

А.Д.Вентцель

КУРС ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(2-е изд., доп.—М.: Наука. Физматлит, 1996)

Предназначена для первоначального ознакомления с теорией случайных процессов. Подчеркивается связь этой теории с фактами функционального анализа.

Основное внимание уделяется не выкладкам и не доказательству теорем в окончательной форме, а объяснению сути применяемых методов на простом по возможности материале. В ходе изложения дается около 250 задач различной трудности и разного характера (упражнения, примеры, части доказательств, обобщения и т.п.); примерно для двух третей из них приведены решения.

Во втором издании (1-е изд.—1975 г.) добавлены параграфы о сходимости распределений в функциональных пространствах и о компенсаторах случайных функций.

Для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Предисловие к первому изданию	
Введение	9
Глава 1. Основные понятия	16
§ 1.1. Что такое случайный процесс?	16
§ 1.2. Примеры случайных процессов. Винеровский процесс	18
§ 1.3. Обзор методов теории случайных процессов	27
§ 1.4. Важнейшие классы случайных процессов	34
Глава 2. Элементы случайного анализа	39
§ 2.1. Сходимости, непрерывности, производные, интегралы	39
§ 2.2. Стохастические интегралы от неслучайных функций	51
Глава 3. Некоторые понятия общей и корреляционной теории	63
случайных процессов	
§ 3.1. Связанные со случайной функцией 0-алгебры и пространства	63
случайных величин	
§ 3.2. Операторы сдвига	68
§ 3.3. Задачи наилучшей оценки	74
Глава 4. Корреляционная теория стационарных (в широком смысле)	84
случайных процессов	
§ 4.1. Корреляционные функции	84
§ 4.2. Спектральные представления	90
§ 4.3. Решение задачи линейного прогнозирования	98
Глава 5. Бесконечномерные распределения. Свойства с вероятностью	108
1	
§ 5.1. Распределения случайных функций. Теорема Колмогорова о	108
конечномерных распределениях	

§ 5.2. Свойства с вероятностью 1	120
§ 5.3. Абсолютная непрерывность бесконечномерных распределений и плотности	131
§ 5.4. Слабая сходимость бесконечномерных распределений	137
Глава 6. Марковские моменты, свойства независимости от будущего	147
§ 6.1. Марковские моменты	147
§ 6.2. Свойства независимости от будущего	152
Глава 7. Мартингалы	161
§ 7.1. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы	161
§ 7.2. Компенсаторы	167
§ 7.3. Неравенства и равенства, связанные с мартингалами	170
§ 7.4. Теорема о сходимости супермартингалов	177
Глава 8. Марковские процессы. Основные понятия	183
§ 8.1. Марковские процессы и марковские семейства	183
§ 8.2. Различные формы марковского свойства. Конечномерные распределения	191
§ 8.3. Семейства операторов, связанные с марковскими процессами	202
§ 8.4. Однородные марковские семейства	213
§ 8.5. Строго марковские процессы	219
§ 8.6. Стационарные марковские процессы	229
Глава 9. Марковские процессы с непрерывным временем. Свойства траекторий. Строго марковское свойство	231
§ 9.1. Свойства траекторий	231
§ 9.2. Строго марковское свойство для феллеровских марковских семейств с непрерывными справа траекториями	236
Глава 10. Инфинитезимальные операторы	240
§ 10.1. Инфинитезимальный оператор полугруппы	240
§ 10.2. Резольвента. Теорема Хилле — Йосида	247
§ 10.3. Инфинитезимальные операторы и марковские процессы	252
Глава 11. Диффузии	264
§ 11.1. Что такое диффузия?	264
§ 11.2. Результаты Колмогорова. Обратное и прямое уравнения	266
Глава 12. Стохастические уравнения	277
§ 12.1. Стохастические интегралы от случайных функций	277
§ 12.2. Стохастический интеграл как функция верхнего предела	289
§ 12.3. Стохастические дифференциалы. Формула Ито	295
§ 12.4. Решение стохастических уравнений методом последовательных приближений	306
§ 12.5. Диффузии, задаваемые стохастическими уравнениями	314
Глава 13. Связь диффузий с уравнениями в частных производных	322
§ 13.1. Уравнения, связанные с дискретными цепями Маркова	322
§ 13.2. Случай решений, допускающих гладкое продолжение	324
§ 13.3. Регулярные и сингулярные точки границы	335

Решения задач	343
Список обозначений	394
Список литературы	396
Предметный указатель	397

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бесконечномерные распределения
 - 30, 108
 - плотности 131
- Бикомпенсатор 169
- Броуновское движение 19, 187, 267
- Вероятностный процесс 16
- Выборочная функция 16—17
 - ...в широком смысле 29
- Гильбертов кирпич 114
- Диффузия 264
- Задача Дирихле 328
 - интерполяции 78
 - Коши 259, 322
 - линейного прогнозирования 80, 98
 - фильтрации 77
 - экстраполяции (прогнозирования) 77
- Задачи наилучшей оценки 74
- Закон повторного логарифма для винеровского процесса 176, 341
- Законы больших чисел для стационарных процессов 87
 - нуля или единицы 31, 67, 238
- Измеримость прогрессивная 152
- Измеримость случайной функции 33
- Инвариантная мера 229
- Инфинитезимальный оператор 240
- Квадратичный компенсатор 170
- Компенсатор случайной функции 167
- Корреляционная теория случайных функций 29
 - функция 28
 - взаимная 28
 - совместная 28
 - стационарного процесса 36
- Марковский момент 32, 147
 - процесс 38, 185
- Марковское свойство 185—199, 219
 - семейство 189, 197
 - однородное 213
- Мартингал 161
- Мартингалы и супермартингалы, существование пределов 178
- Мера с независимыми, некоррелированными значениями см. Случайная мера
- Микротеорема 6
- Момент достижения множества 149
- μ -система 191
- Неотрицательно определенные функции 28, 89
- Непрерывность в среднем 41
- Неравенство Колмогорова 174
- Неубывающее семейство σ -алгебр 147
- Оператор замкнутый 250
 - локальный 253
- Операторы, связанные с марковским семейством 203
 - сдвига 68, 226
- Переходная плотность 184
 - функция 183
 - однородная 213
- Полугруппа операторов 214
- Предсказуемость 152
- Принцип максимума 245
- Пространства случайных величин, линейно порожденные случайной функцией 64
 - , порожденные случайной функцией 63
- Процесс винеровский 18
 - многомерный 21
 - , непрерывность реализаций 18, 126
 - остановленный 224

- —, предел суммы квадратов приращений 19
- — с отражением 187
- — существование 119
- Коши 22
- Маркова см. Марковский процесс
- пуассоновский 25
- с независимыми приращениями 34
- с некоррелированными (ортогональными) приращениями 34, 59
- со стационарными приращениями 37
- стационарный 35
 - в широком смысле 36
- марковский 229
- Равномерная интегрируемость
- непрерывность в среднем 42
- стохастическая непрерывность 41, 234
- Распределения конечномерные 17, 108
- Реализация 16
- Регулярная точка границы 336
- Регулярность линейная случайного процесса 80
 - случайного процесса 78
- Резольвента полугруппы 247
- Сепарабельность случайного процесса 129
- Сильная непрерывность полугруппы 244
- Сингулярная точка границы 336
- Сингулярность линейная случайного процесса 80
 - случайного процесса 78
- Случайная мера 51
 - пуассоновская 23
 - с независимыми значениями 52
 - с некоррелированными значениями 52
 - последовательность 16
 - функция 16
- гауссовская 34
- —, согласованная с семейством σ -алгебр 153
- Случайное поле, изотропное векторное со стационарными приращениями 37
- однородное (стационарное) 37
- — изотропное 37
- Случайный процесс 16
- Согласованности условия 111
- Спектральная мера 89
 - плотность 89
- Спектральное представление 90
- Стационарное распределение марковского семейства 230
- Стохастическая матрица 184
- непрерывность 41
- эквивалентность 17
- Стохастический дифференциал 295
- интеграл 55, 277
- процесс 16
- Стохастическое уравнение 306
- Строго марковское свойство 221, 236
- Субmartингал 161
- Суперmartингал 161
- σ -алгебры, порожденные случайной функцией 63
- σ -алгебры «хвостов» 66
- Траектория 17
- Уравнения Чепмена — Колмогорова 183
- Уравнения Колмогорова 272—276
- Феллеровские марковские семейства 208
- Формула Ито (замены переменных в стохастическом интеграле) 296—305
- Фундаментальное решение уравнения параболического типа 275
- Цепь Маркова 186
- Цилиндрические множества 108

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

По сравнению с первым изданием были внесены следующие основные изменения.

Первое. Так как при обычном доказательстве теоремы Колмогорова о конечномерных распределениях фактически повторяется одно из доказательств компактности гильбертова кирпича, автор дал доказательство, явно опирающееся на эту компактность (§ 5.1). Окончательная формулировка теоремы дается в терминах борелевских измеримых пространств.

Второе: в книгу включены элементы теории, связанной со слабой сходимостью распределений в функциональных пространствах (§ 5.4, подготовительный материал § 5.2). В первом издании эта проблема всего лишь упоминалась.

Третье: при рассмотрении стохастических интегралов за основу берутся интегралы не относительно процессов с некоррелированными приращениями, а относительно случайных мер с некоррелированными значениями (§ 2.2). Вообще, больше внимания уделяется стохастическим мерам, в частности, рассматривается пуассоновская мера (§ 1.2). Построение стохастического интеграла от случайных функций (§ 12.1) дается тоже на основании стохастических интегралов относительно случайных мер, как это было показано в статье Ж. Пелломеля (J. Pellaumail «Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob — Meyer, Astérisque» (Vol. 19. Publication de la Société Mathématique de France, 1973)) и в ряде других; в педагогической практике — в ротапринтных лекциях Н. В. Крылова «Введение в теорию случайных процессов» (Ч. 1. — М.: Изд-во МГУ, 1986). Рассмотрение стохастических интегралов относительно

случайных мер облегчает применение этого аппарата за пределами материала, затронутого в книге.

Далее, более широко изложен аппарат, используемый для учета зависимости в теории случайных функций: свойства независимости случайных функций от будущего, включая предсказуемость (§ 6.2), и аппарат компенсаторов, используемый при применении мартингалов (§ 7.2).

Наконец, упорядочено изложение теории марковских процессов (вместо первых трех параграфов гл. 8 первого издания написаны два новых).

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана на основе лекций по теории случайных процессов, прочитанных автором в 1969 г. студентам III—IV курсов механико-математического факультета МГУ. Эти лекции были изданы ротапринтно (А. Д. Вентцель, Случайные процессы (Лекции для студентов III курса), М., 1969; Случайные процессы (Лекции для студентов IV курса), М., 1970)), затем значительно переработаны.

Интерес к изучению теории случайных процессов очень широк, и, по-видимому, нет необходимости указывать здесь, какая это важная часть теории вероятностей и как много она имеет приложений.

Автор видел свою цель не в том, чтобы формулировать и доказывать теоремы в наиболее окончательной форме, а в том, чтобы ознакомить читателей с сущностью применяемых методов на простом по возможности материале. В связи с этим книга содержит не очень много больших теорем и довольно большое число *микротеорем* (часть из них в виде задач). Хотя между микротеоремами и теоремами нет совершенно резкой грани, автор считает понятие микротеоремы принципиально важным. Тот, кто овладевает каким-либо разделом математики, должен придумывать такие микротеоремы в большом числе; из них 60 % должны легко доказываться, 30 % — оказываться неверными и легко опровергаться, а в остальных 10 % разобраться труднее — из них могут получиться даже настоящие хорошие теоремы.

Часть материала дана в виде задач. Решения задач составляют отдельную часть книги, чтобы боль-

ше была вероятность того, что читатель будет решать их сам. Решения даются не для всех задач и не очень подробно; предполагается, что читатель напишет их решения с нужной степенью подробности сам для себя (а также восстановит опущенные части доказательств в основном тексте и сделает недостающие чертежи). Задачи, данные обычным шрифтом, нужно решать сразу же; с задачами, набранными петитом, можно подождать до конца параграфа или главы. Задачи, при номерах которых стоит звездочка, — не обязательные, на них ничто не опирается. Конечно, за пределами книги неизбежно должны были остаться целые разделы теории. Хорошо будет, если читатель постараится пополнить свои знания по теории случайных процессов и возьмется за изучение какой-нибудь книги, более богатой материалом, например книги Дуба (1956). Дело не только в новом материале, но и в общем подходе, методах, новых точках зрения.

Вопросы принадлежности приводимых результатов тем или иным авторам, истории и литературы по предмету затрагивались лишь эпизодически; литературные ссылки даются в основном тогда, когда приводятся без доказательства какие-либо вспомогательные сведения.

Отбор материала обусловлен в основном педагогическими соображениями. Что касается общего подхода к материалу, — систематически подчеркивается связь теории с фактами функционального анализа. Когда был выбор: провести какое-либо рассуждение, касающееся случайных процессов, независимым образом или сослаться на тот или иной аналитический результат (например, изоморфность всех бесконечномерных гильбертовых пространств), — предпочтение отдавалось последнему.

Книга делится на главы, главы — на параграфы; параграфы — на пункты: 1, 2 и т. д., пункты — иногда на подпункты: а), б) и т. д. (при ссылках, например, так: п. 2а)). Нумерация формул, теорем, задач и т. п. своя в пределах каждого параграфа (при ссылках в пределах одного параграфа указывается номер формулы, задачи и т. п.; за пределами параграфа дается также номер параграфа).

В решениях задач формулы нумеруются в пределах одного решения: (*), (**), и т. д.: ссылка

например, просто на формулу (5) или задачу 3 означает, что формула или задача находится в том же параграфе, что и данная задача.

Ссылки на список литературы даются указанием фамилии автора (фамилий авторов) и года издания.

Автор выражает благодарность прочитавшим различные части рукописи и сделавшим замечания по ее улучшению: С. А. Молчанову, Е. Б. Дынкину, Е. С. Вентцель и в особенности А. Н. Ширяеву; О. А. Бояриновой, без самоотверженной помощи которой книга, конечно, не вышла бы; а также Т. Пахомовой, В. Орлову, Н. Гоз и другим студентам, взявшим на себя часть работы.

ВВЕДЕНИЕ

При изучении самых разных явлений действительности мы сталкиваемся с процессами, предсказать течение которых заранее не можем. Например: колебания высоты полета самолета около того значения, которое он должен выдерживать; движение отдельной молекулы в газе, заключенном в сосуд; размножение бактерий в питательной среде. Мы не можем заранее предсказать, например, будет ли в такой-то момент времени колония состоять из 1001 или 1002 бактерий и в каком месте какая бактерия будет находиться.

Такие процессы можно изображать случайным движением точки в специально подобранном для каждой задачи пространстве. Так, колебания высоты полета описывает точка, движущаяся по числовой оси; движение молекулы — точка, движущаяся в области трехмерного пространства, имеющей форму сосуда (в сущности, и сама молекула — почти что точка). Для описания размножения бактерий придется построить более сложное пространство. Пусть питательная среда заключена внутри стеклянной трубочки, толщиной которой мы можем пренебречь. Составим пространство из одной точки $*$, отрезка $[0, l]$ (l — длина трубочки), треугольника $\{(x, y): 0 \leq y \leq x \leq l\}$, тетраэдра $\{(x, y, z): 0 \leq z \leq y \leq x \leq l\}$, четырехмерного симплекса $\{(x, y, z, u): 0 \leq u \leq z \leq y \leq x \leq l\}$ и т. д. — возьмем счетную сумму множеств возрастающей размерности (рис. 1). Точка $*$ будет означать, что ни одной бактерии у нас не осталось; точка x на отрезке $[0, l]$ — что есть ровно одна бактерия и она находится на расстоянии x от левого конца трубочки; точка (x, y) треугольника — что есть две бактерии на расстояниях от левого

конца соответственно x и y , и т. д. При делении какой-либо из бактерий точка, изображающая состояние системы, будет перескакивать в симплекс следующей размерности, а когда одна бактерия гибнет, в симплекс предыдущей размерности. Иногда приходится рассматривать и более сложные пространства.

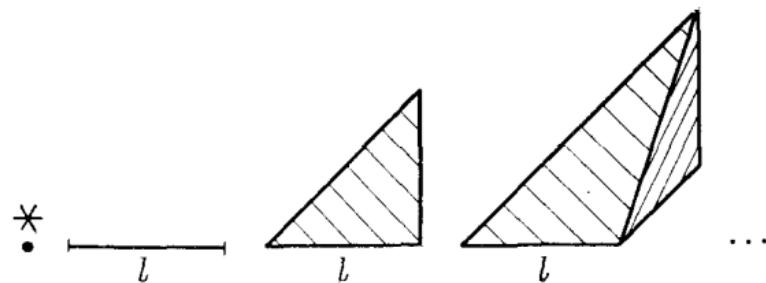


Рис. 1

Далее, движение точки в каком-то пространстве — это функция от аргумента t (времени) со значениями в этом пространстве; случайное движение — это функция от времени со случайными значениями в пространстве, о котором идет речь. То есть математическая модель случайных процессов реального мира — это функция от t , значения которой — случайные величины; причем мы должны быть готовы к тому, чтобы это были не случайные величины в узком смысле — не числовые, а принимающие значения в более или менее произвольном пространстве. (Не будем обсуждать условий применимости вообще теоретико-вероятностных понятий к явлениям реального мира.)

После того как мы пришли к такой математической модели, ее можно обобщать в различных направлениях. Разумное обобщение — рассматривать случайные функции от аргумента t , не имеющего смысла времени и могущего принимать значения не на числовой оси, а в каком-нибудь другом множестве. Это может быть нужно, в частности, для изучения изменчивости тех или иных величин не во времени, а в пространстве.

Предварительные сведения. Обозначения. Прежде всего предполагается, что читатель довольно хорошо владеет математическим анализом (в объеме первых трех лет университетского курса), в частности что он знаком с мерами, интегралом Лебега и с элементами

функционального анализа (гильбертово и банахово пространство, линейные операторы). Автор старался придерживаться терминологии книги А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа», (М.: Наука, 1968) и пользоваться в основном сведениями по теории меры и функциональному анализу, содержащимися в этой книге; когда приходилось выходить за эти пределы, автор старался отослать читателя к какому-нибудь широко распространенному руководству.

Множества мы обычно обозначаем прописными латинскими или греческими буквами; системы множеств — рукописными (\mathcal{A} , \mathcal{B} , ...); различные функциональные пространства — жирными (например, C , L^2). Множество элементов x , для которых выполнено то-то и то-то, мы обозначаем $\{x: \dots\}$.

Предполагается, что читатель знаком со следующими терминами и фактами. Евклидово пространство, гильбертово пространство, банахово пространство (Колмогоров и Фомин, 1968, гл. III, § 3, 4). Порожденная системой множеств \mathcal{C} σ -алгебра (обозначение: $\sigma(\mathcal{C})$); σ -алгебра борелевских подмножеств метрического (топологического) пространства X (т.е. σ -алгебра, порожденная открытыми множествами; обозначение: \mathcal{B}_X). Измеримое пространство, измеримое отображение, измеримая числовая функция. Мера; термин; почти всюду относительно меры μ (или: μ -почти всюду); теорема об однозначном продолжении меры с полуокольца на σ -алгебру (Колмогоров и Фомин, 1968, гл. V, § 3, 4). Если \mathcal{A} — какая-то алгебра подмножеств X , μ — конечная мера на порожденной этой алгеброй σ -алгебре $\sigma(\mathcal{A})$, то для любого множества $A \in \sigma(\mathcal{A})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такое, что мера симметрической разности $\mu(A \Delta A_\varepsilon)$ меньше ε (см. Халмуш, 1953, § 13, теорема 4). Если μ — конечная мера на борелевских подмножествах локально компактного метрического пространства X , то для любого борелевского множества его мера равна верхней грани мер содержащихся в нем компактов (Халмуш, 1953, § 52, теорема 7). Интеграл Лебега (обозначение: $\int_A f(x) \mu(dx)$ или сокращенно $\int_A f d\mu$);

микротеорема о замене переменных в интеграле Лебега: если g — измеримое отображение измеримого пространства (X, \mathcal{X}) в (Y, \mathcal{Y}) , f — измеримая числовая функция на (Y, \mathcal{Y}) , меры μ на (X, \mathcal{X}) и ν на (Y, \mathcal{Y}) связаны соотношением $\nu(B) = \mu(g^{-1}(B))$, то

$$\int_X f(g(x)) \mu(dx) = \int_Y f(y) \nu(dy);$$

теоремы о предельном переходе под знаком интеграла (Колмогоров и Фомин, 1968, гл. V, § 5).

Семейство функций $\{f_a(x)\}$ на измеримом пространстве с мерой μ называется *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное K такое, что для всех функций

$$\int_{\{x: |f_a(x)| \geq K\}} |f_a(x)| \mu(dx) < \varepsilon.$$

Если последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду к функции $f(x)$ и семейство $\{f_n(x)\}$ равномерно интегрируемо, то функция f интегрируема, и $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ при $n \rightarrow \infty$.

Пространства $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$, $p \geq 1$ (сокращенные обозначения: L^p , $L^p(X)$, $L^p(\mathcal{X})$, $L^p(\mu)$ или $L^p(d\mu)$; см. Колмогоров и Фомин, 1968, гл. VII).

Произведение σ -алгебр \mathcal{X} и \mathcal{Y} (обозначение: $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$); произведение мер (обозначение: $\mu \times \nu$; интеграл относительно $\mu \times \nu$ записывается так: $\iint f(x, y) \mu(dx) \nu(dy)$); теорема Фубини (Колмогоров и Фомин, 1968, гл. V, § 6). Абсолютная непрерывность счетно-аддитивной функции множества ν относительно мер μ на измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) ; плотность ν относительно μ (по определению это — \mathcal{X} -измеримая функция g такая, что $\nu(A) = \int_A g(x) \mu(dx)$ для всех $A \in \mathcal{X}$; обозначения: $g(x) = \frac{\nu(dx)}{\mu(dx)}$ или $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$); сингулярность мер μ , ν по отношению друг к другу. Микротеорема: если мера ν имеет плотность относительно μ , то для любой измеримой функции f

$$\int_A f(x) \nu(dx) = \int_A f(x) \frac{d\nu}{d\mu}(x) \mu(dx).$$

Теорема Радона — Никодима (Колмогоров и Фомин, 1968, гл. VI, § 5). Слабая сходимость мер: последовательность мер μ_n на σ -алгебре \mathcal{B}_X борелевских подмножеств метрического пространства X слабо сходится к мере μ на \mathcal{B}_X , если для любой непрерывной ограниченной функции f на X

$$\int_X f(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int_X f(x) \mu(dx).$$

Далее, предполагается, что читатель изучил курс теории вероятностей и знает такие понятия, как независимость, случайная величина, функция распределения, закон больших чисел, характеристическая функция и т. п. (см. Гнеденко, 1988; Феллер, 1967, т. 1). Предполагается также, что он знаком с аксиоматическим построением теории вероятностей и некоторыми более специальными вопросами, которые (вместе с объяснением обозначений) будут кратко изложены ниже.

Вероятностное пространство — тройка (Ω, \mathcal{F}, P) , где Ω — пространство элементарных событий — произвольное множество (его элементы — элементарные события — мы будем обычно обозначать буквой ω); \mathcal{F} — σ -алгебра его подмножеств, элементы которой называются (случайными) событиями; P — вероятность — мера на (Ω, \mathcal{F}) такая, что $P(\Omega) = 1$ (вообще мера μ на (X, \mathcal{X}) называется вероятностной, если $\mu(X) = 1$). Выражение «почти всюду относительно меры P » заменяется выражением «почти наверное» (п. н.).

Предполагается, что читатель знает леммы Бореля — Кантelli (см. Феллер, 1967, т. 1, гл. VIII, § 3).

Случайная величина в широком смысле — измеримое отображение пространства (Ω, \mathcal{F}) в измеримое пространство (X, \mathcal{X}) . (Другой термин — случайный элемент (X, \mathcal{X}) .) От пространства (X, \mathcal{X}) мы будем требовать только, чтобы все одноточечные множества были измеримы: $\{x\} \in \mathcal{X}$ для любого x . Случайные величины мы будем обозначать большей частью греческими буквами: $\xi = \xi(\omega)$, η_t^n , $\pi(A)$ и т. п.

Случайные величины ξ и η эквивалентны, если $P\{\xi \neq \eta\} = 0$.

Под σ -алгеброй, порожденной системой случайных величин ξ_a со значениями в (X_a, \mathcal{X}_a) , мы будем понимать σ -алгебру, порожденную всевозможными событиями вида $\{\xi_a \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathcal{X}_a$: $\sigma\{\xi_a\} = \sigma\{\{\xi_a \in \Gamma\}, \Gamma \in \mathcal{X}_a\}$.

Распределение случайной величины ξ — мера μ_ξ на (X, \mathcal{X}) , задаваемая соотношением $\mu_\xi(A) = P\{\xi \in A\}$ (короткая запись для $P\{\omega: \xi(\omega) \in A\}$). *Совместное распределение* случайных величин ξ, η, \dots, ζ , принимающих значения в пространствах $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y}), \dots, (Z, \mathcal{Z})$, — это распределение случайного вектора $(\xi, \eta, \dots, \zeta)$: $\mu_{\xi\eta\dots\zeta}(A) = P\{(\xi, \eta, \dots, \zeta) \in A\}$, $A \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \dots \times \mathcal{Z}$.

Случайные величины ξ, η, \dots, ζ независимы, если $\mu_{\xi\eta\dots\zeta} = \mu_\xi \times \mu_\eta \times \dots \times \mu_\zeta$. Случайные величины из бесконечного семейства $\{\xi_a\}$ независимы, если $\xi_{a_1}, \dots, \xi_{a_n}$ независимы для любого конечного числа отличных друг от друга a_1, \dots, a_n ; σ -алгебры $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}$ независимы, если независимы любые события $A_1 \in \mathcal{F}_{a_1}, \dots, A_n \in \mathcal{F}_{a_n}$. Ясно, как определяется независимость случайных величин от σ -алгебр и т. п.

Для случайных величин, принимающих значения в метрическом пространстве X ($\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$), определяется сходимость по вероятности: $\xi_n \xrightarrow{(P)} \xi$ ($n \rightarrow \infty$), или $\lim_{n \rightarrow \infty} (P)\xi_n = \xi$, если

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\rho(\xi_n, \xi) \geq \epsilon\} = 0$ для любого $\epsilon > 0$. (Так же определяется и $\lim_{t \rightarrow t_0} (P)\xi_t$ и т. п.) Предел по вероятности определяется однозначно с точностью до эквивалентности. Для непрерывной f из $\xi_n \xrightarrow{(P)} \xi$ вытекает $f(\xi_n) \xrightarrow{(P)} f(\xi)$. Из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности; из последовательности, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное.

