

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА  
ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

**Интервальный анализ**  
**Отчёт по лабораторной работе №2**

Выполнил:

Студент: Попов Иван

Группа: 5030102/90201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2022г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Распознающий функционал . . . . .	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части . .	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы . . . .	3
2.4	Оценки вариабельности решения . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>3</b>
4.1	Достижение разрешимости ИСЛАУ . . . . .	3
4.2	Корректировка правой части . . . . .	4
4.3	Корректировка матрицы . . . . .	5
4.4	Управление положением максимума распознающего функционала . . .	7
<b>5</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>12</b>

# Список иллюстраций

1	График $\text{Tol}(x, A, b)$ . . . . .	4
2	График $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части . . .	5
3	График $\Xi_{\text{tol}}$ для ИСЛАУ с корректировкой матрицы . . . . .	6
4	График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой первой строки матрицы . . . . .	7
5	График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой второй строки матрицы . . . . .	8
6	График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой третьей строки матрицы . . . . .	9
7	График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой четвертой строки матрицы . . . .	10
8	График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой матрицы первой . . . . .	11

# 1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0, 2] \cdot x_1 + [1, 3] \cdot x_2 = [3, 7] \\ x_1 + [-4, -2] \cdot x_2 = [-0.5, 0.5] \\ [0.75, 1.25] \cdot x_1 = [3, 5] \\ [0.75, 1.25] \cdot x_2 = [0, 2] \end{cases} \quad (1)$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимум распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

## 2 Теория

### 2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}$$
$$x \in \Xi_{\text{tol}} \Leftrightarrow \text{Tol}(x) \geq 0$$

$\text{Tol}(x)$  - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на  $R^n$ . Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допустового множества решений ИСЛАУ. Если  $\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$ , то допустовое множество не пусто. В противном случае  $\Xi_{\text{tol}} = \emptyset$ . Обратные утверждения также верны.

### 2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины  $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$ , где  $i$  - номер компоненты,  $\nu_i$  - вес, задающий относительное расширение  $i$ -й компоненты,  $K$  - общий коэффициент расширения вектора  $b$ . В данной работе используются значения  $\nu_i = 1 \forall i = \overline{1, 3}$ . Подбрав  $K$  таким образом, чтобы выполнялось  $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$ , получим разрешимую систему с непустым допустовым множеством.

## 2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену  $A$  на  $A \ominus K \cdot N \cdot E$  где  $N = \{\nu_i\}$  - матрица весов,  $K$  - общий коэффициент сужения  $A$ ,  $E$  состоит из  $[-e_{ij}, e_{ij}]$ . При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках  $IR$ .

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом  $N$  - единичная матрица, в случае построчной -  $N = \text{diag}\{\nu_i\}$ .

## 2.4 Оценки варибельности решения

Для оценки варибельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\text{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \|\arg\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{\|b\|}$$

$$\text{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)$$

## 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Matlab. Использованы библиотеки IntLab для реализации вычислений интервальной арифметики.

## 4 Результаты

### 4.1 Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допустимое множество.  $\arg\max = [2.57, 1.12]$   $\text{tolmax} = -1.79 < 0 \Rightarrow$  система несовместна.

