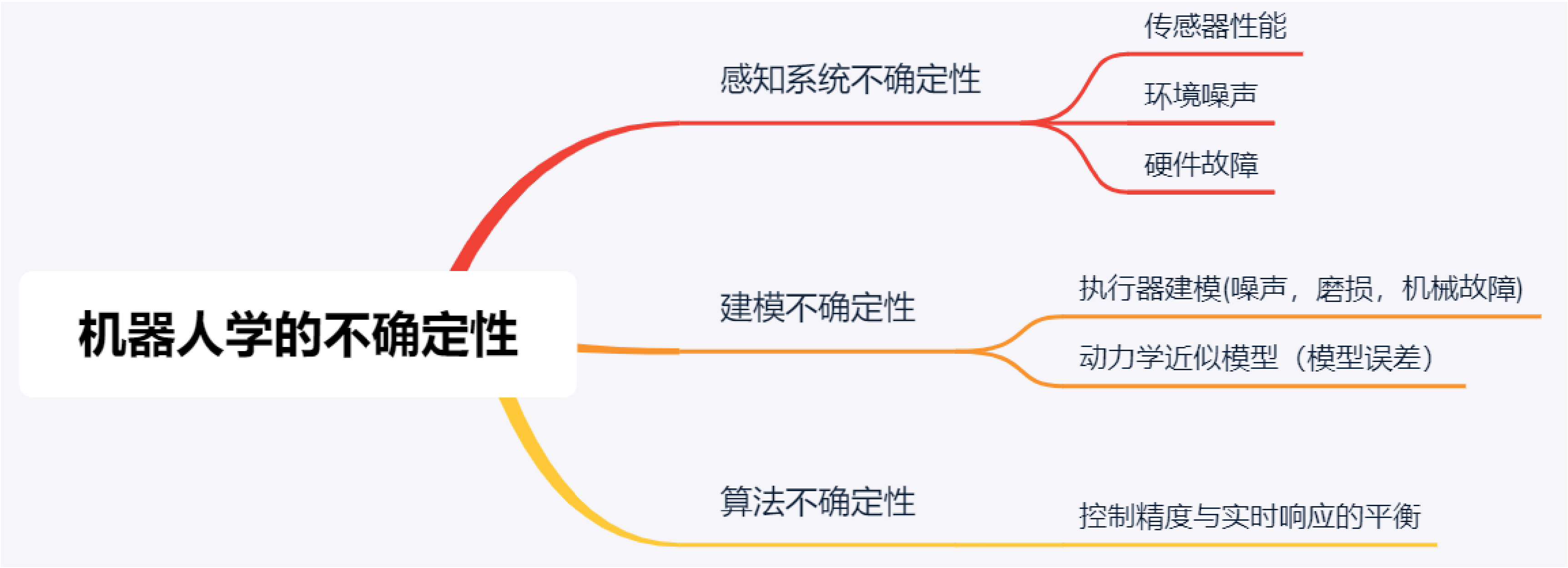
- **机器人学中的不确定性**



- ☐ 算法的不确定性：算法改进

（例：Kalman滤波器P矩阵在迭代过程中不能保证正定，改进：平方根滤波）

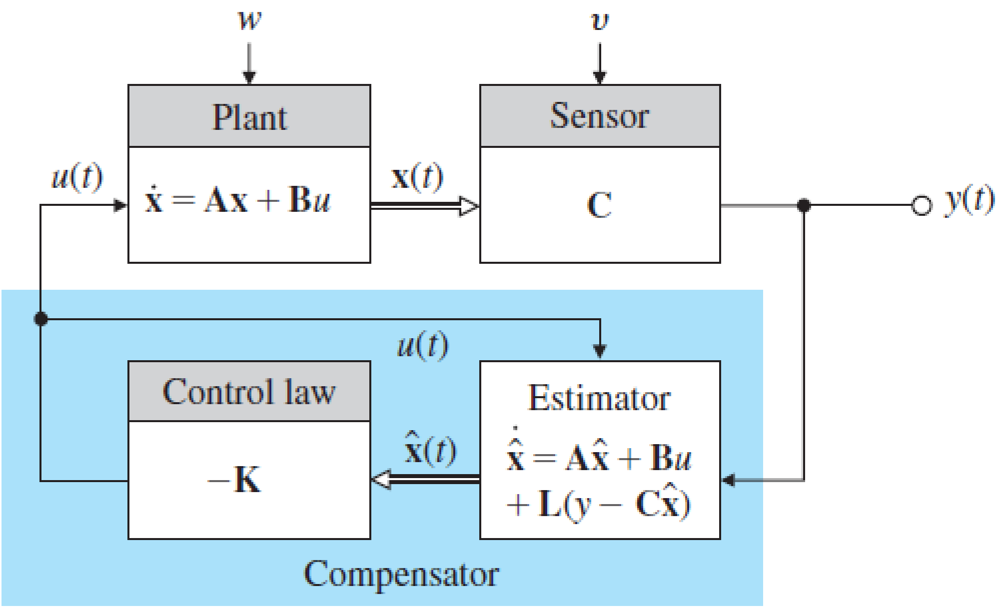
- ☐ 建模不确定性：**参数估计**

（建模不确定性，要么提出更合理的模型，要么对参数进行估计或者自适应）

- ☐ 感知系统不确定性：**状态估计**

（感知系统不确定性，要么采用更高级的传感器，要么对状态进行估计）

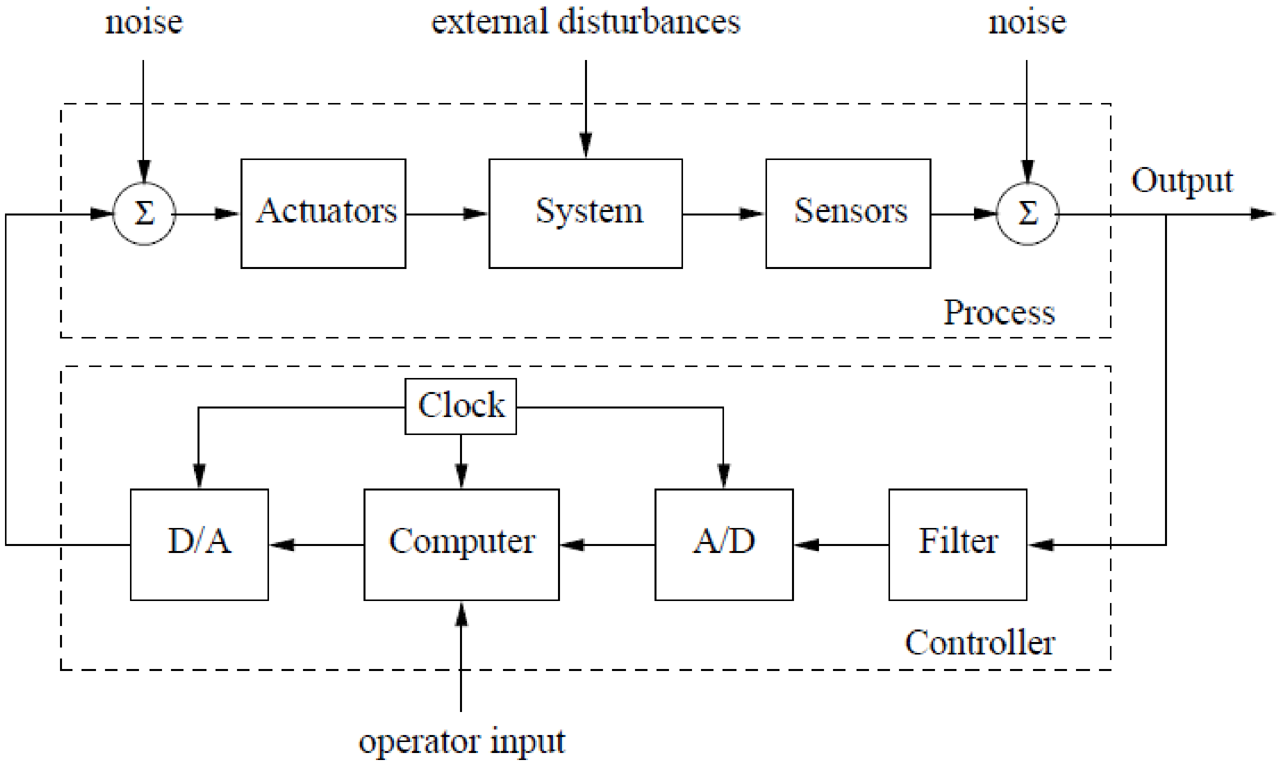
控制视角