Из $\xi_n \xrightarrow{(P)} \xi$ вытекает $\mu_{\xi_n} \rightarrow \mu_\xi$ в смысле слабой сходимости.

Для числовых случайных величин определяются: *математическое ожидание (или среднее)*

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega),$$

дисперсия $D\xi = M|\xi - M\xi|^2$ (для вещественных случайных величин это то же, что $M(\xi - M\xi)^2$), *ковариация* $\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$.

Чебышёвское неравенство: для любой случайной величины ξ со значениями в (X, \mathcal{X}) , любой неотрицательной \mathcal{X} -измеримой функции f , любого $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi \in A_\varepsilon\} \leq Mf(\xi)/\varepsilon,$$

где $A_\varepsilon = \{x: f(x) \geq \varepsilon\}$.

Из сходимости в среднем в степени p — сходимости в пространстве $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вытекает сходимость по вероятности (следует из чебышёвского неравенства). Предел в смысле сходимости в среднем квадратическом (при $p = 2$) обозначается I. i. т.

Условное математическое ожидание $M(\xi | \mathcal{A})$ случайной величины ξ (числовой) относительно σ -алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ — это случайная величина $M(\xi | \mathcal{A})(\omega) = \eta(\omega)$ такая, что, во-первых, она \mathcal{A} -измерима и во-вторых,

$$\int_A \eta(\omega) P(d\omega) = \int_A \xi(\omega) P(d\omega)$$

для любого $A \in \mathcal{A}$. Из существования $M\xi$ (конечного) вытекают существование $M(\xi | \mathcal{A})$ и его единственность с точностью до эквивалентности. Свойства условных математических ожиданий: линейность; монотонность (из $\xi \leq \eta$ вытекает $M(\xi | \mathcal{A}) \leq M(\eta | \mathcal{A})$); $M(\xi\eta | \mathcal{A}) = \xi M(\eta | \mathcal{A})$ для \mathcal{A} -измеримой ξ , если только $M\eta, M\xi\eta$ существуют (или если $M|\eta|, M(|\xi| M(|\eta| | \mathcal{A})) < \infty$); если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, то $M(M(\xi | \mathcal{B}) | \mathcal{A}) = M(\xi | \mathcal{A})$. Все эти свойства выполнены с оговоркой: почти наверное.

Пусть η — случайная величина, не обязательно числовая, а со значениями в (X, \mathcal{X}) . Тогда по определению *условное математическое ожидание* числовой случайной величины ξ относительно η , $M(\xi | \eta)$ — это не что иное, как $M(\xi | \sigma(\eta))$ (события из σ -алгебры $\sigma(\eta)$ имеют вид $\{\eta \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathcal{X}$). Эта случайная величина представляется в виде $\varphi(\eta)$, где $\varphi(x)$ — \mathcal{X} -измеримая функция на X . Функция $\varphi(x)$ обозначается $M\{\xi | \eta = x\}$ и называется *условным математическим ожиданием* ξ при условии $\eta = x$ (при условии, что η приняло значение x).

Условная вероятность события A — это условное среднее его индикатора $\chi_A = \chi_A(\omega)$.

Если ξ и η — случайные векторы, имеющие совместную плотность распределения $p_{\xi\eta}(x, y)$, то можно ввести *условную плотность распределения* $p_\xi(x | \eta = y) = p_{\xi\eta}(x, y) / p_\eta(y)$. При этом для любой измеримой числовой функции $M\{f(\xi, \eta) | \eta = y\} = \int f(x, y) p_\xi(x | \eta = y) dx$.

Подробнее об этом можно прочесть в книге Феллера (1967, т. 2, гл. IV) или Ито (1960, гл. 1; 1963, § 32, 33).

Для чтения гл. 11, 13 нужно иметь понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных эллиптического и параболического типа, хотя материал, на который мы постоянно опираемся, совсем не велик: в основном постановка задачи Коши и краевых задач. В качестве источника необходимых сведений указываются книги Миранды (1957) и Фридмана (1968).

Некоторые общие обозначения. Минимум из двух чисел a и b обозначается $a \wedge b$, максимум — $a \vee b$. Объединение двух множеств мы будем обозначать $A \cup B$, пересечение — $A \cap B$ или AB , разность — $A \setminus B$, симметрическую разность (т. е. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) — $A \Delta B$. Знак \subset употребляется в смысле строгого включения множеств, знак \subseteq — для включения, допускающего совпадение. Для произвольного множества A его индикатор (характеристическая функция) $\chi_A(x)$ определяется как функция, принимающая значение 1 для $x \in A$ и 0 для $x \notin A$. Если A — событие, аргумент ω в χ_A будет обычно опускаться. Единичную меру, сосредоточенную в точке x , мы будем обозначать δ_x : по определению $\delta_x(\Gamma) = \chi_\Gamma(x)$.

Обозначение $f(x)$ двусмысленно: оно применяется и для значения функции f в точке x , и для самой функции. В случае, когда мы хотим подчеркнуть, что речь идет именно о функции, а не о ее значении в какой-то точке, мы будем пользоваться обозначением $f(\cdot)$. Если аргумент пишется не в скобках, а в виде индекса: f_x , то обозначением самой функции будет f_* . Особенno удобно обозначение с точкой для функций нескольких аргументов, например, $f^{(\cdot)}(\cdot, \cdot)$ — функция от четырех аргументов; $f^{(x)}(\cdot, \omega)$ — функция от двух аргументов, получающаяся из нее фиксированием значений остальных двух; $f_n^{(x)}(t, \cdot)$ — функция от одного аргумента; $f_n^{(x)}(t, \omega)$ — значение функции при фиксированных значениях всех аргументов.

Дальнейшие обозначения даны в конце книги в виде списка.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1.1. Что такое случайный процесс?

1. Случайной функцией называется семейство случайных величин, зависящих от параметра t , пробегающего произвольное множество T . Этот параметр мы будем писать либо в виде индекса, либо в скобках, например: случайная функция ξ_t , $t \in T$; случайная функция $x(t)$, $t \in T$.

Так как под случайной величиной мы понимаем измеримое отображение основного вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) в измеримое пространство (X, \mathcal{X}) , то случайная функция ξ_t , $t \in T$, — это, если записать более подробно, функция $\xi_t(\omega)$ от пары $t \in T$, $\omega \in \Omega$, которая при каждом $t \in T$ измерима по ω . Чаще всего мы будем рассматривать числовые случайные функции, т. е. (X, \mathcal{X}) у нас будет числовой прямой R^1 с σ -алгеброй борелевских множеств \mathcal{B}^1 (или комплексной плоскостью с соответствующей σ -алгеброй борелевских множеств).

Когда T — подмножество действительной прямой, а параметр t интерпретируется как время, вместо термина «случайная функция» употребляется термин *случайный процесс* (когда T состоит из целых чисел, говорят также о *случайной последовательности*). Мы будем заниматься в основном случайными процессами, а не случайными функциями на более сложных множествах T . Вместо *случайный процесс* говорят иногда *вероятностный* или *стохастический*; иногда мы будем говорить просто *процесс* (ведь никаких процессов, кроме случайных, мы не рассматриваем).

2. Введем некоторые основные понятия, связанные со случайными функциями.

В функции $\xi_t(\omega)$ можно зафиксировать элементарное событие ω и получить функцию $\xi_t(\omega)$. Это — уже неслучайная функция от $t \in T$; она называется *реализацией* случайной функции (еще *выборочной*

функцией; для случайных процессов также траекторией).

Наоборот, зафиксировав $t \in T$, мы получим случайную величину. В связи с понятием эквивалентности случайных величин вводится следующее определение. Случайные функции ξ_t и η_t , определенные на одном и том же T и одном и том же вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) и принимающие значения в одном и том же пространстве (X, \mathcal{X}) , называются *стохастически эквивалентными*, если они совпадают почти наверное при любом фиксированном t : при любом t $P\{\xi_t \neq \eta_t\} = 0$.

Согласно общему духу теории вероятностей, пренебрегающей событиями, имеющими вероятность 0, считается, что подмена изучения некоторой случайной функции изучением какой-либо другой эквивалентной ей случайной функции не наносит ущерба теории и не влияет на практические применения.

Далее, если ξ_t при любом $t \in T$ — случайная величина, то $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$ при любых $t_1, \dots, t_n \in T$ — случайный вектор, принимающий значения в (X^n, \mathcal{X}^n) . Если распределение $\mu_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}$ мы будем кратко обозначать μ_{t_1, \dots, t_n} :

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A) = P\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in A\}, \quad A \in \mathcal{X}^n.$$

Эти распределения при всевозможных $t_1, \dots, t_n \in T$ называются *конечномерными распределениями* случайной функции.

Конечномерные распределения имеет смысл рассматривать и для различных t_1, \dots, t_n , и когда некоторые из них совпадают. Однако распределения μ_{t_1, \dots, t_n} ,

для которых какие-то из t_1, \dots, t_n совпадают, легко найти через конечномерные распределения, соответствующие попарно различным элементам T . Так, скажем, $\mu_{t_1 t_2}(A) = \mu_{t_1}(B)$, где $B = \{x, y\}: (x, x, y) \in A \in \mathcal{X}^2(t, s \in T, t \neq s, A \in \mathcal{X}^3)$.

Легко видеть, что если две случайные функции стохастически эквивалентны, то их конечномерные распределения совпадают (но, конечно, не наоборот).

Что касается реализаций, то они могут быть у стохастически эквивалентных случайных функций

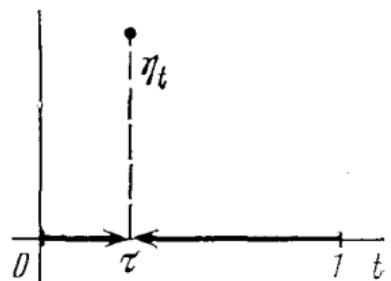


Рис. 2

совершенно различными. Например, пусть $T = [0, 1]$ и дана случайная величина τ , $0 < \tau < 1$, с непрерывным распределением. Положим $\xi_t \equiv 0$; $\eta_t = 0$, если $t \neq \tau$, и $\eta_t = 1$, если $t = \tau$. Эти случайные процессы стохастически эквивалентны: $P\{\xi_t \neq \eta_t\} = P\{\tau = t\} = 0$; траектории η_t имеют разрыв в точке τ , а любая траектория ξ_t — тождественный нуль (рис. 2).

§ 1.2. Примеры случайных процессов. Винеровский процесс

В этом параграфе мы ознакомимся с целым рядом примеров случайных функций; чтобы знакомство было теснее, предлагаются задачи, связанные с этими случайными функциями. В задачах речь идет в основном о конечномерных распределениях — это единственное, что мы пока знаем о случайных функциях.

1. Задача 1. Пусть A , η и ϕ — случайные величины, причем A , η неотрицательны и имеют произвольное совместное распределение, а ϕ не зависит от них и имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_t = A \cos(\eta t + \phi)$, $-\infty < t < \infty$.

Докажите, что его конечномерные распределения не меняются при любом сдвиге времени: $\mu_{t_1+h}, \dots, t_n+h} = \mu_{t_1, \dots, t_n}$ для любого действительного h .

Это — случайное синусоидальное колебание — процесс, рассматриваемый в связи с различными приложениями.

2. Очень важным для нашей теории примером является *винеровский процесс*.

Мы говорим, что случайный процесс w_t — *винеровский* (буква w по имени Винера), если выполнены следующие требования:

I. Для любых $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ приращения $w_{t_1} - w_{t_0}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ независимы.

II. Случайная величина $w_t - w_s$, $s < t$, имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $t - s$ (короче: с параметрами $(0, t - s)$).

III. Траектории w_t непрерывны.

Мы определили винеровский процесс аксиоматически, описанием его свойств; конечно, возникает вопрос: а существует ли математический объект,

удовлетворяющий этим аксиомам? Мы отложим доказательство существования винеровского процесса до гл. 5.

Винеровский процесс служит в каком-то приближении математической моделью движения частицы под действием хаотических ударов молекул; поэтому его называют также *броуновским движением*.

Винеровский процесс обладает интересными не-привычными свойствами.

Микротеорема. *Сумма квадратов приращений винеровского процесса, соответствующая разбиению $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ отрезка от a до b , сходится к $b - a$ в среднем квадратическом при измельчении разбиения:*

$$\max_{\max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0} \text{I.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = b - a. \quad (1)$$

Доказательство. Сосчитаем математическое ожидание и дисперсию суммы в (1). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{M} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{D} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a; \end{aligned}$$

в силу независимости $w_{t_{i+1}} - w_{t_i}$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{D} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [\mathbf{M} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^4 - (\mathbf{M} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2)^2] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} [3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2] = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2. \end{aligned}$$

Но последняя сумма не превосходит $\max(t_{i+1} - t_i) \times \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = (b - a) \max(t_{i+1} - t_i)$, что по предположению стремится к нулю. Итак,

$$\mathbf{M} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 - (b - a) \right]^2 = \mathbf{D} \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \rightarrow 0$$

при измельчении разбиения, т. е. сходимость в среднем квадратическом имеет место.

Мы видим, что винеровская случайная функция обладает свойством, непривычным для функций, с которыми мы обычно имеем дело: приращение гладкой функции имеет тот же порядок, что приращение аргумента, и сумма квадратов приращений стремится к нулю; а для функций, изменяющихся скачками, такая же сумма стремится к сумме квадратов скачков на отрезке от a до b , и предел не зависит непрерывным образом от a, b . Чтобы построить непрерывную (не случайную) функцию, обладающую подобным свойством, пришлось бы проявить много изобретательности.

Пример непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции строится не очень просто, а винеровские траектории, как можно доказать, почти все являются такими функциями.

Кстати, заметим, что из доказанной микротеоремы не вытекает, что для почти всех траекторий винеровского процесса $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2$ при измельчении разбиения отрезка от a до b будет существовать: из сходимости в среднем квадратическом вытекает сходимость по вероятности, но не сходимость почти наверное; можно лишь утверждать, что для какой-то последовательности разбиений с вероятностью 1 этот предел существует и равен $b - a$.

Задача 2. Обозначим $\alpha_n(t)$ ломаную с вершинами в точках $\left(k/2^n, \sum_{i=0}^{k-1} (w_{(i+1)/2^n} - w_{i/2^n})^2\right)$. Докажите, что последовательность случайных функций $\alpha_n(t)$ с вероятностью 1 сходится к t равномерно на любом конечном отрезке $[0, T]$.

Из полученного нами свойства процесса w_t легко вывести, что он обладает неограниченной вариацией на любом отрезке.

Займемся теперь нахождением конечномерных распределений винеровского процесса.

До сих пор мы говорили о винеровском процессе, как будто существует только один винеровский процесс, т. е. как будто аксиомы I — III задают этот математический объект в каком-то смысле однозначно. Но это не так даже при одном и том же временном промежутке T (а его можно выбирать по-разному). Легко видеть, что если сдвинуть все значения винеровского процесса на одну и ту же случайную величину $\zeta(\omega)$: $\tilde{w}_t = w_t + \zeta$, — то это тоже будет винеровский процесс; конечномерные распределения у него будут, вообще говоря, другие. В связи с этим введем определение. *Винеровским процессом, выходящим из точки $x_0 \in R^1$ (начинаящимся в x_0)*, называется винеровский процесс w_t , определенный при

$t \in [0, \infty)$ и такой, что $w_0 = x_0$ с вероятностью 1. Такой процесс уже будет задаваться однозначно с точностью до конечномерных распределений.

Выпишем эти распределения.

Для $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ рассмотрим случайный вектор $\Delta w = (w_{t_1} - w_{t_0}, w_{t_2} - w_{t_1}, \dots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$, где $t_0 = 0$. Он имеет плотность распределения

$$p_{\Delta w}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^n [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\}.$$

Совместное распределение w_{t_1}, \dots, w_{t_n} также будет иметь плотность. Выпишем ее, пользуясь формулой, выражающей плотность распределения вектора, получаемого из вектора ξ невырожденным линейным преобразованием A :

$$p_{A\xi}(x) = |\det A|^{-1} p_\xi(A^{-1}x).$$

Здесь в качестве ξ , $A\xi$ берутся векторы Δw , $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n})$; имеем: $(w_{t_1}, \dots, w_{t_n}) = (x_0 + (w_{t_1} - w_{t_0}), x_0 + (w_{t_1} - w_{t_0}) + (w_{t_2} - w_{t_1}), \dots, x_0 + (w_{t_1} - w_{t_0}) + \dots + (w_{t_n} - w_{t_{n-1}}))$ (помним, что $w_{t_0} = w_0 = x_0$); матрица преобразования треугольная, с единицами на диагонали и под ней, определитель равен 1; обратное преобразование дается формулой $A^{-1}x = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$ (здесь x_1, \dots, x_n — координаты вектора x , а x_0 — константа). Получаем:

$$p_{w_{t_1}, \dots, w_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^n [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\}. \quad (2)$$

Итак, конечномерные распределения винеровского процесса, начинающегося из точки x_0 , — гауссовские.

Задача 3. Пусть конечномерные распределения случайного процесса w_t задаются формулой (2), $w_0 = x_0$. Докажите, что тогда для w_t , $t \geq 0$, выполняются требования I, II определения винеровского процесса.

3. Многомерный винеровский процесс — случайный процесс w_t со значениями в (R^r, \mathcal{B}') , удовлетворяющий условиям I и III п. 2 и условию

II'. Случайный вектор $w_t - w_s$, $s < t$, имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и матрицей ковариаций $(t-s)E$ (E — единичная матрица порядка r).

Задача 4. Пусть $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^r)$, $t \in [0, \infty)$, — r -мерный винеровский процесс, $w_0 = x_0$. Докажите, что любое событие из σ -алгебры \mathcal{F}^1 , порожденной случайными величинами w_t^1 , $t \geq 0$, любое событие из σ -алгебры \mathcal{F}^2 , порожденной случайными величинами w_t^2, \dots , и любое событие из определенной аналогичным образом σ -алгебры \mathcal{F}^r независимы (т. е. r -мерный винеровский процесс — это r независимых друг от друга одномерных винеровских процессов).

Задача 5. Докажите, что, когда максимальный отрезок разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ отрезка от a до b стремится к 0, $\sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}}^1 - w_{t_i}^1)(w_{t_{i+1}}^2 - w_{t_i}^2) \rightarrow 0$ в среднем квадратическом.

4. Процессом Коши называется случайный процесс ξ_t , удовлетворяющий условию I п. 2 и условию

II''. Приращение $\xi_{t+h} - \xi_t$ имеет распределение с плотностью $p(x) = \pi^{-1}h/(h^2 + x^2)$ (распределение Коши).

Задача 6. Выпишите конечномерные распределения процесса Коши ξ_t , $t \geq 0$, начинающегося из точки x_0 (т. е. $\xi_0 = x_0$).

5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины с одной и той же непрерывной функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $F_n^*(x)$, $-\infty < x < \infty$, эмпирическую функцию распределения,

$$\begin{aligned} &\text{вычисленную по наблюдениям } \xi_1, \dots, \xi_n: F_n^*(x) = \\ &= \frac{\text{число } \{\xi_i \leq x, 1 \leq i \leq n\}}{n}. \end{aligned}$$

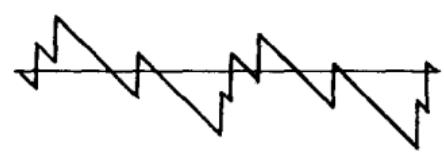


Рис. 3

Так как ξ_i случайны, то ясно, что $F_n^*(x)$, $x \in R^1$,

будет случайной функцией. Что это будет за случайная функция?

Прежде всего оказывается, что случайная функция $Y_n(t) = F_n^*(F^{-1}(t)) - t$, $t \in [0, 1]$ (где F^{-1} — обратная к F функция, т. е. $F(F^{-1}(t)) = t$), имеет одни и те же конечномерные распределения для любой непрерывной функции F . Траектория этой случайной функции имеет такой вид (рис. 3): она делает n скачков величины $1/n$ вверх, а в промежут-

ках между ними убывает с угловым коэффициентом — 1.

Ясно, что $Y_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю со скоростью порядка $1/\sqrt{n}$, так как это разность частоты и соответствующей вероятности. Имеет место следующий интересный результат.

Задача 7. При $n \rightarrow \infty$ все конечномерные распределения случайной функции $\sqrt{n} Y_n(t)$, $t \in [0, 1]$, сходятся к гауссовским распределениям.

Оказывается, эти предельные распределения являются конечномерными распределениями некоторой случайной функции $Z(t)$, $t \in [0, 1]$, с непрерывными реализациями. Это показывает путь, на котором можно найти асимптотические распределения различных функционалов от эмпирической функции распределения, используемых в математической статистике; например, статистики Колмогорова $\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n^*(x) - F(x)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\sqrt{n} Y_n(t)|$. Вывод асимптотического распределения разбивается на две части: доказательство того, что $P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\sqrt{n} Y_n(t)| > x\} \rightarrow P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |Z(t)| > x\}$, и нахождение последней вероятности.

6. До сих пор мы рассматривали случайные функции лишь с числовым параметром t : $T \subseteq R^1$; читатель легко придумает примеры, где $T \subseteq R^2$ и т. п. Рассмотрим пример случайной функции с более «экзотической» областью определения.

Пусть на измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) задана мера m . Случайная функция $\pi(A) = \pi(A, \omega)$, $A \in \mathcal{X}$, называется *пуассоновской случайной мерой со средним* m , если

I. Для любых непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ значения $\pi(A_1), \dots, \pi(A_n)$ независимы.

II. Для любого $A \in \mathcal{X}$ случайная величина $\pi(A)$ имеет распределение Пуассона с параметром $m(A)$.

III. Реализации $\pi(\cdot, \omega)$ — целочисленные меры.

Пуассоновские меры служат математическими моделями многих случайных распределений точек в некотором множестве, встречающихся при изучении явлений реального мира, таких, как распределение звезд (галактик) в R^3 ; распределение на оси времени моментов вызовов, приходящих на телефонную станцию, и т. п. В этих моделях в качестве $\pi(A)$ берется число точек, появившихся в то или иное подмножество $A \subseteq X$.

Установим существование пуассоновской меры.

Теорема. Если m — конечная мера на (X, \mathcal{X}) , то существует пуассоновская мера π со средним m .

Доказательство. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, из которых v — числовая, имеющая распределение Пуассона с параметром $m(X)$; а ξ_i — принимающие значения в (X, \mathcal{X}) , с распределением $m(\cdot)/m(X)$. И рассмотрим случайную меру π , сосредоточенную по \mathbb{P}^v точках ξ_1, \dots, ξ_v (это можно записать в виде формулы: $\pi = \sum_{i=1}^v \delta_{\xi_i}$). Докажем для этой случайной меры пп. I, II (III доказывать нечего — это очевидно по построению). Для непересекающихся A_1, \dots, A_n

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\pi(A_1)=i_1, \dots, \pi(A_n)=i_n\} = \\ & = \sum_k \mathbf{P}\{v=k\} \cdot \mathbf{P}\{\pi(A_1)=i_1, \dots, \pi(A_n)=i_n | v=k\} = \\ & = \sum_{k \geq i_1 + \dots + i_n} \frac{m(X)^k e^{-m(X)}}{k!} \cdot \mathbf{P}\{\text{из } k \text{ случайных величин} \\ & \quad \xi_1, \dots, \xi_k \text{ } i_1 \text{ попали в } A_1, \dots, i_n \text{ — в } A_n, \\ & \quad k = i_1 + \dots + i_n \text{ — в } X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n) | v=k\}. \end{aligned}$$

Пользуясь независимостью ξ_1, \dots, ξ_k от v , зачеркиваем условие $v=k$. Вероятность длинного события задается формулой полиномиального распределения; получаем, что это выражение равно

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq i_1 + \dots + i_n} \frac{m(X)^k e^{-m(X)}}{k!} \frac{k!}{i_1! \dots i_n! (k - i_1 - \dots - i_n)!} \times \\ & \quad \times \left(\frac{m(A_1)}{m(X)} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{m(A_n)}{m(X)} \right)^{i_n} \times \\ & \quad \times \left(\frac{m(X) - m(A_1) - \dots - m(A_n)}{m(X)} \right)^{k - i_1 - \dots - i_n} = \\ & = \frac{m(A_1)^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{m(A_n)^{i_n}}{i_n!} e^{-m(X)} \times \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m(X) - m(A_1) - \dots - m(A_n))^j}{j!} = \\ & = \prod_{s=1}^n \frac{m(A_s)^{i_s} e^{-m(A_s)}}{i_s!}. \end{aligned}$$

Это — произведение вероятностей соответствующих значений в пуассоновском распределении, что доказывает одновременно и независимость, и пуассоновость случайных величин $\pi(A_s)$.

Для случая меры m ,ющей принимать бесконечные значения, нужно условиться, что значит пуассоновское распределение с параметром $+\infty$. Условимся говорить, что случайная величина, принимающая значения на расширенной числовой прямой, имеет распределение Пуассона с параметром $+\infty$, если она с вероятностью 1 равна $+\infty$.

Задача 8. Докажите, что если m — σ -конечная мера, то существует пуассоновская мера π со средним m .

Большую часть теории случайных процессов можно развивать на основе уже приведенных примеров, строя, исходя из них, целые важные классы случайных процессов. Следующие несколько примеров строятся, исходя из пуассоновской случайной меры.

7. Пусть π — пуассоновская мера на $(0, \infty)$ (т. е. на борелевских подмножествах этой полупрямой) со средним $a \cdot mes$, где mes — одномерная мера Лебега, а $a \geq 0$ — константа. *Пуассоновский процесс с параметром a* , начинающийся из точки 0, определяется по мере π формулой $\xi_t = \pi(0, t]$ (т. е. ξ_t служит функцией распределения этой случайной меры).

Запишем аксиомы пуассоновского процесса в таком же духе, как для винеровского:

I. Для $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ приращения $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы.

II. Случайная величина $\xi_t - \xi_s$ при $s < t$ имеет распределение Пуассона с параметром $a(t-s)$.

III. Реализации ξ_t — непрерывные справа функции.

Реализации выглядят таким образом (рис. 4). Здесь τ_1, τ_2, \dots — точки, в которых сосредоточена пуассоновская мера.

Задача 9. Докажите, что пуассоновский процесс возвращает только скачками величины 1.

