

01 轨迹优化简介

● 从一个简单的例子说起

■ 问题

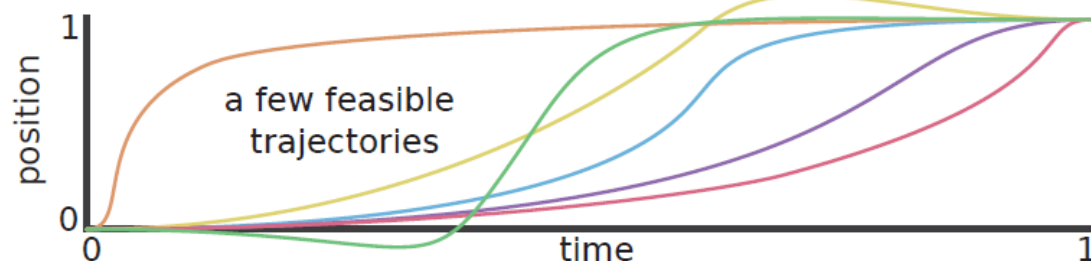
- 将光滑水平面上的滑块在力 f 的作用下从 A 点转移到 B 点

■ 可行解

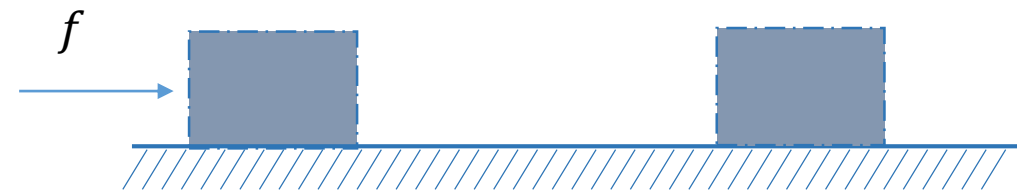
- 非唯一

■ 最优解

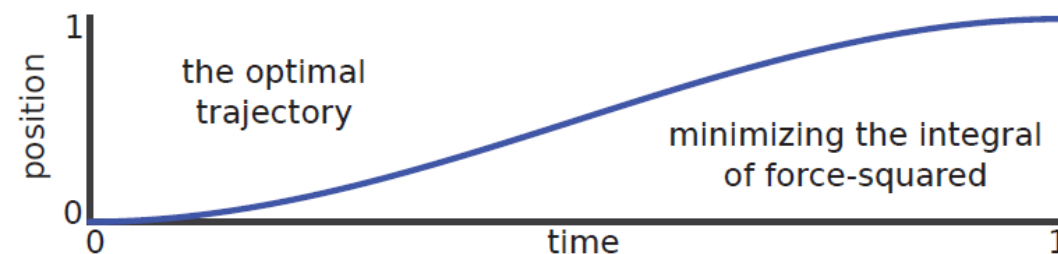
- 唯一



可行解轨迹



A	B
$t = 0$	$t = 1$
$x = 0$	$x = 1$
$v = 0$	$v = 0$



最优轨迹

● 从一个简单的例子说起

■ 约束

➤ 轨迹优化问题中所有的问题要求，也就是所谓的约束；滑块问题的约束有两个：

➤ System Dynamics

$$\dot{x} = \nu, \quad \dot{\nu} = u, \quad \text{system dynamics.}$$

➤ Boundary Conditions

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x(1) &= 1, \\ \nu(0) &= 0, & \nu(1) &= 0, \end{aligned}$$

■ 可行解

➤ 满足所有约束的解，被称为可行解；产生可行轨迹的控制集称为容许控制

■ 最优解

➤ 轨迹优化是指寻找可行轨迹中的最优轨迹；通常我们形式化一个目标函数来描述最优轨迹；

➤ 滑块问题常用的目标函数：最小力平方和最小绝对功

$$\min_{u(t), x(t), \nu(t)} \int_0^1 u^2(\tau) d\tau, \quad \text{minimum force squared,}$$

$$\min_{u(t), x(t), \nu(t)} \int_0^1 |u(\tau) \nu(\tau)| d\tau, \quad \text{minimum absolute work.}$$

● 轨迹优化问题

■ 目标函数

- (1) Mayer形式: 仅包含边界项
- (2) Lagrange形式: 仅包含路径积分项
- (3) Bolza形式: 包含边界项和路径积分项

$$\min_{t_0, t_F, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)} \underbrace{J(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F))}_{\text{Mayer Term}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_F} w(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau}_{\text{Lagrange Term}}.$$

■ 约束条件

- (1) System Dynamics
- (2) path constraints
- (3) boundary constraints
- (4) path bound on states
- (5) path bound on controls
- (6) bounds on initial and final time
- (7) bound on initial state
- (8) bound on final state

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0$$

$$g(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) \leq 0$$

$$\mathbf{x}_{\text{low}} \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_{\text{upp}}$$

$$\mathbf{u}_{\text{low}} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\text{upp}}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{low}} &\leq t_0 < t_F \leq t_{\text{upp}}, \\ \mathbf{x}_{0,\text{low}} &\leq \mathbf{x}(t_0) \leq \mathbf{x}_{0,\text{upp}}, \\ \mathbf{x}_{F,\text{low}} &\leq \mathbf{x}(t_F) \leq \mathbf{x}_{F,\text{upp}}, \end{aligned}$$

01 轨迹优化简介

● 变分法

■ 目标函数（优化准则）

$$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau = \int_0^1 \ddot{x}^2(\tau) d\tau$$

■ Euler-Lagrange方程

$$\mathcal{L}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = \mathcal{L}(\ddot{x}) = \ddot{x}^2$$

■ Lagrange函数

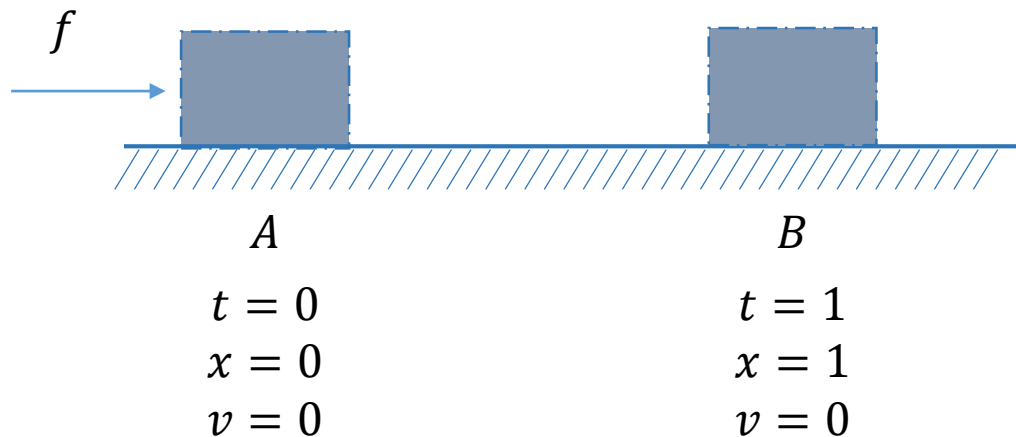
■ 求解结果

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} = 0$$

得： $x^{(4)} = 0$ ，也就是说最优轨迹具有三次多项式的形式！

代入边界条件可以得到：

$$x^*(t) = 3t^2 - 2t^3$$



01 轨迹优化简介

● 一般变分法

■ 目标函数（优化准则）

$$x^*(t) = \operatorname{argmin}_{x(t)} \int_0^T \mathcal{L}(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) dt$$

■ Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (x^{(n)})} \right) = 0$$

■ Lagrange函数

$$\mathcal{L}(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = (x^{(n)})^2$$

■ 一些说明

- $n = 1$ 最小速度
- $n = 2$ 最小加速度
- $n = 3$ 最小jerk
- $n = 4$ 最小snap
- ...