w
v
Plant
Sensor
u(t)
ẋ = Ax + Bu
x(t)
C
y(t)
u(t)
Control law
Estimator
x̂(t)
−K
x̂̇ = Ax̂ + Bu
+ L(y − Cx̂)
Compensator

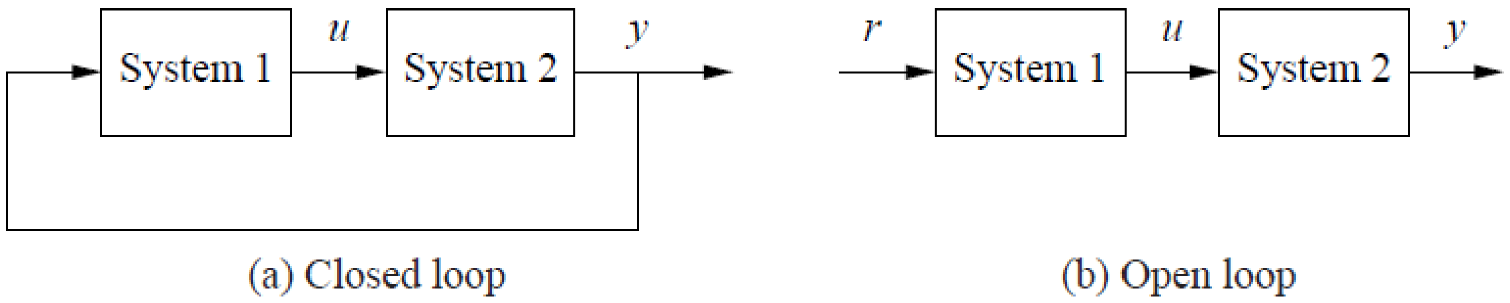
控制器 + 观测器

- **控制**
  - 控制是使系统变量维持特定值(称为参考值)的过程
  - 设计用来跟随变化参考值的系统被称为跟踪控制或伺服
  - 设计无论存在何种干扰都保持固定输出的系统被称为调节控制或调节器
  - 控制分为两类：使用拉普拉斯变换(或z变换)的经典控制，基于状态方程的现代控制