8. Произведем независимое от пуассоновского процесса ξ_t бросание монеты и определим новый случайный процесс η_t следующим образом: если монета

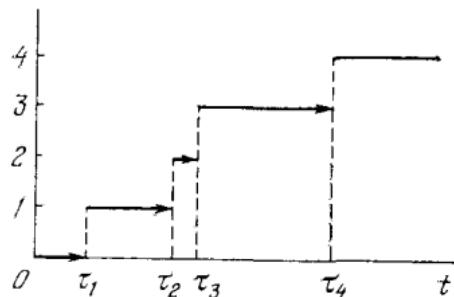


Рис. 4

выпадет гербом, положим $\eta_t = (-1)^{\xi_t}$, а если решкой, $\eta_t = (-1)^{\xi_t+1}$. Траектории процесса η_t имеют следующий вид (на рис. 5 изображен случай, когда монета выпадает решкой).

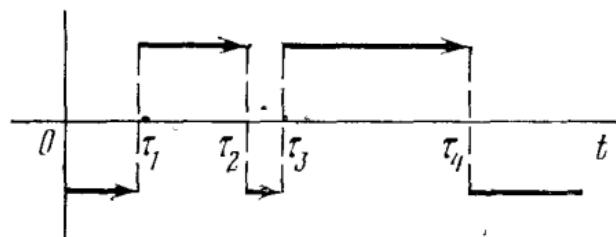


Рис. 5

Задача 10. Найдите конечномерные распределения процесса η_t .

9. Пусть m — мера на правой полуплоскости $(0, \infty) \times R^1$. Переменную-абсциссу будем интерпретировать как время и соответствующим образом обозначать; ординату будем обозначать u . Пусть π — пуассоновская мера со средним m . Определим случайный процесс ξ_t , $t \geq 0$, формулой

$$\xi_t = \int_{(0, t]} \int_{R^1} f(s, u) \pi(ds du). \quad (3)$$

Если мера π сосредоточена по единице в точках $(\tau_1, v_1), (\tau_2, v_2), \dots$ (точки занумерованы в порядке возрастания первой координаты), то процесс ξ_t начинается в точке $\xi_0 = 0$, в точке τ_1 делает скачок величины $f(\tau_1, v_1)$, в точке τ_2 — величины $f(\tau_2, v_2)$ и т. д.; а между скачками процесс остается постоянным. Это — обобщение пуассоновского процесса.

Задача 11. Докажите, что $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы при $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Найдите характеристическую функцию приращения $\xi_t - \xi_s$.

10. Приведем еще пример случайной функции с «экзотической» областью определения. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана случайная величина ξ , причем $M|\xi| < \infty$. Обозначим через \mathfrak{F} множество всех под- σ -алгебр σ -алгебры \mathcal{F} . Для любой σ -алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ (т. е. $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$) определено условное математическое ожидание $M(\xi | \mathcal{A})$, причем определено, вообще говоря, не единственным спосо-

бом (хотя любые два варианта $\mathbf{M}(\xi | \mathcal{A})$ равны друг другу с вероятностью 1). Поставим в соответствие каждому $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ случайную величину $\xi_{\mathcal{A}}$ — произвольный вариант $\mathbf{M}(\xi | \mathcal{A})$. Тогда $\xi_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, — случайная функция.

Задача 12. Докажите, что система случайных величин $\xi_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, равномерно интегрируема.

§ 1.3. Обзор методов теории случайных процессов

Можно классифицировать разделы теории случайных процессов по применяемым методам и соответственно по тому, какие именно стороны в изучаемых процессах являются объектом нашего внимания.

1. Случайный процесс является функцией от $t \in T$ со значениями в множестве всех случайных величин. Для него можно изучать те же вопросы и теми же методами, что и в теории функций, в математическом анализе. Так, раздел книги М. Лоэва «Теория вероятностей» (М.: ИЛ, 1962), посвященный случайным процессам, носит название «Элементы случайного анализа». Пожалуй, это название следует отнести только к части теории, где изучаются понятия сходимости, непрерывности случайных функций, производной, интегралов и т. п. Некоторое отличие от обычной теории состоит в том, что здесь нет фиксированного одного естественного понятия сходимости, а рассматриваются различные виды сходимости, соответственно непрерывности, производной и т. п.

Из пространств случайных величин, рассматриваемых в таких аналитических задачах, для нас важнейшим является евклидово пространство интегрируемых в квадрате случайных величин $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Скалярное произведение определяется в нем так:

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\xi\bar{\eta}.$$

Если случайная функция ξ_t при любом $t \in T$ интегрируема в квадрате, то определено скалярное произведение

$$(\xi_t, \xi_s) = \mathbf{M}\xi_t\bar{\xi}_s.$$

Эта функция от двух переменных задает ξ_t , $t \in T$, однозначно с точностью до изометрического линейного преобразования пространства L^2 .

По-видимому, не имеет смысла рассматривать только моменты второго порядка $M_{\xi_t \xi_s}^{\xi}$, не рассматривая момента первого порядка; поэтому в качестве характеристик интегрируемой в квадрате случайной функции вводятся математическое ожидание $M_{\xi_t}^{\xi}$ и корреляционная функция $K(t, s)$ (или $K_{\xi}(t, s)$, или $K_{\xi\xi}(t, s)$), которая определяется как ковариация случайных величин ξ_t и ξ_s , $t, s \in T$:

$$K(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \xi_s).$$

Значение $K(t, s)$ при $s = t$ — это не что иное, как дисперсия ξ_t .

Корреляционная функция очень простым образом связана с начальными моментами:

$$K(t, s) = M_{\xi_t \xi_s}^{\xi} - M_{\xi_t}^{\xi} \overline{M_{\xi_s}^{\xi}}$$

или, через скалярные произведения:

$$K(t, s) = (\xi_t, \xi_s) - (\xi_t, 1)(1, \xi_s).$$

Математическое ожидание и корреляционная функция задают случайную функцию однозначно с точностью до изометрического линейного преобразования L^2 , оставляющего на месте вектор 1.

Задача 1. Докажите, что любая корреляционная функция обладает свойством *неотрицательной определенности*: для любых комплексных c_j и любых $t_j \in T$ сумма $\sum_{j, k} c_j \bar{c}_k K(t_j, t_k)$ действительна и неотрицательна.

Легко вывести такие свойства корреляционных функций, как $|K(t, s)| \leq \sqrt{K(t, t) K(s, s)}$, $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$ и т. д.; но все подобные свойства являются следствиями свойства неотрицательной определенности (оно, как мы увидим в дальнейшем, необходимо и достаточно для того, чтобы функция могла быть корреляционной).

Если имеются две случайные функции ξ_t , $t \in T$, и η_t , $t \in T'$, можно рассмотреть их *взаимную корреляционную функцию*

$$K_{\xi \eta}(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \eta_s).$$

Совместная корреляционная функция ξ_t и η_t , $t \in T$, определяется как матричная функция

$$\begin{pmatrix} K_{\xi \xi}(t, s) & K_{\xi \eta}(t, s) \\ K_{\eta \xi}(t, s) & K_{\eta \eta}(t, s) \end{pmatrix}.$$

Легко понять, как определяется совместная корреляционная функция более чем двух случайных функций.

Раздел нашей теории, занимающийся только моментами первых двух порядков, — *корреляционная теория* случайных функций — это самый простой раздел. Случайные процессы здесь рассматриваются, в сущности, как кривые в гильбертовом пространстве. В рамках корреляционной теории можно рассматривать только *линейные* функции от случайных величин (или линейные преобразования случайных функций), потому что, например, зная $M\xi$ и $D\xi$, мы еще не знаем $M \sin^2 \xi$. Для многих понятий теории случайных процессов существуют их упрощенные аналоги, касающиеся только первых двух моментов. Обычно такие понятия обозначают тем же термином, но с добавлением слов «в широком смысле»; так, независимость «в широком смысле» — это некоррелированность и т. п.

Комплексные случайные величины мы рассматриваем здесь вовсе не из-за стремления к предельной общности. Дело в том, что наибольшие достижения корреляционной теории относятся к стационарным случайным процессам (см. § 4 этой главы и гл. 4). Этому объекту случайного анализа в обычном анализе отвечают, скорее всего, периодические функции, а разложение периодических функций в ряд Фурье значительно лучше выглядит в комплексной форме.

Задача 2. Найдите математические ожидания и корреляционные функции для случайных функций примеров 1, 2, 4, 5, 7, 8 § 2.

Задача 3. Найдите корреляционную функцию для случайной функции вида $\xi_t = \gamma_1 f_1(t) + \dots + \gamma_n f_n(t)$, где f_1, \dots, f_n — произвольные числовые функции от $t \in T$, а $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — некоррелированные случайные величины с дисперсиями d_1, \dots, d_n .

Методы, упомянутые в этом пункте, мы будем рассматривать в гл. 2—4.

2. С другой стороны, $\xi_t(\omega)$ можно рассматривать как функцию от ω , принимающую значения в пространстве функций, и изучать эту функцию $\omega \rightarrow \xi(\omega)$ теми же методами и с тех же точек зрения, что и в теории обычных случайных величин или случайных векторов. Двумя основными группами понятий здесь являются понятия, касающиеся а) *распределений* и б) *независимости и зависимости*.

а) Для случайной функции можно рассматривать вероятности вида $P\{\xi_t \in A\}$, где A — множество в бесконечномерном функциональном пространстве. Частный случай таких вероятностей — конечномерные распределения. (В частности, вероятность вида $P\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n\}$ — это вероятность

того, что траектория ξ пройдет через ряд вертикальных «воротцев»; рис. 6.) Некоторые разделы теории имеют дело только с конечномерными распределениями не выше определенного порядка (с не более чем двумерными распределениями имеет дело корреляционная теория, а также довольно значительная часть

теории марковских процессов, связанная с теорией полугрупп).

Что касается собственно бесконечномерных распределений, то здесь есть несколько групп задач.

a₁) Конечномерные распределения случайной функции играют по отношению к бесконечномер-

ним ту же роль, что функции распределения по отношению к распределению в R^n . Мы знаем, что в n -мерном случае вероятности $P\{\xi \in A\}$, $A \in \mathcal{B}^n$, однозначно определяются заданием функции распределения. Будут ли вероятности $P\{\xi \in A\}$, где A — множество в бесконечномерном пространстве, однозначно определяться конечномерными распределениями? Далее, мы знаем, какими свойствами должна обладать функция, чтобы она была функцией распределения; аналогично возникает вопрос: какими свойствами должна обладать система конечномерных распределений, чтобы она была системой конечномерных распределений какой-либо случайной функции? Эти вопросы будут рассматриваться в § 5.1.

a₂) Для распределений в конечномерном пространстве бывает, что случайная величина (вектор) почти наверное принимает значения из какого-то множества A , не совпадающего со всем R^1 (R^n). Так, для вырожденного нормального распределения в R^n в качестве A можно взять линейное многообразие меньшего числа измерений; для показательного распределения $A = [0, \infty)$. В конечномерном случае обычно легко узнать, будет ли $P\{\xi \in A\} = 1$ или нет. В бесконечномерном случае речь идет о том, чтобы выяснить, обладают ли почти все реализации случайного процесса с данными конечномерными распределениями какими-то определенными свойствами.

Задача более проста в случае *счетного* T ; и, например, утверждения типа усиленного закона больших чисел (связанные с принадлежностью с вероятностью 1 реализации случайной последовательности множеству последовательностей со сходящимися средними арифметическими) можно переформулировать на языке конечномерных распределений.

Для *несчетного* T ситуация сложнее; решать задачу о свойствах с вероятностью 1 в той постановке, которая приведена выше, нельзя.— Об этом будет идти речь в § 5.2.

Со «свойствами с вероятностью 1» связана группа теорем, известных под названием *законов нуля или единицы* (законов 0—1). Теоремы этой группы утверждают, что при таких-то условиях (связанных с характером взаимной зависимости значений случайной функции) все события из такой-то σ -алгебры имеют либо вероятность 0, либо 1. Те σ -алгебры, о которых идет речь в законах 0—1, обычно получаются предельным переходом из σ -алгебр, порожденных случайным процессом (см. § 3.1); доказательство теорем такого рода может состоять в установлении того, что любое событие из рассматриваемой σ -алгебры не зависит само от себя.

a₃) Заметное отличие теории бесконечномерных распределений от конечномерных состоит в том, что, тогда как важным классом конечномерных распределений являются распределения, имеющие плотность, в бесконечномерном случае такого класса нет. Дело в том, что в конечномерном случае есть мера Лебега — особая мера; в частности, инвариантная относительно сдвигов и вращений и преобразующаяся простым образом при аффинных преобразованиях. В бесконечномерном случае такой привилегированной меры нет. Можно рассматривать плотности, но *одних распределений относительно других*. Не то, чтобы это сильно усложняло теорию, но придает ей непривычный вид.

Конкретные результаты в этой области (установление абсолютной непрерывности или сингулярности одного распределения относительно другого, нахождение плотности) могут получаться предельным переходом от конечномерного случая (см. § 5.3, а также § 7.4).

a₄) Мы можем рассматривать вопрос о сходимости распределений в бесконечномерных пространствах — о таком важном для теории вероятностей виде сходимости, как *слабая сходимость*.

В этой книге (§ 5.4) будут затронуты только простейшие вопросы развитой здесь содержательной и плодотворной теории; в частности, нам не удастся разобрать пример, связанный с задачей 7 § 1.2.

б) Для исследования зависимости в теории случайных процессов развит специальный аппарат. Этот аппарат в его теоретико-множественной части связан с σ -алгебрами, в собственно теоретико-вероятностной части — с условными вероятностями и еще более с условными математическими ожиданиями относительно σ -алгебр.

Прежде всего, это различные семейства σ -алгебр, связанные со случным процессом (см. § 3.1). Для случайных процессов существенна зависимость между будущим и прошлым — некоторые из вводимых σ -алгебр конкретизируют неопределенно-интуитивное понятие будущего, другие — прошлого, что позволяет дать точные формулировки задач о зависимости между ними.

Далее, оказывается, что характер зависимости будущего от прошлого, имеющий место, если под настоящим понимать произвольный фиксированный момент времени, может измениться, если настояще — случайный момент времени. В связи с этим вводится класс случайных моментов времени, называемых марковскими моментами. Теоретико-множественная (еще не связанная с вероятностями) часть аппарата для учета зависимости от прошлого развита в гл. 6.

Более сложная и содержательная часть этого аппарата состоит в использовании при исследовании случайного процесса различных вспомогательных случайных функций; причем они выбираются так, чтобы они принадлежали специальным классам случайных функций — мартингалам (или суб-, или супермартингалам). Здесь имеется также специальный аппарат, позволяющий немного подправлять случайные функции, чтобы превратить их в мартингалы; это — аппарат компенсаторов. — Об этом речь пойдет в гл. 7.

3. Можно изучать $\xi_t(\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, как любую функцию двух переменных. К функциям двух переменных относится, в сущности, только одна общая теорема — теорема Фубини; однако она составляет обоснование приема замены математического ожидания интеграла интегралом от математического ожидания, который позволяет получить большое число серьезных результатов.

Этот прием — в более простом варианте замены математического ожидания суммы суммой математических ожиданий — с успехом применяется в элементарной теории вероятностей; так, в применении к математическому ожиданию биномиального распределения он дает $n \cdot (0 \cdot q + 1 \cdot p)$ вместо более сложного $\sum k \cdot C_n^k p^k q^{n-k}$.

Важным понятием, относящимся к этой области, является *измеримость* случайной функции.

Пусть на T задана σ -алгебра \mathcal{T} ; случайная функция ξ_t называется *измеримой*, если функция $\xi_t(\omega)$ измерима по паре (t, ω) относительно σ -алгебры $\mathcal{T} \times \mathcal{F}$. Если T счетно, то любая случайная функция автоматически измерима (в качестве \mathcal{T} берется σ -алгебра всех подмножеств T). При несчетном T для измеримости случайной функции недостаточно, чтобы $\xi_t(\omega)$ при любом фиксированном t было \mathcal{F} -измеримо (это выполняется автоматически), а при любом фиксированном ω \mathcal{T} -измеримо по t (хотя это и необходимо). Достаточное условие измеримости дает следующая задача.

Задача 4. Пусть T — отрезок числовой прямой (или интервал, или полуинтервал), $\mathcal{T} = \mathcal{B}_T$ — система борелевских подмножеств T . Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$ — σ -алгебра его борелевских подмножеств, ξ_t , $t \in T$, — случайный процесс со значениями в (X, \mathcal{B}_X) . Докажите, что для измеримости процесса достаточно, чтобы все выборочные функции были при всех t непрерывны справа (или слева).

Следующая микротеорема — приспособление к случайным функциям теоремы Фубини и в доказательстве не нуждается.

Микротеорема. Пусть ξ_t , $t \in T$, — измеримая (относительно σ -алгебры \mathcal{T} на T) случайная функция; μ — мера на (T, \mathcal{T}) . Пусть хотя бы один из интегралов $\int_T M|\xi_t| \mu(dt)$ или $M \int_T |\xi_t| \mu(dt)$ конечен. Тогда

$$M \int_T \xi_t \mu(dt) = \int_T M \xi_t \mu(dt).$$

Рассматривать свойство измеримости случайных функций приходится не только в связи с теоремой Фубини.

Задача 5. Пусть ξ_t , $t \in T$, — случайная функция; на множестве T задана σ -алгебра \mathcal{T} , и случайная функция ξ_t измерима. Пусть $\tau(\omega)$ — случайный элемент (T, \mathcal{T}) . Докажите, что $\xi_{\tau} = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ — случайная величина.

Для неизмеримого случайного процесса его значение в случайный момент времени вовсе не обязано быть случайной величиной.

4. Разумеется, можно изучать случайные процессы, комбинируя методы пп. 1—3, или применять

методы, специально выдуманные для какого-либо узкого класса процессов, но об этом мы будем говорить не здесь.

§ 1.4. Важнейшие классы случайных процессов

В теории случайных процессов выделяются различные широкие классы случайных функций; эти классы, вообще говоря, пересекающиеся.

1. Случайная функция ξ_t , $t \in T$, принимающая значения в $(X, \mathcal{X}) = (R^1, \mathcal{B}^1)$ — или (R^n, \mathcal{B}^n) , — называется *гауссовской*, если все ее конечномерные распределения — нормальные (гауссовские), т. е. случайный вектор $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ имеет нормальное распределение при любых $t_1, \dots, t_k \in T$.

Примеры, приведенные в § 2, — не гауссовские случайные функции, за исключением примеров, связанных с винеровским процессом (см. формулу (2) § 2), и примера 1.

Задача 1*. Выясните, при каких условиях на случайные величины A , η процесс ξ_t примера 1 § 2 — гауссовский.

Многомерная центральная предельная теорема является основанием того, что гауссовские случайные функции иногда оказываются в каком-то смысле предельными для сумм возрастающего числа независимых случайных функций. Таков пример 5 § 2 (выясните, какие случайные функции нужно складывать, чтобы получить $F_n^*(x)$).

2. Мы говорим, что числовой (или векторный) случайный процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$, — *процесс с независимыми приращениями*, если его приращения на неперекрывающихся отрезках не зависят друг от друга: для $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $t_i \in T$, случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$, \dots , $\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ независимы.

Рассмотренные в § 1.2 пуассоновский процесс, винеровский процесс, процесс Коши, процесс из примера 9 — процессы с независимыми приращениями (это входит в их определение — требование I). Другой класс примеров относится не к произвольному $T \subseteq R^1$, а к $T = Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$: последовательность ξ_n с независимыми приращениями, $\xi_0 = 0$, — это не что иное, как последовательность сумм независимых случайных величин $\xi_1 = \xi_1 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_1$, \dots .

2'. Соответствующее понятие «в широком смысле»: случайный процесс ξ_t , $M|\xi_t|^2 < \infty$, называется *процессом с некоррелированными приращениями*, если его приращения на неперекрывающихся отрез-

ках некоррелированы, т. е. для $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ имеем

$$\text{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}) = 0.$$

Достаточно потребовать только некоррелированности $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$ для любых $t_0 \leq t_1 \leq t_2$. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}) &= \text{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_1} - \xi_{t_2}) - \\ &\quad - \text{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0. \end{aligned}$$

Если математические ожидания всех рассматриваемых случайных величин равны нулю, то некоррелированность совпадает с *ортогональностью* относительно скалярного произведения $(\xi, \eta) = M\xi\bar{\eta}$, так что в этом случае говорят о *процессах с ортогональными приращениями*. Это — кривые в гильбертовом пространстве, обладающие таким свойством: части кривой, отвечающие значениям параметра, меньшим или равным какого-то t , и большим или равным t , лежат в ортогональных друг другу линейных многообразиях. В конечномерных пространствах таких кривых (непрерывных) нет.

Если ξ_t — процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями; если ξ_t — гауссовский процесс с некоррелированными приращениями, то это также и процесс с независимыми приращениями.

Такое соотношение между понятиями «в узком смысле» и «в широком смысле» типично; см. далее.

3. Стационарные процессы. Мы говорим, что случайный процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$, является *стационарным*, если для любого действительного h его конечномерные распределения не меняются при сдвиге на h :

$$\mu_{t_1, \dots, t_n} = \mu_{t_1+h, \dots, t_n+h}, \quad (1)$$

если только $t_1, \dots, t_n, t_1+h, \dots, t_n+h \in T$.

В той мере, в какой теория случайных процессов отражает какие-то явления реального мира, понятие стационарности случайного процесса отражает идею неизменности условий, в которых протекает процесс. Математическими моделями многих практических важных процессов, содержащих в себе элементы неопределенности, с разумной степенью приближения могут служить стационарные процессы. Так, это понятие может быть полезным, если речь идет о колебаниях движущегося с постоянной скоростью экипажа (но не того же экипажа при торможении) или о последовательности знаков (букв) какого-либо текста.

Конечно, понятие стационарного процесса важно и с чисто математической точки зрения.

В качестве множества T значений временного параметра чаще всего рассматривают R^1 или $R_+ = [0, \infty)$, или множество Z^1 всех целых чисел, или $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, или натуральный ряд $\{1, 2, \dots\}$ (в последних трех случаях говорят о *стационарных последовательностях*).

Из примеров, рассмотренных в § 1.2, стационарными являются процессы примеров 1, 8.

3'. Числовой случайный процесс ξ_t называется *стационарным в широком смысле*, если у него существуют первые и вторые моменты и они не меняются при сдвиге:

$$\mathbf{M}^{\xi}_{t+h} = \mathbf{M}^{\xi}_t, \quad K(t+h, s+h) = K(t, s). \quad (2)$$

Легко видеть, что условия (2) равносильны тому, что \mathbf{M}^{ξ}_t не зависит от t , а корреляционная функция зависит только от разности $t - s$:

$$\mathbf{M}^{\xi}_t \equiv m, \quad K(t, s) = K(t - s).$$

Здесь вторая функция, которая также обозначена буквой K , называется *корреляционной функцией стационарного процесса*:

$$K(\tau) = \text{cov}(\xi_{s+\tau}, \xi_s).$$

В корреляционной функции стационарного процесса аргумент τ имеет смысл разности двух моментов времени.

Если стационарный процесс имеет два первых момента, то он, как легко понять, будет стационарным и в широком смысле; для гауссовских процессов оба понятия совпадают.

Стационарные процессы мы будем иногда называть *стационарными процессами в узком смысле* (если нужно будет подчеркнуть их отличие от стационарных в широком смысле).

Задача 2. Пусть w_t , $t \geq 0$, — винеровский процесс, выходящий из нуля. Положим $\xi_t = e^{-t} w_{e^{2t}}$, $-\infty < t < \infty$. Докажите, что ξ_t — стационарный процесс; найдите его корреляционную функцию.

Стационарные процессы в широком смысле допускают интересную интерпретацию в терминах геометрии гильбертова пространства: это почти то же самое, что винтовые линии в гильбертовом пространстве интегрируемых в квадрате случайных величин. Винтовая линия — это такая линия, которую можно двигать саму по себе, совмещая любую точку с любой; для

этого необходимо и достаточно, чтобы при определенном выборе параметра на кривой скалярные произведения $(\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_4} - \xi_{t_3})$ не менялись при любом сдвиге t_1, t_2, t_3, t_4 . Для стационарных процессов это, конечно, выполнено, так что все стационарные процессы в широком смысле — винтовые линии, но не все винтовые линии в гильбертовом пространстве — стационарные в широком смысле процессы. Легко проверить, что стационарные в широком смысле процессы — это те и только те винтовые линии в гильбертовом пространстве, которые лежат на поверхности сферы вида $\{x: (x, x) = \sigma^2 + m^2, (x, 1) = m\}$.

3''. *Обобщения стационарных процессов.* Однородное (или стационарное) случайное поле — случайная функция на множестве $T = R^n$, удовлетворяющая условию (1) для произвольного вектора h . Однородное изотропное поле — это такое, для которого конечномерные распределения не меняются не только при сдвиге, но и при вращении вокруг любой точки. Вообще можно рассматривать случайные функции, конечномерные распределения которых инвариантны относительно той или иной группы преобразований множества T .

Более сложно понятие однородного изотропного векторного поля: это — случайная функция $\xi(t)$ на $T = R^n$ со значениями в (R^n, \mathcal{B}^n) , удовлетворяющая условию (1) и такая, что для любого вращения g совместное распределение $g^{-1}\xi(gt_1), \dots, g^{-1}\xi(gt_n)$ совпадает с совместным распределением $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$. Разумеется, можно рассматривать однородные изотропные тензорные поля (постарайтесь дать определение, если вы знакомы с тензорами) и дальнейшие обобщения в этом направлении.

Случайный процесс ξ_t называется *процессом со стационарными приращениями*, если у него не меняются при сдвиге t_0, t_1, \dots, t_n на h совместные распределения приращений $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_0}$. Процессами со стационарными приращениями являются, конечно, все стационарные процессы, процессы в примерах 2—4, 7 § 1.2 (но не все процессы с независимыми приращениями) и, например, такой процесс:

$$\xi_t = A \cos(\eta t + \varphi) + at + \beta,$$

где φ не зависит от (A, η, α, β) и имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi]$.

Можно дать определение *процесса со стационарными приращениями второго порядка*, под которое подойдет, в частности, тот же процесс с добавкой случайной параболы и т. д.

Понятие стационарности приращений, как и понятие стационарности, отражает представление о неизменности условий протекания процесса, но по-другому. Процессы (и поля) со стационарными приращениями, не являющиеся стационарными, возникают при построении математической модели таких физических явлений, как, например, турбулентность. Так, хорошей моделью поля скоростей турбулентного потока оказывается *изотропное векторное случайное поле со стационарными приращениями*.