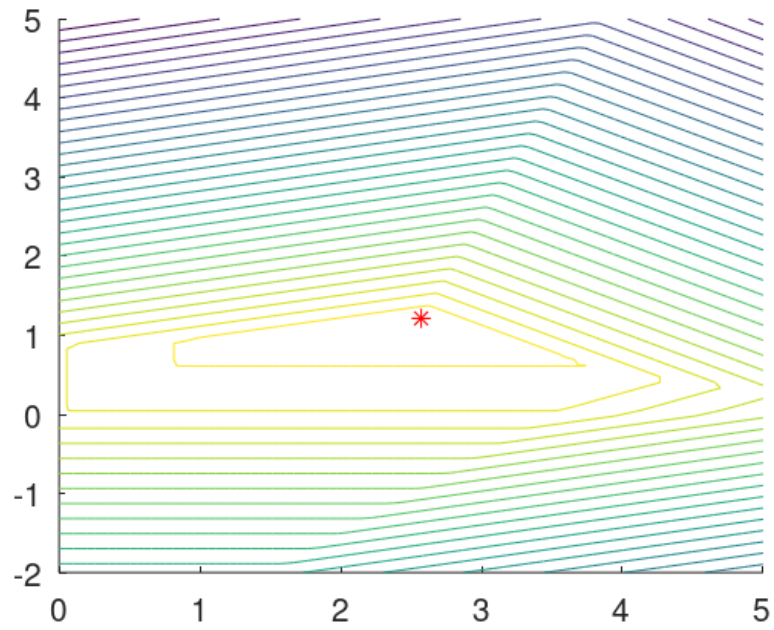


Рис. 1: График  $\text{Tol}(x, A, b)$

## 4.2 Корректировка правой части

Корректировка правой части, с помощью описанного выше способа помогла добиться непустого множества решений интервальной системы,  $\text{argmax} = [2.57, 1.21]$   $\text{tolmax} = 0.89 > 0 \Rightarrow$  система совместна. Вектор столбца

$$b' = ([0.32, 9.67], [-3.17, 3.17], [0.321, 7.67], [-2.67, 4.67])$$

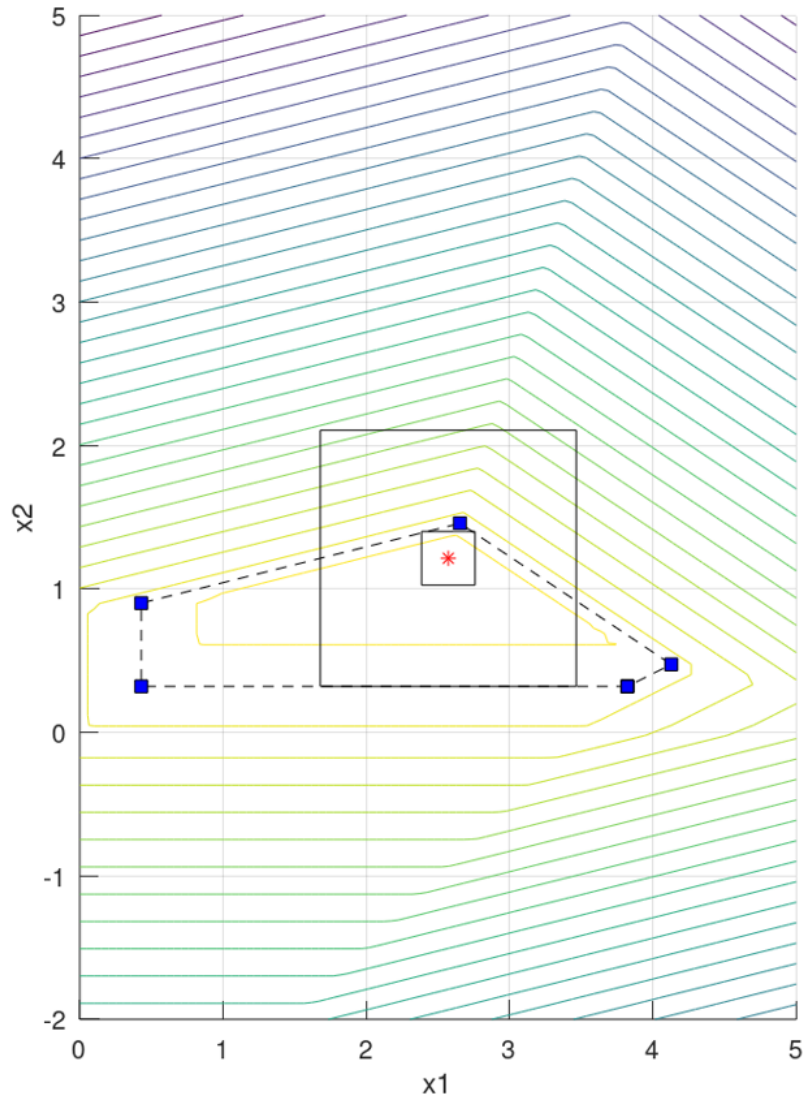


Рис. 2: График  $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$  для ИСЛАУ с корректировкой в правой части

Допусковое множество решений стало непустым, оно отмечено на графике пунктиром.  $ive(A, b') = 0.18, rve(A, b') = 0.89$ . На графике изображены квадратные бруссы с центром в точке максимума  $\text{Tol}(x)$  и радиусом  $ive$  и  $rve$ .

