Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и физики

Отчет по лабор採боронoй работу №1

по дисциплине "Интервальный анализ"

Выполнил:

Студент: Попов Иван Владимирович
Группа: 5030102/90201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1. Постановка задачи

1.1. Задача 1: поиск δ

Задана интервальная матрица $\mathbf{A}$:

$$mid(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$rad(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \delta & 1 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1.05{-}\delta,\, 1.05 + \delta] & [1, 1] \\ [0.95{-}\delta,\, 0.95 + \delta] & [1, 1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Необходимо определить δ, при котором:

1. $0 \in \det(\mathbf{A})$;
2. матрица $\mathbf{A}$ особенная.

1.2. Задача 2: поиск глобального минимума

Для функции Била (Baele's function)

$$f(x, y) = (1.5 - x + x * y)^2 + (2.25 - x - x * y^2)^2 + (2.625 - x + x * y^3)^2 \tag{4}$$

имеющей один глобальный экстремум, и функции Химмельблау

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \tag{5}$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума, необходимо провести вычисления по поиску глобального минимума с помощью простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации.

2. Теория

2.1. Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow \forall A', A'' \in$ vert $\mathbf{A}$ det(A') $\cdot$ det(A”) >0

2.2. Глобальная оптимизация

Алгоритм:

Вход

Интервальное расширение $f : \mathbb{IX} \to \mathbb{IR}$ целевой функции f.
Заданная точность $\varepsilon \geq 0$

Выход

Оценка $y^\star$ глобального минимума $f^\star$ функции f на брусе $\boldsymbol{X}$.

Алгоритм

$\boldsymbol{Y} \leftarrow \boldsymbol{X}$;
вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})$ и присваиваем $y \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})}$;
инициализируем список $\mathcal{L} := (\boldsymbol{Y}, y)$;
DO WHILE $(\mathrm{wid}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})) \geq \varepsilon)$
  выбираем компоненту l, по которой брус $\boldsymbol{Y}$ имеет
  наибольшую ширину, т.е. $\mathrm{wid}\ \boldsymbol{Y}_l = \max_i \mathrm{wid}\ \boldsymbol{Y}_i$
  рассекаем брус $\boldsymbol{Y}$ по l-й координате пополам
  на брусы $\boldsymbol{Y}'$ и $\boldsymbol{Y}''$:
    $\boldsymbol{Y}' = \{\boldsymbol{Y}_1 \ldots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\underline{\boldsymbol{Y}}_l, \mathrm{mid}\ \boldsymbol{Y}_l], \boldsymbol{Y}_{l+1} \ldots, \boldsymbol{Y}_n\}$
    $\boldsymbol{Y}'' = \{\boldsymbol{Y}_1 \ldots, \boldsymbol{Y}_{l-1}, [\mathrm{mid}\ \boldsymbol{Y}_l, \overline{\boldsymbol{Y}}_l], \boldsymbol{Y}_{l+1} \ldots, \boldsymbol{Y}_n\}$
  вычисляем $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}'')$;
  присваиваем $v' \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}')}$ и $v'' \leftarrow \underline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y})''}$;
  удаляем запись $(\boldsymbol{Y}$, y) из списка $\mathcal{L}$;
  помещаем записи $(\boldsymbol{Y}', v')$ и $(\boldsymbol{Y}'', v'')$ в список $\mathcal{L}$
    в порядке возрастания второго поля;
  обозначаем первую запись списка через $(\boldsymbol{Y}, y)$;
END DO
$y^\star \leftarrow y$

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python(3.7) с использованием следующих библиотек: intvalpy, numpy, Matplotlib.
Отчет написан в онлайн редакторе LaTeX - Overleaf.

4. Результаты

4.1. Задача 1: поиск δ

4.1.1. 0 $\in$ det(A)

Определитель матрицы **A** 2×2 вычисляется по следующей формуле:

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{1221} \tag{6}$$

График нижней и верхней границы интервала имеет вид:

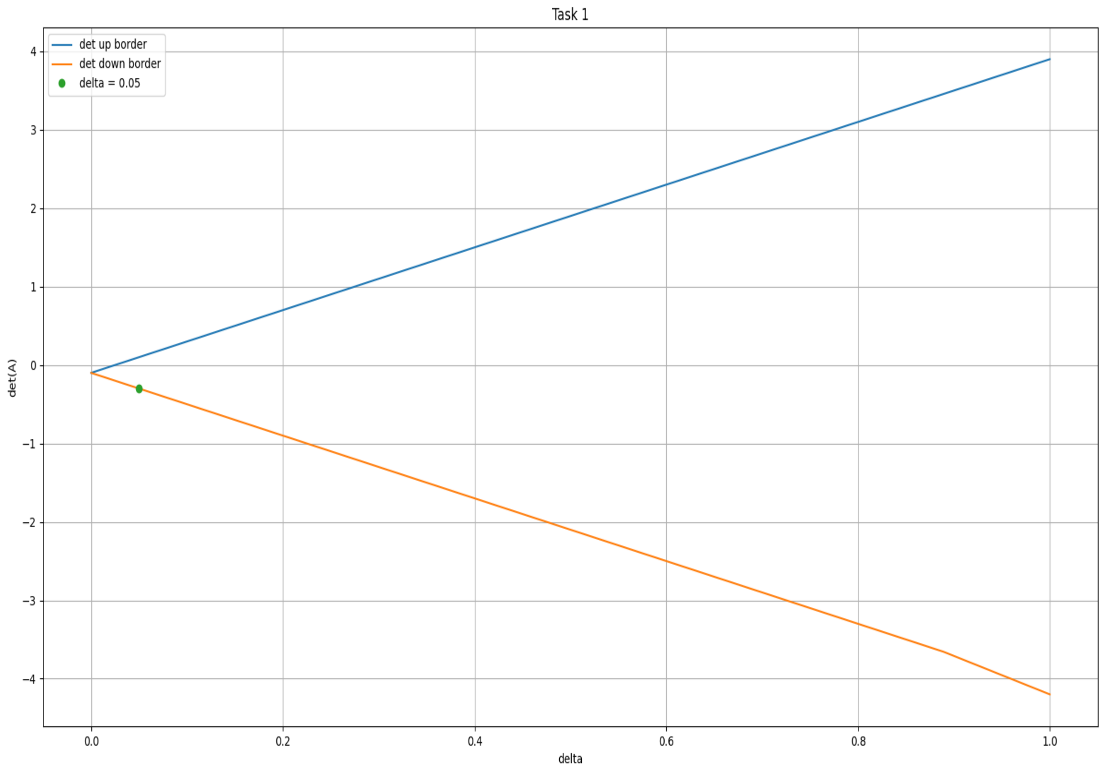

Рис. 1. График границ интервала определителя

Таким образом, $\forall\delta \geq 0.05 : 0 \in \det(\mathbf{A})$.

4.1.2. Матрица A - особенная

Для определения "особенности"матрицы А (3) при определенном δ воспользуемся критерием Баумана. Множество vert(**A**) состоит из 4 элементов:

$$vert(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1.05 \pm \delta & 1 \\ 0.95 \pm \delta & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{7}$$

Таблица результатов для некоторых δ

δ	Особенная матрица
0.00	Нет
0.01	Нет
0.02	Нет
0.03	Нет
0.04	Нет
0.05	Да
0.06	Да
0.07	Да

Таблица 1. Связь δ с особенностью матрицы

Видно, что матрица (3) не особенная только в случае, когда $\delta < 0.05$, и особенная при $\delta \geq 0.05$.

4.2. Задача 2: поиск глобального минимума

4.2.1. функция с одним глобальным минимумом

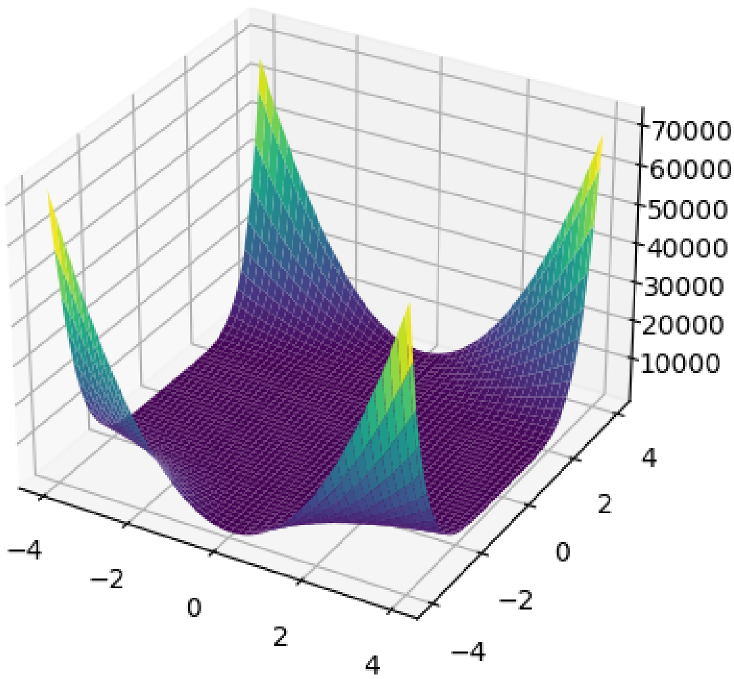

Рис. 2. График функции Била

Функция Била $f(x, y)$ имеет один глобальный минимум:

x_{min}	y_{min}	$f(x_{min}, y_{min})$
3	0.5	0

Таблица 2. Точки минимумов функции Била и их значения

Рассмотрим работу алгоритма поиска глобального минимума на начальном брусе $\mathbf{A}$ = [(-4, 4), (-4, 4)], $\epsilon = 0.0001$.