Ясно, каковы соответствующие понятия «в широком смысле». В частности, процессы со стационарными в широком смысле приращениями — это в точности винтовые линии в гильбертовом пространстве.

4. Другой чрезвычайно важный (и с точки зрения теории, и для возможных приложений) класс случайных процессов — класс *марковских процессов*. Это — такие процессы, в которых будущее зависит от прошлого только через настоящее.

Эту общую идею можно превратить в точное математическое определение, причем даже не одним способом. Определения будут даны в гл. 8.

Мы увидим, что процессы примеров 2, 3, 4, 7, 9 § 1.2 (процессы с независимыми приращениями) окажутся марковскими процессами; также примеры 5, 8, но не 1.

У классов стационарных и марковских процессов есть довольно широкое и интересное пересечение; об этом см. § 8.6.

ЭЛЕМЕНТЫ СЛУЧАЙНОГО АНАЛИЗА

§ 2.1. Сходимости, непрерывности, производные, интегралы

1. Для случайных величин, как уже говорилось, рассматривают не один какой-то вид сходимости, а много различных видов. В соответствии с этим мы рассматриваем различные виды непрерывности, производной и т. п. Однако сначала мы дадим некоторые критерии сходимости в терминах конечномерных распределений.

Микротеорема 1. Пусть $M|\xi_t|^2 < \infty$ при всех t . Для того чтобы существовал 1.и.м. ξ_t при $t \rightarrow t_0$ (или при $t \rightarrow \infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $M\xi_t \xi_s$ при $t, s \rightarrow t_0$ (или $t, s \rightarrow \infty$).

Заметим, что это условие можно заменить на условие существования конечных пределов $M\xi_t$ при $t \rightarrow t_0$ и корреляционной функции $K(t, s)$ при $t, s \rightarrow t_0$.

Доказательство. Необходимость — тривиальное следствие непрерывности скалярного произведения по паре аргументов. При этом $\lim_{t, s \rightarrow t_0} M\xi_t \xi_s = M|\text{l.i.m. } \xi_t|^2$ (соответственно $\lim_{t \rightarrow t_0} M\xi_t = M \text{l.i.m. } \xi_t$, а $\lim_{t, s \rightarrow t_0} K(t, s)$ — дисперсия этой случайной величины).

Для доказательства достаточности проверим выполнение условия Коши:

$$\begin{aligned} \lim_{t, s \rightarrow t_0} M|\xi_t - \xi_s|^2 &= \\ &= \lim_{t, s \rightarrow t_0} [M|\xi_t|^2 - M\xi_t \xi_s - M\xi_s \xi_t + M|\xi_s|^2] = 0. \end{aligned}$$

Задача 1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ из некоррелированных

случайных величин сходится в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n$.

Микротеорема 2. Для того чтобы существовал предел ξ_t в смысле сходимости по вероятности при $t \rightarrow t_0$ (или при $t \rightarrow \infty$), необходимо и достаточно, чтобы существовал предел при $t, s \rightarrow t_0$ (или при $t, s \rightarrow \infty$) двумерных распределений μ_{ξ_t, ξ_s} в смысле слабой сходимости.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\xi_t \xrightarrow{(P)} \eta (t \rightarrow t_0)$; тогда случайный вектор $(\xi_t, \xi_s) \xrightarrow{(P)} (\eta, \eta)$ при $t, s \rightarrow t_0$. Но из сходимости по вероятности вытекает слабая сходимость распределений, значит, $\mu_{\xi_t, \xi_s} \rightarrow \mu_{\eta, \eta}$.

Достаточность. Заметим, что если $t, s \rightarrow t_0$, то s может совпадать с t . Так как распределение (ξ_t, ξ_s) сосредоточено на биссектрисе первого и третьего координатных углов, то и предельное распределение сосредоточено на этом множестве (доказать!). Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию действительного аргумента f_ε , равную 1 вне ε -окрестности нуля и 0 в нуле. Имеем (по неравенству Чебышёва)

$$\begin{aligned} P\{|\xi_t - \xi_s| \geq \varepsilon\} &\leq M f_\varepsilon(\xi_t - \xi_s) = \\ &= \int \int f_\varepsilon(x - y) \mu_{\xi_t, \xi_s}(dx dy). \end{aligned}$$

Но $f_\varepsilon(x - y)$ — непрерывная функция двух переменных, причем ограниченная; поэтому при $t, s \rightarrow t_0$ интеграл справа стремится к $\int \int f_\varepsilon(x - y) \mu(dx dy)$, где

μ — предельное двумерное распределение. Так как оно было сосредоточено на множестве $\{x = y\}$, то интеграл равен нулю, и выполняется условие фундаментальности по вероятности.

Задача 2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение с $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = \sigma^2 > 0$. Известно, что существует предельное распределение для $\zeta_n = (\xi_1 + \dots + \xi_n)/(\sigma \sqrt{n})$ (стандартное нормальное распределение). Существует ли $\lim_{n \rightarrow \infty} (P) \zeta_n$?

Задача 3. Докажите, что если ξ_t — стационарный процесс, то $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}) \xi_t$ не существует, за исключением случая, когда процесс ξ_t эквивалентен постоянному по t : $\mathbf{P}\{\xi_t = \xi_{t_0}\} = 1$.

2. Теперь займемся понятиями непрерывности.

О непрерывности в смысле сходимости почти всюду, так же, как далее в этом параграфе о дифференцировании и интегрировании в смысле сходимости почти всюду, мы не будем здесь говорить; это связано со свойствами реализаций с вероятностью 1, которые будут рассматриваться в гл. 5.

Непрерывность в смысле сходимости по вероятности называется *стохастической непрерывностью*; это самый слабый из рассматриваемых видов непрерывности.

Случайная функция ξ_t , $t \in T$, называется *стохастически непрерывной* в точке $t_0 \in T$, если $\xi_t \xrightarrow{(P)} \xi_{t_0}$ при $t \rightarrow t_0$. Стохастическая непрерывность случайной функции, как легко понять, относится к свойствам, однозначно определяемым ее двумерными распределениями; конкретные примеры процессов, которые мы приводили, являются стохастически непрерывными (если имеет смысл об этом говорить), несмотря на то, что их реализации могут быть разрывными, — например, пуассоновский процесс. Это происходит потому, что разрывы на каждой реализации находятся в своих точках, и вероятность того, что разрыв будет именно в данной точке t , равна 0.

Следующая задача делает понятным то, что, рассматривая процессы с независимыми приращениями, мы не рассматриваем процессов с независимыми значениями.

Задача 4. Пусть ξ_t , $t \in [0, 1]$, — случайный процесс такой, что все ξ_t независимы друг от друга и имеют одинаковую плотность распределения p . Докажите, что этот процесс не стохастически непрерывен ни в какой точке.

Ясно, как определяется *непрерывность в среднем*.

Предлагается доказать следующие микротеоремы (данные в виде задач), из которых первые обобщают известные свойства непрерывных функций, а последние две дают критерии непрерывности в терминах двумерных распределений.

Задача 5. Если случайная функция ξ_t стохастически непрерывна на компактном множестве $A \subseteq T$, то она *равномерно стохастически непрерывна* на этом множестве, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\eta > 0$

существует $\delta > 0$ такое, что $P\{|\xi_t - \xi_s| \geq \varepsilon\} < \eta$ для $t, s \in A$, $\rho(t, s) < \delta$.

Задача 6. Если случайная функция ξ_t непрерывна в среднем в степени $p \geq 1$ на компактном A , то она равномерно непрерывна в среднем в степени p на этом множестве. (Мы не даем определения равномерной непрерывности случайной функции в среднем, но указываем только, что эта равномерная непрерывность определяется, как для любой функции, принимающей значения в нормированном пространстве.)

Задача 7. Если случайная функция ξ_t непрерывна в среднем в степени $p \geq 1$ на компакте A , то существует константа $C < \infty$ такая, что $M|\xi_t|^p \leq C$ при $t \in A$.

Задача 8. Для того чтобы случайная функция ξ_t была стохастически непрерывна на множестве T , необходимо и достаточно, чтобы распределение μ_{ξ_t, ξ_s} было слабо непрерывно по паре (t, s) на множестве $T \times T$.

Задача 9. Для того чтобы случайная функция ξ_t была непрерывна в среднем квадратическом на множестве T , необходимо и достаточно, чтобы была непрерывна по (t, s) на $T \times T$ функция $M\xi_t \xi_s$, или же чтобы $M\xi_t$ было непрерывно по t , а корреляционная функция $K(t, s)$ — по паре своих аргументов.

Микротеоремы задач 6, 7 сохраняются для функций в произвольном банаховом, а задачи 9 — в произвольном евклидовом пространстве; доказательство можно провести точно так же, как для числовых функций.

3. Ясно, что производная случайного процесса определяется как предел $(\xi_{t+h} - \xi_t)/h$ при $h \rightarrow 0$ в смысле соответствующей сходимости. Естественно, из дифференцируемости в среднем (по вероятности) вытекает соответствующая непрерывность. Условия дифференцируемости по вероятности и в среднем квадратическом нам дают микротеоремы п. 1; так как при применении этих микротеорем должна идти речь о совместных распределениях $(\xi_{t+h} - \xi_t)/h$ и $(\xi_{t+h'} - \xi_t)/h'$, то дифференцируемость по вероятности — свойство, определяемое конечномерными распределениями процесса не выше чем третьего порядка (дифференцируемость в среднем квадратическом,

как и все свойства, относящиеся к корреляционной теории, определяется распределениями не выше чем второго порядка). Рассмотрим примеры дифференцирования в различных смыслах.

Винеровский процесс не дифференцируем даже в смысле сходимости по вероятности. Действительно, будь он дифференцируем в какой-то точке t , существовал бы слабый предел распределения $(w_{t+h} - w_t)/h$ при $h \rightarrow 0$, а это — нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $|h|^{-1} \rightarrow \infty$, и оно при $h \rightarrow 0$ уходит на $-\infty$ и ∞ .

Процесс примера 1 § 1.2 дифференцируем по вероятности (это само собой разумеется, раз он обладает дифференцируемыми траекториями), а также в среднем в степени p , если $\mathbf{M}(A \cdot \eta)^p < \infty$.

Пуассоновский процесс дифференцируем по вероятности, но не дифференцируем в смысле сходимости в среднем ни в какой степени $p \geq 1$. Действительно, легко видеть, что $\lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{P})(\xi_{t+h} - \xi_t)/h = 0$, ибо с вероятностью 1 эта дробь равна 0 при всех достаточно малых h .

Значит, предел в среднем, если он существует, тоже должен быть нулевым почти наверное. Но математическое ожидание p -й степени модуля отношения приращений не меньше $|h|^{-p} \mathbf{P}\{\xi_{t+h} \neq \xi_t\} \sim a|h|^{1-p} \not\rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Этот пример показывает, что нет большого смысла строить наш «случайный анализ», основываясь на понятии дифференцирования по вероятности: ведь для того, чтобы можно было развивать сколько-нибудь далеко идущие теории, нужно, чтобы функция однозначно с точностью до константы определялась своей производной (это нужно, в частности, для вывода формулы Ньютона — Лейбница), а этой однозначности здесь нет. Напротив, для сходимости в среднем такая однозначность имеет место:

Задача 10. Пусть f_t — функция на числовой прямой или какой-либо ее части, принимающая значения в банаховом пространстве. Если для всех $t \in [a, b]$ существует производная этой функции $f'_t = \lim_{h \rightarrow 0} (f_{t+h} - f_t)/h$ в смысле сходимости по норме в этом пространстве и $f'_t = 0$ на отрезке $[a, b]$, то $f_t \equiv f_a$ при $t \in [a, b]$.

Посмотрим на дифференцирование случайных процессов с точки зрения корреляционной теории.

Задача 11. Докажите следующую микротеорему: для того чтобы случайный процесс ξ_t был непрерывно дифференцируем в среднем квадратическом на интервале (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы функция $M_{\xi_t \xi_s}$ обладала на множестве $(a, b) \times (a, b)$ непрерывной смешанной производной второго порядка по t и s (или чтобы M_{ξ_t} было непрерывно дифференцируемо по t и существовала непрерывная смешанная производная $\partial^2 K(t, s)/\partial t \partial s$ от корреляционной функции).

Из доказательства автоматически получается, что $\partial^2 K(t, s)/\partial t \partial s$ — корреляционная функция процесса ξ'_t . Более того, легко находится совместная корреляционная функция процесса и его производной:

$$\begin{pmatrix} K_{\xi \xi}(t, s) & K_{\xi \xi'}(t, s) \\ K_{\xi' \xi}(t, s) & K_{\xi' \xi'}(t, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\xi \xi}(t, s) & \partial K_{\xi \xi}(t, s)/\partial s \\ \partial K_{\xi \xi}(t, s)/\partial t & \partial^2 K_{\xi \xi}(t, s)/\partial t \partial s \end{pmatrix}.$$

Аналогично можно выписать совместную корреляционную функцию процесса и его производных до второго порядка, если ξ''_t существует, и т. д.

Задача 12. Пусть ξ_t — стационарный (в широком смысле) процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = (1 + |\tau| + \tau^2/3) e^{-|\tau|}$. Сколько раз он дифференцируем в среднем квадратическом?

Задача 13. Пусть ξ_t , $-\infty < t < \infty$, — случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s) = e^{st}$. Установите, что он бесконечно дифференцируем в среднем квадратическом, и найдите матрицу ковариаций случайных величин $\xi_{-1}, \xi'_{-1}, \xi''_{-1}, \xi_0, \xi_1$.

Что касается конечномерных распределений ξ'_t , то найти совместное распределение $\xi'_{t_1}, \dots, \xi'_{t_n}$ можно, зная совместные распределения $\xi_{t_1}, \xi_{t_1+h_1}, \dots, \xi_{t_n}, \xi_{t_n+h_n}$ при малых h_1, \dots, h_n , т. е. $2n$ -мерные распределения самого процесса. При этом можно найти также совместное распределение $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}, \xi'_{t_1}, \dots, \xi'_{t_n}$ как слабый предел распределений $(\xi_{t_i}, (\xi_{t_i+h_i} - \xi_{t_i})/h_i, i = 1, \dots, n)$. Точно так же можно найти совместные распределения значений ξ_t, ξ'_t, ξ''_t в n точках, но только здесь не обойтись $2n$ -мерными распределениями процесса ξ_t (вопрос к читателю: достаточно ли $3n$ -мерных распределений?). Итак, все такие задачи разрешимы, но могут быть довольно громоздки.

Задача 14*. Пусть двумерные распределения μ_{ts} случайного процесса ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, задаются при $s \neq t$ плот-

ностью

$$p_{t,s}(x,y) = \begin{cases} (\pi|t-s|)^{-1}/(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{если } |x|, |y| < 1, \\ & |\arcsin x + \arcsin y| > \pi - |t-s|; \\ (2\pi|t-s|)^{-1}/(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & \text{если } |x|, |y| < 1, \\ & |\arcsin x + \arcsin y| \leq \pi - |t-s|, \\ & |\arcsin x - \arcsin y| < |t-s|; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажите, что этот процесс дифференцируем в среднем квадратическом. Найдите распределение ξ_t .

Задача 15. Пусть ξ_t — гауссовский стационарный процесс с корреляционной функцией $K(\tau) = 1/(1+\tau^2)$, $M\xi_t = 0$; он дифференцируем в среднем квадратическом. Найдите совместное распределение ξ_0, ξ_b .

4. Теперь обратимся к интегрированию. Как определить $\int_a^b \xi_t dt$? Если случайный процесс непрерывен в смысле выбранного вида сходимости, интеграл естественно определить как предел интегральных сумм

$$\sum_{i=0}^{n-1} \xi_{s_i} (t_{i+1} - t_i)$$

при измельчении разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ в смысле соответствующей сходимости, где s_i — произвольная (не случайная!) точка между t_i и t_{i+1} .

Оказывается, как и в случае дифференцирования, здесь все хорошо в случае сходимости в среднем ($p \geq 1$) и плохо для сходимости по вероятности, что показывают следующие две задачи.

Задача 16. Докажите, что если процесс ξ_t не-прерывен в среднем на $[a, b]$, то существует $\int_a^b \xi_t dt$

в смысле сходимости в среднем.

Задача 17. Пусть $T = [0, 1]$, τ — случайная величина, равномерно распределенная на этом отрезке; $\xi_t = 0$ при $t \leq \tau$ и $\xi_t = 1/(t-\tau)$ при $t > \tau$. Докажите, что этот процесс стохастически непрерывен на отрезке $[0, 1]$, а $\int_0^1 \xi_t dt$ в смысле сходимости по вероятности не существует.

При решении задачи 16 можно повторять доказательство интегрируемости числовой функции, используя равномерную непрерывность (см. задачу 6); только нужно выбрать доказательство, не использующее верхних и нижних сумм, а состоящее в непосредственной проверке выполнения условия фундаментальности. Соответствующая микротеорема справедлива в любом банаховом пространстве.

Разумеется, можно определять несобственные интегралы в среднем как пределы соответствующих интегралов по меньшим отрезкам; теория здесь совершенно аналогична той части теории римановых интегралов, которая не использует понятий, связанных с неравенствами между числами (а только между абсолютными величинами, чему в банаховом пространстве соответствуют нормы). Например, если функция ξ_t непрерывна в p -среднем на интервале $(0, \infty)$ и $\int_0^\infty (\mathbf{M} |\xi_t|^p)^{1/p} < \infty$, то существует несобственный интеграл $\int_0^\infty \xi_t dt$ в смысле сходимости в среднем в степени p .

Выполнены также теоремы о дифференцировании интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу или о дифференцировании интеграла $\int_a^b F(t, s) \xi_s ds$ по t и т. п.; имеет место формула Ньютона — Лейбница.

Пользуясь этим, мы можем получить новые примеры дифференцируемых в среднем случайных функций; например, если ξ_t — пуассоновский процесс, то

для $\zeta_t = \int_0^t \xi_s ds$ имеем $\zeta'_t = \xi_t$.

Определение интеграла в среднем никак не связано со свойствами реализаций случайной функции: реализации интегрируемой в среднем случайной функции могут быть неинтегрируемы. Если все (или почти все) реализации интегрируемы, то все равно мы должны различать, с одной стороны, интеграл в среднем — обозначим его $(\mathbf{L}^p) \int_a^b \xi_t dt$ — случайную величину, определяемую

как предел в среднем интегральных сумм; с другой стороны, функцию, ставящую в соответствие элементарному событию ω значение интеграла вдоль траектории $\int_a^b \xi_t(\omega) dt$ (мы не можем, вообще говоря, утверждать, что это случайная величина). Будет

ли $(L^p) \int_a^b \xi_t dt$ с вероятностью 1 совпадать с интегралом $\int_a^b \xi_t dt$, вычисленным отдельно вдоль каждой реализации?

Если все реализации интегрируемы по Риману, ответ на этот вопрос положителен. Действительно, L^p -интеграл является пределом интегральных сумм в среднем, а стало быть, и по вероятности; с другой стороны, интеграл вдоль каждой реализации — предел тех же самых сумм, причем это выполнено для любого элементарного события. Из сходимости всюду также вытекает сходимость по вероятности, и совпадение почти наверное обоих интегралов следует из единственности предела по вероятности (точнее, почти-единственности). В случае интегрируемости по Риману интеграл, вычисленный вдоль каждой реализации, оказывается случайной величиной (т. е. измеримой функцией от ω) как предел последовательности интегральных сумм.

В частности, рассмотренный выше интеграл от пуассоновского процесса можно понимать как интеграл вдоль каждой реализации. Заметим, что траектории процесса ζ_t не дифференцируемы, а лишь кусочно дифференцируемы, хотя ζ_t дифференцируемо в среднем в любой степени.

Если реализации ξ_t не интегрируемы по Риману, они все же могут быть интегрируемы по Лебегу, и перед нами стоит вопрос о совпадении римановского интеграла в среднем с лебеговским интегралом вдоль каждой реализации.

Задача 18. Пусть случайная функция ξ_t , $t \in [a, b]$, измерима и непрерывна в среднем в степени $p \geq 1$. Тогда почти наверное

$$\left((L^p) \int_a^b \xi_t dt \right) (\omega) = \int_a^b \xi_t(\omega) dt, \quad (1)$$

где слева стоит интеграл в среднем, а справа — интеграл, определенный отдельно для каждой реализации.

В гл. 2, 4 рассматриваются только интегралы в среднем, в последующих главах — интегралы вдоль каждой реализации. В силу задачи 18 для измеримых случайных функций это не приведет ни к каким недоразумениям.

Зная все конечномерные распределения случайного процесса ξ_t , мы можем в принципе найти распределение $\int_a^b \xi_t dt$ или совместное распределение этой случайной величины с величинами того же рода, значениями ξ_t' , ξ_t'' и т. п.; но ничего такого же простого, как с производными, здесь нет. Нахождение распределения интеграла от случайной функции сводится к нахождению

пределного распределения сумм возрастающего числа случайных величин $\xi_{s_i} \cdot \Delta t_i$, причем ни о какой независимости или ослаблении зависимости между ними нет и речи. Находить такие распределения иногда удается обходными путями (см. для марковских процессов § 10.3, п. 4).

5. В отличие от задачи нахождения распределений интегралов от случайных функций, задача нахождения их первых и вторых моментов достаточно проста.

Микротеорема 3. Пусть $\xi(t)$ — непрерывная в среднем квадратическом случайная функция, $\mathbf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{M} \int_a^b \xi(t) dt = \int_a^b \mathbf{M}\xi(t) dt, \quad (2)$$

$$\text{cov} \left(\int_a^b \xi(t) dt, \xi(s) \right) = \int_a^b K_{\xi\xi}(t, s) dt, \quad (3)$$

$$\text{cov} \left(\int_a^b \xi(t) dt, \int_c^d \xi(s) ds \right) = \int_a^b \int_c^d K_{\xi\xi}(t, s) dt ds. \quad (4)$$

Доказательство. Прежде всего, если равенство (2) доказано, формулы (3), (4) равносильны таким:

$$\mathbf{M} \int_a^b \xi(t) dt \cdot \overline{\xi(s)} = \int_a^b \mathbf{M}\xi(t) \overline{\xi(s)} dt, \quad (5)$$

$$\mathbf{M} \int_a^b \xi(t) dt \cdot \overline{\int_c^d \xi(s) ds} = \int_a^b \int_c^d \mathbf{M}\xi(t) \overline{\xi(s)} dt ds. \quad (6)$$

Формулы (2), (5) легко получаем из непрерывности скалярного произведения по первому аргументу; например, (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \int_a^b \xi(t) dt &= \mathbf{M} \text{ l. i. m.} \sum \xi(s_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) = \\ &= \left(\text{l. i. m.} \sum \xi(s_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), 1 \right) = \\ &= \lim \left(\sum \xi(s_i) \cdot (t_{i+1} - t_i), 1 \right) = \\ &= \lim \sum \mathbf{M}\xi(s_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) = \int_a^b \mathbf{M}\xi(t) dt. \end{aligned}$$

Формула (6) получается применением того же приема к (5), с использованием непрерывности скалярного произведения по второму аргументу.

Формулы (2)–(6) остаются справедливы и для несобственных интегралов; доказательство состоит в том же использовании непрерывности скалярного произведения в применении к предельному переходу от собственных интегралов к несобственным.

Совершенно так же доказывается формула

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\int_a^b f(t) \xi(t) dt, \int_c^d g(s) \eta(s) ds\right) &= \\ &= \int_a^b \int_c^d f(t) \overline{g(s)} K_{\xi\eta}(t, s) dt ds. \quad (7) \end{aligned}$$

Пусть теперь A — линейный интегральный оператор:

$$Af(t) = \int_a^b A(t, s) f(s) ds. \quad (8)$$

Рассмотрим соответствующий интегральный оператор, применяемый к случайным функциям:

$$A\xi(t) = \int_a^b A(t, s) \xi(s) ds,$$

где интеграл понимается в среднеквадратическом смысле. Из формул (2), (7) вытекает следующее правило преобразования среднего и корреляционной функции при интегральном преобразовании случайной функции:

Математическое ожидание $A\xi(t)$ получается применением оператора A к функции $M\xi(\cdot)$, а корреляционная функция — применением к корреляционной функции $K_{\xi\xi}(\cdot, \cdot)$ оператора A как к функции от t при фиксированном s и оператора \bar{A} , комплексно-сопряженного к A , по s при фиксированном t :

$$M A\xi(t) = A M\xi(t), \quad (9)$$

$$K_{A\xi, A\xi}(t, s) = A_t \bar{A}_s K_{\xi\xi}(t, s). \quad (10)$$

Здесь индексы у A и \bar{A} означают переменные, по которым применяется оператор. Комплексно-сопряженный оператор определяется формулой

$$\bar{A}f(t) = \int_a^b \overline{A(t, s)} f(s) ds.$$

Если применить оператор A к $K_{\xi\xi}(t, s)$ лишь по первому аргументу, получается взаимная корреляционная функция случайных функций $A\xi(\cdot)$ и $\xi(\cdot)$:

$$K_{A\xi, \xi}(t, s) = A_t K_{\xi\xi}(t, s); \quad (11)$$

это вытекает из формулы (3).

То же самое правило было получено нами и для дифференцирования; легко получить, что оно годится и для линейных операторов, содержащих любые комбинации производных и интегралов, например: $A\xi(t) = \xi(a(t)) + b(t)\xi'(t) + c(t)\xi''(t) + \int_{-\infty}^t B(t, s)\xi'(s) ds$.

Задача 19. Найдите совместное распределение w_t и $\int_0^t w_s ds$, $t \geq 0$ (w_t — винеровский процесс).

Задача 20. Пусть w_t , $t \geq 0$, — винеровский процесс. Докажите, что $\xi_t = \int_t^\infty (e^{t-s} - 2e^{2(t-s)}) w_s ds$ существует как интеграл в среднем квадратическом, и найдите математическое ожидание и корреляционную функцию процесса ξ_t , $t \geq 0$.

Задача 21. Пусть ξ_t — стационарный процесс с $M\xi_t = 0$ и корреляционной функцией $K(\tau)$. Выразите $M \left| \int_0^T e^{i\lambda t} \xi_t dt \right|^2$ через $K(\tau)$.

Установите характер предельного поведения этого математического ожидания при $T \rightarrow \infty$ для случая абсолютно интегрируемой от $-\infty$ до $+\infty$ функции $K(\tau)$.

Задача 22*. Докажите, что винеровский процесс w_t представляется при $0 \leq t \leq \pi/2$ рядом Фурье $w_t = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin((2n-1)t)$, где X_n — независимые случайные величины. Найдите $M X_n$, $D X_n$.