开环与闭环控制

- 根据控制中使用的信息定义两种控制，并根据产生的结构命名
- 在开环控制中，系统不测量输出，也没有对驱动信号进行校正以使其输出符合参考信号
- 在闭环控制中，该系统包括传感器来测量输出，并利用感知值的反馈来影响控制变量
- 设计良好的反馈控制系统将是稳定的，跟踪期望输入，抗干扰，并且对设计中使用的数学模型的变化不敏感(或鲁棒)



- **反馈控制**

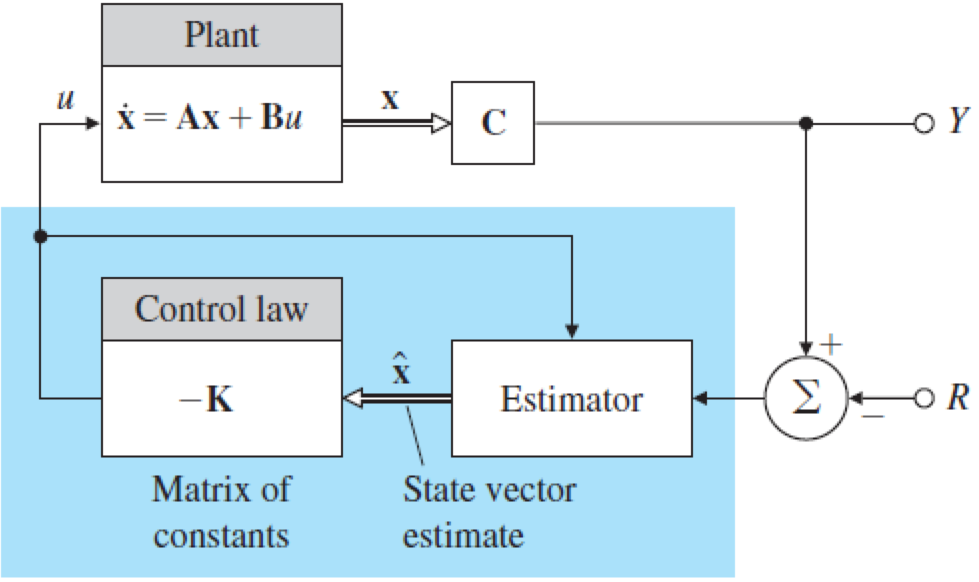
□ 遇事不决，反馈法则

➢ Step1：设计（状态反馈）控制律$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx}$

➢ Step2：当状态部分可观测时，需要设计估计器（观测器）去计算全状态值

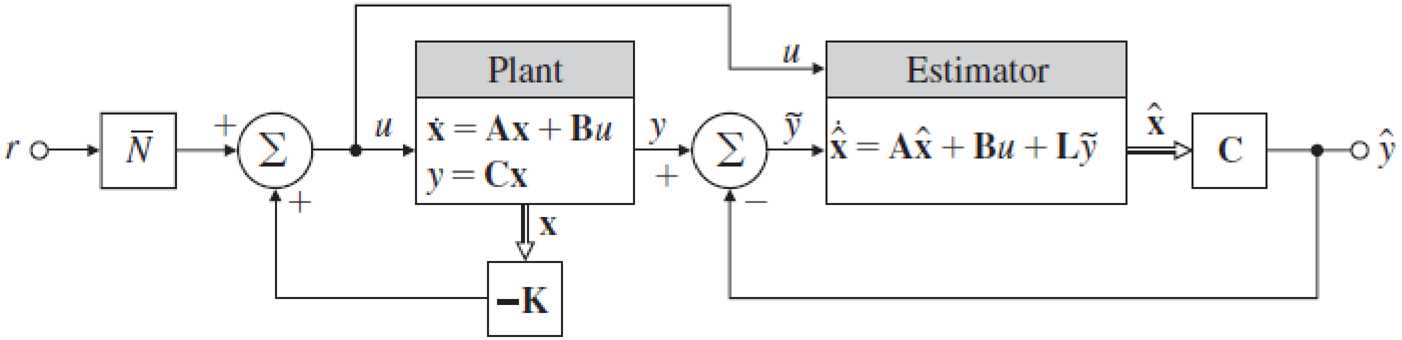
➢ Step3：控制律 + 估计器 = 补偿器（完整控制系统）

➢ Step4：引入参考输入



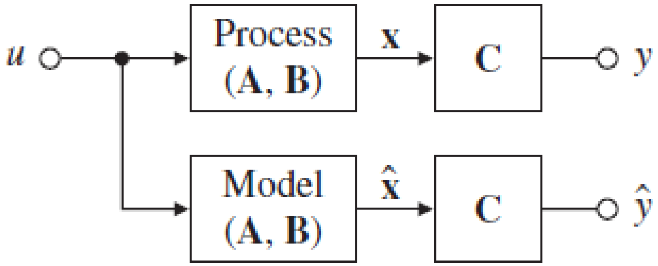
Compensation

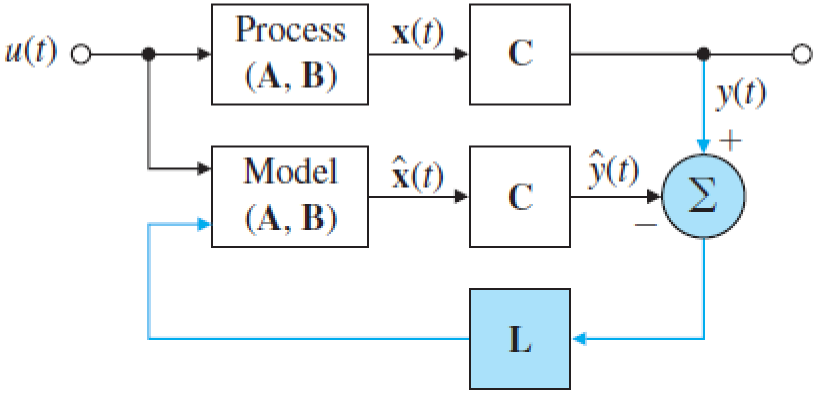
注意：
（1）若状态完全可观测，直接使用反馈控制
（2）若状态部分可观测，通常需要对状态进行重构，也就是状态估计



- **状态重构——全阶估计器**

  - 思路：通过对被控对象建立一个全阶估计器 $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u$, 如果满足 $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0). = 0$，那么这个开环的估计器就是满足要求的
  - 问题：缺乏构造估计器所需的初始状态 $\mathbf{x}(0)$，否则被估计的状态就能精确跟踪实际状态
  - 黄金法则：有问题，用反馈
  - 将被测输出与待估输出之差反馈到输入端，并利用该误差信号不断修正预测模型
  - $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}).$





● 状态重构——降阶估计器

可观测与不可观测

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{A}_{ba} & \mathbf{A}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u, \tag{7.147a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \tag{7.147b}$$

不可观测部分

$$\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{A}_{bb}\mathbf{x}_b + \underbrace{\mathbf{A}_{ba}x_a + \mathbf{B}_b u}_{\text{known input}}, \tag{7.148}$$

可观测部分微分

$$\dot{x}_a = \dot{y} = A_{aa}y + \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b + B_a u. \tag{7.149}$$

观测部分代替不可观测