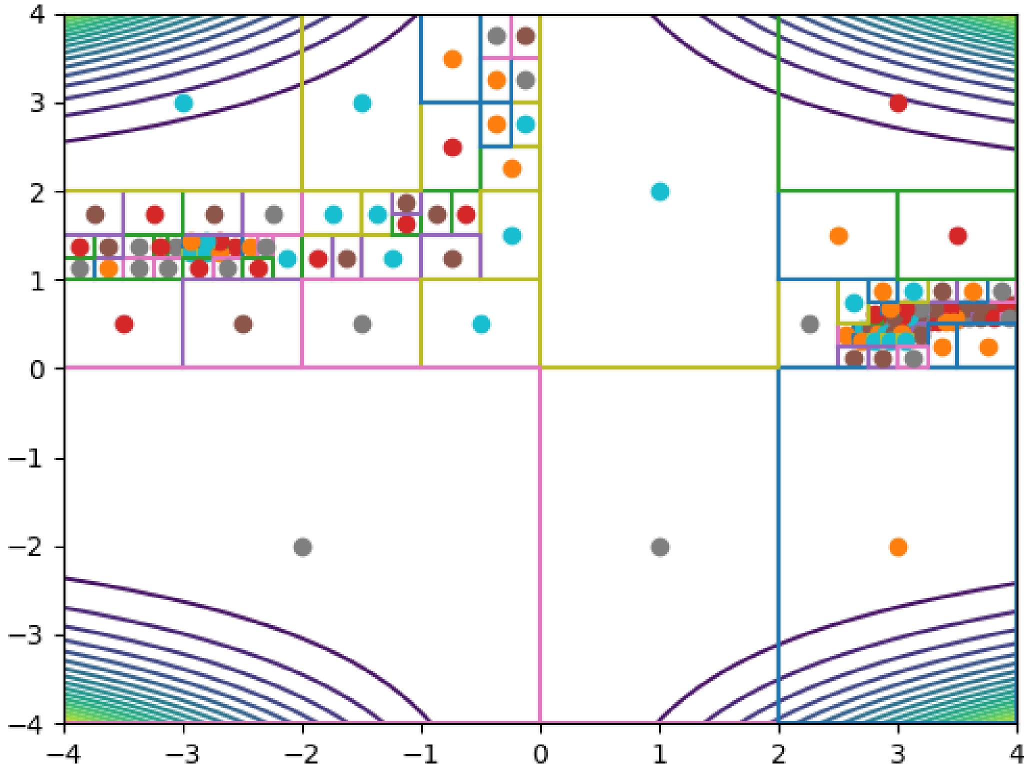

Рис. 3. Поиск глобального минимума функции Била

x*	y*	f(x*, y*)
2.9951172	0.4990234	0

Таблица 3. Найденный алгоритмом глобальный минимум функции Била

4.2.2. Функция с несколькими глобальными минимумами

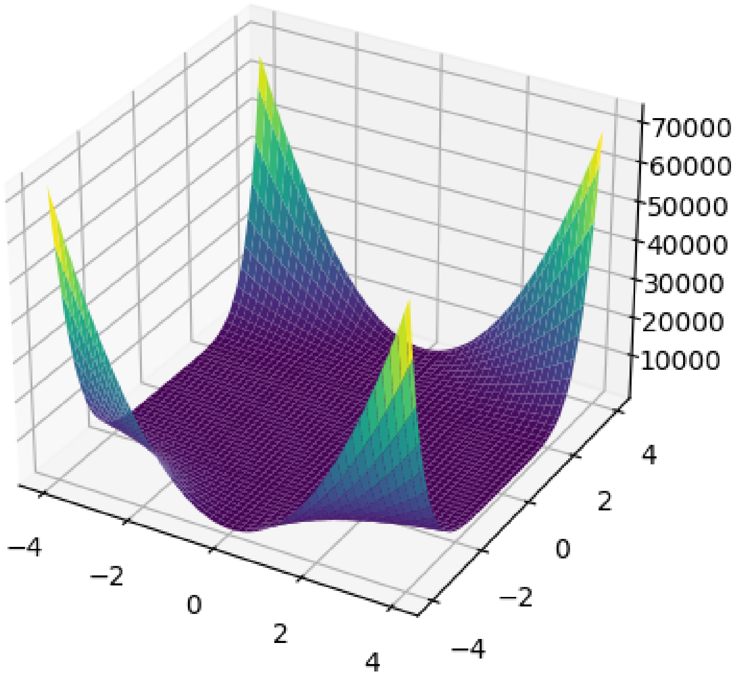

Рис. 4. График функции Химмельблау

Функция Химмельблау $f(x, y)$ имеет четыре глобальных минимума:

x_{min}	y_{min}	$f(x_{min}, y_{min})$
3	2	0
-2.805118	3.131312	0
-3.779310	-3.283186	0
3.584428	-1.848126	0