● MinJerk

■ 目标函数（优化准则）

$$x^*(t) = \operatorname{argmin}_{x(t)} \int_0^T \mathcal{L}(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) dt$$

■ Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} \right) = 0$$

■ Lagrange函数

$$\mathcal{L}(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = (\ddot{x})^2$$

■ 结果

求解可以得到： $x^{(6)} = 0$ ，也就是说最优轨迹具有五次多项式的形式！

即： $x(t) = a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$

● 一般的变分法

目标函数(优化准则):

$$x^*(t) = \operatorname{argmin}_{x(t)} \int_0^T \mathcal{L}(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) dt$$

Euler-Lagrange方程:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (x^{(n)})} \right) = 0$$

Lagrange函数:

$$\mathcal{L}(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = (x^{(n)})^2$$

其中:

- $n = 1$ 最小速度
- $n = 2$ 最小加速度
- $n = 3$ 最小jerk
- $n = 4$ 最小snap
- ...



$$x^{(2n)} = 0$$

● 微分方程

微分方程：

$$x^{(2n)} = 0$$

两类正交多项式：

$$1, t, t^2, t^3, \dots$$
$$1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots$$

正交多项式：

- 基于Taylor展开的指数多项式（多项式）： $1, t, t^2, t^3, \dots$
- 基于Fourier展开的三角多项式（三角函数）： $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots$

基底与拟合：

- 基于多项式基底的轨迹拟合： $1, t, t^2, t^3, \dots$
- 基于三角函数基底的轨迹拟合： $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots$

● 轨迹拟合

轨迹拟合：将轨迹形式化一组基底的线性表达，然后根据约束条件求解系数的过程

轨迹拟合的分类：

■ 多项式轨迹拟合：

➤ 最小加速度： $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

➤ 最小jerk： $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$

➤ 最小snap： $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6 + a_7 t^7$

■ 三角函数轨迹拟合：

➤ 正弦轨迹： $x(t) = a_0 + a_1 \cos a_2 t + a_3 \sin a_2 t$

➤ 摆线轨迹： $x(t) = a_0 + a_1 t - a_2 \sin a_3 t$

➤ Fourier轨迹：

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos nt + B_n \sin nt]$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt \end{aligned}$$

● 约束条件

为了求解轨迹拟合的系数，需要寻找 $(t, x(t))$ 组合，也就是将约束条件转换为 $(t, x(t))$ 组合

轨迹拟合算法	形式	微分方程	约束个数
最小加速度	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$x^{(4)} = 0$	4
最小jerk	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$	$x^{(6)} = 0$	6
最小snap	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 + a_7t^7$	$x^{(8)} = 0$	8
正弦轨迹	$x(t) = a_0 + a_1 \cos a_2t + a_3 \sin a_2t$	$x^{(4)} = 0$	4
摆线轨迹	$x(t) = a_0 + a_1t - a_2 \sin a_3t$	$x^{(4)} = 0$	4

注意：

- 微分方程阶次与约束个数是相同的
- 多项式次数都是奇次数

02 从变分法到轨迹拟合

● 边界条件例子1

A cubic path in joint space for the joint variable $q(t)$, or in Cartesian space for a Cartesian coordinate $q(t)$, between two points $q(t_0)$ and $q(t_f)$ is

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (13.1)$$

四个边界条件:

- 初始位置和初始速度
- 终止位置和终止速度

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 & \dot{q}(t_0) &= q'_0 \\ q(t_f) &= q_f & \dot{q}(t_f) &= q'_f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \\ \dot{q}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q'_0 \\ q_f \\ q'_f \end{bmatrix}$$

● 边界条件例子2

Consider a harmonic path between two points $q(t_0)$ and $q(t_f)$

$$q(t) = a_0 + a_1 \cos a_2 t + a_3 \sin a_2 t \quad (13.129)$$

四个边界条件:

- 初始位置和初始速度
- 终止位置和终止速度

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 & \dot{q}(t_0) &= 0 \\ q(t_f) &= q_f & \dot{q}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

$$q(t) = \frac{1}{2} \left(q_f + q_0 - (q_f - q_0) \cos \frac{\pi (t - t_0)}{t_f - t_0} \right)$$

02 从变分法到轨迹拟合

● 简化问题——time shift

为了简化求解过程的计算量，我们通常会采用两个方法：

- (1) time shift
- (2) rest-to-rest

A cubic path in joint space for the joint variable $q(t)$, or in Cartesian space for a Cartesian coordinate $q(t)$, between two points $q(t_0)$ and $q(t_f)$ is

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 & \dot{q}(t_0) &= 0 \\ q(t_f) &= q_f & \dot{q}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

time shift:

$$q(t) = a_0 + a_1 (t - t_0) + a_2 (t - t_0)^2 + a_3 (t - t_0)^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_f - t_0) & (t_f - t_0)^2 & (t_f - t_0)^3 \\ 0 & 1 & 2(t_f - t_0) & 3(t_f - t_0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q'_0 \\ q_f \\ q'_f \end{bmatrix}$$

换言之： $t_0 = 0$

02 从变分法到轨迹拟合

● 简化问题——rest-to-rest

rest-to-rest: 仅考虑位置约束, 速度即速度的多阶导数 (如果需要) 在边界条件处为零

A five degree polynomial can satisfy these conditions

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (13.54)$$

完整边界条件与rest-to-rest边界条件

$$\begin{array}{llll} q(t_0) = q_0 & \dot{q}(t_0) = q'_0 & \ddot{q}(t_0) = q''_0 & q(0) = 10 \text{ deg} \\ q(t_f) = q_f & \dot{q}(t_f) = q'_f & \ddot{q}(t_f) = q''_f & q(1) = 45 \text{ deg} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{q}(0) = 0 \\ \dot{q}(1) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \ddot{q}(0) = 0 \\ \ddot{q}(1) = 0 \end{array}$$

完整约束求解与rest-to-rest约束求解

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q'_0 \\ q''_0 \\ q_f \\ q'_f \\ q''_f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

02 从变分法到轨迹拟合

● 时间尺度——从路径到轨迹

路径：路径规划通常会在构型空间生成一条二阶连续可微的曲线，即 $Q, s: [0, 1] \rightarrow q(s)$

时间尺度：标量函数： $f, t: [0, t_f] \rightarrow s(t): [0, 1]$

轨迹：为路径赋予时间尺度，即： $Qf, t: [0, t_f] \rightarrow q(s(t))$

A cubic path in joint space for the joint variable $q(t)$, or in Cartesian space for a Cartesian coordinate $q(t)$, between two points $q(t_0)$ and $q(t_f)$ is

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 & \dot{q}(t_0) &= 0 \\ q(t_f) &= q_f & \dot{q}(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