$$\underbrace{\dot{y} - A_{aa}y - B_a u}_{\text{known measurement}} = \mathbf{A}_{ab}\mathbf{x}_b, \tag{7.150}$$

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_b, \tag{7.151a}$$

$$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{A}_{bb}, \tag{7.151b}$$

$$\mathbf{B}u \leftarrow \mathbf{A}_{ba}y + \mathbf{B}_b u, \tag{7.151c}$$

$$y \leftarrow \dot{y} - A_{aa}y - B_a u, \tag{7.151d}$$

$$\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{A}_{ab}. \tag{7.151e}$$

全阶状态估计器(7.148)和(7.150)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = \mathbf{A}_{bb}\hat{\mathbf{x}}_b + \underbrace{\mathbf{A}_{ba}y + \mathbf{B}_b u}_{\text{input}} + \mathbf{L}\,(\underbrace{\dot{y} - A_{aa}y - B_a u}_{\text{measurement}} - \mathbf{A}_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b). \tag{7.152}$$

整理

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_b = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{L}A_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{L}B_a)u + \mathbf{L}\dot{y}. \tag{7.156}$$

引入新的控制变量来消去y的导数

$$\mathbf{x}_c \triangleq \hat{\mathbf{x}}_b - \mathbf{L}y. \tag{7.157}$$

降阶估计器，不再出现y的导数

$$\dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{A}_{bb} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{ab})\hat{\mathbf{x}}_b + (\mathbf{A}_{ba} - \mathbf{L}A_{aa})y + (\mathbf{B}_b - \mathbf{L}B_a)u, \tag{7.158}$$

● 分离定理——控制与估计的解耦

控制器

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}, \qquad (7.165)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}). \qquad (7.166)$$