7. У читателя может возникнуть вопрос: справедливо ли правило, сформулированное в п. 5, для линейных операторов, не представляющихся в виде комбинации дифференций, умно-

жений на функции и интегральных операторов? Оставим этот вопрос без ответа, укажем только, что на него и нельзя ответить прежде, чем будет уточнена его формулировка. Дело в том, что

$\frac{d}{dt} \xi_t$ или $\int_a^b A(t, s) \xi(s) ds$ — не просто применение к случан-

ной функции оператора дифференцирования или оператора, задаваемого формулой (8). Здесь существенным элементом является перенесение определения дифференцирования (интегрирования) на случайные функции, с заменой входящих в определения пределов пределами в среднем квадратическом. Поэтому здесь возникает много предварительных вопросов, которые нужно разрешить или обойти: как для линейного оператора построить его аналог «в среднем квадратическом», который можно будет применять к интегрируемым в квадрате случайным функциям? для каких операторов это можно сделать? и т. п.

§ 2.2. Стохастические интегралы от неслучайных функций

В связи с интересом теории вероятностей к зависимости и независимости естественно стремление представить случайные величины в виде суммы независимых, в крайнем случае некоррелированных слагаемых. Если речь идет о «сумме бесконечного числа бесконечно малых слагаемых», говорят об интегрировании. Это — идея, лежащая в основе различных понятий *стохастического интеграла*. Разумеется, только что сказанное — вовсе не математическое определение, а что-то смутное, чему можно придавать строгую математическую форму, и даже не одним способом. Сейчас мы введем одно понятие стохастического интеграла, относящееся к случаю, когда интегрируется неслучайная функция. В § 12.1 мы вернемся к стохастическим интегралам опять и посмотрим, как можно интегрировать случайные функции (далеко не все!). В отношении класса функций, которые можно интегрировать, теория расширится, зато в каком-то другом отношении ее придется сузить.

1. Начнем с понятия *случайной* (или *стохастической*) меры.

Пусть X — произвольное множество; \mathcal{A} — полуко́льцо его подмножеств (по-видимому, нет смысла рассматривать меры на системах множеств, у которых меньше хороших свойств, чем у полуко́льца). Числовая случайная функция $\xi(A) = \xi(A, \omega)$, $A \in \mathcal{A}$, называется *L^2 -случайной мерой* (префикс L^2 мы будем часто для краткости опускать), если

1) случайные величины $\xi(A)$ интегрируемы в квадрате;

2) для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ таких, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, почти наверное

$$\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n),$$

где бесконечный ряд понимается в смысле сходимости в среднем квадратическом, т. е. как

$$\text{l. i. m. } \sum_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi(A_k).$$

Заметим, что здесь вовсе нет никакого требования неотрицательности значений $\xi(A)$; так что, может быть, нужно было бы говорить не о случайной мере, а о случайной счетно-аддитивной функции множества. Однако это было бы слишком длинно; и традиция состоит в употреблении здесь слова *мера*.

Пример у нас уже есть: пусть $\pi(A)$ — пуассоновская случайная мера со средним m , где m — мера на измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) ; тогда сужение ее на систему множеств $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{X}: m(A) < \infty\}$ есть L^2 -случайная мера.

Еще раз заметим, что от *реализаций* случайной меры $\xi(A)$ у нас ничего не требуется.

Случайная мера $\xi(A)$ называется *мерой с независимыми значениями*, если для любых непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ значения $\xi(A_1), \dots, \xi(A_n)$ независимы.

Вариант этого определения «в широком смысле»: случайная мера $\xi(A)$ называется *мерой с некоррелированными значениями*, если для любых двух непересекающихся $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ значения $\xi(A_1), \xi(A_2)$ некоррелированы: $\text{cov}(\xi(A_1), \xi(A_2)) = 0$.

Микротеорема. Пусть $\xi(A), A \in \mathcal{A}$, — L^2 -случайная мера с некоррелированными значениями. Тогда $m_1(A) = M\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$, — числовая счетно-аддитивная функция множества на \mathcal{A} ; $m_2(A) = D\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$, — мера на \mathcal{A} .

Часть доказательства, касающаяся математического ожидания, — тривиальное следствие непрерывности скалярного произведения: для непересекающихся $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$,

$$m_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n), 1\right) = \left(1. i. m. \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n), 1\right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \xi(A_k), 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\xi(A_k), 1) = \sum_{n=1}^{\infty} m_1(A_n);$$

это справедливо и для любой L^2 -случайной меры, без предположения некоррелированности значений. Счетная аддитивность m_2 (неотрицательность проверять нечего) также получается как следствие непрерывности скалярного произведения, но уже по паре аргументов. Положим $\xi^0(A) = \xi(A) - m_1(A)$. Имеем:

$$m_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \\ = M \left| \xi^0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \right|^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi^0(A_n), \sum_{n=1}^{\infty} \xi^0(A_n)\right) = \\ = \left(1. i. m. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \xi^0(A_k), 1. i. m. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \xi^0(A_k)\right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \xi^0(A_k), \sum_{k=1}^n \xi^0(A_k)\right) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\xi^0(A_k), \xi^0(A_k)).$$

В силу некоррелированности значений случайной меры на $A_k, A_j, k \neq j$, здесь пропадают все слагаемые с разными значениями k, j , и получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n D\xi(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m_2(A_n).$$

2. В обычной теории меры и интеграла Лебега есть более элементарная часть, включающая построение интеграла Лебега по мере, *заданной на σ-алгебре*, теоремы о предельном переходе под знаком интеграла и т. п.; а есть более сложная часть, куда относится, в частности, теорема о продолжении меры с

полукольца (или алгебры) на порожденную им (ей) σ -алгебру. В теории стохастического интеграла мы будем опираться на уже имеющуюся теорию меры и интеграла Лебега, и один раз преодоленные трудности у нас снова не возникнут. Благодаря этой опоре мы сможем объединить теорему о построении стохастического интеграла с теоремой о продолжении; теорема, которую мы сейчас сформулируем, будет сложна не столько для доказательства, сколько для усвоения всей мощности ее формулировки.

Теорема 1. Пусть m — конечная мера на измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) ; пусть \mathcal{A} — полукольцо подмножеств X , содержащее само X , причем σ -алгебра \mathcal{X} порождается полукольцом \mathcal{A} : $\mathcal{X} = \sigma(\mathcal{A})$. Пусть $\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$, — конечно-аддитивная случайная функция множества (т. е. почти наверное $\xi(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \xi(A_1) + \dots + \xi(A_n)$, если A_1, \dots, A_n — непересекающиеся множества, причем $A_i, A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$). Пусть значения $\xi(A)$ — интегрируемые в квадрате случайные величины, причем некоррелированные для непересекающихся множеств $(\text{cov}(\xi(A_1), \xi(A_2)) = 0, \text{ если } A_1 \cap A_2 = \emptyset)$. Пусть для любого множества A из полукольца $M\xi(A) = 0$, $D\xi(A) = m(A)$.

Тогда конечно-аддитивная случайная функция множества $\xi(A)$ автоматически счетно-аддитивна (т. е. это — случайная мера с некоррелированными значениями на \mathcal{A}); более того, она единственным образом продолжается до L^2 -случайной меры с некоррелированными значениями на σ -алгебре \mathcal{X} . Наконец, существует единственное отображение I пространства $L^2(X, \mathcal{X}, m) = L^2(dm)$ функций, интегрируемых в квадрате, в пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = L^2(d\mathbf{P})$ случайных величин, интегрируемых в квадрате, такое, что

- 1) отображение I линейно;
- 2) для любого множества A из полукольца $I(\chi_A) = \xi(A)$ (разумеется, почти наверное: ведь речь идет о пространствах L^2);

- 3) I — изометрическое отображение; то есть скалярное произведение $I(f)$ и $I(g)$ совпадает со скалярным произведением (в другом пространстве) f и g :

$$MI(f) \overline{I(g)} = \int_X f(x) \overline{g(x)} m(dx). \quad (1)$$

Это отображение и есть стохастический интеграл; его обозначение:

$$I(f) = \int_X f(x) \xi(dx). \quad (2)$$

Обозначение $I(f)$ вместо обозначения со знаком интеграла мы ввели пока что для краткости, потому что при доказательстве теоремы нам придется его слишком часто употреблять.

Доказательство теоремы. Выделим сначала единственную собственно теоретико-вероятностную часть доказательства, в которой будет использоваться то, что \mathcal{A} — полукольцо.

Лемма. Для любых $A, B \in \mathcal{A}$ имеем: $M\xi(A)\overline{\xi(B)} = m(A \cap B)$.

Доказательство. По определению полукольца, $A \cap B \in \mathcal{A}$, а разности $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, $B \setminus A$ представляются каждая в виде конечной суммы непересекающихся множеств из \mathcal{A} : $A \setminus B = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $B \setminus A = B_1 \cup \dots \cup B_l$. В силу конечной аддитивности ξ , почти наверное $\xi(A) = \xi(A \cap B) + \xi(A_1) + \dots + \xi(A_k)$, $\xi(B) = \xi(A \cap B) + \xi(B_1) + \dots + \xi(B_l)$. Дальше:

$$\begin{aligned} M\xi(A)\overline{\xi(B)} &= M(\xi(A \cap B) + \xi(A_1) + \dots + \xi(A_k)) \times \\ &\quad \times (\overline{\xi(A \cap B) + \xi(B_1) + \dots + \xi(B_l)}) = \\ &= M|\xi(A \cap B)|^2 + \sum_{j=1}^l M\xi(A \cap B)\overline{\xi(B_j)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k M\xi(A_i)\overline{\xi(A \cap B)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l M\xi(A_i)\overline{\xi(B_j)}. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое — дисперсия $\xi(A \cap B)$, то есть $m(A \cap B)$; следующие слагаемые — ковариации значений ξ для непересекающихся множеств, и они равны 0.

Продолжим доказательство теоремы. Определим отображение I сначала на простых функциях, т. е. на линейных комбинациях индикаторов множеств из \mathcal{A} . Совершенно очевидно, что, если мы хотим, чтобы выполнялись требования 1) и 2), нам ничего не остается

делать, как положить

$$I\left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n c_i \xi(A_i). \quad (3)$$

Раз ничего не остается, так и сделаем это. — Однако всё не совсем так просто. Может быть, кроме этого ничего не остается, но и этого сделать мы не можем! Нужно еще доказать корректность определения (3). Дело в том, что, во-первых, одну и ту же функцию f мы можем представить в виде линейной комбинации индикаторов по-разному: $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{n'} c'_j \chi_{A'_j}$; в этом случае, чему же мы должны положить равным $I(f)$, сумме $\sum c_i \xi(A_i)$ или $\sum c'_j \xi(A'_j)$? Нужно, чтобы они совпадали хотя бы как элементы $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, то есть почти наверное. Во-вторых, если говорить точно, это должно быть отображение не из пространства функций f , а из $L^2(X, \mathcal{X}, m)$ — пространства классов эквивалентных друг другу функций; так что, если $\sum c_i \chi_{A_i}$ совпадает с $\sum c'_j \chi_{A'_j}$ лишь почти всюду, случайные величины $\sum c_i \xi(A_i)$ и $\sum c'_j \xi(A'_j)$ должны совпадать с вероятностью 1.

Предлагается самостоятельно проверить эту корректность в частном случае:

Задача 1. Пусть $\chi_{A_1} + \chi_{A_2} = \chi_{A'_1} + 2\chi_{A'_2}$. Докажите, что $\xi(A_1) + \xi(A_2) = \xi(A'_1) + 2\xi(A'_2)$ почти наверное, предполагая для простоты, что полукольцо \mathcal{A} — алгебра.

Теперь, когда вы сами решили задачу 1 (или хотя бы запутались в ее решении), самое время изложить общее доказательство корректности. Однако мы сначала проверим равенство (1) — пока только для простых функций f, g . Собственно говоря, мы пока не имеем права говорить об $I(f), I(g)$ (не проверена корректность построения отображения I), так что мы для $f = \sum_i c_i \chi_{A_i}, g = \sum_j d_j \chi_{B_j}$ просто проверим

равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \sum_i c_i \xi(A_i) \overline{\sum_j d_j \xi(B_j)} &= \\ = \int_X \sum_i c_i \chi_{A_i}(x) \overline{\sum_j d_j \chi_{B_j}(x)} m(dx). \end{aligned} \quad (4)$$

Левая часть — это сумма $\sum_{i,j} c_i \bar{d}_j \mathbf{M}\xi(A_i) \overline{\xi(B_j)} = \sum_{i,j} c_i \bar{d}_j m(A_i \cap B_j)$ согласно доказанной лемме. Этому же, как нетрудно видеть, равна и правая часть.

Теперь вернемся к установлению корректности определения (3). Пусть $\sum_i c_i \chi_{A_i}(x) = \sum_i c'_i \chi_{A'_i}(x)$ при почти всех x относительно меры m . Применим равенство (4) к сумме $\sum_i c_i \chi_{A_i}(x) - \sum_i c'_i \chi_{A'_i}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \sum_i c_i \xi(A_i) - \sum_j c'_j \xi(A'_j) \right|^2 &= \\ = \int_X \left| \sum_i c_i \chi_{A_i}(x) - \sum_j c'_j \chi_{A'_j}(x) \right|^2 m(dx) &= 0. \end{aligned}$$

Значит, $\sum_i c_i \xi(A_i) - \sum_j c'_j \xi(A'_j)$ почти наверное равно 0, и корректность доказана. Попутно проверена изометричность отображения I на множестве простых функций (а свойства 1), 2) и проверять нечего: отображение так и строилось, чтобы они были выполнены).

Итак, у нас имеется изометрическое (а значит, и взаимно однозначное) соответствие между множеством простых функций в гильбертовом пространстве $L^2(dm)$ и некоторым подмножеством пространства $L^2(dP)$. Это соответствие единственным образом продолжается по непрерывности на замыкания этих множеств: функции $f \in L^2(dm)$, являющейся пределом в среднем квадратическом последовательности f_n простых функций, ставится в соответствие $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$. Этот предел существует в силу принципа Коши; чтобы доказать, что $I(f)$ не зависит от выбора последовательности $f_n \rightarrow f$, берем две такие

последовательности и составляем из них одну, перенеся члены.

В результате каждой функции f из замыкания множества простых функций $\sum_i c_i \chi_{A_i}(x)$, $A_i \in \mathcal{A}$, в $L^2(dm)$ ставится в соответствие случайная величина $I(f) = \int_X f(x) \xi(dx)$. Но это замыкание совпадает со всем $L^2(dm)$ (читатель должен научиться доказывать это, пользуясь тем, что \mathcal{A} — полукольцо, содержащее $X!$), поэтому интеграл (2) определен для всех интегрируемых в квадрате функций.

В частности, формула $\xi(A) = I(\chi_A)$ доопределяет случайную функцию множества ξ на всех множествах A , принадлежащих σ -алгебре \mathcal{X} (на полукольце \mathcal{A} по построению $I(\chi_A)$ дает прежнее значение $\xi(A)$). Из линейности отображения I вытекает конечная аддитивность продолжения случайной функции множества ξ : для $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) имеем: $\xi(A_1 \cup \dots \cup A_n) = I(\chi_{A_1} \cup \dots \cup A_n) = I(\chi_{A_1} + \dots + \chi_{A_n}) = I(\chi_{A_1}) + \dots + I(\chi_{A_n}) = \xi(A_1) + \dots + \xi(A_n)$. Из конечной аддитивности ξ и непрерывности отображения I легко выводится счетная аддитивность ξ .

Линейность и изометричность отображения I на всем пространстве $L^2(dm)$ вытекает из того, что это — продолжение по непрерывности отображения, линейного и изометричного на всюду плотном подмножестве этого пространства. Наконец, единственность такого отображения непосредственно видна из доказательства: для простых функций f мы не могли определить $I(f)$ по-другому, если хотели, чтобы отображение было линейно и чтобы $I(\chi_A) = \xi(A)$ для A из полукольца \mathcal{A} ; а из требования изометричности отображения вытекает его непрерывность, и нам ничего не оставалось, как произвести продолжение по непрерывности.

Теорема доказана.

Укажем еще одно простое свойство стохастического интеграла, не вошедшее в формулировку нашей теоремы: $M \int_X f(x) \xi(dx) = 0$ для любой функции $f \in L^2(dm)$. Это получается также предельным переходом от простых функций.

3. Теорема 1'. Пусть m — мера, вообще говоря, бесконечная, на измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) ; пусть σ -алгебра \mathcal{X} порождается полукольцом \mathcal{A} подмножеств X , причем мера $m(A)$ конечна на множествах $A \in \mathcal{A}$, и существует последовательность $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ множеств из полукольца, дающая в сумме все пространство X . Пусть $\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$, — конечно-аддитивная случайная функция множества. Пусть значения $\xi(A)$, $A \in \mathcal{A}$, принадлежат $L^2(dP)$, причем они некоррелированы для непересекающихся множеств, $M\xi(A) = 0$, $D\xi(A) = m(A)$.

Тогда выполняется утверждение теоремы 1, за исключением того, что случайная мера ξ продолжается только на те множества A из σ -алгебры \mathcal{X} , для которых $m(A) < \infty$.

Доказательство остается тем же; условие существования последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$, используется при доказательстве всюду плотности множества простых функций $\sum_i c_i \chi_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$, в $L^2(dm)$ (т. е. в той части доказательства, которую мы оставили читателю).

4. Существенной частью обычной теории меры является построение меры Лебега или, более общо, построение меры m с данной функцией распределения F (т. е. такой меры, что $m(t_1, t_2] = F(t_2) - F(t_1)$). Это позволяет для неубывающей непрерывной справа функции F определять интеграл Лебега — Стильеса $\int_a^b f(t) dF(t)$ (он определяется как интеграл относительно соответствующей функции F меры m). В теории стохастических интегралов соответствующий раздел тоже есть: для случайного процесса ξ_t с некоррелированными приращениями определяется стохастический интеграл $\int_a^b f(t) d\xi_t$. При этом трудности, уже преодоленные в обычной теории меры и интеграла, не возникают у нас вторично.

Сначала займемся изучением процессов с некоррелированными приращениями.

Пусть ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$, — процесс с некоррелированными (ортогональными) приращениями. Будем для

простоты считать, что $\mathbf{M} \xi_t^2 = 0$ (для того чтобы в ковариациях можно было не вычитать математического ожидания). Докажем, что существует неубывающая функция $F(t)$, $t \in T$, такая, что приращение $\xi_t - \xi_s$, $s < t$, $s, t \in T$, имеет дисперсию, равную $F(t) - F(s)$.

Пусть t_0 — произвольный элемент множества T . Для $t = t_0$ функцию F положим равной 0; для $t > t_0$ положим $F(t) = \mathbf{M} |\xi_t - \xi_{t_0}|^2$, для $t < t_0$ определим $F(t)$ как $-\mathbf{M} |\xi_{t_0} - \xi_t|^2$. Доказав, что

$$\mathbf{M} |\xi_t - \xi_s|^2 = F(t) - F(s), \quad (5)$$

мы тем самым докажем и монотонность F . Для $t_0 \leq s < t$ имеем

$$F(t) = \mathbf{M} |\xi_t - \xi_{t_0}|^2 = \mathbf{M} |\xi_s - \xi_{t_0}|^2 + \mathbf{M} (\xi_s - \xi_{t_0}) \overline{(\xi_t - \xi_s)} + \\ + \mathbf{M} \overline{(\xi_s - \xi_{t_0})} (\xi_t - \xi_s) + \mathbf{M} |\xi_t - \xi_s|^2.$$

Обе сопряженные друг другу ковариации по предложению равны 0, а $\mathbf{M} |\xi_s - \xi_{t_0}|^2 = F(s)$, откуда получаем (5). Для $s < t \leq t_0$ выкладка точно такая же, с использованием того, что $\xi_{t_0} - \xi_s$ представляется в виде суммы двух некоррелированных приращений по меньшим промежуткам. Если $s < t_0 < t$, то $\mathbf{M} |\xi_t - \xi_s|^2 = \mathbf{M} |\xi_t - \xi_{t_0}|^2 + \mathbf{M} |\xi_{t_0} - \xi_s|^2 = F(t) - F(s)$.

Легко понять, что процесс с некоррелированными приращениями тогда и только тогда непрерывен (непрерывен справа, соответственно слева), когда непрерывна (непрерывна справа, слева) функция F . Пределы в среднем квадратическом на $+\infty$ или на $-\infty$ существуют тогда и только тогда, когда $F(+\infty) < \infty$, соответственно $F(-\infty) > -\infty$.

Задача 2. Докажите, что любой процесс с некоррелированными приращениями с нулевым математическим ожиданием имеет пределы в среднем квадратическом слева и справа в любой точке $t_0 \in T$.

5. Теорема 2. Пусть ξ_t — процесс с некоррелированными приращениями с нулевым математическим ожиданием, определенный на отрезке числовой прямой от a до b , включая эти концы или нет (a, b могут быть равны $-\infty, +\infty$); $\mathbf{M} |\xi_{t_2} - \xi_{t_1}|^2 = F(t_2) - F(t_1)$. Предположим, что ξ_t непрерывно справа в среднем квадратическом. Обозначим через t конечную или σ -конечную меру на рассматриваемом от-

резке, соответствующую функции распределения F

$$m(t_1, t_2] = F(t_2) - F(t_1).$$

Тогда существует случайная мера $\xi(A)$, определенная на boreлевских подмножествах A отрезка от a до b без левого конца с $m(A) < \infty$, такая, что $\xi(t_1, t_2] = \xi_{t_2} - \xi_{t_1}$, и единственное линейное изометрическое отображение I из $L^2(dF)$ в $L^2(dP)$ такое, что $I(\chi_{(t_1, t_2]}) = \xi_{t_2} - \xi_{t_1}$.

Для этого отображения используется обозначение

$$I(f) = \int_a^b f(t) d\xi_t.$$

Доказательство — непосредственное применение теоремы 1'; в качестве \mathcal{A} берется полукольцо всех полуинтервалов $(t_1, t_2]$, входящих в промежуток от a до b . Легко видеть, что случайная функция множества $\xi(A)$, определяемая для полуинтервалов $A = (t_1, t_2]$ как $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$, удовлетворяет нужным условиям; в качестве отображения $I(f)$ берется стохастический интеграл относительно случайной меры с некоррелированными значениями $\xi(A)$.

В частности, для винеровского процесса определены стохастические интегралы $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dw_t$, $\int_0^\infty f(t) dw_t$ (первый — для $f \in L^2(t_1, t_2]$, второй — для $f \in L^2(0, \infty)$) и случайная мера $w(A)$, определенная на множествах конечной лебеговой меры.

Заметим, что реализации случайной меры совершенно не должны быть счетно-аддитивными функциями множества (зарядами). Это видно на примере случайной меры $w(A)$: для почти всех ее реализаций функция $w((0, t], \omega) = w_t(\omega)$ имеет неограниченную вариацию на любом отрезке; тогда как для любого заряда v на правой полупрямой его функция распределения $v(0, t]$, $0 \leq t < \infty$, имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке.

6. Менее элементарные свойства стохастических интегралов. В следующих двух задачах $\xi(A)$ — случайная мера с некоррелированными значениями на множествах A из σ -алгебры \mathcal{X} , для которых $m(A) < \infty$; $M\xi(A) = 0$, $D\xi(A) = m(A)$.

Задача 3. Пусть f — фиксированная измеримая функция (X, \mathcal{X}) . Определим случайную функцию множества

$$\eta(A) = \int_A f(x) \xi(dx)$$

на множествах $A \in \mathcal{X}$, для которых $n(A) = \int_A |f(x)|^2 m(dx) < \infty$.

Докажите, что $\eta(A)$ — также мера с некоррелированными значениями с нулевым математическим ожиданием и $D\eta(A) = n(A)$. Если $g \in L^2(dn)$, то почти наверное

$$\int_X g(x) \eta(dx) = \int_X g(x) f(x) \xi(dx).$$

Задача 4. Пусть функция $f(x, y)$ (x изменяется в множестве X , y — в конечном отрезке $[a, b]$) при любом x непрерывна по y , а при любом y измерима по x ; причем

$$\int_X \max_{a \leq y \leq b} |f(x, y)|^2 m(dx) < \infty.$$

Тогда почти наверное

$$\int_X \left[\int_a^b f(x, y) dy \right] \xi(dx) = \int_a^b \left[\int_X f(x, y) \xi(dx) \right] dy$$

(последний интеграл понимается в среднем квадратическом).

Задача 5. Пусть ξ_t — непрерывный справа в среднем квадратическом процесс с некоррелированными приращениями на отрезке $[a, b]$, $M\xi_t = 0$, $D(\xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = F(t_2) - F(t_1)$. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(t) d\xi_t = 1. i. m. \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) (\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})$$

при измельчении разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ (s_i — произвольная точка между t_i и t_{i+1}).

Из результата задачи 5 легко вывести правило интегрирования по частям: если f непрерывно дифференцируема, то

$$\int_a^b f(t) d\xi_t = f(b) \xi_b - f(a) \xi_a - \int_a^b \xi_t f'(t) dt$$

(последний интеграл — в среднем квадратическом).

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 3.1. Связанные со случайной функцией σ -алгебры и пространства случайных величин

1. Теория случайных процессов, в отличие от более элементарных разделов теории вероятностей, проникнута духом скорее функционального анализа, чем классического математического анализа: рассматриваются в первую очередь не отдельные случайные события, случайные величины, функции, а пространства функций, случайных величин, σ -алгебры событий или даже целые семейства σ -алгебр, операторы в этих пространствах и т. п.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) задана случайная функция ξ_t , $t \in T$. Введем σ -алгебру, порожденную этой случайной функцией, — наименьшую σ -алгебру, содержащую все события вида $\{\xi_t \in B\}$, $t \in T$, $B \in \mathcal{X}$. Обозначать мы ее будем \mathcal{F}_T (или $\mathcal{F}_{\xi_t, t \in T}$, если нужно будет указать, к какой случайной функции она относится):

$$\mathcal{F}_T = \sigma \{ \xi_t, t \in T \} = \sigma \{ \{\xi_t \in B\}, t \in T, B \in \mathcal{X} \}.$$

Эта σ -алгебра имеет смысл совокупности всех событий, о наступлении которых можно узнать, наблюдая нашу случайную функцию.