路径函数： $q(s) = q_0 + s(q_f - q_0)$

时间尺度： $s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意：

- 时间尺度连接了路径规划与轨迹优化
- 时间尺度在“时间最优”轨迹优化中使用较多，这里只是引入了一下理论

● 轨迹优化问题

Trajectory Optimization Problem*

* Given our set of assumptions

$$\min_{\underbrace{t_0, t_F, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)}_{\text{functions!}}} J(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) + \int_{t_0}^{t_F} w(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

boundary objective function integral objective function

subject to:

$$\mathbf{g}(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) \leq \mathbf{0}$$

boundary constraints

$$t_{\text{low}} \leq t_0 < t_F \leq t_{\text{upp}}$$

bound on initial and final time

$$\mathbf{x}_{0,\text{low}} \leq \mathbf{x}(t_0) \leq \mathbf{x}_{0,\text{upp}}$$

bound on initial state

$$\mathbf{x}_{F,\text{low}} \leq \mathbf{x}(t_F) \leq \mathbf{x}_{F,\text{upp}}$$

bound on final state

calculus!
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

continuous dynamics

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}$$

path constraints

$$\mathbf{x}_{\text{low}} \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_{\text{upp}}$$

continuous bounds on state

$$\mathbf{u}_{\text{low}} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\text{upp}}$$

continuous bounds on control

- 两种求解思路:
- 解析法 (变分法)
 - 数值法

● 数值积分问题

数值积分公式的一般形式:

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \approx \int_a^b f(x) dx$$

其中,

求积结点: $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$

求积系数: $A_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 仅与结点有关

插值公式的一般形式:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

其中,

插值结点: $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$

插值型数值积分公式的一般形式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b l_k(x) dx = I_n(f) \end{aligned}$$

其中,

求积结点: $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$

求积系数: $A_k = \int_a^b l_k(x) dx$

具体算法:

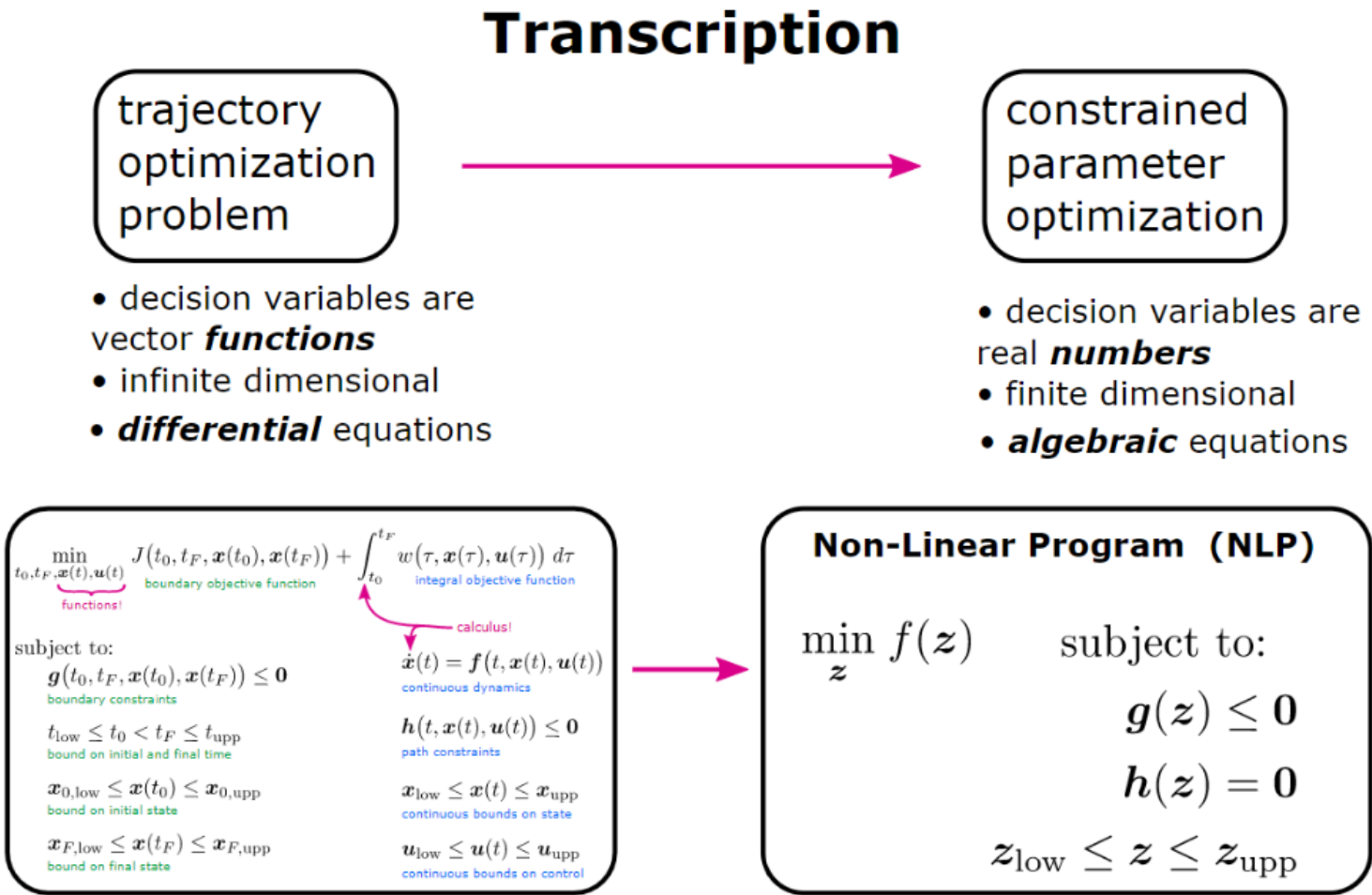
梯形公式: $I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$

Simspon公式: $I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

Cote公式 / 复化梯形公式 / 复化Simspon公式

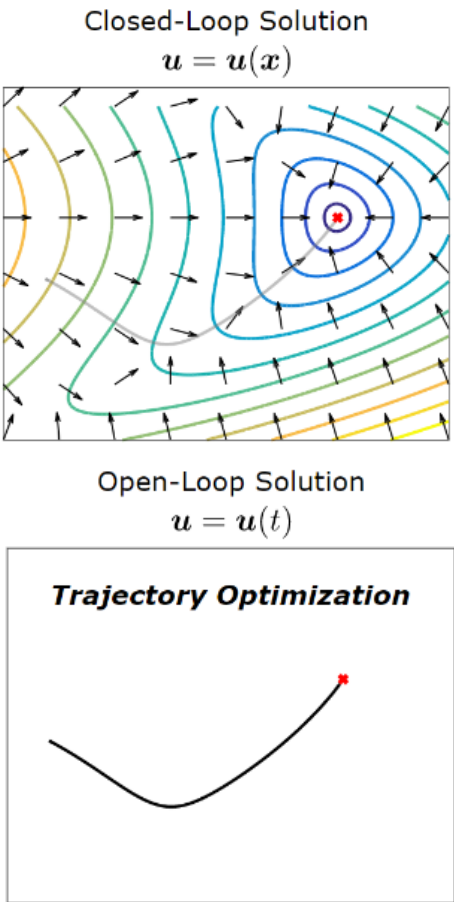
Gauss求积公式

● 从最优到NLP



Transcription思路

- 原始问题：泛函优化 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
- 新问题：函数优化 $\mathbf{u}(t)$



03 从数值计算到轨迹插值

● 数值计算与直接配置法(Direct Collocation)

配置点:

- 连续时间的离散化 $t \rightarrow t_0, \dots, t_k, \dots, t_N$
- 连续状态的离散化 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_N$
- 连续控制的离散化 $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_N$

t_k	time at knot point k
N	number of trajectory (spline) segments
$h_k = t_{k+1} - t_k$	duration of spline segment k
$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$	state at knot point k
$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$	control at knot point k
$w_k = w(t_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$	integrand of objective function at knot point k
$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$	system dynamics at knot point k
$\dot{q} = \frac{d}{dt}q, \quad \ddot{q} = \frac{d^2}{dt^2}q$	first and second time-derivatives of q