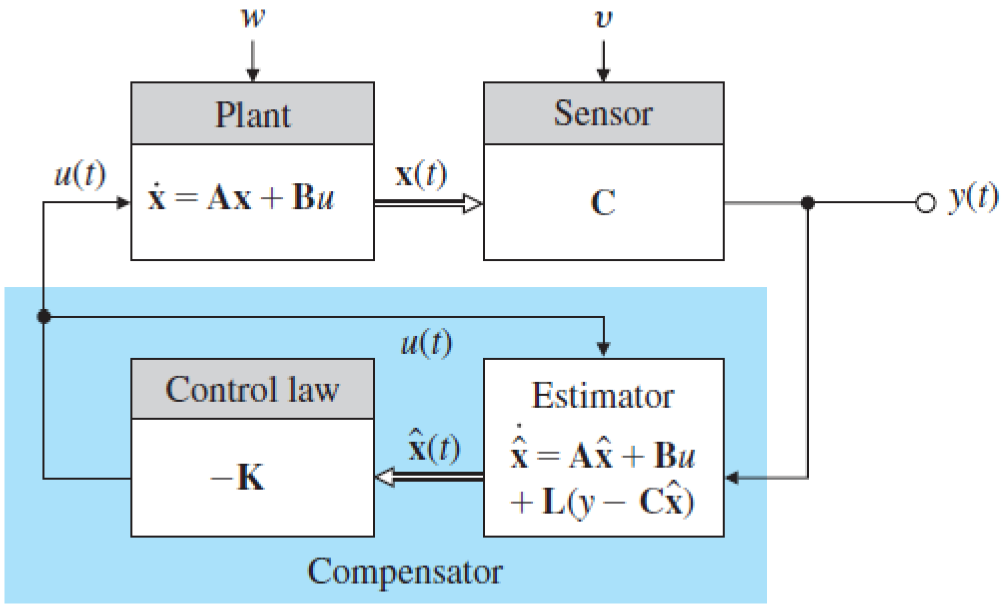
增广控制系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \qquad (7.167)$$

极点

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} \end{bmatrix} = 0. \qquad (7.168)$$

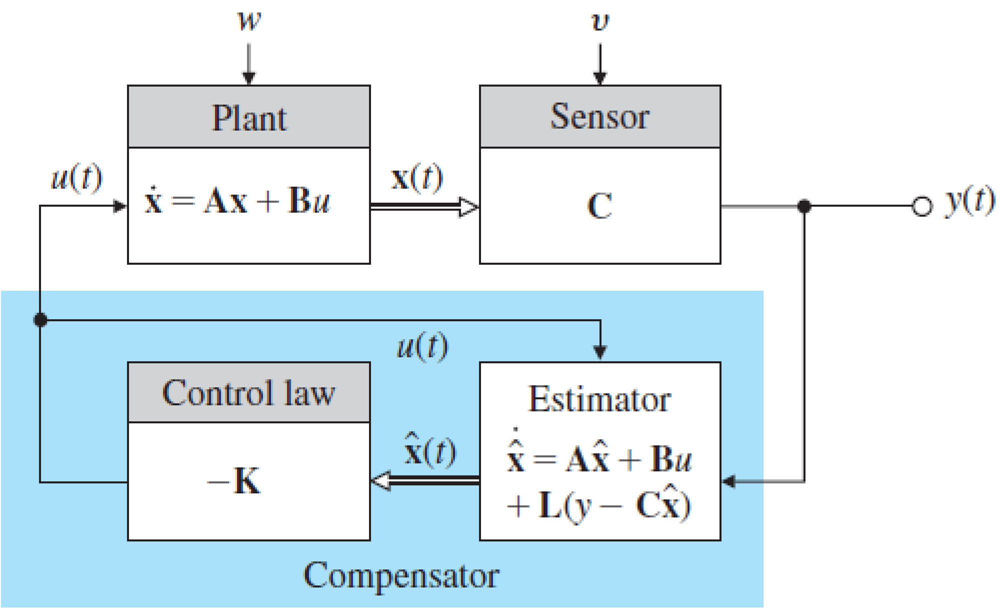
$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0. \qquad (7.169)$$



➢ 系统的控制器与估计器分别设计然后合成，并不影响系统的动态性能(极点)

● 状态估计

- ➢ 研究机器人感知系统的不确定性，而其主要思想就是用观测器去明确地表达这种不确定性
- ➢ 状态可观测，直接利用观测 + 采用滤波(FIR，IIR)
- ➢ 状态不可观测，利用观测信息去估计状态(Luenberger观测器为基础)



Luenberger观测器的含义

（1）预测：基于模型(信息，知识)的预测

（2）校正：基于感知(传感)的观测

概率视角

$$\theta_{\mathrm{ML}} = \arg\max_{\theta} \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim\hat{p}_{\mathrm{data}}} \log p_{\mathrm{model}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}). \tag{5.59}$$

$$\theta_{\mathrm{MAP}} = \arg\max_{\theta} p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{x}) = \arg\max_{\theta} \log p(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) + \log p(\boldsymbol{\theta}). \tag{5.79}$$

最大似然估计 + 最大后验估计

- **频率学派与贝叶斯学派**

□ 频率学派

➢ 参数θ是未知的固定值，观测Y|X的随机变量，采用Y|X去估计参数θ

最大似然估计很容易扩展到估计条件概率 $P(\mathbf{y} \mid \mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$，从而给定 $\mathbf{x}$ 预测 $\mathbf{y}$。实际上这是最常见的情况，因为这构成了大多数监督学习的基础。如果 $\boldsymbol{X}$ 表示所有的输入，$\boldsymbol{Y}$ 表示我们观测到的目标，那么条件最大似然估计是

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{ML}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max} P(\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta}). \tag{5.62}$$

➢ 最大似然估计（大数定律）
➢ 可用于系统辨识或滤波的理论

□ 贝叶斯学派

➢ 参数是θ是随机变量，观测Y|X直接观测不是随机的，采用X|Y去估计参数θ

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{MAP}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max}\, p(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{x}) = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max}\, \log p(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}) + \log p(\boldsymbol{\theta}). \tag{5.79}$$