С σ -алгеброй \mathcal{F}_T можно связать различные пространства случайных величин, порожденные случайной функцией (интуитивный смысл — случайные величины, которые можно вычислить по данной случайной функции); важнейшим из них является пространство интегрируемых в квадрате случайных величин, порожденное ξ_t , $t \in T$:

$$L_T^2 = L_{\xi_t, t \in T}^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P).$$

Ясно, что $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ и $L_T^2 \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Другим важным евклидовым пространством, связанным со случайной функцией, является пространство $\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_{\xi_t}$, $t \in T$ случайных величин, линейно порожденное ξ_t , $t \in T$. Оно определяется (в случае числовой случайной функции с конечной дисперсией) как замыкание в пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ множества всех линейных комбинаций значений случайной функции и 1:

$$\mathbf{H}_T = \overline{\{c_0 + c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}, t_1, \dots, t_n \in T\}}$$

(здесь черта означает замыкание). Легко видеть, что $\mathbf{H}_T \subseteq L_T^2$, потому что случайные величины вида $c_0 + c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}$ \mathcal{F}_T -измеримы, и пределы в среднем таких случайных величин также \mathcal{F}_T -измеримы. (Точнее говоря, в любом классе эквивалентных друг другу случайных величин из \mathbf{H}_T есть случайная величина из L_T^2 .) Случайные величины из \mathbf{H}_T — это, в сущности, те случайные величины, которые можно линейно вычислить по ξ_t , $t \in T$.

Пространство \mathbf{H}_T — аналог пространства L_T^2 «в широком смысле» (мы уже говорили, что в рамках корреляционной теории рассматриваются лишь линейные функции).

Пространство L_T^2 содержит, так сказать, ту же информацию, что и σ -алгебра \mathcal{F}_T , но освобожденную от излишних тонкостей — всего, что касается событий нулевой вероятности. При переходе к пространству \mathbf{H}_T «выбрасывается» еще больше информации — все, что не укладывается в линейную схему.

Иногда нам придется рассматривать также пространство \mathbf{H}_T^0 — замыкание множества линейных комбинаций ξ_t , $t \in T$, без свободного члена: $\mathbf{H}_T^0 = \overline{\{c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}, t_1, \dots, t_n \in T\}}$. Это — пространство случайных величин, представимых в виде результата применения линейной операции к рассматриваемой случайной функции. Ясно, что \mathbf{H}_T порождается подпространством \mathbf{H}_T^0 и одномерным подпространством констант.

Пространства L_T^2 , \mathbf{H}_T , \mathbf{H}_T^0 — евклидовые полные пространства; если они оказываются еще и *сепарабельными*, то это — гильбертовы пространства.

Задача 1. Докажите, что в L_T^2 всюду плотно множество случайных величин вида $f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$, где f — \mathcal{X}^n -измеримые функции, $t_1, \dots, t_n \in T$.

Задача 2. Пусть ξ_t , $t \in T$, — стохастически непрерывный случайный процесс, T_0 — счетное всюду плотное подмножество T . Докажите, что в L_T^2 всюду плотно множество случайных величин вида $f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$, $t_1, \dots, t_n \in T_0$. Выведите отсюда, что пространство L_T^2 сепарабельно. (А значит, сепарабельно и $H_T \subseteq L_T^2$.)

Пространства H_T , H_T^0 не являются L^2 -пространствами — пространствами всех интегрируемых в квадрате функций на каком-либо пространстве с мерой; но они могут быть изоморфны таким пространствам. Стохастический интеграл дает возможность установления изоморфных (т. е. линейных изометрических) соответствий этих пространств с пространствами интегрируемых в квадрате функций на числовой прямой, на чем основываются результаты гл. 4.

Задача 3. Пусть ξ_t , $t \in T$, — гауссовская случайная функция. Докажите, что совместное распределение любых случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_n \in H_T$ — гауссовское.

Задача 4*. Пользуясь результатом предыдущей задачи и изоморфностью всех бесконечномерных гильбертовых пространств, докажите, что для любого гауссовского процесса ξ_t с дискретным временем или непрерывного в среднем квадратическом гауссовского процесса с непрерывным временем с $M\xi_t = 0$ либо существует конечное число независимых гауссовых случайных величин η_1, \dots, η_n и функций $f_1(t), \dots, f_n(t)$, $t \in T$, таких, что $\xi_t = \sum_{i=1}^n f_i(t) \eta_i$ почти наверное, либо существуют винеровский процесс w_t , $t \in [0, 1]$, и функция $f(t, s)$, $t \in T$, $s \in [0, 1]$, такая, что $\xi_t = \int_0^t f(t, s) dw_s$ почти наверное, $t \in T$.

2. Если $T \subseteq R^1$, т. е. речь идет о случайном процессе, мы будем рассматривать также следующие σ -алгебры:

$$\mathcal{F}_{\leq t} = \sigma \{\xi_s, s \in T, s \leq t\},$$

$$\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma \{\xi_s, s \in T, s \geq t\},$$

$$\mathcal{F}_{[s, t]} = \sigma \{\xi_u, u \in T, s \leq u \leq t\},$$

$$\mathcal{F}_{=t} = \sigma (\xi_t).$$

Заметим, что последняя σ -алгебра состоит из всех событий $\{\xi_t \in B\}$, $B \in \mathcal{X}$. Вводятся также пространства, порожденные частью случайной функции:

$$L_{\leq t}^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\leq t}, P) \text{ и т. п.};$$

линейно порожденные:

$$H_{\leq t} = \overline{\{c_0 + c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}; t_i \in T, t_i \leq t, 1 \leq i \leq n\}},$$

$$H_{\leq t}^0 \text{ и т. д.}$$

Наглядный смысл, скажем, $\mathcal{F}_{[s, t]}$ и $L_{[s, t]}^2$ — такой: это — то, что можно узнать, наблюдая случайный процесс на отрезке от s до t .

Совершенно очевидны включения типа $\mathcal{F}_{[s, t]} \subseteq \mathcal{F}_{[u, t]}$ при $u \leq s$, $\mathcal{F}_{\leq t} \subseteq \mathcal{F}_{\leq t'}$ при $t \leq t'$, $H_{[s, t]} \subseteq H_{\geq s}$ и т. п.

3. В ряде задач оказываются нужны σ -алгебры и пространства случайных величин, связанные с процессом еще более сложным образом.

На основе введенных нами σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, $\mathcal{F}_{\geq t}$, $\mathcal{F}_{[s, t]}$ вводятся σ -алгебры

$\mathcal{F}_{\leq t+}$, $\mathcal{F}_{\geq t-}$, $\mathcal{F}_{\leq -\infty}$, $\mathcal{F}_{\geq +\infty}$, $\mathcal{F}_{[s, t+]}$, $\mathcal{F}_{[s-, t]}$, $\mathcal{F}_{[s-, t+]}$, которые, как показывают обозначения, являются предельными для $\mathcal{F}_{\leq s}$, $\mathcal{F}_{\geq s}$ при $s \rightarrow t+$, $s \rightarrow t-$, $s \rightarrow -\infty$, $s \rightarrow +\infty$, соответственно для σ -алгебр, отвечающих конечным отрезкам временной оси, — предельными, когда эти отрезки сжимаются.

Приведем здесь точные определения только для некоторых из этих σ -алгебр: по определению

$$\mathcal{F}_{\leq t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_{\leq s}, \quad \mathcal{F}_{\geq +\infty} = \bigcap_s \mathcal{F}_{\geq s}, \quad \mathcal{F}_{[s-, t]} = \bigcap_{u < s} \mathcal{F}_{[u, t]}.$$

Все эти пересечения — σ -алгебры как пересечения каких-то множеств σ -алгебр.

Наглядный смысл этих σ -алгебр такой: к $\mathcal{F}_{\leq t+}$ принадлежат все события, о наступлении которых можно узнать по наблюдению процесса на отрезке от $-\infty$ до t и сколь угодно мало вправо за точку t ; к $\mathcal{F}_{\geq +\infty}$ — события, о наступлении которых мы узнаем по сколь угодно далеким вправо отрезкам нашего процесса; к $\mathcal{F}_{[s-, t]}$ — те, о которых можно узнать по сколь угодно малому отрезочку налево от точки t и т. п. О σ -алгебрах $\mathcal{F}_{\leq -\infty}$, $\mathcal{F}_{> +\infty}$ говорят как о σ -алгебрах «хвостов» (слово «хвост» в математике употребляется, когда от функций берутся отрезки, определенные в окрестности бесконечности).

Задача 5. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность случайных величин. Докажите, что следующие подмножества пространства элементарных событий принадлежат $\mathcal{F}_{\geq +\infty}$: $\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a\}$; $\{\text{существует конечный предел } \xi_n \text{ при } n \rightarrow \infty\}$.

Приведем пример, показывающий отличие σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq t+}$ от $\mathcal{F}_{\leq t}$. Пусть $T = [0, \infty)$, и траекториями ξ_t являются все непрерывные функции. Положим $\tau(\omega) = \inf\{t: \xi_t > 1\}$ или $+\infty$,

если таких t не существует. Событие $\{\tau \leq 2\}$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}_{\leq 2+}$ (пока это не доказано, точнее было бы говорить не *событие*, а *множество*).

Действительно, легко видеть, что

$$\{\tau \leq 2\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\text{рац. } t \\ 0 \leq t \leq 2+1/n}} \{\xi_t > 1\} \quad (1)$$

(непрерывная функция тогда и только тогда где-то на отрезке $[0, 2+1/n]$ выходит за уровень 1, когда она больше 1 в какой-нибудь рациональной точке этого отрезка). События $\{\xi_t > 1\}$ здесь входят в $\mathcal{F}_{\leq 2+1/n}$, значит, их счетная сумма тоже принадлежит этой σ -алгебре. Далее, пересечение в (1) можно взять не от 1 до ∞ , а от любого натурального n_0 до ∞ ; тогда все события, участвующие в этом пересечении, будут принадлежать $\mathcal{F}_{\leq 2+1/n_0}$ (ведь $\mathcal{F}_{\leq 2+1/n} \subseteq \mathcal{F}_{\leq 2+1/n_0}$ при $n \geq n_0$). Итак, событие $\{\tau \leq 2\}$ принадлежит любой из σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq 2+1/n_0}$. Значит, оно принадлежит любой σ -алгебре $\mathcal{F}_{\leq t}$ при $t > 2$: ведь для любого $t > 2$ можно взять n_0 такое, что $2+1/n_0 < t$, и тогда имеем $\{\tau \leq 2\} \in \mathcal{F}_{\leq 2+1/n_0} \subseteq \mathcal{F}_{\leq t}$. Наконец, заключаем, что $\{\tau \leq 2\} \in \bigcap_{t > 2} \mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{\leq 2+}$.

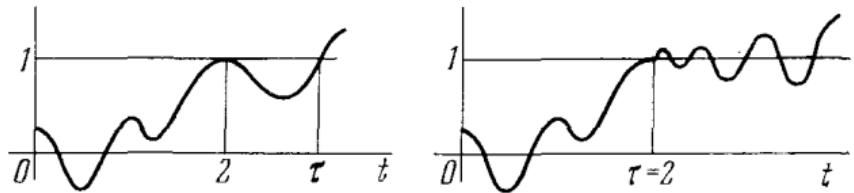


Рис. 7

В то же время событие $\{\tau \leq 2\}$ не принадлежит σ -алгебре $\mathcal{F}_{\leq 2}$: наблюдая процесс только до момента 2, мы не всегда можем сказать, наступил уже момент τ или нет (рис. 7). Точный вариант этого наглядного соображения: доказывается, что для любого события из $\mathcal{F}_{\leq 2}$ соответствующее множество траекторий вместе с каждой траекторией содержит любую другую, совпадающую с ней на отрезке $[0, 2]$; левая траектория не принадлежит $\{\tau \leq 2\}$, а правая — принадлежит, значит, $\{\tau \leq 2\} \notin \mathcal{F}_{\leq 2}$.

Для σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq -\infty}$, $\mathcal{F}_{\geq +\infty}$ мы не можем указать значений ξ_t случайного процесса, которые заведомо измеримы относительно них; это дает возможность предположить, что они в каком-то смысле вырождаются в тривиальные σ -алгебры. При некоторых условиях, касающихся зависимостей ξ_t при разных t , для σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq -\infty}$, $\mathcal{F}_{\geq +\infty}$ выполняется закон нуля или единицы (о законах 0—1 мы впервые говорили в § 1.3, п. 2a₂)).

Задача 6 (закон 0—1 Колмогорова). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независимы. Докажите, что $P(A) = 0$ или 1 для любого события $A \in \mathcal{F}_{\geq +\infty}$.

В частности, согласно задаче 5, последовательность независимых случайных величин либо с вероятностью 1 сходится, либо с вероятностью 1 расходится; легко доказать, что это касается и рядов с независимыми слагаемыми, средних арифметических $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n$ и т. п.

Задача 7. Пусть последовательность независимых случайных величин ξ_n с вероятностью 1 сходится. Докажите, что тогда существует число a такое, что $P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a\} = 1$.

Задача 8. Определим σ -алгебру $\mathcal{F}_{(t, t+1]}$ как $\bigcap_{u > t} \mathcal{F}_{(t, u]}$, где $\mathcal{F}_{(t, u]} = \sigma\{\xi_s, t < s \leq u\}$. Рассмотрите пример какого-либо случайного процесса и выясните, будет ли для него σ -алгебра $\mathcal{F}_{(t, t+1]}$ состоять только из событий с вероятностями 0 и 1 (будет ли иметь место закон нуля или единицы).

4. Ясно, как определяются пространства случайных величин $L^2_{\leq t+}, H_{\leq t+}, L^2_{\geq t-}, H_{\geq t-}, L^2_{\geq +\infty}, H_{\geq +\infty}$ и т. д. Для пространств $L^2_{\leq t+}, \dots, L^2_{[s-, t+]}$ одинаковый результат дают определения $L^2_{\leq t+} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_{\leq t+}, P), \dots$ и определения $L^2_{\leq t+} = \bigcap_{s > t} L^2_{\leq s}, \dots$ Пространства $H_{\leq t+}, \dots$ определяются как пересечения, например: $H_{\leq -\infty} = \bigcap_s H_{\leq s}$.

Законы 0—1 очень просто формулируются в терминах пространств L^2 : соответствующие пространства состоят только из констант, т. е. закон 0—1 тогда и только тогда выполнен для σ -алгебры $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, когда пространство $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ одномерно.

С пространствами $H_{\leq t+}$ и подобными связаны задачи, относящиеся к корреляционной теории случайных процессов. Аналог «в широком смысле» колмогоровского закона С—1 очень легко доказать.

Задача 9. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — некоррелированные интегрируемые в квадрате случайные величины. Докажите, что пространство $H_{\geq +\infty}$ состоит только из констант.

§ 3.2. Операторы сдвига

В этом параграфе мы будем рассматривать случайные процессы, заданные на множестве $T = R^1$, или $R_+ = [0, \infty)$, или $Z^1 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$, или $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. На множестве T в этих случаях определен сдвиг: $t \rightarrow t + h$. Мы хотим определить опе-

раторы сдвига, действующие на события и случайные величины, связанные с нашим процессом.

1. Введем следующее предположение. Пусть для любого $\omega \in \Omega$ и любого $h \in T$ существует, причем единственное, элементарное событие $\omega_h^+ \in \Omega$ такое, что $\xi_t(\omega_h^+) = \xi_{t+h}(\omega)$ при всех $t \in T$. Обозначим θ_h оператор в пространстве Ω , сопоставляющий элементарному событию ω элементарное событие ω_h^+ : $\omega_h^+ = \theta_h\omega$. Оператор θ_h сдвигает траектории ξ_t влево на h ; на рис. 8 изображен случай $T = [0, \infty)$.

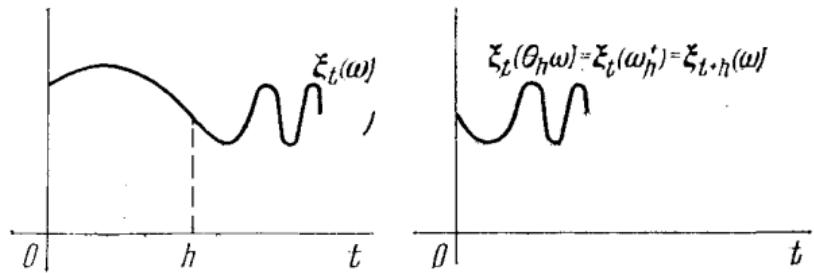


Рис. 8

Обозначение ω_h^+ соответствует принятому в книге Ито и Маккина (1968), $\theta_h\omega$ — обозначениям, принятым в книгах Дынкина (1959, 1963).

Теперь определим сдвиги уже не элементарных событий, а событий — подмножеств Ω .

Пусть $A \subseteq \Omega$. Тогда можно рассмотреть множество $\theta_h^{-1}A = \{\omega: \theta_h\omega \in A\}$ — прообраз A при отображении θ_h .

Рассмотрим примеры.

a) $A = \{\xi_t \in \Gamma\}$. Легко видеть, что $\theta_h^{-1}A = \{\omega: \omega_h^+ \in A\} = \{\omega: \xi_t(\omega_h^+) \in \Gamma\} = \{\omega: \xi_{t+h}(\omega) \in \Gamma\} = \{\xi_{t+h} \in \Gamma\}$.

б) $B = \{\xi_t = a \text{ при } t \geq t_0\}$. Здесь $\theta_h^{-1}B = \{\xi_{t+h} = a \text{ при } t \geq h + t_0\}$.

в) $C = \{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = 0\}$. В данном случае $\theta_h^{-1}C = \{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_{t+h} = 0\} = \{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = 0\} = C$.

Изобразим на рис. 9 пример б), взяв $T = [0, \infty)$.

Мы видим, что условия, задающие событие, при применении оператора θ_h^{-1} сдвигаются вправо на h . Это не удивительно, потому что мы должны сдвинуть траекторию (реализацию) влево и посмотреть, удовлетворяет ли она условиям, задающим

данное событие; это все равно, что сдвинуть эти условия вправо, оставив траекторию без изменения.

В примере б) при $t_0 = 0$ множество B состоит из единственной точки, а $\theta_h^{-1}B$ — более чем из одной.

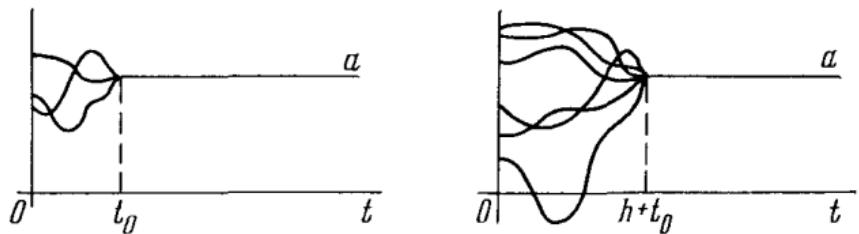


Рис. 9

Теперь определим операторы сдвига, действующие на случайные величины, даже просто: функции, определенные на Ω (случайная величина, как мы помним, — это не любая функция на Ω , а только измеримая). Полагаем для функции $\eta(\omega)$ на Ω

$$\theta_h \eta(\omega) = \eta(\theta_h \omega) = \eta(\omega_h^+).$$

Примеры.

A) $\theta_h \xi_t = \xi_{t+h}$.

Б) $T = [0, \infty)$, ξ_t — числовой случайный процесс с непрерывными траекториями; $\eta(\omega) = \int_0^t \xi_s ds$ (интеграл определяется отдельно для каждой траектории). Здесь, естественно, $\theta_h \eta = \int_0^{t+h} \xi_s ds = \int_h^t \xi_s ds$.

В) Случайный процесс — такой же, как в предыдущем примере; $\tau(\omega) = \inf\{t: \xi_t(\omega) \in \Gamma\}$ — момент

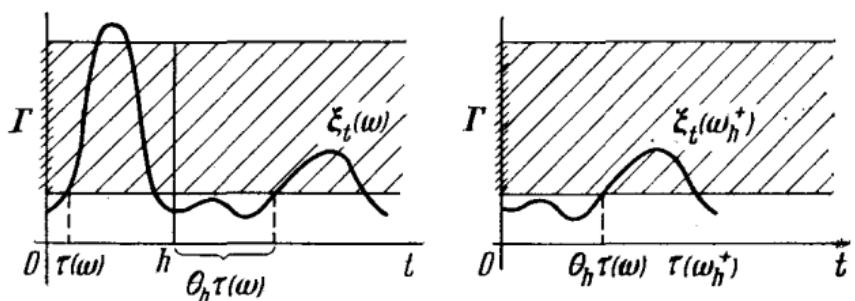


Рис. 10

первого достижения множества $\Gamma \subset R^1$ (если таких t нет, полагаем $\tau(\omega) = +\infty$). Чертеж приведен на рис. 10. Здесь $\theta_h \tau = \inf\{t \geq h: \xi_t \in \Gamma\} - h$; это первый

после h момент достижения Γ , уменьшенный на h . В частности, для тех элементарных событий, для которых $\tau \geq h$, будет $\theta_h \tau = \tau - h$.

Впоследствии мы докажем, что функции η , τ примеров Б) и В) в случае, например, открытого Γ — случайные величины, т. е. что они измеримы.

Легко понять, что операторы сдвига можно ввести не только в случае $T = R^1$, R_+ , Z^1 или Z_+ , но и когда T — произвольная полугруппа; например, для $T = R^n$ или для окружности.

2. Посмотрим, какими свойствами измеримости обладают введенные нами операторы сдвига. В силу примеров а), А) σ -алгебра $\mathcal{F}_{[s, t]}$, порожденная случайными величинами ξ_u , $s \leq u \leq t$, под действием оператора θ_h^{-1} переходит в σ -алгебру, порожденную случайными величинами ξ_{u+h} , $s \leq u \leq t$, т. е. $\mathcal{F}_{[s+h, t+h]}$. Аналогично $\mathcal{F}_{\geq t}$ переходит в $\mathcal{F}_{\geq t+h}$; $\mathcal{F}_{\leq t}$ переходит в $\mathcal{F}_{\leq t+h}$ для $T = R^1$ или Z^1 , а если $T = R_+$ или Z_+ , то $\mathcal{F}_{\leq t}$ переходит в $\mathcal{F}_{[h, t+h]}$ (понятно, почему: ведь в этом случае $\mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{[0, t]}$). Читателю предлагается самому подробно провести доказательство:

Задача 1. Пусть $T = [0, \infty)$. Докажите, что для любого события $A \in \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{\geq 0}$ его сдвиг $\theta_h^{-1}A \in \mathcal{F}_{\geq h}$.

Любое случайное событие из σ -алгебры \mathcal{F}_T , порожденной случайнм процессом, под действием оператора θ_h^{-1} переходит в *событие*, т. е. в подмножество Ω , принадлежащее \mathcal{F} . События, не принадлежащие \mathcal{F}_T , могут под действием оператора θ_h^{-1} переходить в подмножества, не являющиеся событиями.

Что касается случайных величин, то величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_{[s, t]}$, переводится оператором θ_h в случайную величину, измеримую относительно $\mathcal{F}_{[h+s, h+t]}$, и т. д.

Однако *неверно*, что операторы θ_h переводят $L^2_{[s, t]}$ или $H_{[s, t]}$ в $L^2_{[h+s, h+t]}$ или $H_{[h+s, h+t]}$. Операторы θ_h вообще могут быть неприменимы к элементам L^2 . Ведь элементы L^2 — это не случайные величины, а классы эквивалентных друг другу случайных величин, и из того, что $\eta_1 \sim \eta_2$, может не вытекать, что $\theta_h \eta_1 \sim \theta_h \eta_2$. Здесь дело в том, что σ -алгебры $\mathcal{F}_{[s, t]}$ и прочие и операторы θ_h определяются совершенно независимо от вероятностной меры P , а пространство L^2 тесно связано именно с мерой. В пп. 4, 5 мы покажем, что для стационарных процессов операторы сдвига переводят эквивалентные случайные величины в эквивалентные и что они действуют, таким образом, на порожден-

ных процессом пространствах L_T^2 и H_T (для стационарных процессов в широком смысле).

3. До сих пор мы требовали существования и единственности ω_h^+ такого, что $\xi_t(\omega_h^+) \equiv \xi_{t+h}(\omega)$. Это требование довольно ограничительно; в частности, из него вытекает, что двум различным элементарным событиям не может соответствовать одна и та же траектория. Оказывается, если требовать только *существования*, но не единственности ω_h^+ , операторы θ_h^{-1} , θ_h можно определить — правда, в применении не ко всем подмножествам Ω (функциям на Ω), но во всяком случае, ко всем подмножествам (функциям), измеримым относительно \mathcal{F}_T .

Допустим, что есть два элементарных события ω_h^{+1} и ω_h^{+2} таких, что $\xi_t(\omega_h^{+1}) \equiv \xi_t(\omega_h^{+2}) \equiv \xi_{t+h}(\omega)$; докажем, что для случайного события $A \in \mathcal{F}_T$ либо ω_h^{+1} и ω_h^{+2} принадлежит A , либо оба не принадлежат. Обозначим через \mathcal{A} систему множеств, которые либо содержат и ω_h^{+1} и ω_h^{+2} , либо не содержат ни одного из этих элементарных событий; легко видеть, что \mathcal{A} — σ -алгебра, она содержит события $\{\xi_t \in B\}$, $t \in T$, $B \in \mathcal{X}$; значит, она содержит минимальную σ -алгебру, содержащую все эти события: $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}_T$.

Таким образом, в определении $\theta^{-1}A = \{\omega : \omega_h^+ \in A\}$ все равно, какое из элементарных событий ω_h^+ брать

Аналогично, если η — \mathcal{F}_T -измеримая случайная величина, то $\eta(\omega_h^{+1}) = \eta(\omega_h^{+2})$, так что $\theta_h\eta(\omega)$ определяется однозначно. Действительно, иначе существовало бы множество $B \in \mathcal{X}$ (\mathcal{X} — σ -алгебра, заданная в пространстве, в котором принимает значения η ; по условию она содержит все одноточечные множества) такое, что $\eta(\omega_h^{+1})$ принадлежит ему, а $\eta(\omega_h^{+2})$ не принадлежит; но тогда множеству $\{\eta \in B\} \in \mathcal{F}_T$ будет принадлежать ω_h^{+1} , а ω_h^{+2} не будет, что невозможно.