配置约束:

- 系统动力学约束 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$
- 边界条件约束 $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f) \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N$

配置目标函数:

- 目标函数 $\int_{t_0}^{t_F} w(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \rightarrow \sum_{k=0}^N w_k(t_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$

具体算法:

梯形公式: $I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$

Simspon公式: $I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

● 梯形配置法(Trapezoidal Collocation)问题

$$\text{梯形公式: } I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

■ 目标函数

- 连续积分变为离散求和 $\int w(\cdot) \rightarrow \sum c_k w_k$
- 所有函数值变为配置点函数值 $w(t_k) = w_k$

$$\int_{t_0}^{t_F} w(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} h_k \cdot (w_k + w_{k+1}) \quad h_k = t_{k+1} - t_k$$

■ 系统动力学

- 状态方程的梯形积分
- 连续动力学变为配置点动力学

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2} h_k \cdot (f_{k+1} + f_k)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f, \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x} dt &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f dt, \\ x_{k+1} - x_k &\approx \frac{1}{2} h_k \cdot (f_{k+1} + f_k). \end{aligned}$$

■ 约束

- 状态和控制约束离散化
- 路径约束离散化
- 边界约束变为初始配置点

$$x < 0 \quad \rightarrow \quad x_k < 0 \quad \forall k,$$

$$u < 0 \quad \rightarrow \quad u_k < 0 \quad \forall k.$$

$$g(t, x, u) < 0 \quad \rightarrow \quad g(t_k, x_k, u_k) < 0 \quad \forall k.$$

$$h(t_0, x(t_0), u(t_0)) < 0 \quad \rightarrow \quad h(t_0, x_0, u_0) < 0.$$

● 梯形配置法(Trapezoidal Collocation)求解

$$\text{梯形公式: } I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

■ 控制函数

- 控制函数采用梯形配置进行求解
- 梯形配置使用分段线性多项式（线性插值）
- 线性插值结点跟配置点数量相同

$$u(t) \approx u_k + \frac{\tau}{h_k} (u_{k+1} - u_k)$$

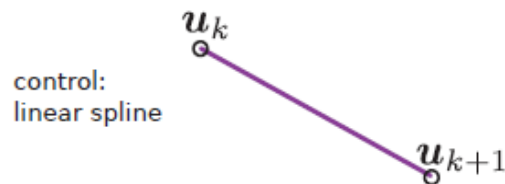
$$\tau = t - t_k$$

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

■ 系统动力学

- 假设动力学方程 $\dot{x} = f(t, x, u)$ 与 u 是线性关系
- f 也要采用梯形配置进行求解
- 动力学方程使用线性插值

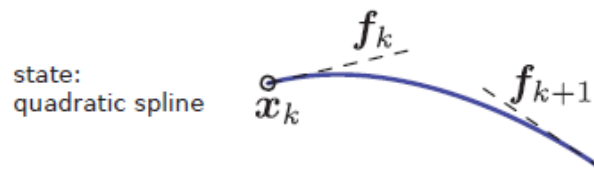
$$f(t) = \dot{x}(t) \approx f_k + \frac{\tau}{h_k} (f_{k+1} - f_k)$$



■ 状态

- 状态从系统动力学积分得到
- 状态求解使用二次多项式（二次插值）

$$x(t) = \int \dot{x}(t) d\tau \approx c + f_k \tau + \frac{\tau^2}{2h_k} (f_{k+1} - f_k)$$
$$x(t) \approx x_k + f_k \tau + \frac{\tau^2}{2h_k} (f_{k+1} - f_k)$$



03 从数值计算到轨迹插值

● Simpson配置法(Hermite-Simpson Collocation)问题

$$\text{Simpson公式: } I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

■ 目标函数

- 连续积分变为离散求和 $\int w(\cdot) \rightarrow \sum c_k w_k$
- 所有函数值变为配置点函数值 $w(t_k) = w_k$
- 多了一项 $k + \frac{1}{2}$

$$\int_{t_0}^{t_F} w(\tau) d\tau \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_k}{6} (w_k + 4w_{k+\frac{1}{2}} + w_{k+1}). \quad h_k = t_{k+1} - t_k$$

■ 系统动力学

- 状态方程的Simpson积分
- 连续动力学变为配置点动力学

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \frac{1}{6} h_k (f_k + 4f_{k+\frac{1}{2}} + f_{k+1}). \\ x_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (x_k + x_{k+1}) + \frac{h_k}{8} (f_k - f_{k+1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f, \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x} dt &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f dt. \end{aligned}$$

■ 约束

- 状态和控制约束离散化
- 路径约束离散化
- 边界约束变为初始配置点

$$\begin{aligned} x < 0 &\rightarrow \begin{aligned} x_k &< 0, \\ x_{k+\frac{1}{2}} &< 0, \end{aligned} \\ u < 0 &\rightarrow \begin{aligned} u_k &< 0, \\ u_{k+\frac{1}{2}} &< 0. \end{aligned} \\ g(t, x, u) < 0 &\rightarrow \begin{aligned} g(t_k, x_k, u_k) &< 0, \\ g(t_{k+\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}) &< 0. \end{aligned} \\ h(t_0, x(t_0), u(t_0)) < 0 &\rightarrow h(t_0, x_0, u_0) < 0. \end{aligned}$$

● Simpson配置法(Hermite-Simpson Collocation)求解

$$\text{Simpson公式: } I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

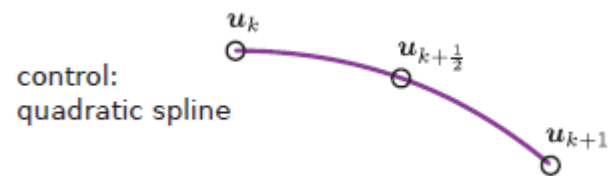
■ 控制函数

- 控制函数采用Simpson配置进行求解
- 梯形配置使用分段二次多项式 (二次插值)
- 线性插值结点跟配置点数量不同

$$\tau = t - t_k$$

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

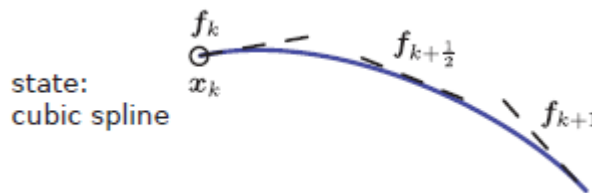
$$u(t) = \frac{2}{h_k^2} \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) (\tau - h_k) u_k - \frac{4}{h_k^2} (\tau) (\tau - h_k) u_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_k^2} (\tau) \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) u_{k+1}.$$



■ 系统动力学

- 假设动力学方程 $\dot{x} = f(t, x, u)$ 与 u 是线性关系
- f 也要采用Simpson配置进行求解
- 动力学方程使用二次插值

$$f(t) = \dot{x} = \frac{2}{h_k^2} \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) (\tau - h_k) f_k - \frac{4}{h_k^2} (\tau) (\tau - h_k) f_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_k^2} (\tau) \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) f_{k+1}.$$