Таблица 4. Точки минимумов функции Химмельблау и их значения

Рассмотрим работу алгоритма поиска глобального минимума на начальном брусе $\mathbf{A} = [(-4, 4), (-4, 4)]$, $\epsilon = 0.0001$.

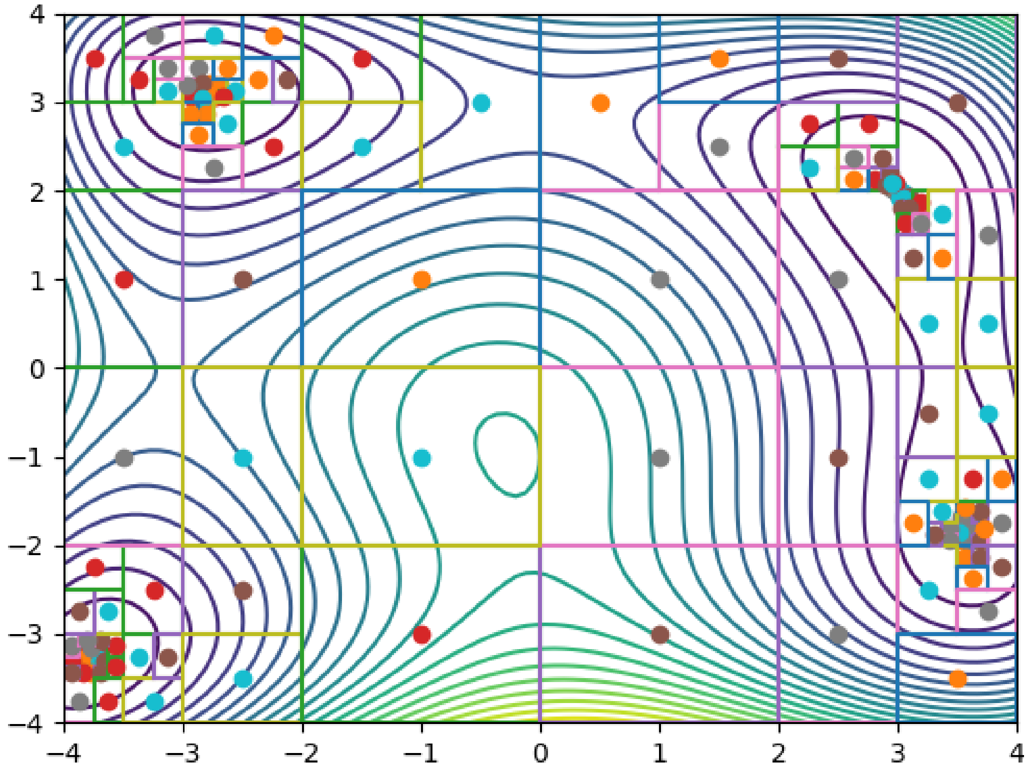

Рис. 5. Поиск глобального минимума функции Химмельблау

x*	y*	f(x*, y*)
3.5844726	-1.8486328	0

Таблица 5. Найденный алгоритмом глобальный минимум функции Химмельблау

5. Обсуждение

5.1. Поиск δ

Рассмотренная нами матрица является неособенной при малых значения δ. Матрица становятся особенными, когда интервалы, находящиеся в столбцах, имеют не пустое пересечение. Более того, если происходит пересечение интервалов во всех столбцах определенных строк, то тогда можно выделить такую точечную матрицу, из этих интервалов, в которой определитель будет равен 0. Иначе говоря, в таком случае определитель матрицы интервалов содержит в себе 0.

5.2. Поиск глобального минимума

Для обеих функций алгоритм нахождения минимума функции дал правильную оценку значения минимума функции. При этом видно, что для функции, имеющей несколько равнозначных глобальных минимумов наблюдаются скачки между этими самыми локальными минимумами. Скачкообразное поведение графиков объясняется самим алгоритмом: ведущий брус, который будет далее дробиться, выбирается на каждой итерации путем полного итерирования по рабочему списку, то есть не обязательно последний брус дает наилучшее приближение к минимуму.

6. Ссылки на библиотеки

[1] А.Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. - СПб., 2020.

7. Литератра

https://github.com/PopovIV/IntervalAnalysis - GitHub репозиторий