4. Определим операторы сдвига в случае, когда ξ_t — стационарный процесс, не вводя никаких предложений относительно существования ω_h^+ . Для случайной величины $\eta \in L_T^2$ вида

$$\eta = f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}), \quad t_1, \dots, t_n \in T, \quad (1)$$

положим

$$\theta_h \eta = f(\xi_{t_1+h}, \dots, \xi_{t_n+h}). \quad (2)$$

Докажем, что оператор θ_h осуществляет изометрическое отображение L_T^2 в себя; для этого вычислим $M|\theta_h \eta|^2$:

$$\begin{aligned} M|\theta_h \eta|^2 &= M|f(\xi_{t_1+h}, \dots, \xi_{t_n+h})|^2 = \\ &= \int_X \dots \int_X |f(x_1, \dots, x_n)|^2 \mu_{t_1+h, \dots, t_n+h}(dx_1 \dots dx_n) = \\ &= \int_X \dots \int_X |f(x_1, \dots, x_n)|^2 \mu_{t_1, \dots, t_n}(dx_1 \dots dx_n) = \\ &= M|f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})|^2 = M|\eta|^2. \end{aligned}$$

Это, прежде всего, показывает, что определение, даваемое формулами (1), (2), корректно. Дело в том, что одна и та же случайная величина η может, вообще говоря, иметь различные представления (1), причем соответствующие величины (2) могут не совпадать. Но если

$$\eta = f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) = g(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m})$$

(хотя бы только почти всюду), то

$$\begin{aligned} M|f(\xi_{t_1+h}, \dots, \xi_{t_n+h}) - g(\xi_{s_1+h}, \dots, \xi_{s_m+h})|^2 &= \\ &= M|f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) - g(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m})|^2 = 0, \end{aligned}$$

так что $\theta_h \eta$ определяется однозначно с точностью до множеств вероятности 0, т. е. однозначно как элемент L_T^2 .

Оператор θ_h стандартным образом продолжается по непрерывности на замыкание множества случайных величин вида (1), т. е., согласно задаче 1 § 3.2, на все L_T^2 ; при этом изометричность сохраняется.

Для стационарного процесса можно определить и операторы θ_h^{-1} , действующие на события из \mathcal{F}_T , — тоже с точностью до событий вероятности 0. Событие $\theta_h^{-1}A$ определяется как такое, индикатор которого почти наверное равен $\theta_h \chi_A$; при этом приходится

доказывать, что $\theta_h \chi_A$ почти всюду равно 0 или 1. Точно так же операторы θ_h можно распространить на неинтегрируемые случайные величины, положив, например, $\theta_h \eta = \operatorname{tg} \theta_h \operatorname{arctg} \eta$.

5. Для стационарных в широком смысле процессов мы не можем, вообще говоря, определить операторы θ_h на пространстве L_T^2 , но можем определить их на H_T . Для случайных величин η вида $\eta = c_0 + c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}$ полагаем $\theta_h \eta = c_0 + c_1 \xi_{t_1+h} + \dots + c_n \xi_{t_n+h}$. Это — изометрический оператор, и он продолжается по непрерывности, оставаясь изометрическим, на все H_T . Операторы θ_h^{-1} , действующие на события, не удается определить, хотя бы потому, что случайная величина χ_A может не принадлежать H_T .

§ 3.3. Задачи наилучшей оценки

1. К числу теоретико-вероятностных задач, наиболее тесно связанных с приложениями, относятся задачи оценки каких-либо неизвестных величин по наблюдениям случайных объектов.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) заданы случайная величина η и случайный процесс $\xi_t, t \in T$. Требуется найти для η *наилучшую в среднем квадратическом* оценку по наблюдению случайного процесса, т. е. оценку $\hat{\eta}$, которую можно вычислить по $\xi_t, t \in T$, и для которой

$$M|\eta - \hat{\eta}|^2 = \min.$$

Уточним постановку задачи. Пусть случайная величина η интегрируема в квадрате. Задача состоит в том, чтобы найти такую случайную величину $\hat{\eta}$ из пространства $L_T^2 = L_{\xi_t, t \in T}^2$, порожденного наблюдаемым случайнм процессом, что для любой другой величины $\tilde{\eta} \in L_T^2$

$$M|\eta - \hat{\eta}|^2 < M|\eta - \tilde{\eta}|^2.$$

Оказывается, эта задача всегда разрешима. Мы можем установить это двумя различными способами. Во-первых, мы знаем, что в полном евклидовом пространстве существует ортогональная проекция любого вектора на любое замкнутое подпространство и эта

проекция есть ближайший к исходному вектору элемент подпространства. Это означает, что решение нашей задачи имеет вид

$$\hat{\eta} = \text{пр}_{L_T^2} \eta. \quad (1)$$

Иначе говоря, $\hat{\eta}$ — такой вектор из L_T^2 , что для любого $\xi \in L_T^2$

$$(\eta - \hat{\eta}, \xi) = 0,$$

или, записывая это через математическое ожидание,

$$\mathbf{M}(\eta - \hat{\eta})\xi = 0. \quad (2)$$

Здесь ξ пробегает все элементы L_T^2 . Но при этом комплексно-сопряженная к ξ случайная величина $\bar{\xi}$ также пробегает всё L_T^2 , так что условие (2) можно заменить на

$$\mathbf{M}(\eta - \hat{\eta})\xi = 0, \quad \xi \in L_T^2. \quad (3)$$

С другой стороны, искомое $\hat{\eta}$ представляется в виде условного математического ожидания

$$\hat{\eta} = \mathbf{M}(\eta | \mathcal{F}_T). \quad (4)$$

Вероятно, это хорошо известно читателям, но приведем доказательство. Пусть $\hat{\eta}$ — проекция η на L_T^2 ; докажем, что выполняется (4). То, что $\hat{\eta}$ измеримо относительно \mathcal{F}_T , очевидно; остается проверить, что $\mathbf{M}\chi_A\eta = \mathbf{M}\chi_A\hat{\eta}$ для любого события $A \in \mathcal{F}_T$. Но это вытекает из (3) с $\xi = \chi_A$.

2. Нахождение оценки $\hat{\eta}$ состоит из двух этапов: во-первых, мы должны найти способ вычисления $\hat{\eta}$ по ξ_t , $t \in T$, и, во-вторых, применить этот способ к наблюденным значениям процесса. В какой форме может быть представлено решение первой части задачи? Вспомним, что (согласно задаче 1 § 3.1) любой элемент L_T^2 представляется в виде предела в среднем случайных величин вида $f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$, $t_1, \dots, t_n \in T$.

Таким образом, способ вычисления $\hat{\eta}$ можно задавать последовательностью натуральных чисел $n(k)$, последовательностью измеримых функций f_k от $n(k)$ переменных и последовательностью наборов $t_1(k), \dots$

$\dots, t_{n(k)}(k)$ элементов T . При этом

$$\hat{\eta} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\xi_{t_1(k)}, \dots, \xi_{t_n(k)}). \quad (5)$$

Способ вычисления $\hat{\eta}$ по ξ_t , $t \in T$, мы можем в принципе найти, если нам известны совместные распределения $\mu_{\eta, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}$ случайной величины η и любого числа значений случайного процесса. Рассмотрим для простоты случай, когда множество T конечно или счетно.

Если $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, то

$$\hat{\eta} = M(\eta | \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) = f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}).$$

Функцию f можно найти следующим образом. Рассмотрим пространство $L^2(d\mu_{\eta, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}})$ функций $\phi(y, x_1, \dots, x_n)$, измеримых и интегрируемых в квадрате относительно совместного распределения $\eta, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ есть проекция в этом пространстве функции, тождественно равной y , на замкнутое подпространство функций, зависящих только от последних n координат.

В случае бесконечного счетного $T = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ воспользуемся следующей леммой:

Задача 1. $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_n \subseteq \dots$ — неубывающая последовательность замкнутых подпространств полного евклидова пространства H ; H_∞ — замыкание линейного пространства $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$; η — произвольный вектор из H . Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\text{пр}_{H_n} \eta \rightarrow \text{пр}_{H_\infty} \eta.$$

В применении к $H_\infty = L_T^2$, $H_n = L_{\{t_1, \dots, t_n\}}^2$ это означает, что $\hat{\eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\eta}_n$, где $\hat{\eta}_n = M(\eta | \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) = f_n(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$. (В гл. 7 мы увидим, что $\hat{\eta}_n$ также сходится к $\hat{\eta}$ почти наверное.)

Для несчетного T , в случае стохастической непрерывности ξ_t , можно (в силу задачи 2 § 3.1) обойтись всюду плотным подмножеством $\{t_1, \dots, t_n, \dots\} \subset T$; в противном случае берем всевозможные $T_0 = \{t_1, \dots, t_n, \dots\} \subset T$ и выбираем из всех $\hat{\eta}_{T_0} = M(\eta | \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}, \dots)$ то, для которого $M|\eta - \hat{\eta}_{T_0}|^2 = \min$.

(В принципе это требует лишь знания всех распределений $\mu_{\eta}, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}$ и сравнения несчетного множества вариантов.)

Принципиальная разрешимость задачи нахождения наилучшей оценки не означает, что существуют эффективные способы ее решения. Задача все же решается в некоторых классах случаев, но решение ее подчас весьма сложно.

3. Рассмотрим различные частные случаи задачи наилучшей оценки.

Задача фильтрации. Нас интересуют значения случайного процесса η_t , а наблюдаем мы случайный процесс ξ_t , который получается из η_t действием какой-то помехи. Простейший случай: $\xi_t = \eta_t + \zeta_t$, где случайный процесс ζ_t («шум»), скажем, не зависит от η_t . Посложнее: $\xi_t = f(t, \zeta_t, \eta_t)$ или ξ_t — решение дифференциального уравнения $\xi'_t = \eta'_t + f(\xi_t, \zeta_t)$ с начальным условием $\xi_0 = \eta_0$ и т. п. Требуется оценить какое-то значение η_{t_0} по наблюдению всех ξ_t , $t \in T$ («отфильтровать помеху»).

Задача экстраполяции (прогнозирования). Пусть ξ_t — случайный процесс, причем нас интересует его значение в момент t_1 , а наблюдаем мы процесс лишь до какого-то момента $t_0 < t_1$. Здесь в качестве наблюдаемого ξ_t , $t \in T$, берется ξ_t , $t \leq t_0$, а величина η , подлежащая оценке, есть ξ_{t_1} (говоря языком евклидовых пространств, требуется спроектировать ξ_{t_1} на $L^2_{\leq t_0}$).

Такая постановка задачи отражает черты, характерные для многих практических ситуаций: нашему наблюдению может быть доступно только настоящее и прошлое, и нас часто интересует вопрос предсказания будущего (прогнозирования). Другая точка зрения на ту же задачу — как на чисто математическую: речь идет об экстраполяции — продолжении функции ξ_t за пределы отрезка $t \leq t_0$, на котором она известна (о приближенном продолжении, в определенном смысле наиболее точном).

С математической точки зрения совершенно такой же является задача экстраполяции процесса, наблюдаемого при $t \geq t_0$, до значения $t_1 < t_0$.

В задачах прогнозирования для случайных процессов речь может идти об оценке по ξ_t , $t \leq t_0$, случайных величин η , отличных от значений ξ_{t_1} , например: $\eta = f(\xi_{t_1})$, $\eta = f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$ или, вообще, η —

произвольный элемент L_T^2 . К таким задачам название *задачи экстраполяции*, пожалуй, уже не подходит.

В задачах *интерполяции* случайных процессов речь идет об оценке значения ξ_{t_0} , где t_0 лежит между теми значениями t , для которых ξ_t доступны наблюдению. Так, мы можем наблюдать ξ_t при $t \leq t_1$ и при $t \geq t_2$, где $t_1 < t_0 < t_2$, или наблюдаемыми могут быть ξ_{kh} , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $t_0 \neq kh$.

Можно рассматривать очень много различных (причем осмысленных с точки зрения практики) разновидностей задачи оценки. Например, речь может идти об оценке значения в точке t_0 случайного поля ξ_t (t пробегает, скажем, какую-то область T на плоскости) по наблюдениям ξ_t в какой-то части области T , не содержащей t_0 , или об объединении задач прогнозирования и фильтрации и т. п.

4. Задача наилучшего прогнозирования имеет большое значение для *теории* случайных процессов.

Пусть ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$ — случайный процесс, причем множество T неограничено снизу. Для случайной величины $\eta \in L_T^2$ обозначим через $\hat{\eta}_{\leq t}$ ее наилучшую оценку по ξ_s , $s \leq t$:

$$\hat{\eta}_{\leq t} = M(\eta | \mathcal{F}_{\leq t}) = \operatorname{пр}_{L_{\leq t}^2} \eta.$$

Так как $L_{\leq t}^2 \subseteq L_{\leq t'}^2$ при $t \leq t'$, то средний квадрат ошибки предсказания $M|\eta - \hat{\eta}_{\leq t}|^2$ — невозрастающая функция от t . Все ее значения заключены между нулем и дисперсией η ; поэтому существует предел

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} M|\eta - \hat{\eta}_{\leq t}|^2, \quad (6)$$

причем он лежит между нулем и $D\eta$.

Случайный процесс ξ_t называется *регулярным слева*, если для любой величины $\eta \in L_T^2$ предел (6) равен $D\eta$ (т. е. при значениях t , далеких влево по оси времени, невозможен прогноз более точный, чем указание $M\eta$). Случайный процесс называется *сингулярным слева*, если этот предел равен нулю. Это означает, что для любой $\eta \in L_T^2$ просто $M|\eta - \hat{\eta}_{\leq t}|^2 = 0$ при любом t , т. е. $\eta = \hat{\eta}_{\leq t}$ почти наверное. Иначе говоря, при любом t любая случайная величина η из L_T^2 принадлежит также и $L_{\leq t}^2$ (точнее,

в любом классе эквивалентных друг другу случайных величин, принадлежащем L_T^2 , найдется случайная величина, принадлежащая $L_{\leq t}^2$), или, окончательно, $L_{\leq t}^2 = L_T^2$.

Таким образом, регулярным признается положение, когда с течением времени случайность полностью обесценивает всю информацию о далеком прошлом ($s \leq t, t \rightarrow -\infty$); возможность совершенно точного прогнозирования связана с какой-то особенностью, вырожденностью процесса.

Разумеется, могут быть процессы не регулярные и не сингулярные, а находящиеся между этими двумя крайностями.

Аналогично, если T неограничено сверху, вводятся понятия *регулярности справа*: $L_{\geq +\infty}^2$ состоит только из констант, и *сингулярности справа*: $L_{\geq +\infty}^2 = L_{\geq t}^2 = L_T^2$.

Регулярность или сингулярность процесса однозначно определяется его конечномерными распределениями (см. п. 2).

5. Теперь перейдем к аналогам рассмотренных задач «в широком смысле» — к задачам наилучшей в среднем квадратическом *линейной* оценки.

Пусть η — интегрируемая в квадрате случайная величина, $\xi_t, t \in T$, — интегрируемый в квадрате случайный процесс. Требуется найти случайную величину $\hat{\eta} \in H_T = H_{\xi_t}, t \in T$, для которой

$$M|\eta - \hat{\eta}|^2 = \min.$$

Решение задачи наилучшей линейной оценки есть

$$\hat{\eta} = \text{pr}_{H_T} \eta,$$

т. е. такой вектор из H_T , что

$$M(\eta - \hat{\eta}) \bar{\xi} = 0$$

для любого $\xi \in H_T$. Это условие можно заменить на

$$M\hat{\eta} = M\eta, \text{cov}(\eta - \hat{\eta}, \xi) = 0.$$

Способ вычисления $\hat{\eta}$ — линейной оценки η — по $\xi_t, t \in T$, полностью определяется математическими ожиданиями $M\eta, M\xi_t$ и ковариациями $D\eta, \text{cov}(\eta, \xi_t), K_{\xi\xi}(t, s)$, причем, так как эти данные проще, чем совместные распределения $\mu_{\eta, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}$, которые нужно знать для нахождения наилучшей нелинейной оценки, задача наилучшей линейной оценки значительно ближе к эффективной разрешимости.

Ясно, что средний квадрат ошибки наилучшей линейной оценки не меньше, чем средний квадрат ошибки наилучшей оценки (η ближе к большему пространству L_T^2 , чем к меньшему H_T).

Можно рассматривать задачи *наилучшей линейной фильтрации*, *линейной экстраполяции (прогнозирования)*, *интерполяции*. Например, задача наилучшего линейного прогнозирования есть задача нахождения проекции на пространство $H_{\leq t_0}$. Для решения таких задач в случае стационарных процессов развита мощная теория (см. Дуб, 1956, гл. XII; Розанов, 1963, гл. II, III); с частью этой теории мы ознакомимся в § 4.3.

6. В связи с задачами наилучшей линейной оценки мы рассматривали пространства H_T , $H_{\leq t_0}$ и т. п.; однако оказывается, что здесь можно обойтись пространствами H_T^0 и т. п., получаемыми как замыкания множеств линейных комбинаций значений случайного процесса без свободного члена. Пусть η — случайная величина, ξ_t , $t \in T$, — случайный процесс $M|\eta|^2 M|\xi_t|^2 < \infty$. По предположению, нам известны все моменты первого и второго порядка, в частности, $m = M\eta$, $m_t = M\xi_t$. Положим $\eta^0 = \eta - m$, $\xi_t^0 = \xi_t - m_t$. Математические ожидания η^0 , ξ_t^0 равны нулю, а ковариации остаются прежними. Пространство $H_{\xi_t^0, t \in T}^0$ — замыкание множества линейных комбинаций значений ξ_t^0 , $t \in T$, — обозначим для краткости H_T^{00} . Мы уже говорили, что математическое ожидание $\hat{\eta}$ — наилучшей линейной оценки η — равно $M\eta$, т. е. m . Легко проверить, что

$$\hat{\eta} = m + \text{пр}_{H_T^{00}} \eta^0.$$

Иначе говоря, задачу можно решить, оставаясь в пределах пространства случайных величин с нулевым математическим ожиданием, а потом только прибавить математическое ожидание.

7. Введем понятия линейной регулярности и сингулярности. Пусть ξ_t — интегрируемый в квадрате случайный процесс на неограниченном снизу множестве T ; случайная величина $\eta \in H_T$. Обозначим через $\hat{\eta}_{\leq t}$ наилучшую линейную оценку этой величины по ξ_s ,

$s \leq t$: $\hat{\eta}_{\leq t} = \text{пр}_{H_{\leq t}} \eta$. Случайный процесс называется **линейно регулярным слева**, если для любого η из H_T

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} M|\eta - \hat{\eta}_{\leq t}|^2 = D\eta;$$

он называется **линейно сингулярным слева**, если этот предел равен нулю, т. е. средний квадрат ошибки тождественно равен нулю.

Аналогично вводятся понятия **линейной регулярности справа** и **линейной сингулярности справа**.

Легко понять, что из регулярности процесса вытекает линейная регулярность (раз его нельзя сколько-нибудь точно прогнозировать никак, то нельзя и линейно), а из линейной сингулярности — просто сингулярность (линейный прогноз сколь угодно точен).

8. Посмотрим, какими свойствами обладает задача линейного прогнозирования для стационарных в широком смысле процессов (тот же вопрос можно поставить для нелинейного прогнозирования и стационарных в узком смысле процессов, но мы собираемся конкретно рассматривать только задачу линейного прогноза).

Пусть ξ_t — процесс, стационарный в широком смысле, на $T = R^1 = (-\infty, \infty)$ или на $T = Z^1 = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$. Так как оператор сдвига θ_h переводит ξ_{t_0} в ξ_{t_0+h} , а пространство $H_{\leq t}$ в $H_{\leq t+h}$, то, как легко проверить, для любого $\eta \in H_T$

$$\widehat{(\theta_h \eta)}_{\leq t+h} = \theta_h \widehat{\eta}_{\leq t};$$

в частности, для любого $t_0 > t$

$$\widehat{(\xi_{t_0+h})}_{\leq t+h} = \theta_h \widehat{(\xi_{t_0})}_{\leq t},$$

$$\widehat{(\xi_{t_0})}_{\leq t} = \theta_t \widehat{(\xi_{t_0-t})}_{\leq 0}.$$

(Разумеется, все эти равенства должны выполняться почти наверное.) Далее, средний квадрат ошибки прогноза

$$\begin{aligned} M|\xi_{t_0} - \widehat{(\xi_{t_0})}_{\leq t}|^2 &= M|\theta_t [\xi_{t_0-t} - \widehat{(\xi_{t_0-t})}_{\leq 0}]|^2 = \\ &= M|\xi_{t_0-t} - \widehat{(\xi_{t_0-t})}_{\leq 0}|^2 \end{aligned}$$

зависит только от $t_0 - t$; обозначим его $\sigma^2(t_0 - t)$.
Функция

$$\sigma^2(t) = M|\xi_t - \widehat{\langle \xi_t \rangle}_{\leq 0}|^2,$$

естественно, равна нулю при $t \leq 0$, не убывает при положительных t ; она стремится к $\sigma^2 = D\xi_t$ при $t \rightarrow +\infty$ для линейно регулярного слева процесса и к нулю для линейно сингулярного.

Задача 2. Докажите, что в случае непрерывного в среднем квадратическом стационарного процесса ξ_t , $t \in R^1$, функция $\sigma^2(t)$ непрерывна.

Для линейной сингулярности достаточно, чтобы $\sigma^2(s) = 0$ хотя бы при одном $s > 0$; действительно, в этом случае процесс можно со сколь угодно большой точностью продолжить со значений $t \leq t_0$ до $t_0 + s$, затем до $t_0 + 2s$, и так можно добраться до любого $t_1 > t_0$ (на языке гильбертовых пространств: $H_{\leq t_0} = H_{\leq t_0+s} = H_{\leq t_0+2s} = \dots \supseteq H_{\leq t_1}$).

Микротеорема. Для стационарного в широком смысле числового процесса ξ_t , $t \in T$, $T = R^1$ или Z^1 , линейная регулярность слева и линейная регулярность справа равносильны. Точно так же равносильны линейная сингулярность слева и справа.

Доказательство. Как мы уже говорили, решение задачи линейного прогноза однозначно определяется математическим ожиданием и корреляционной функцией процесса. Значит, линейные регулярность и сингулярность определяются корреляционной функцией процесса (математическое ожидание на них никак не влияет). Регулярность (сингулярность) справа процесса ξ_t — это то же, что регулярность (сингулярность) слева процесса $\tilde{\xi}_t = \xi_{-t}$. Но корреляционная функция этого стационарного процесса удовлетворяет равенству $K_{\xi}(\tau) = K_{\xi}(-\tau) = \overline{K_{\xi}(\tau)}$. Эта корреляционная функция отличается от $K_{\xi}(\tau)$ только заменой i на $-i$; значит, и функция

$$\tilde{\sigma}^2(t) = M|\xi_{-t} - \text{пр}_{H_{\geq 0}} \xi_{-t}|^2,$$

задающая ошибку экстраполяции «назад», отличается от функции $\sigma^2(t)$ — ошибки при экстраполяции «вперед» — только заменой i на $-i$. Но $\sigma^2(t)$ действительно, поэтому $\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2(t)$, откуда вытекает утверждение микротеоремы.

Для нелинейной регулярности (сингулярности) и стационарных в узком смысле процессов соответствующее утверждение неверно.

Заметим, что мы доказали нашу микротеорему только для числовых процессов; для *векторных* стационарных в широком смысле процессов доказательство не проходит, потому что корреляционная функция (матричная) при обращении направления времени заменяется на комплексно-сопряженную *транспонированную*.

Задача 3*. Пусть (ξ_t, η_t) , $t \in (-\infty, \infty)$, — двумерный стационарный в широком смысле процесс (т. е. $\mathbf{M}\xi_t, \mathbf{M}\eta_t = \text{const}$, а $\text{cov}(\xi_t, \xi_s), \text{cov}(\xi_t, \eta_s), \text{cov}(\eta_t, \eta_s)$ зависят только от $t - s$). Пусть $\mathbf{H}_{\leq t}$ — пространство, линейно порожденное случайными величинами ξ_s, η_s , $s \leq t$; $\mathbf{H}_{\geq t}$ — величинами ξ_s, η_s , $s \geq t$. Возможно ли неравенство $\mathbf{M}|\xi_t - \text{пр}_{\mathbf{H}_{\leq 0}}\xi_t|^2 \neq \mathbf{M}|\xi_{-t} - \text{пр}_{\mathbf{H}_{\geq 0}}\xi_{-t}|^2$?

9. Задача 4. Пусть η — случайная величина, ξ_t , $t \in T$, — случайный процесс, причем все совместные распределения $\mu_{\eta, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}$ — гауссовские. Докажите что в этом случае наилучшая оценка η по ξ_t , $t \in T$, совпадает с наилучшей линейной оценкой.

В частности, для гауссовского процесса наилучший прогноз его значения в любой момент времени — линейный. С этим, конечно, связан (но непосредственно отсюда не вытекает) тот факт, что для гауссовых стационарных процессов регулярность и линейная регулярность равносильны (см. Розанов, 1963, гл. IV, § 9).

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СТАЦИОНАРНЫХ (В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ) СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 4.1. Корреляционные функции

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые примеры и результаты, относящиеся к «элементарной» части теории, — то, что получается применением к стационарным процессам методов § 2.1. В следующих двух параграфах мы будем основываться на материале гл. 3 и § 2.2.

1. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию стационарного процесса примера 1 § 1.2: $\xi_t = A \cos(\eta t + \varphi)$, где A , η имеют произвольное совместное распределение на $[0, \infty) \times [0, \infty)$, а φ не зависит от них и распределено равномерно на $[0, 2\pi]$. Легко видеть, что $M\xi_t$ существует тогда и только тогда, когда $MA < \infty$ (имеем $M|\xi_t| = M|\xi_0| = MA \cdot M|\cos \varphi|$), и при этом

$$M\xi_t = MA \cdot M \cos \varphi = MA \cdot (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \cos z dz = 0.$$

Моменты второго порядка существуют, когда $MA^2 < \infty$; в этом случае

$$\begin{aligned} K_\xi(\tau) &= M\xi_{\tau+s}\xi_s = MA^2 \cos(\eta(s+\tau) + \varphi) \cos(\eta s + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} [MA^2 \cos \eta \tau + MA^2 \cos(\eta(2s+\tau) + 2\varphi)]. \end{aligned}$$

Второе математическое ожидание равно нулю, потому что случайная величина $\eta(2s+\tau) + 2\varphi$, приведенная по модулю 2π к отрезку $[0, 2\pi]$, не зависит от A и имеет равномерное распределение. Преобразуем

первое математическое ожидание:

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 \cos y \tau \mu_{A\eta}(dx dy) = \int_0^{\infty} \cos y \tau \mu(dy), \quad (1)$$

где μ — конечная мера на $[0, \infty)$, определяемая равенством

$$\mu(B) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_B x^2 \mu_{A\eta}(dx dy) = \frac{1}{2} M A^2 \chi_B(\eta).$$

Здесь всюду интегралы от 0 до ∞ берутся, включая точку 0.

В качестве μ может выступать любая конечная мера на $[0, \infty)$.