### 4.3 Корректировка матрицы

На каждой итерации сужаем радиус интервалов матрицы до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным или близким к нулю,  $\text{argmax} = [3.52, 1.12]$   $\text{tolmax} = 0.34 > 0 \Rightarrow$  система совместна. Итоговая

матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} [0.75, 1.25] & 2 \\ 1 & 3 \\ [0.95, 1.05] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \quad (2)$$

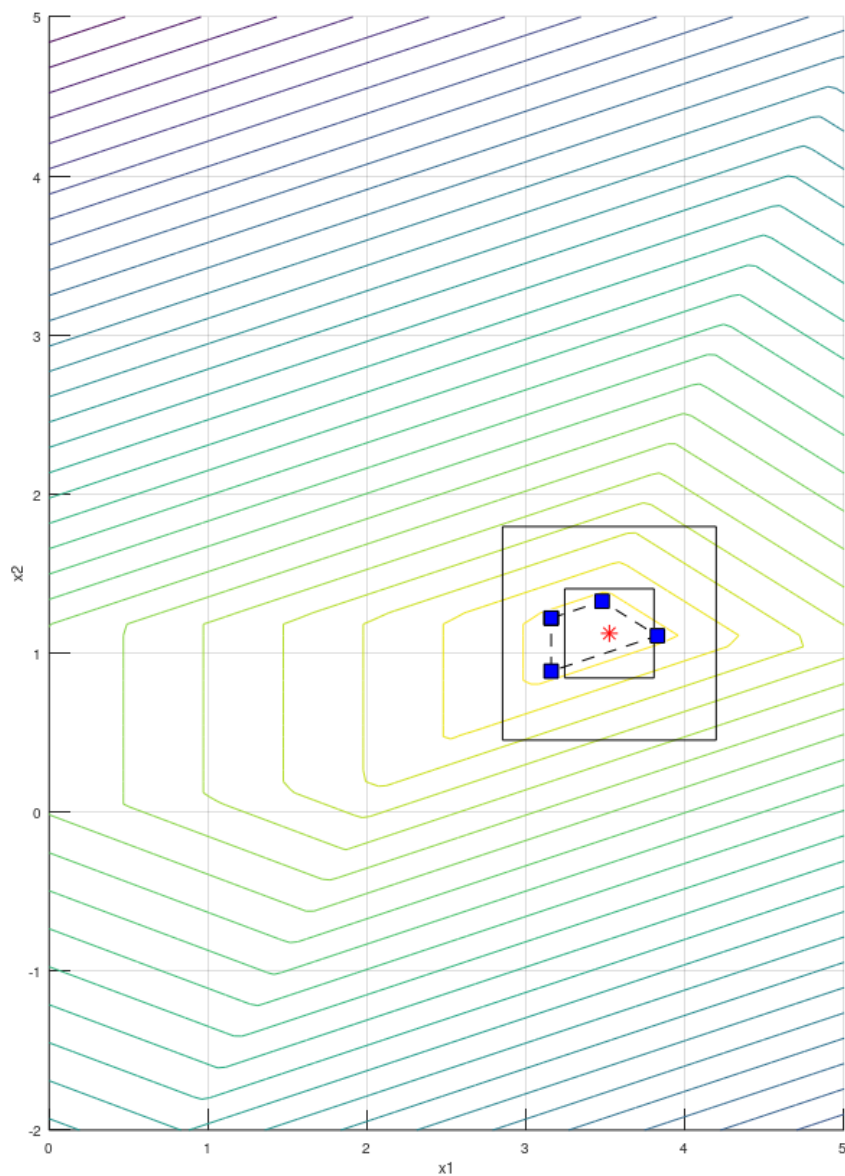


Рис. 3: График  $\Xi_{\text{tol}}$  для ИСЛАУ с корректировкой матрицы

Допусковое множество решений стало непустым, оно отмечено на графике пунктиром.  $ive(A, b') = 0.28, rve(A, b') = 0.67$ . На графике изображены квадратные бруссы с центром в точке максимума Tol (x) и радиусом  $ive$  и  $rve$ .

#### 4.4 Управление положением максимума распознающего функционала

Отметим на графике распознающего функционала прямые, образованные СЛАУ  $(A)x = b$ . Красной прямой соответствует первая строка, зелёной - вторая, синей - третья, черной - четвертая.

