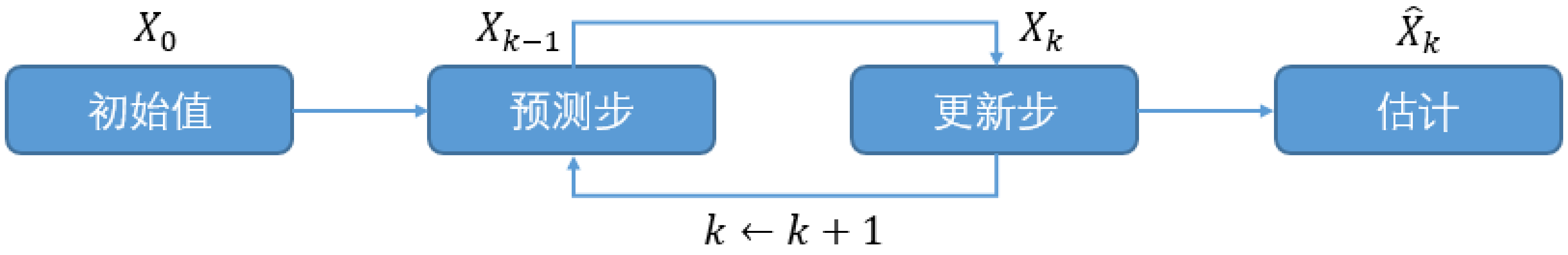
● 概述

□ (线性)卡尔曼滤波的缺点

➢ f与h存在非线性



□ 拓展卡尔曼滤波(EKF)假设

➢ f与h均可以线性化，线性化后：状态方程：$X_k = FX_{k-1} + Q_k$，观测方程：$Y_k = HX_k + R_k$

➢ $p_Q(x)$，$p_R(x)$为均值为0的正态分布，$p_0(x)$为正态分布

➢ $X_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mu_{k-1}^{+}, \Sigma_{k-1}^{+})$

□ 贝叶斯滤波存在的问题

预测步：$p_k^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(x - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv$

更新步：$p_k^+(x) = \eta * p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)$，$\eta^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)\, dx$

存在的问题：无穷积分，一般无解析解

- **大数定律**

  - 多种版本，辛钦大数定律

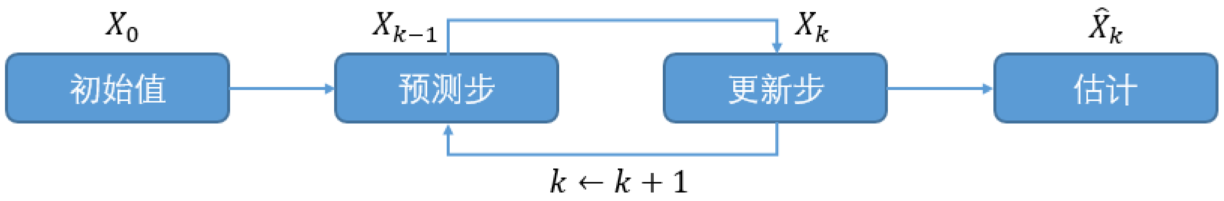
    - 已知$x_1, x_2, \dots, x_n$是随机变量X的采样，那么$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_i x_i - E(X)\right| < \varepsilon\right) = 1$
    - 当n足够大时，$\frac{1}{n}\sum_i x_i \approx E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx$
    - 引入Dirac函数$\delta(x)$，$\int_c^d f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \forall a \in (c,d)$
    - 不妨设$-\infty < x_1 < a_1 < x_2 < a_2 \dots < x_n < \infty$，则
    - $x_1 = \int_{-\infty}^{a_1} x\delta(x-x_1)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-x_1)dx$，即$x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-x_i)dx$
    - 于是$\frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-x_i)dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} x\sum_i \delta(x-x_i)\, dx$
    - 根据大数定律，可以得到$f(x) = \frac{1}{n}\sum_i \delta(x-x_i)$，当$n\to\infty$时
    - 暗示：可以使用一堆粒子，来近似概率密度函数pdf，这就是粒子滤波的来源