➢ 最大后验估计（贝叶斯定理）
➢ 可用于状态估计

02 机器人估计——多视角

- **随机过程与确定过程**

随机试验
（1）可重复性，试验在相同条件下可以重复进行
（2）可知性，每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确试验所有可能的结果
（3）不确定性，试验前不能确定哪个结果会出现，但必然出现所有可能结果中的一个

□ 随机过程

➢ $x_1, x_2, \ldots, x_n$彼此之间不相互独立

□ 确定过程

➢ 自由落地运动$x_1 = g\Delta t, x_2 = 2g\Delta t, \ldots, x_n = ng\Delta t$

《概率论与数理统计》：中心极限定理，大数定律要求：随机变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$独立同分布

《随机过程》：随机变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$不独立（随机试验无法进行）

主观概率与客观概率

➢ 主观概率：状态无法做随机试验，通过经验与合理判断给出的主观测度

➢ 客观概率：大量随机试验，通过频率去估计概率（大数定律）

● 模型与概率

- 随机过程$x_1, x_2, \dots, x_n$彼此之间不相互独立
- 随机过程满足$x_{k+1} = f(x_k)$，那么$P(x_{k+1}) = f\big(P(x_k)\big)$（注意不同于随机变量函数关系求分布的Jacobi）
- 存在的问题：初始状态的概率分布$P(x_0)$未知
- 解决思路：若初值不能通过随机试验求得，那么使用主观概率给出

- 不同的主观概率会导致不同的结果
- 引入外部观测（信息，证据）来修正主观概率，得到相对客观的概率
- 先验概率：根据经验与判断得到的概率
- 后验概率：根据观测修正得到的概率

- **三大概率**

令 X 表示一个随机变量，x 表示 X 的某一特定值。

为了简化符号，在可能时通常省略随机变量的明确表示，而是使用常见的缩写 $p(x)$ 代替 $p(X=x)$。

注意：随机变量与随机变量的取值

两个随机变量 X 和 Y 的联合分布（joint distribution）由下式给出：

$$p(x,y)=p(X=x,Y=y) \tag{2.6}$$

随机变量经常携带其他随机变量的信息。假定已经知道 Y 的值是 y，想知道基于以上事实条件 X 为 x 的概率。这样的概率表示为

$$p(x\mid y)=p(X=x\mid Y=y) \tag{2.8}$$

称为条件概率（conditional probability）。如果 $p(y)>0$，则条件概率定义为

$$p(x\mid y)=\frac{p(x,y)}{p(y)} \tag{2.9}$$

从条件概率和概率测量公理得出的一个有趣事实经常被称为全概率定理（theorem of total probability）：

$$p(x)=\sum_y p(x\mid y)p(y) \quad \text{（离散情况）} \tag{2.11}$$

$$p(x)=\int p(x\mid y)p(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{（连续情况）} \tag{2.12}$$

同样重要的是贝叶斯准则（Bayes rule），该定理将条件概率 $p(x\mid y)$ 与其“逆”概率 $p(y\mid x)$ 联系起来。如此处所阐述的，准则要求 $p(y)>0$：

$$p(x\mid y)=\frac{p(y\mid x)p(x)}{p(y)}=\frac{p(y\mid x)p(x)}{\sum_{x'}p(y\mid x')p(x')} \quad \text{（离散）} \tag{2.13}$$

$$p(x\mid y)=\frac{p(y\mid x)p(x)}{p(y)}=\frac{p(y\mid x)p(x)}{\int p(y\mid x')p(x')\,\mathrm{d}x'} \quad \text{（连续）} \tag{2.14}$$

贝叶斯概率分析

- 概率分析
- 如果状态X = x是由观测Y = y推测得到
- p(X = x)先验概率，总结了在观测数据Y = y之前的状态X = x的信息
- p(Y = y | X = x)似然概率，传感器精度
- p(X = x | Y = y)后验概率，总结了在观测数据Y = y之后的状态X = x的信息
- p(Y = y)，传感器模型，**不依赖于状态的**取值$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$**，依赖于状态**的分布$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$
- 贝叶斯推断