Результат корректировки первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & [-4, -2] \\ [0.75, 1.25] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\operatorname{argmax} Tol(x, A, b) = (3.23, 1.08)$$

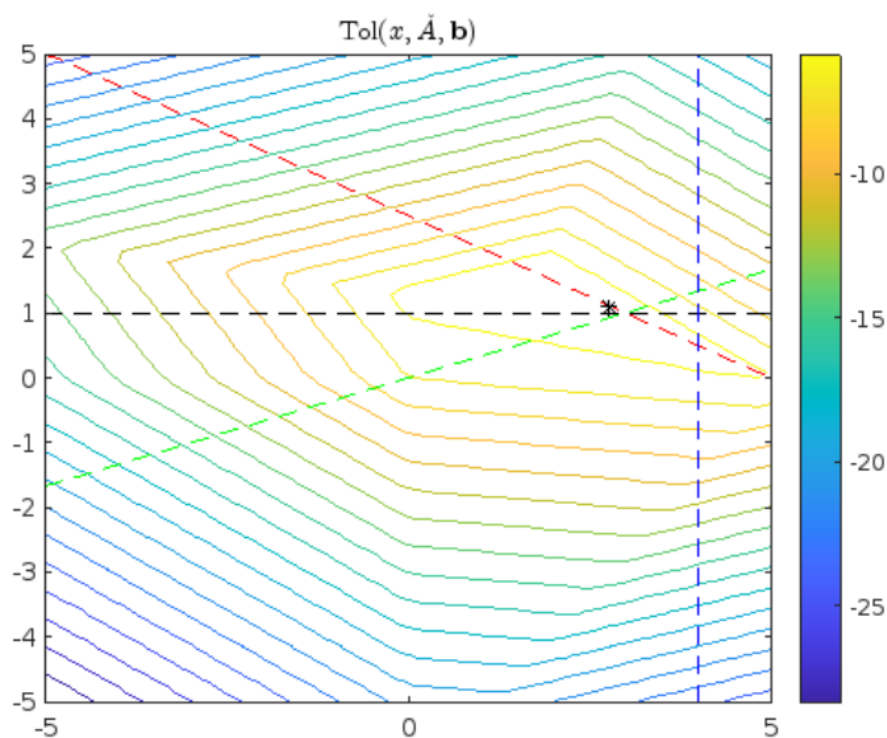


Рис. 4: График  $Tol(x, A, b)$  с корректировкой первой строки матрицы

Результат корректировки второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0, 2] & [1, 3] \\ 1 & -3 \\ [0.75, 1.25] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\operatorname{argmax} Tol(x, A, b) = (2.17, 1.42)$$