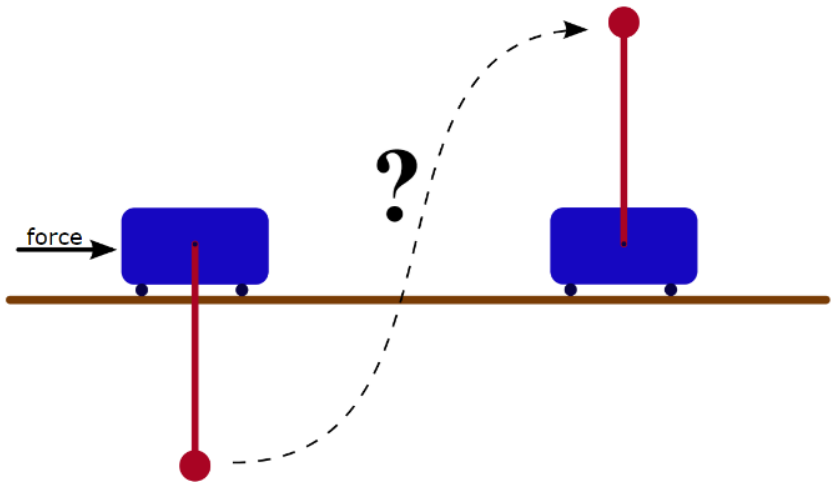
■ 状态

- 状态从系统动力学积分得到
- 状态求解使用三次多项式 (三次插值)

$$x(t) = x_k + f_k \left(\frac{\tau}{h_k} \right) + \frac{1}{2} \left(-3f_k + 4f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k+1} \right) \left(\frac{\tau}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(2f_k - 4f_{k+\frac{1}{2}} + 2f_{k+1} \right) \left(\frac{\tau}{h_k} \right)^3.$$

● 配置法例子

- 小车倒立摆模型
 - 问题表述
 - 系统建模
 - 轨迹优化问题形式化



系统建模

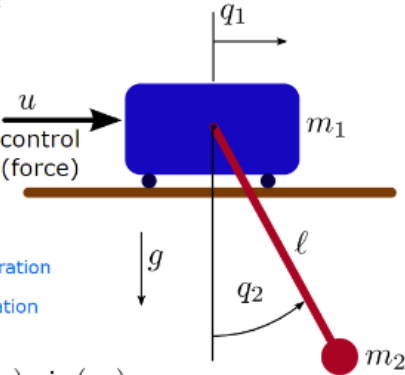
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$
 state

q_1 cart horizontal position
 q_2 pole angle
 \dot{q}_1 cart horizontal velocity
 \dot{q}_2 pole angular rate

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$
 dynamics

\ddot{q}_1 cart horizontal acceleration
 \ddot{q}_2 pole angular acceleration

$$\ddot{q}_1 = \frac{\ell m_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + u + m_2 g \cos(q_2) \sin(q_2)}{m_1 + m_2 (1 - \cos^2(q_2))}$$
$$\ddot{q}_2 = - \frac{\ell m_2 \cos(q_2) \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + u \cos(q_2) + (m_1 + m_2) g \sin(q_2)}{\ell m_1 + \ell m_2 (1 - \cos^2(q_2))}$$



轨迹优化问题形式化

$$\min_{\mathbf{x}(t), u(t)} \int_0^T u^2(\tau) d\tau$$

subject to:

Dynamics

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$$

Path Bounds

$$\begin{aligned} -d_{\max} &\leq q_1 \leq d_{\max} && \text{keep cart on track} \\ -u_{\max} &\leq u \leq u_{\max} && \text{motor saturation} \end{aligned}$$

Parameters

d	horizontal travel
d_{\max}	track half length
u_{\max}	peak motor force
T	trajectory duration

Bounds on initial and final state

initial state	final state
$q_1(0) = 0$ $q_2(0) = 0$ $\dot{q}_1(0) = 0$ $\dot{q}_2(0) = 0$	$q_1(T) = d$ $q_2(T) = \pi$ $\dot{q}_1(T) = 0$ $\dot{q}_2(T) = 0$

● 配置法例子

■ 梯形配置

minimize

(6.4)

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_k}{2} (u_k^2 + u_{k+1}^2),$$

objective function,

with decision variables

(6.5)

$$x_0, \dots, x_N \quad u_0, \dots, u_N,$$

subject to

(6.6)

$$\frac{1}{2} h_k (f_{k+1} + f_k) = x_{k+1} - x_k, \quad k \in 0, \dots, (N-1),$$

collocation constraints,

(6.7)

$$-d_{\max} \leq q_1 \leq d_{\max},$$

path constraints,

(6.8)

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max},$$

path constraints,

(6.9)

$$x_0 = 0, \quad x_N = [d, \pi, 0, 0]^T,$$

boundary constraints.

Note that $h_k = t_{k+1} - t_k$. Here, we will use a uniform grid, so $t_k = k \frac{T}{N}$, where N is the number of segments used in the transcription. In general, you could solve this problem on an arbitrary grid; in other words, each h_k could be different.

- 配置法例子

- Simpson配置

minimize

(6.10)

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_k}{6} (u_k^2 + 4u_{k+\frac{1}{2}}^2 + u_{k+1}^2),$$

objective function,

with decision variables

$$x_0, x_{0+\frac{1}{2}}, \dots, x_N, \quad u_0, u_{0+\frac{1}{2}}, \dots, u_N,$$

subject to

(6.11)

$$x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + \frac{h_k}{8}(f_k - f_{k+1}), \quad k \in 0, \dots, (N-1),$$

interpolation
constraints,

(6.12)

$$\frac{h_k}{6}(f_k + 4f_{k+\frac{1}{2}} + f_{k+1}) = x_{k+1} - x_k, \quad k \in 0, \dots, (N-1),$$

collocation
constraints,

(6.13)

$$-d_{\max} \leq q_1 \leq d_{\max},$$

path constraints,

(6.14)