采样与粒子

- 采样越多越精确，需要大量粒子，如何使用少量粒子来表示pdf？
- 引入权重概率，让少量粒子具有较高的权重
- $f(x)=\sum_i \omega_i \delta(x-x_i)$，其中$\sum_i \omega_i=1$
- 换言之，粒子的位置与权重完全决定了cdf(或者说pdf)
- 如何确定粒子位置(从任意pdf中采样)和粒子权重(分配权重)？
- 如何采样：均匀采样(Monto Carlo积分)，接受-拒绝采样，重要性采样，MCMC方法等(后续介绍)
- 如何分配：原则上粒子的pdf越大值越大，即$f(x_i)$越大，ω_i越大
- 两种分配方法：均匀法$\omega_i=\frac{1}{n}$与比例分配法$\omega_i=\frac{f(x_i)}{\sum_i f(x_i)}$

08 粒子滤波

● 粒子滤波



□ 以正态分布为例，介绍粒子滤波如何进行

- ➢ 假设条件：$p_Q(x)$，$p_R(x)$为均值为0的正态分布，$p_0(x)$为正态分布
- ➢ $p_0(x) = \sum_i \omega_0^i \delta(x - x_0^i)$，其中$\omega_0^i = \frac{1}{n}$
- ➢ 预测步：$p_1^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_1}(x - f(v))p_{f_0}(v)dv = \sum_i \omega_0^i p_{Q_1}\left(x - f(x_0^i)\right)$
- ➢ 更新步：$p_1^+(x) = \eta * p_{R_1}(y_1 - h(x)) * p_1^-(x)$，无Dirac函数$\delta(x)$，无法递推
- ➢ 两种思路：对$p_1^-(x)$或者$p_1^+(x)$进行采样，过程复杂很难采样
- ➢ 通过概率密度函数pdf反求随机试验过程(通常是随机试验求概率密度函数pdf)，**将复杂的概率密度函数分解为简单的随机试验组合**

- **Fourier变换**

  - 概率密度函数，卷积，Fourier变换，Fourier逆变换
  - Fourier变换：$P(u)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{itx}dx$，Fourier逆变换：$p(x)=\int_{-\infty}^{\infty}P(u)e^{-itu}du$
  - 卷积定理1：随机变量X和Y相互独立，pdf分别为$p(x)$和$g(y)$，则随机变量$Z=X+Y$的概率密度函数为$f*g$
  - 卷积性质：卷积的Fourier变换等于Fourier变换的乘积，即$F(f*g)=F(f)F(g)$
  - 于是，对于$p_{Q_1}\left(x-f\left(x_0^i\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}Q_1}\exp\left(-\frac{\left(x-f\left(x_0^i\right)\right)^2}{2Q_1^2}\right)=\mathcal{N}\left(f\left(x_0^i\right),Q_1^2\right)$
  - $\mathcal{N}\left(f\left(x_0^i\right),Q_1^2\right)\overset{FT}{\rightarrow}\exp\left(if\left(x_0^i\right)u-\frac{1}{2}Q_1^2u^2\right)=\exp\left(if\left(x_0^i\right)u\right)\exp(-\frac{1}{2}Q_1^2u^2)$
  - $\exp\left(if\left(x_0^i\right)u\right)\overset{iFT}{\longrightarrow}\delta\left(x-f\left(x_0^i\right)\right)$，$\exp(-\frac{1}{2}Q_1^2u^2)\overset{iFT}{\longrightarrow}\mathcal{N}(0,Q_1^2)$
  - 从而有，$p_{Q_1}\left(x-f\left(x_0^i\right)\right)$可以看成必然事件$X=f\left(x_0^i\right)$与随机数$Y\sim\mathcal{N}(0,Q_1^2)$的叠加