$$p(x \mid y) = \eta p(y \mid x) p(x) \tag{2.15}$$

- **似然模型**
  - 常数型
  - 阶梯型
  - 直方图型
  - 正态分布型
  - Dirac型

02 机器人估计——多视角

● 概率模型下的控制与观测

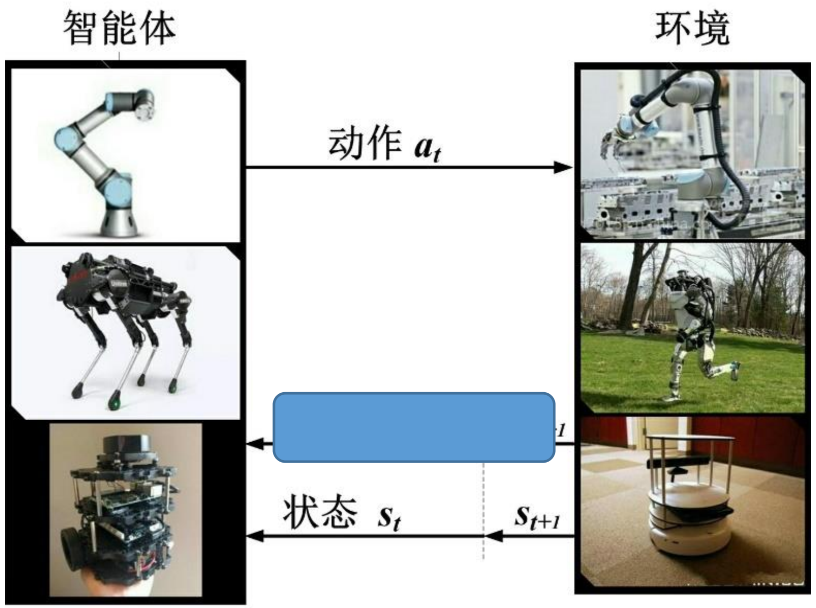
➢ 机器人与环境之间进行交互

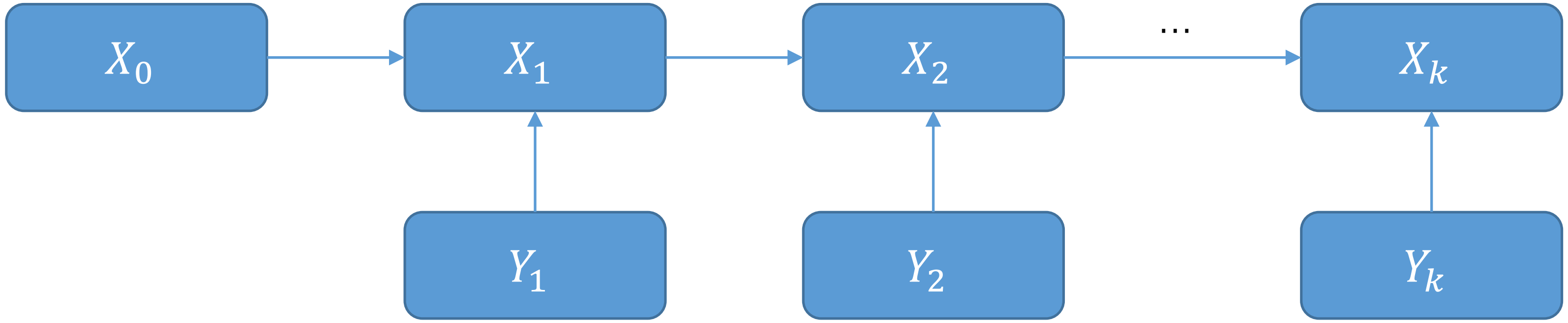
➢ 感知：通过感知过程，机器人利用传感器获得环境状态的信息

➢ 控制：通过控制过程，机器人改变了环境状态

➢ 状态方程：描述状态转移的过程

➢ 观测方程：描述状态如何引起传感器变化





- **信息融合**

➢ 贝叶斯滤波：先验分布与似然的融合，通过观测的后验概率分布，降低预测的先验概率的不确定性（后验方差 < 先验方差）

➢ 最优估计：也变成了后验概率分布的期望

Tip

➢ 已知先验分布$p(x) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，似然为$p(y|x) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则后验分布为$p(x|y) \sim N(\mu, \sigma^2)$

➢ 后验分布也是正态分布： $\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$， $\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

➢ $\sigma^2 \leq \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$，两个高斯分布融合之后得到的高斯分布方差会变小（不确定度变小）

➢ $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$， $\sigma^2 = \sigma_2^2$，预测误差很大时，结果取决于测量误差

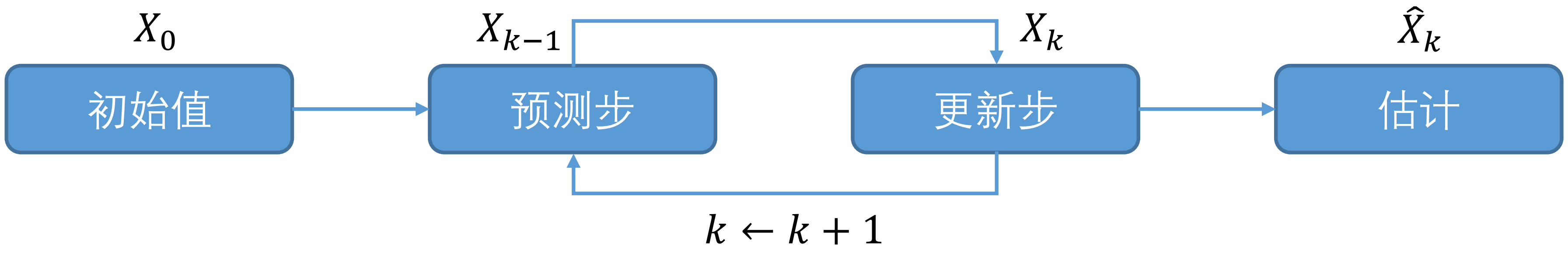
➢ $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$， $\sigma^2 = \sigma_1^2$，测量误差很大时，结果取决于预测误差