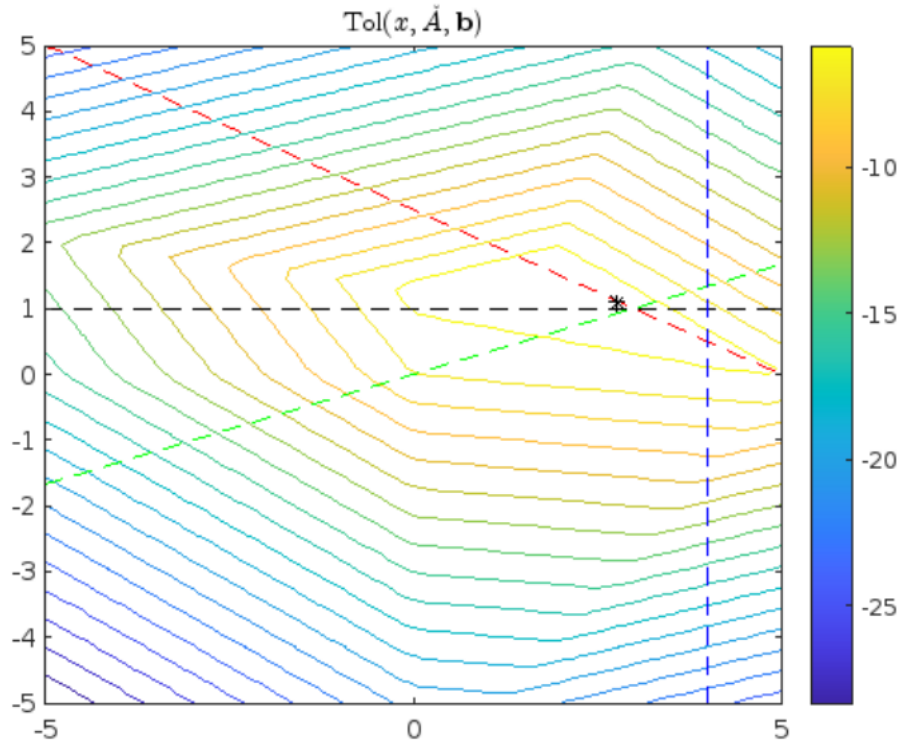


Рис. 5: График  $Tol(x, A, b)$  с корректировкой второй строки матрицы

Результат корректировки третьей строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0, 2] & [1, 3] \\ 1 & [-4, -2] \\ 1 & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\operatorname{argmax} Tol(x, A, b) = (2.57, 1.21)$$

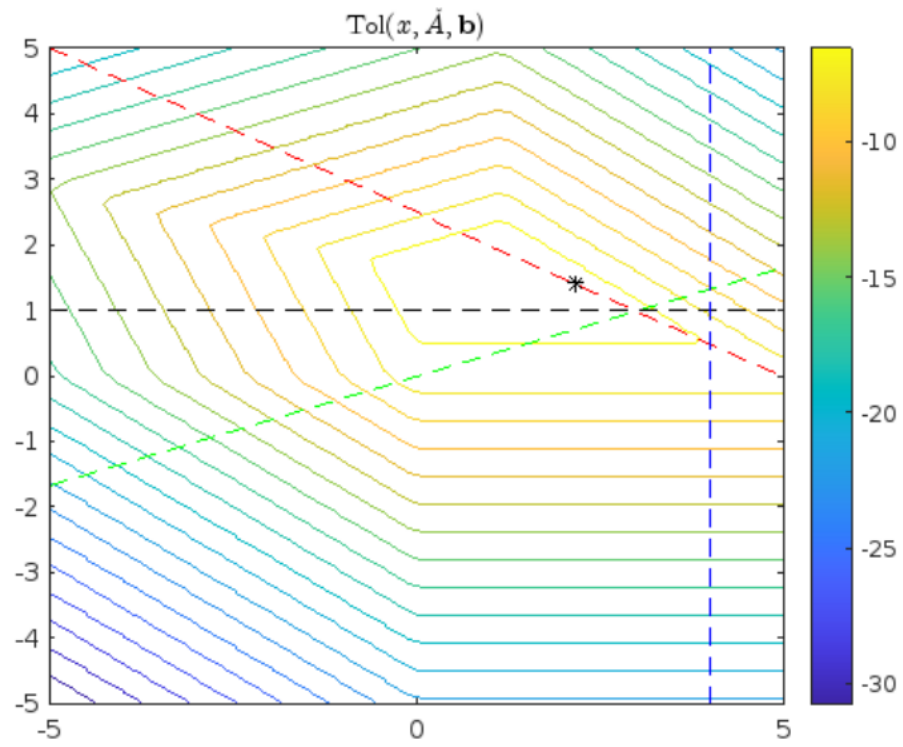


Рис. 6: График  $Tol(x, A, b)$  с корректировкой третьей строки матрицы

Результат корректировки четвертой строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0, 2] & [1, 3] \\ 1 & [-4, -2] \\ [0.75, 1.25] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\operatorname{argmax} Tol(x, A, b) = (2.57, 1.21)$$