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max},$$

path constraints,

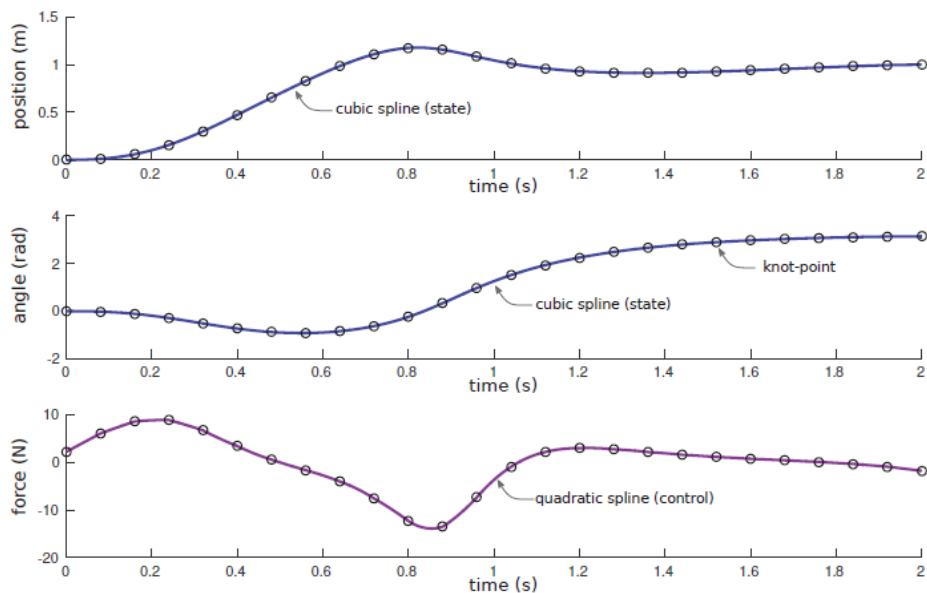
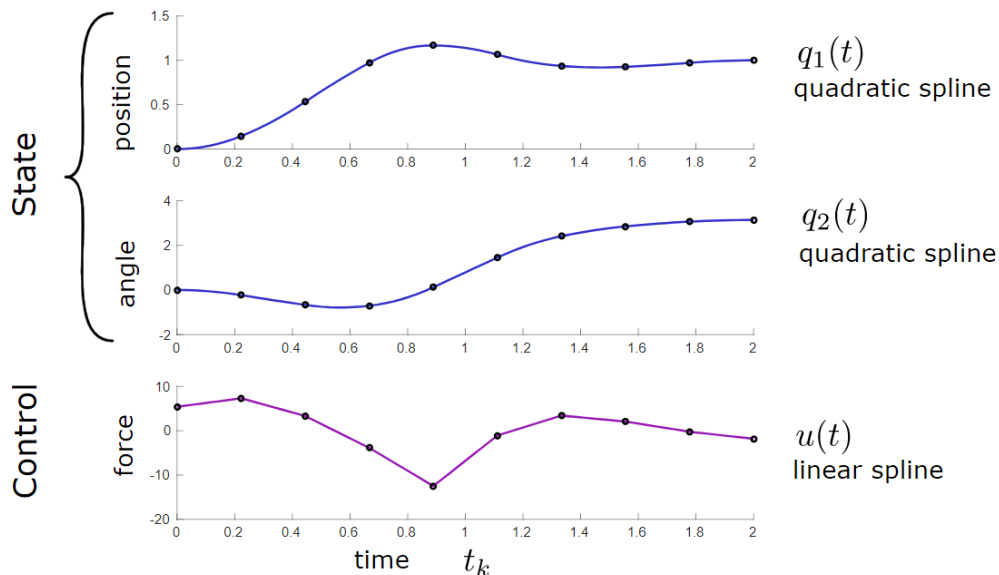
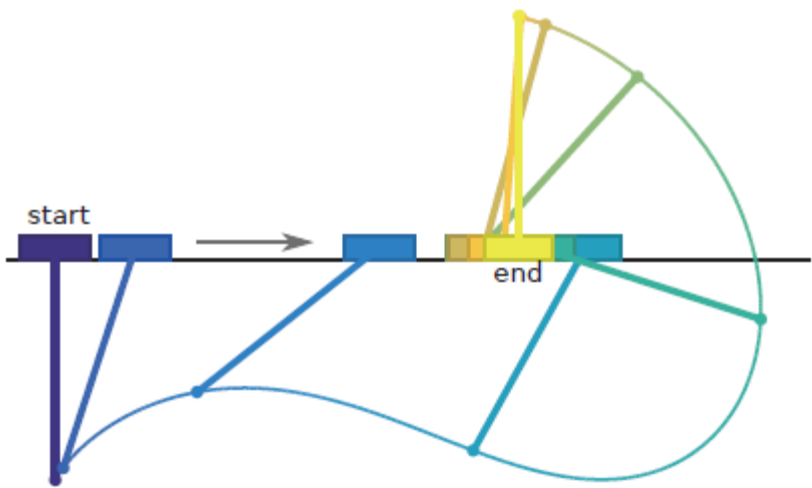
(6.15)

$$x_0 = \mathbf{0}, \quad x_N = [d, \pi, 0, 0]^T,$$

boundary
constraints.

● 配置法例子

- 梯形配置
 - 控制函数为线性插值
 - 状态函数为二次插值
- Simpson配置
 - 控制函数为二次插值
 - 状态函数为三次插值



● 轨迹优化问题

Trajectory Optimization Problem*

* *Given our set of assumptions*

$$\min_{\underbrace{t_0, t_F, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)}_{\text{functions!}}} J(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) + \int_{t_0}^{t_F} w(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

boundary objective function integral objective function

subject to:

$$\mathbf{g}(t_0, t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) \leq \mathbf{0}$$

boundary constraints

$$t_{\text{low}} \leq t_0 < t_F \leq t_{\text{upp}}$$

bound on initial and final time

$$\mathbf{x}_{0,\text{low}} \leq \mathbf{x}(t_0) \leq \mathbf{x}_{0,\text{upp}}$$

bound on initial state

$$\mathbf{x}_{F,\text{low}} \leq \mathbf{x}(t_F) \leq \mathbf{x}_{F,\text{upp}}$$

bound on final state

calculus!

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

continuous dynamics

$$\mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}$$

path constraints

$$\mathbf{x}_{\text{low}} \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_{\text{upp}}$$

continuous bounds on state

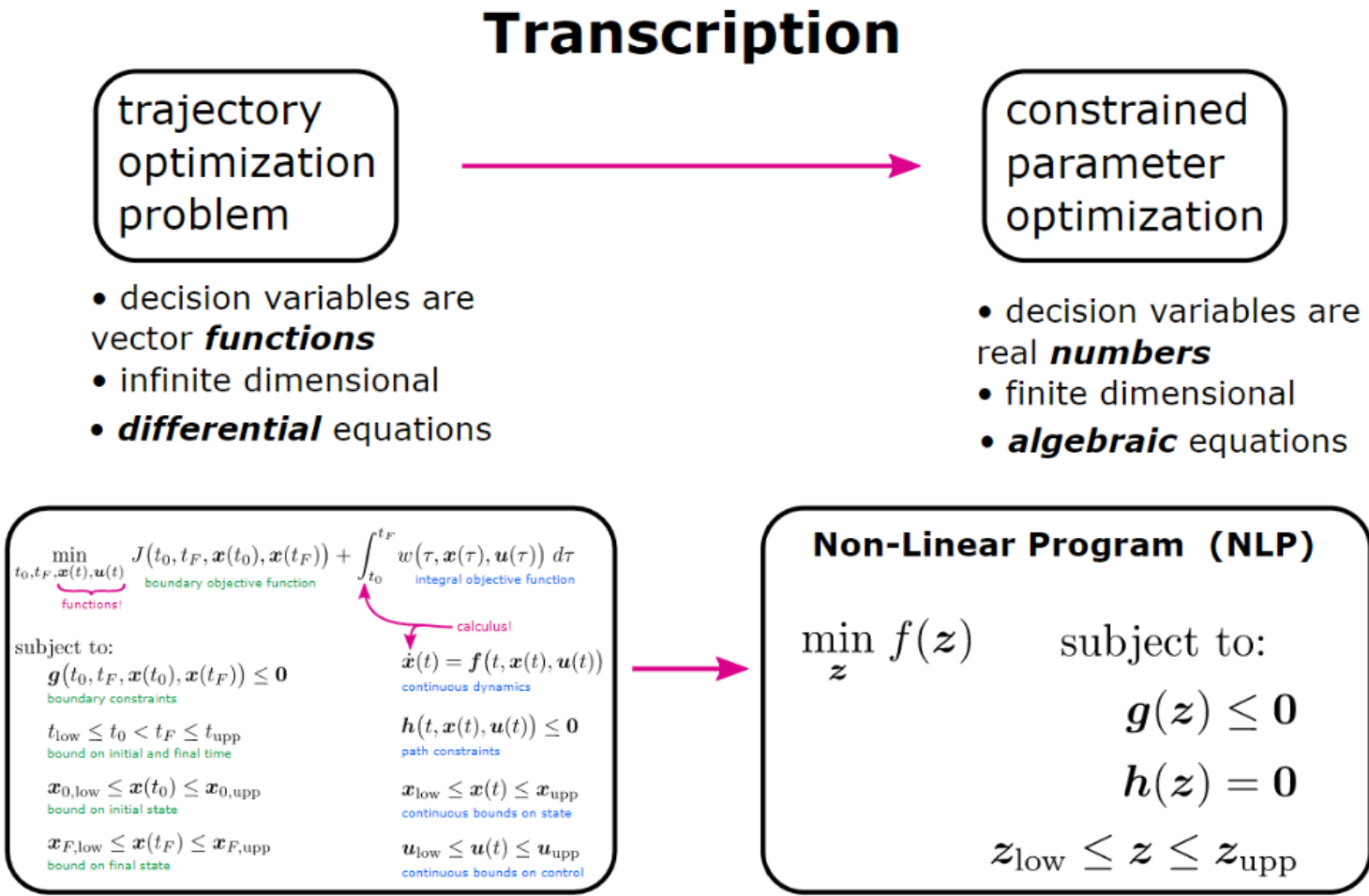
$$\mathbf{u}_{\text{low}} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\text{upp}}$$

continuous bounds on control

两种求解思路:

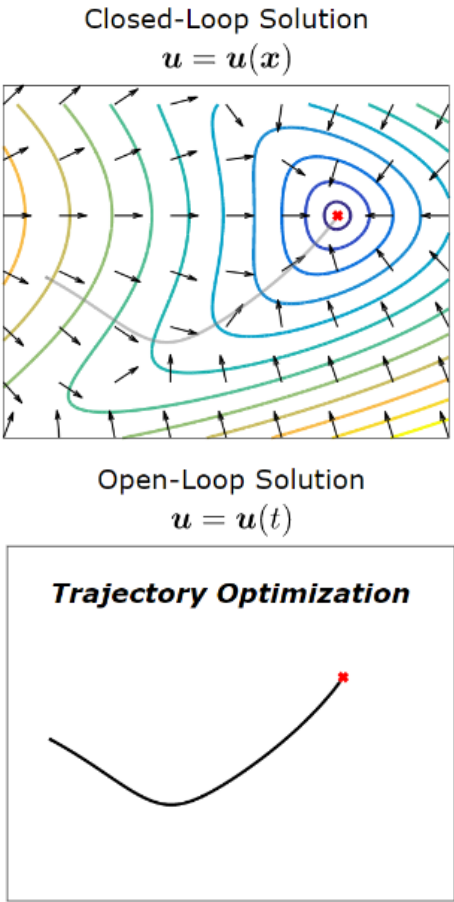
- 解析法 (变分法)
- 数值法

● 轨迹优化求解



两种思路

- 连续问题：泛函优化 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
- 离散问题：函数优化 $\mathbf{u}(t)$



● 泛函优化与微分方程

■ 无约束条件泛函极值

- 变分法与Euler-Lagrange方程

目标函数

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) dt$$

微分方程

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (x^{(n)})} \right)$$

■ 等式约束条件泛函极值

- Lagrange乘子与增广泛函
- 代数方程约束 $f(x, t) = 0$
- 微分方程约束 $f(x, \dot{x}, t) = 0$

目标函数

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$$

微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

■ (不)等式泛函极值与KKT方程

- 等式约束 $f(x, t) = 0$
- 不等式约束 $g(x, t) \leq 0$

目标函数

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x) dt$$

微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \mu = 0$$

■ 一般等式泛函极值与Hamilton方程

■ 动态规划与Hamilton-Jacobi-Bellman方程

04 轨迹拟合 & 轨迹插值

● 微分方程与函数空间

■ 轨迹平滑：位置连续与速度连续

■ 轨迹平滑的目标函数： $\mathcal{L}(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}, x^{(m)}) = (x^{(m)})^2$

$$x^{(2m)} = 0$$

■ 微分方程构成的函数空间 $x^{(n)} = 0$

➤ n阶函数空间：线性无关的函数集合 $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^n$

➤ 子空间：元素 $\varphi(t) \in \Phi = \text{span}\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$

➤ 线性表达： $\varphi(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \dots + a_n\varphi_n(t)$

■ 函数逼近

➤ 对于任何函数 $f(t)$ ，在子空间 Φ 中寻找一个元素 $\varphi^*(t) \in \Phi$ ，使得 $f(t) - \varphi^*(t)$ 在某个意义下最小

➤ 正交多项式是函数逼近最常用的工具

➤ 曲线拟合：多项式、三角函数等

● 函数优化与代数方程

■ 梯形配置法

- 梯形积分公式
- 控制函数线性插值
- 系统动力学线性插值
- 状态(轨迹)函数二次插值

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

$$u(t) \approx u_k + \frac{\tau}{h_k} (u_{k+1} - u_k)$$

$$f(t) = \dot{x}(t) \approx f_k + \frac{\tau}{h_k} (f_{k+1} - f_k)$$

$$x(t) = \int \dot{x}(t) d\tau \approx c + f_k \tau + \frac{\tau^2}{2h_k} (f_{k+1} - f_k)$$

$$x(t) \approx x_k + f_k \tau + \frac{\tau^2}{2h_k} (f_{k+1} - f_k)$$

■ Simpson配置法

- 梯形积分公式
- 控制函数二次插值
- 系统动力学二次插值
- 状态(轨迹)函数三次插值

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

$$u(t) = \frac{2}{h_k^2} \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) (\tau - h_k) u_k - \frac{4}{h_k^2} (\tau) (\tau - h_k) u_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_k^2} (\tau) \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) u_{k+1}$$

$$f(t) = \dot{x} = \frac{2}{h_k^2} \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) (\tau - h_k) f_k - \frac{4}{h_k^2} (\tau) (\tau - h_k) f_{k+\frac{1}{2}} + \frac{2}{h_k^2} (\tau) \left(\tau - \frac{h_k}{2} \right) f_{k+1}$$

$$x(t) = x_k + f_k \left(\frac{\tau}{h_k} \right) + \frac{1}{2} \left(-3f_k + 4f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k+1} \right) \left(\frac{\tau}{h_k} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(2f_k - 4f_{k+\frac{1}{2}} + 2f_{k+1} \right) \left(\frac{\tau}{h_k} \right)^3$$