➢ $\sigma_2^2 = 0$， $\sigma^2 = 0$，测量完全精确时，不需要预测模型

02 机器人估计——多视角

● 贝叶斯滤波推导1

- 状态方程：$X_k = f(X_{k-1}) + Q_k$
- 观测方程：$Y_k = h(X_k) + R_k$
- 其中Q_k，R_k与X_0相互独立，其分布分别为$p_Q(x)$，$p_R(x)$和$p_0(x)$



Tip

- 1. X_{k-1}与Q_k相互独立：$X_{k-1} = F(X_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1})$，显然与$Q_k$相互独立
- 2. X_k与R_k相互独立：$X_k = F(X_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_k)$，显然与$R_k$相互独立
- 3. 随机过程中的条件概率：$P(Y = y|X = x) = P(Y - f(X) = y - f(x)|X = x)$，等价概念

- **贝叶斯滤波推导2**

Tip

➢ 4. 概率密度的贝叶斯公式

$$P(X<x|Y=y)=\sum_{u=-\infty}^{x}P(X=u|Y=y)=\sum_{u=-\infty}^{x}\frac{P(Y=y|X=u)P(X=u)}{P(Y=y)}$$ 贝叶斯公式

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sum_{u=-\infty}^{x}\frac{P(y<Y<y+\varepsilon|X=u)P(u<X<u+\varepsilon)}{P(y<Y<y+\varepsilon)}$$ 极限定义

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sum_{u=-\infty}^{x}\frac{p_{Y|X}(\eta_1|u)*\varepsilon*p_X(\eta_2)*\varepsilon}{p_Y(\eta_3)*\varepsilon}$$ 积分中值定理，其中$\eta_1,\eta_3\in(y,y+\varepsilon)$，$\eta_2\in(u,u+\varepsilon)$

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\sum_{u=-\infty}^{x}\frac{p_{Y|X}(y|u)*p_X(\eta_2)}{p_Y(y)}*\varepsilon$$ 当$\varepsilon\to\infty$时，$\eta_1,\eta_3\to y$(与x无关)

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{p_{Y|X}(y|u)*p_X(u)}{p_Y(y)}du$$ 定积分定义

求导，可得 $$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p_{Y|X}(y|x)*p_X(x)}{p_Y(y)}$$

- **贝叶斯滤波推导3**

预测步

➢ 根据上一时刻$k-1$的更新步状态来预测当前时刻k预测步状态$p_k^-(x)$

$$P(X_k < x) = \sum_{u=-\infty}^{x} P(X_k = u)$$

$$P(X_k = u) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} P(X_k = u | X_{k-1} = v) P(X_{k-1} = v)$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} P(X_k - f(X_{k-1}) = u - f(v) | X_{k-1} = v) P(X_{k-1} = v) \quad \textbf{tip3}$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} P(Q_k = u - f(v) | X_{k-1} = v) P(X_{k-1} = v)$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} P\big(Q_k = u - f(v)\big) P(X_{k-1} = v) \quad \textbf{tip1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(u - f(v)\big) * \varepsilon * p_{f_{k-1}}(v) * \varepsilon \quad \textbf{tip4}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(u - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv * \varepsilon$$

$$P(X_k < x) = \sum_{u=-\infty}^{x} P(X_k = u)$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{x} \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(u - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv * \varepsilon \quad \textbf{tip4}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(u - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv du$$

求导，可得

$$p_k^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(x - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv$$

卷积分布

- **贝叶斯滤波推导4**

更新步

➢ 根据当前时刻k的预测步状态来更新当前时刻k更新步状态$p_k^+(x)$

$$p_{Y_k|X_k}(y_k|x) = \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{P(y_k < Y_k < y_k + \varepsilon | X_k = x)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{P(y_k - h(x) < Y_k - h(x) < y_k - h(x) + \varepsilon | X_k = x)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{P(y_k - h(x) < R_k < y_k - h(x) + \varepsilon)}{\varepsilon}$$

tip3

$$= p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big)$$

$$p_k^+(x) = p_{X_k|Y_k}(x|y_k) = \frac{p_{Y_k|X_k}(y_k|x) * p_k^-(x)}{p_{Y_k}(y_k)} = \eta * p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)$$

乘积分布

所以 $$p_k^+(x) = \eta * p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)$$

$$\eta^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)\, dx$$

- **贝叶斯滤波算法**

1	初始化：$p_{f_0}(x)$
2	更新周期步：$k \leftarrow k+1$
3	预测步：$p_k^-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Q_k}\big(x - f(v)\big) p_{f_{k-1}}(v) dv$
4	更新步：$p_k^+(x) = \eta * p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)$，$\eta^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{R_k}\big(y_k - h(x)\big) * p_k^-(x)\, dx$
5	状态估计：$\hat{X}_k = \int_{-\infty}^{\infty} x p_k^+(x) dx$
6	返回第2步

优点：通过贝叶斯滤波，降低状态估计的不确定度（方差减小）
缺点：很难计算先验分布的无穷积分，后验分布参数η^{-1}的无穷积分，以及状态估计的无穷积分