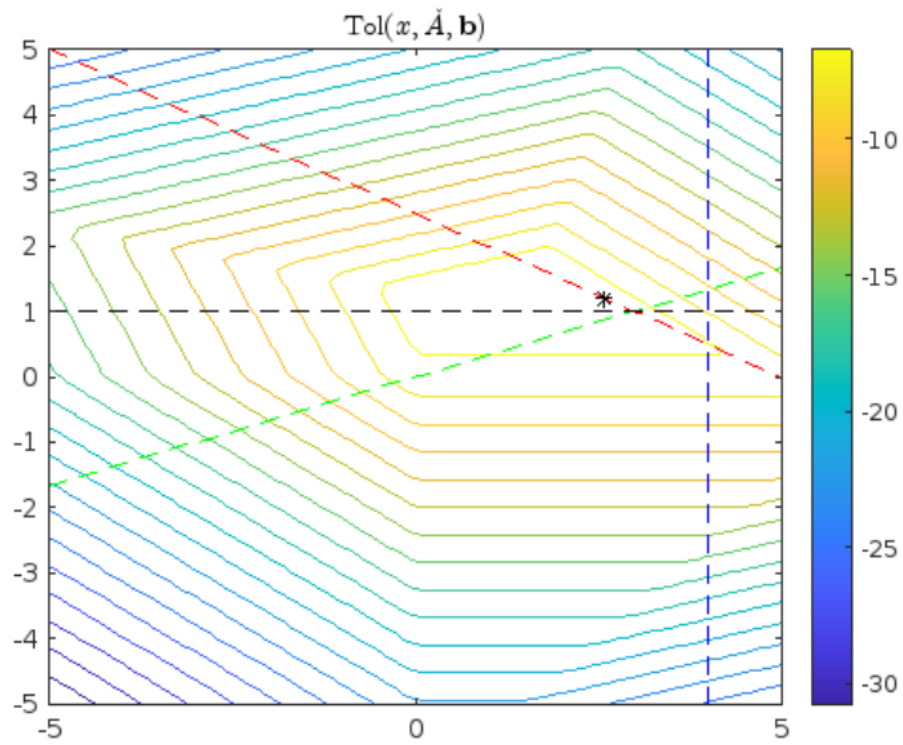


Рис. 7: График  $Tol(x, A, b)$  с корректировкой четвертой строки матрицы

Результат корректировки матрицы в целом:

$$A = \begin{pmatrix} [0.25, 1.75] & [1.25, 2.75] \\ 1 & [-3.75, -2.25] \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\operatorname{argmax} Tol(x, A, b) = (2.77, 1.12)$$

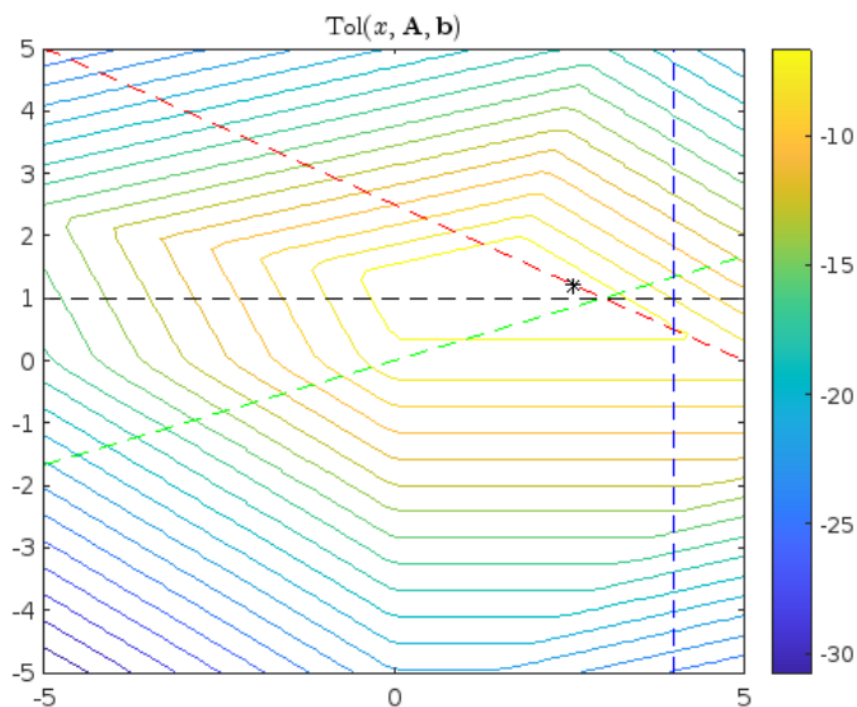


Рис. 8: График  $Tol(x, A, b)$  с корректировкой матрицы первой

## 5 Обсуждение

- Оценки вариабльности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабльности, хорошо оценили допустовое множество итоговой ИСЛАУ
- Коррекция правой части влечет увеличение значений максимума распознающего функционала
- Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях
- При коррекции матрицы в целом с увеличением параметра  $\epsilon$  максимум стремится к правой нижней вершине треугольника, составленного из центральных точечных уравнений ИСЛАУ.
- При корректировке третьей строки можно наблюдать смещение центра максимума и при увеличении параметра, начиная с  $\epsilon = 0.2$ , положение максимума не изменяется

## 6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: <https://github.com/PopovIV/IntervalAnalysis>