04 轨迹拟合 & 轨迹插值

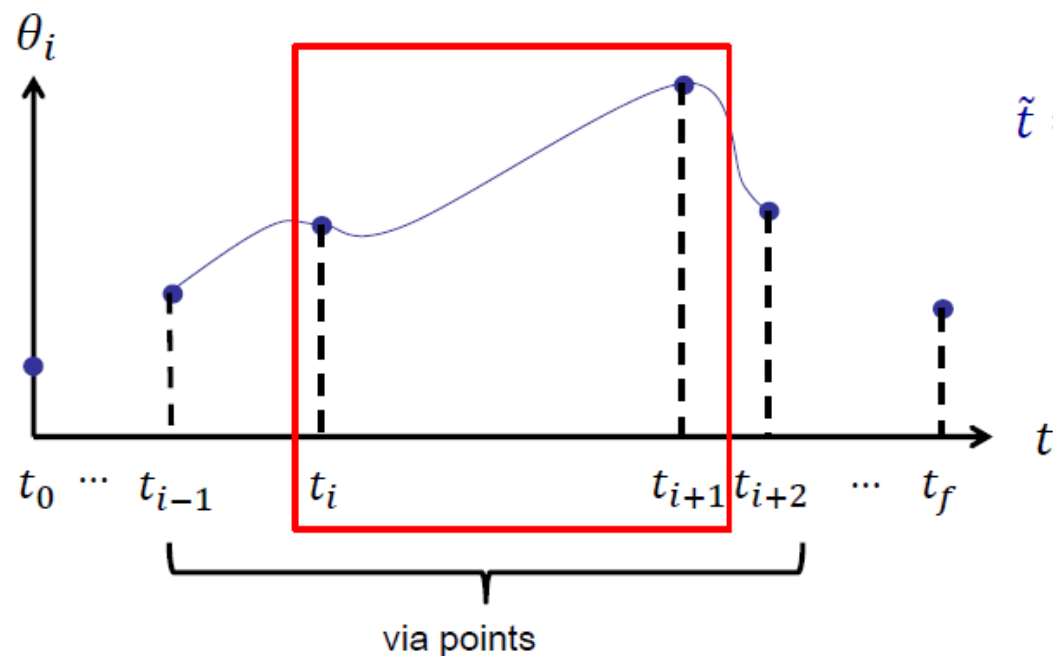
● 代数方程与插值空间

- 轨迹光滑：插值点的光滑
- 轨迹平滑的目标：满足插值点的光滑性
- 代数方程构成的函数空间
 - $n(+1)$ 插值点： t_0, t_1, \dots, t_n
 - 子空间 Φ ：不超过 n 次的代数多项式
- 函数插值
 - 对于任何函数 $f(t)$ ，在子空间 Φ 中寻找一个元素 $P(t) \in \Phi$ ，使得 $P(t)$ 满足插值点约束
 - 曲线插值：三次插值、LFPB(Linear Function with Parabolic Blends)等

04 轨迹拟合 & 轨迹插值

● 轨迹插值——三次插值

- 轨迹插值：不同轨迹区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 以不同参数的函数来规划
- 轨迹平滑：定义各函数的边界条件（包括位置和速度： $\theta(t_i)$, $\dot{\theta}(t_i)$, $\theta(t_{i+1})$, $\dot{\theta}(t_{i+1})$ ，有4个条件）
- 轨迹算法：三次多项式



$$\theta(\tilde{t}) = a_0 + a_1\tilde{t} + a_2\tilde{t}^2 + a_3\tilde{t}^3 \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$\tilde{t} = t - t_i \quad \text{so } \tilde{t}|_{t=t_i} = 0 \text{ and } \tilde{t}|_{t=t_{i+1}} \equiv \Delta t = t_{i+1} - t_i > 0$$

$$\theta(\tilde{t}|_{t=t_i}) = \theta_i = a_0$$

$$\theta(\tilde{t}|_{t=t_{i+1}}) = \theta_{i+1} = a_0 + a_1\Delta t + a_2\Delta t^2 + a_3\Delta t^3$$

$$\dot{\theta}(\tilde{t}|_{t=t_i}) = \dot{\theta}_i = a_1$$

$$\dot{\theta}(\tilde{t}|_{t=t_{i+1}}) = \dot{\theta}_{i+1} = a_1 + 2a_2\Delta t + 3a_3\Delta t^2$$

04 轨迹拟合 & 轨迹插值

● 轨迹插值——三次样条

- 轨迹插值：不同轨迹区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 以不同参数的三次多项式函数来规划
- 轨迹平滑：加速度连续
 - $2N$ 个边界条件： $\theta(t_0)$ 与 $\theta(t_1)$, $\theta(t_1)$ 与 $\theta(t_2)$, ..., $\theta(t_{N-1})$ 与 $\theta(t_N)$
 - $2(N-1)$ 个速度和加速度连续条件 $\dot{\theta}(t_i) = \dot{\theta}(t_{i+1})$, $\ddot{\theta}(t_i) = \ddot{\theta}(t_{i+1})$
 - 2个附加条件：
 - (1) Natural三次样条： $\ddot{\theta}(t_0) = \ddot{\theta}(t_N) = 0$
 - (2) Clamp三次样条： $\dot{\theta}(t_0) = u, \dot{\theta}(t_N) = v$
 - (3)运动的周期性（用得不多）
- 轨迹算法：三次样条， $4N$ 个系数， $4N$ 个约束条件(方程)，唯一解

● 轨迹拟合 & 轨迹插值

轨迹拟合算法	形式	微分方程	约束个数
最小加速度	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$	$x^{(4)} = 0$	4
最小jerk	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$	$x^{(6)} = 0$	6
最小snap	$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 + a_7t^7$	$x^{(8)} = 0$	8
正弦轨迹	$x(t) = a_0 + a_1 \cos a_2t + a_3 \sin a_2t$	$x^{(4)} = 0$	4
摆线轨迹	$x(t) = a_0 + a_1t - a_2 \sin a_3t$	$x^{(4)} = 0$	4
轨迹插值算法	形式	代数方程	约束个数
LFPB	Linear & Parabolic结合		3N
三次样条	$x_j(t) = a_{j0} + a_{j1}t + a_{j2}t^2 + a_{j3}t^3$		4N

04 轨迹拟合 & 轨迹插值

● p方法和h方法

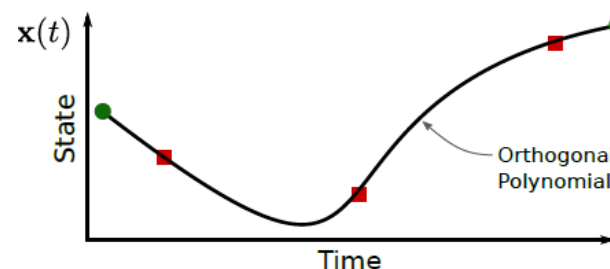
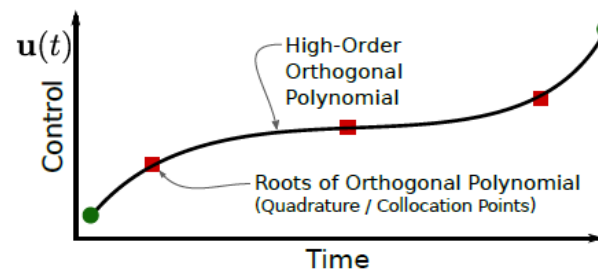
■ 解析解

- 如何确定解析解(轨迹拟合)的收敛性?
- $x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$
- p方法: 增加阶次n
- 存在的问题: Runge现象(过拟合, 加速度过大)

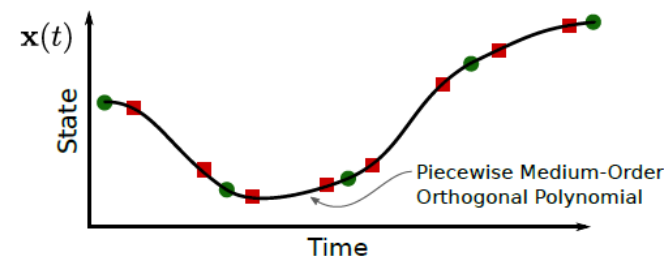
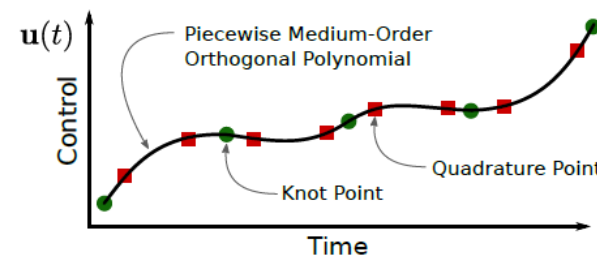
■ 数值解

- 分段多项式
- 使用多段低阶次多项式代替单段高阶次多项式
- h方法: 增加分段次数N

"p" Method; Convergence by increasing polynomial order



"h" Method; Convergence by increasing number of segments



● 轨迹优化——求解方法汇总