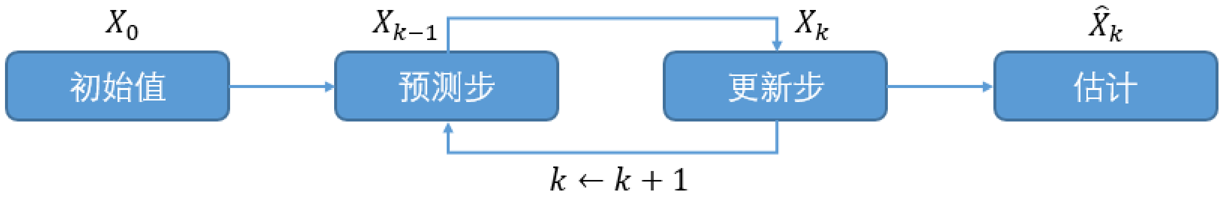
- **粒子滤波**

  - 预测步与更新步的迭代

  - $p_1^-(x)$的采样粒子为$x_1^{-1}, x_1^{-2}, \ldots, x_1^{-n}$，其中$x_1^{-i} = f\left(x_0^i\right) + v_i$，$v_i \sim \mathcal{N}(0, Q_1^2)$
  - 预测步本质：改变粒子的位置，并未改变粒子的权重
  - 更新步：$p_1^+(x) = \eta * p_{R_1}\left(y_1 - h(x)\right) * p_1^-(x) = \sum_i \eta * p_{R_1}\left(y_1 - h(x)\right)\omega_0^i \delta\left(x - x_1^{-i}\right)$
  - 根据Dirac函数$\delta(x)$性质，$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$，则
  - $p_1^+(x) = \sum_i \eta * p_{R_1}\left(y_1 - h\left(x_1^{-i}\right)\right)\omega_0^i \delta\left(x - x_1^{-i}\right)$，设$\omega_1^i = p_{R_1}\left(y_1 - h\left(x_1^{-i}\right)\right)\omega_0^i$，则
  - $p_1^+(x) = \eta \sum_i \omega_1^i \delta\left(x - x_1^{-i}\right)$，其中$\eta = \left(\sum_i \omega_1^i\right)^{-1}$，注意$\eta$是归一化参数，我们一直使用了同一个变量
  - 更新步本质：改变粒子的权重，并未改变粒子的位置，所以x_1^{-i}可以使用x_1^i代替

08 粒子滤波

粒子滤波



算法步骤

- 初始步：假设$p_0(x)$为正态分布，采样生成X_0的样本$x_0^i(i=1,2,\dots,n)$与权重ω_0^i
- 预测步：生成$p_k^-(x)$的采样粒子为$x_k^1,x_k^2,\dots,x_k^n$，其中$x_k^i = f\left(x_{k-1}^i\right)+v_i$，$v_i\sim\mathcal{N}\left(0,Q_k^2\right)$
- 更新步：$p_k^+(x) = \eta\sum_i \omega_{k-1}^i\delta\left(x-x_k^i\right)$，其中$\omega_k^i = p_{R_1}\left(y_k-h\left(x_k^i\right)\right)\omega_{k-1}^i$，$\eta=\left(\sum_i \omega_{k-1}^i\right)^{-1}$

- 总结
- 大数定律：pdf可以由带权重的粒子表示
- 粒子数量、位置和权重决定了pdf
- 待解决的问题：理论问题(复杂分布如何采样)，工程问题(粒子退化如何重采样)

● 重采样

□ 粒子退化的工程问题

- ➢ 粒子退化：只有少数粒子具有较高的权重，大量粒子的权重极低
- ➢ 原因：粒子数不能取太多，$\omega_k^i = p_{R_1}\left(y_k - h\left(x_k^i\right)\right)\omega_{k-1}^i$中$p_{R_1}$是$\exp(-\lambda x^2)$型
- ➢ 导致：按比例分配时，某些粒子的相对权重远大于其他粒子，下一更新步会失效

□ 重采样

- ➢ 原则：按概率密度进行复制与淘汰
- ➢ 多次(保持粒子数不变)均匀在[0, 1]采样，按照结果落在的区间选择对应的粒子
- ➢ 把所有选择的粒子的权重均设置为$\frac{1}{n}$

- ➢ 有一定减弱粒子退化的能力，但是未从根本上改变粒子退化，只是解决了下一更新步失效的问题
- ➢ 必然会导致粒子丧失多样性，同时会减慢粒子滤波的收敛速度

● 采样方法

□ 复杂分布的采样方法

- ➢ 简单分布(均匀分布、正态分布)容易采样
- ➢ 采样粒子的特点：pdf大的地方粒子多，pdf小的地方粒子少
- ➢ 思想：通过没和方法去掉一些粒子，将分布从一种分布(简单分布)变为另一种分布(复杂分布)

□ 接受-拒绝采样

- ➢ 需要采样$p(z)$，提议分布(容易采样的分布) $q(z)$
- ➢ 找到一个常数k，使得$kq(z) \geq p(z)$
- ➢ 采样$z_0 \sim q(z)$和$u_0 \sim U(0,1)$
- ➢ 如果$u_0 \leq \frac{p(z_0)}{kq(z_0)}$，则接受该采样，否则拒绝
- ➢ 重复上述步骤，直到采样足够的例子