Если определить меру v на R^1 , перенеся половину меры μ с $(0, \infty)$ симметрично на $(-\infty, 0)$, то формулу (1) можно переписать в виде

$$K_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\tau} v(dy). \quad (2)$$

Мы видим, что корреляционная функция — преобразование Фурье симметричной меры на R^1 . Для $v(dy) = \frac{\pi^{-1} dy}{1+y^2}$, например, $K(\tau) = e^{-|\tau|}$, т. е. корреляционная функция получается такой же, как для совершенно не похожих ни на случайное гармоническое колебание, ни друг на друга процессов примера 8 § 1.2 и задачи 2 § 1.4.

Чтобы получить корреляционную функцию вида (2) с произвольной — не обязательно симметричной — мерой v , достаточно рассмотреть процесс $\xi_t = A e^{i(\eta t + \phi)}$, где η может принимать и положительные, и отрицательные значения.

2. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $P\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k}$,

если его можно применить к стационарному процессу ξ_t , переводит его также в стационарный процесс

$\eta_t = P \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_t$. Формулы (9) — (11) § 2.1 имеют в данном случае вид

$$\mathbf{M}\eta_t = P \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{M}\xi_t = a_0 m \quad (m = \mathbf{M}\xi_t), \quad (3)$$

$$K_{\eta\eta}(t-s) = P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{P} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) K_{\xi\xi}(t-s), \quad (4)$$

$$K_{\eta\xi}(t-s) = P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) K_{\xi\xi}(t-s). \quad (5)$$

Здесь \bar{P} — многочлен с комплексно-сопряженными коэффициентами \bar{a}_k . Дифференцирование k раз функции $K_{\xi\xi}(t-s)$ по s сводится к k -му дифференированию функции $K_{\xi\xi}$ по ее аргументу и умножению на $(-1)^k$; с учетом этого формула (4) превращается в

$$K_{\eta\eta}(\tau) = P \left(\frac{d}{d\tau} \right) \bar{P} \left(-\frac{d}{d\tau} \right) K_{\xi\xi}(\tau).$$

Из формулы (5) получаем

$$K_{\eta\xi}(\tau) = P \left(\frac{d}{d\tau} \right) K_{\xi\xi}(\tau), \quad K_{\xi\eta}(\tau) = \bar{P} \left(-\frac{d}{d\tau} \right) K_{\xi\xi}(\tau).$$

Если $\xi_t = Q \left(\frac{d}{dt} \right) \xi_t$, тем же путем находим

$$K_{\eta\xi}(\tau) = P \left(\frac{d}{d\tau} \right) \bar{Q} \left(-\frac{d}{d\tau} \right) K_{\xi\xi}(\tau).$$

Рассмотрим частные случаи.

а) $P(x) = x$. Здесь $K_{\xi'\xi'}(\tau) = -K''_{\xi\xi}(\tau)$, а совместная корреляционная функция ξ, ξ' есть

$$\begin{pmatrix} K_{\xi\xi}(\tau) & -K'_{\xi\xi}(\tau) \\ K'_{\xi\xi}(\tau) & -K''_{\xi\xi}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Если функция $K_{\xi\xi}$ действительна (в частности, для действительного ξ_t), то $K'_{\xi\xi}(0) = 0$ как производная в нуле четной функции, и ξ_t, ξ'_t некоррелированы (частный случай — в задаче 16 § 2.1).

б) Для $P(x) = 1 + x + x^2$ будет $\bar{P}(-x) = P(-x) = 1 - x + x^2$, $P(x)\bar{P}(-x) = 1 + x^2 + x^4$, так что корреляционная функция процесса $\xi_t + \xi'_t + \xi''_t$ получается из $K_{\xi\xi}(\tau)$ применением такого дифференциального оператора: $K_{\xi\xi}(\tau) + K''_{\xi\xi}(\tau) + K^{IV}_{\xi\xi}(\tau)$.

3. Интегрирование. Законы больших чисел. Статистика стационарных случайных процессов. Производная стационарного процесса, если она существует, — тоже стационарный процесс. Что касается интегрирования, то неопределенный интеграл от стационарного в широком смысле процесса (который существует, если только корреляционная функция непрерывна) вовсе не обязан быть стационарным процессом; более того, не всегда можно так подобрать «произвольную постоянную» — случайную величину, прибавив которую можно сделать из интеграла стационарный процесс.

Задача 1. Докажите, что если ξ_t — непрерывный в среднем квадратическом стационарный процесс, $m = M\xi_t \neq 0$, то не существует случайной величины η такой, что $\eta + \int_0^t \xi_s ds$ — стационарный процесс.

Более общий вопрос: существует ли стационарный процесс, являющийся решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $P\left(\frac{d}{dt}\right)\eta_t = \xi_t$? (Если ответ на этот вопрос положителен, а 0 — устойчивое решение для соответствующего однородного уравнения, то к η_t неограниченно приближаются при увеличении t решения при всевозможных начальных условиях.) Решить эти задачи и найти характеристики соответствующих случайных процессов мы сможем в § 4.2.

Представляет интерес существование l.i.m. $T^{-1} \times_{T \rightarrow \infty}$ $\times \int_0^T \xi_t dt$ (в случае непрерывного в среднем квадратическом стационарного процесса) или l.i.m. $n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$ (в случае стационарной последовательности).

Задача 2. Докажите, что если корреляционная функция стремится к нулю на бесконечности, то

$$\text{l.i.m.}_{t_2-t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} \xi_t dt = m \quad (6)$$

или

$$\text{л. и. м. } \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \xi_k = m \quad (7)$$

(m — математическое ожидание).

В следующем параграфе мы докажем, что предел (6) (или (7)) всегда существует; только этот предел не всегда является константой — это какая-то интегрируемая в квадрате случайная величина. Например, для процесса $\xi_t = A \cos(\eta t + \varphi)$ предел (6) равен нулю при $\eta \neq 0$ и $A \cos \varphi$ при $\eta = 0$.

Результаты типа закона больших чисел представляют собой основу решения ряда задач математической статистики, относящихся к случайным процессам. Если математическое ожидание m и корреляционная функция $K(\tau)$ стационарного процесса ξ_t нам неизвестны, но мы можем наблюдать процесс на отрезке от 0 до T , то естественной оценкой для математического ожидания будет (в случае непрерывного времени)

$$m_T^* = T^{-1} \int_0^T \xi_t dt.$$

Эта оценка — несмещенная, но не является, вообще говоря, наилучшей. Закон больших чисел для ξ_t означает *состоятельность* этой оценки.

А как оценить по наблюдению ξ_t , $t \in [0, T]$, корреляционную функцию $K(\tau)$ или функцию $Q(\tau) = M\xi_{\tau+s}\xi_s$? Несмешенной оценкой для $Q(\tau)$ будет

$$Q_T^*(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{\substack{0 \leq s \leq T \\ 0 \leq s + \tau \leq T}} \xi_{s+\tau} \bar{\xi}_s ds.$$

Состоятельность этой оценки сводится к закону больших чисел для процесса $\eta_s = \xi_{s+\tau} \bar{\xi}_s$. Этот процесс для стационарного в широком смысле процесса ξ_t вовсе не обязан быть стационарным в широком смысле (если ξ_t стационарен в узком смысле, то η_s также стационарен).

Задача 3*. Пусть ξ_t — действительный гауссовский стационарный процесс с нулевым математическим ожиданием и непрерывной корреляционной функцией $K(\tau)$, стремящейся к нулю на бесконечности. Найдите выражение для корреляционной функции процесса $\eta_s = \xi_{s+\tau} \bar{\xi}_s$. Выясните, является ли $Q_T^*(\tau)$ состоятельной оценкой для $K(\tau)$.

Указание. Для случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, имеющих гауссовское совместное распределение со средним 0 и матрицей ковариаций (b_{ij}) , смешанный четвертый момент $M\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = b_{12}b_{34} + b_{13}b_{24} + b_{14}b_{23}$.

4. Условие неотрицательной определенности (см. задачу 1 § 1.3) в случае стационарных процессов превращается в

$$\sum_{j, k} c_j \bar{c}_k K(t_j - t_k) \geq 0$$

(c_j — комплексные числа, t_i — элементы T).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1 (Герглотца). Для того чтобы последовательность $K(n)$, $-\infty < n < \infty$, была неотрицательно определенной (т. е. чтобы для любых комплексных c_j и целых t_i выполнялось (8)), необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$K(n) = \int_{(-\pi, \pi]} e^{in\lambda} \mu(d\lambda),$$

где μ — конечная мера на $(-\pi, \pi]$ (в качестве σ -алгебры берется σ -алгебра борелевских подмножеств $(-\pi, \pi]$). Мера μ определяется однозначно.

Теорема 2 (Бохнера — Хинчина). Для того чтобы функция $K(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, была непрерывной и неотрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} \mu(d\lambda),$$

где μ — конечная мера на $(-\infty, \infty)$. Мера μ определяется однозначно.

Доказательство этих теорем можно прочесть в § 39 учебника Гнеденко (1988); теорему 1 полезно доказать самому, пользуясь элементарными сведениями из теории рядов Фурье и свойством относительной компактности ограниченного семейства мер на окружности.

Мера μ называется *спектральной мерой*. Вычисления п. 1 показывают, каким образом для любой конечной меры μ (неотрицательно определенной функции K) можно построить пример соответствующего случайного процесса.

Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с плотностью $f(\lambda)$, то последнюю называют *спектральной плотностью* стационарного процесса (последовательности).

Спектральная мера имеет «физический смысл» распределения энергии случайного колебания по разным частотам, спектральная плотность — плотность распределения энергии по частотам.

Укажем, какие спектральные плотности соответствуют некоторым из рассмотренных ранее корреляционных функций: для $K(\tau) = e^{-a|\tau|}$ (пример 8 § 1.2; задача 2 § 1.4) $f(\lambda) = \pi^{-1}a/(a^2 + \lambda^2)$; для последовательности некоррелированных величин с дисперсией σ^2 будет $f(\lambda) = \sigma^2/2\pi$ на всем отрезке от $-\pi$ до π .

Решение задачи 21 § 2.1 говорит нам, что

$$(2\pi T)^{-1} \left| \int_0^T e^{-i\lambda t} \xi_t dt \right|^2$$

является асимптотически несмещенной оценкой для спектральной плотности $f(\lambda)$. Вычисления показывают, что дисперсия этой оценки, скажем, в случае гауссовского процесса не стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, и оценка оказывается несостоительной. Как в таком случае следует находить по опытным данным спектральную плотность? Этому вопросу посвящена обширная литература как чисто математического, так и прикладного, «инженерного» характера (см., например: Г. Джейкобс, Д. Ваттс «Спектральный анализ и его приложения» (Вып. 1. М.: Мир, 1971); Э. Хеннан «Анализ временных рядов» (М.: Наука, 1964)). В нашей книге коснуться вопросов статистики случайных процессов мы не сможем.

Мы рассмотрели здесь спектральные представления корреляционных функций; это — переход к следующему параграфу, где речь идет о представлении самих случайных функций.

§ 4.2. Спектральные представления

1. В этом параграфе и в следующем мы будем рассматривать процессы на $T = R^1$ или Z^1 .

В § 3.2 мы уже говорили о важности установления изоморфных соответствий между пространствами H_T^0 и достаточно простыми L^2 -пространствами. Это нужно уточнить: важными для исследования стационарных процессов оказываются такие изоморфизмы, при которых группе операторов сдвига θ_h на H_T^0 соответствует достаточно простая группа операторов, а для задач линейного прогнозирования важно, чтобы также пространствам $H_{\leq t}^0$ соответствовали достаточно простые подпространства L^2 -пространства.

На таких изоморфных соответствиях основываются спектральные представления стационарных процессов.

Теорема. Пусть корреляционная функция стационарного в широком смысле процесса ξ_t , $t \in R^1$

(соответственно $t \in Z^1$), $\mathbf{M}\xi_t = m$, предстаетеляется в виде

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} \mu(d\lambda)$$

(соответственно $\int_{(-\pi, \pi]} \dots$). Тогда существует случайная мера $\zeta(A)$ на борелевских подмножествах $(-\infty, \infty)$ (соответственно $(-\pi, \pi]$) с ортогональными значениями с $\mathbf{M}\zeta(A) = 0$, $\mathbf{M}|\zeta(A)|^2 = \mu(A)$ такая, что

$$\xi_t = m + \int e^{it\lambda} \zeta(d\lambda). \quad (1)$$

Случайная мера $\zeta(A)$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Стochasticкий интеграл

$$\int f(\lambda) \zeta(d\lambda) \quad (2)$$

устанавливает взаимно однозначное изометрическое линейное соответствие между пространством $L^2(d\mu)$ и пространством H_T^{00} , определяемым как замыкание в $L^2(dP)$ множества всех линейных комбинаций $c_1(\xi_{t_1} - m) + \dots + c_n(\xi_{t_n} - m)$; при этом $e^{it\lambda} \leftrightarrow \xi_t - m$, а операторам θ_h соответствуют в пространстве $L^2(d\mu)$ операторы умножения на $e^{ih\lambda}$.

Доказательство. Обозначим для краткости $\xi_t - m = \xi_t^0$. Начнем строить отображение $I(f)$, которое, как мы затем докажем, будет задаваться формулой (2). Функции f вида

$$f(\lambda) = c_1 e^{i\lambda t_1} + \dots + c_n e^{i\lambda t_n} \quad (3)$$

поставим в соответствие случайную величину

$$I(f) = c_1 \xi_{t_1}^0 + \dots + c_n \xi_{t_n}^0. \quad (4)$$

Отображение I совершенно очевидным образом линейно; проверим, что оно изометрично:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |c_1 \xi_{t_1}^0 + \dots + c_n \xi_{t_n}^0|^2 &= \sum_{j, k} c_j \bar{c}_k K(t_j - t_k) = \\ &= \sum_{j, k} c_j \bar{c}_k \int e^{i\lambda t_j} e^{-i\lambda t_k} \mu(d\lambda) = \int |f(\lambda)|^2 \mu(d\lambda) \end{aligned}$$

(интегралы, как и прежде, по $(-\infty, \infty)$ в непрерывном случае и по $(-\pi, \pi]$ в дискретном случае).

Из изометричности и линейности вытекает, что для $f_1 = f_2$ почти всюду ($d\mu$) соответствующие $I(f_1)$, $I(f_2)$ совпадают почти наверное, т. е. что это — отображение из пространства $L^2(d\mu)$ в H_T^{00} . Оно продолжается по непрерывности до изометрического (а стало быть, взаимно однозначного) линейного соответствия между замыканиями множеств функций вида (3) в $L^2(d\mu)$ и случайных величин вида (4) в H_T^{00} . Последнее замыкание по определению совпадает со всем H_T^{00} ; первое совпадает с $L^2(d\mu)$. Это не вытекает — даже в случае отрезка $(-\pi, \pi]$ — из того, что любая интегрируемая в квадрате функция разлагается в сходящийся в среднем квадратическом ряде Фурье: ведь $L^2((-\pi, \pi], d\mu) \neq L^2((-\pi, \pi], dx)$. Доказательство можно провести, например, так: в пространстве $L^2(d\mu)$ всюду плотно множество ограниченных функций, в нем — множество ограниченных непрерывных или даже дважды непрерывно дифференцируемых, в нем — периодических функций с теми же свойствами, а каждая из них разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье*).

Утверждение о виде операторов, соответствующих θ_h , вытекает из того, как определяется $I(f)$ для функций вида (3).

Теперь положим $\zeta(A) = I(\chi_A)$. Это — случайная мера с ортогональными значениями с нулевым математическим ожиданием и $M|\zeta(A)|^2 = \mu(A)$. Действительно, $M\zeta(A) = 0$ потому, что это случайная величина из H_T^{00} . Далее,

$$\begin{aligned} M\zeta(A)\overline{\zeta(B)} &= MI(\chi_A)\overline{I(\chi_B)} = \\ &= \int \chi_A(\lambda) \overline{\chi_B(\lambda)} \mu(d\lambda) = \mu(A \cap B); \end{aligned}$$

это дает нам и некоррелированность значений для непересекающихся множеств, и $M|\zeta(A)|^2 = \mu(A)$.

Отображение I линейно и изометрично, причем $I(\chi_A) = \zeta(A)$; в силу единственности стохастического интеграла (теорема 1 § 2.2) для всех $f \in L^2(d\mu)$

*) На дубе — сундук, в сундуке — заяц, в зайце — утка, в утке — яйцо, в нем — иголка, а в иголке — Кощеева смерть.

имеем

$$I(f) = \int f(\lambda) \zeta(d\lambda).$$

В частности, для $f(\lambda) = e^{it\lambda}$:

$$I(f) = \xi_t - m = \int e^{it\lambda} \zeta(d\lambda).$$

Отсюда, наконец, получаем (1).

2. Рассмотрим очень простой пример спектрального представления. Для процесса примера 1 § 1.2, к которому мы возвращались в предыдущем параграфе, имеем $\xi_t = A \cos(\eta t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{i\varphi} e^{i\eta t} + \frac{A}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\eta t}$; это — уже готовое спектральное представление. Соответствующая мера с ортогональными значениями ζ сосредоточена в точках $\pm\eta$, и ζ -меры одноточечных множеств $\{\eta\}$, $\{-\eta\}$ равны соответственно $\frac{A}{2} e^{i\varphi}$, $\frac{A}{2} e^{-i\varphi}$ (для тех элементарных событий, для которых $\eta = 0$, случайная мера ζ сосредоточена в точке 0, и $\zeta\{0\} = A \cos \varphi$).

Заметим, что в данном случае реализация случайной меры ζ — счетно-аддитивная функция множества (по-другому — заряд); в общем случае это не так. Заметим еще, что здесь случайная мера ζ с некоррелированными значениями отнюдь не является мерой с независимыми значениями. Это — общая ситуация для всех вещественнозначных процессов: для них непременно ζ -меры симметричных относительно 0 множеств — комплексно-сопряженные друг другу ($\zeta(-A) = \overline{\zeta(A)}$ с вероятностью 1).

Задача 1. Пусть ξ_t — действительный стационарный процесс с математическим ожиданием m и спектральной плотностью $f(\lambda)$. Рассмотрим колебание частоты Λ (неслучайной), модулированное по амплитуде при помощи ξ_t , т.е. $\eta_t = \xi_t \cos(\Lambda t + \varphi)$, где $\Lambda = \text{const}$, φ — независимая от ξ_t случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$.

Напишите спектральное представление для η_t ; найдите соответствующую спектральную меру.

3. Рассмотрим применения спектральных представлений к исследованию стационарных процессов.

а) Линейные преобразования. Пусть линейный оператор A задается комбинацией линейных диффе-

ренциальных операторов с постоянными коэффициентами и интегральных операторов с ядром, зависящим только от разности аргументов. Такие операторы инвариантны относительно сдвигов, и их применение к стационарным процессам приводит снова к стационарным процессам. Посмотрим, что получится при применении такого оператора к процессу, заданному спектральным представлением (1). Имеем

$$\begin{aligned}\xi'_t &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (\xi_{t+h} - \xi_t) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h^{-1} (e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}) \zeta(d\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} (e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}) \zeta(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \cdot i\lambda \zeta(d\lambda).\end{aligned}\quad (5)$$

Предел в среднем квадратическом здесь существует тогда и только тогда, когда функция $h^{-1}(e^{i\lambda h} - 1)$ сходится при $h \rightarrow 0$ к $i\lambda$ в среднем квадратическом относительно $\mu(d\lambda)$, т. е., как легко проверить, при

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \mu(d\lambda) < \infty.$$

Полагая $\tau(A) = \int_A i\lambda \zeta(d\lambda)$, приводим (5) к виду

$$\xi'_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \tau(d\lambda)$$

(см. задачу 3 § 2.2); это — спектральное представление процесса ξ'_t . Спектральная мера $\mu_{\xi'\xi'}$ этого процесса легко находится:

$$\mu_{\xi'\xi'}(A) = \mathbf{M} |\tau(A)|^2 = \mathbf{M} \left| \int_A i\lambda \zeta(d\lambda) \right|^2 = \int_A |i\lambda|^2 \mu_{\xi\xi}(d\lambda).$$

Аналогично для дифференциального оператора $P\left(\frac{d}{dt}\right)$, где P — многочлен: $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ — спектральное представление $\eta_t = P\left(\frac{d}{dt}\right) \xi_t$ задается формулой

$$\eta_t = a_0 m + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} P(i\lambda) \zeta(d\lambda),$$

где $m = \mathbf{M}\xi_t$, $\mathbf{M}\eta_t = a_0 m = P\left(\frac{d}{dt}\right)m$, а спектральная мера

$$\mu_{\eta\eta}(A) = \int_A |P(i\lambda)|^2 \mu_{\xi\xi}(d\lambda).$$

Посмотрим, что будет для интегральных операторов:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \int_{-\infty}^{\infty} B(t-s)\xi_s ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B(t-s)m ds + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} B(t-s)e^{i\lambda s}\zeta(d\lambda) \right] ds. \end{aligned}$$

Получаем, что $\mathbf{M}\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} B(t-s)m ds = \int_{-\infty}^{\infty} B(-u)m du$ (предполагаем, что интеграл сходится). Если функция B обращается в нуль вне конечного отрезка, т. е. интеграл по s фактически собственный, применяем результат задачи 4 § 2.2 и сводим повторный интеграл к

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} B(t-s)e^{i\lambda s} ds \right] \zeta(d\lambda).$$

Делаем во внутреннем интеграле замену $s = t + u$; он превращается в $e^{i\lambda t}g(\lambda)$, где $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} B(-u)e^{i\lambda u} du$. Отсюда получаем спектральное представление:

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} B(-u)m du + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}g(\lambda)\zeta(d\lambda). \quad (6)$$

То же будет для несобственного интеграла (при условии его сходимости в среднем квадратическом).

Теперь мы можем сформулировать общее правило, которое будет годиться и для дифференциальных операторов, и для интегральных, и для их комбинаций.

Спектральное представление процесса $\eta_t = A\xi_t$ задается формулой (6), где $g(\lambda)$ при каждом λ получается следующим образом: нужно применить оператор A к функции $e^{i\lambda t}$ и взять полученную функцию в точке $t=0$ (это можно записать такой формулой: $g(\lambda) = Ae^{i\lambda \cdot}(0)$).

Спектральная мера процесса η_t задается формулой

$$\mu_{\eta\eta}(A) = \int_A |g(\lambda)|^2 \mu_{\xi\xi}(d\lambda). \quad (7)$$

Если существует спектральная плотность $f_{\xi\xi}(\lambda)$, то спектральная плотность процесса $\eta_t = A\xi_t$ получается из нее умножением на $|g(\lambda)|^2$.

Это же правило применимо к инвариантным относительно сдвигов операторам, действующим на функции от дискретного аргумента.

Задача 2. Пусть ξ_n , $-\infty < n < \infty$, — стационарная в широком смысле последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in (-\pi, \pi]$; $M\xi_n = 0$. Каковы условия существования $\eta_n = A\xi_n = 1, i, m, \sum_{q \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \xi_{n-k}$ и как выражается спектральная плотность этой стационарной последовательности?

б) Интегрирование, стационарные решения уравнений. Решение уравнения $P\left(\frac{d}{dt}\right)\eta_t = \xi_t$, $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, находится при $a_0 \neq 0$ в виде

$$\eta_t = a_0^{-1}m + \int_{-\infty}^{\infty} P(i\lambda)^{-1} e^{i\lambda t} \zeta(d\lambda),$$

если только $\int_{-\infty}^{\infty} |P(i\lambda)|^{-2} \mu_{\xi\xi}(d\lambda) < \infty$; если же этот

интеграл расходится, из результата п. а) легко вывести (от противного), что решения нет. В случае $a_0 = 0$ решение существует только при $m = M\xi_t = 0$, причем к нему можно прибавить произвольную случайную величину Z , некоррелированную с $\zeta(A)$:

$$\eta_t = Z + \int_{-\infty}^{\infty} P(i\lambda)^{-1} e^{i\lambda t} \zeta(d\lambda).$$

В частности, стационарный вариант первообразной непрерывного в среднем квадратическом случайного процесса ξ_t существует, когда

$$M\xi_t = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-2} \mu_{\xi\xi}(d\lambda) < \infty.$$

Задача 3. Электрическая схема, представленная на рис. 11, состоит из источника тока, устройство которого не указывается, конденсатора емкости C и сопротивления R . Пусть ток, испускаемый источником, представляет собой стационарный случайный процесс ξ_t с математическим ожиданием I_0 и корреляционной функцией $K_{\xi\xi}(\tau) = (\Delta I)^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию напряжения η_t на конденсаторе при стационарном режиме (т. е. при условии, что η_t — стационарный процесс).

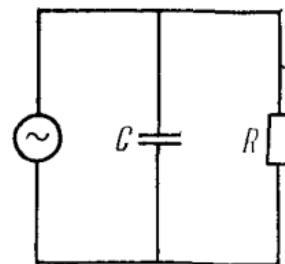


Рис. 11

в) Закон больших чисел. В дискретном случае

$$\frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \xi_k = m + \int_{(-\pi, \pi]} \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} e^{i\lambda k} \zeta(d\lambda).$$

При $n_2 - n_1 \rightarrow \infty$ функция под знаком интеграла стремится к единице для $\lambda = 0$ и к нулю для остальных λ ; при этом она мажорируется интегрируемой в квадрате относительно $\mu(d\lambda)$ функцией 1, так что имеет место сходимость в среднем квадратическом. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{l. i. m. } \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{k=n_1}^{n_2-1} \xi_k &= m + \int_{(-\pi, \pi]} \chi_{\{0\}}(\lambda) \zeta(d\lambda) = \\ &= m + \zeta\{0\}. \end{aligned}$$

В непрерывном случае пользуемся задачей 4 § 2.2:

$$\begin{aligned} \text{l. i. m. } \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \xi_t dt &= \\ &= m + \text{l. i. m. } \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e^{i\lambda t} dt \right] \zeta(d\lambda) = \\ &= m + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{0\}}(\lambda) \zeta(d\lambda) = m + \zeta\{0\}. \end{aligned}$$

Итак, предел среднего существует всегда и равен математическому ожиданию m плюс значение случайной меры ζ на одноточечном множестве $\{0\}$. Необходимое и достаточное условие сходимости среднего к математическому ожиданию состоит в том, чтобы спектральная мера от этого одноточечного множества равнялась нулю: $\mu\{0\} = 0$.

§ 4.3. Решение задачи линейного прогнозирования

1. Установим для некоторых стационарных процессов, являются ли они линейно регулярными (сингулярными).

Примером линейно сингулярного процесса может служить $\xi_t = A \cos(t + \varphi)$, где совершенно точный линейный прогноз осуществляется использованием формулы $\xi_{t_1} = \xi_{t_1 - 2\pi n}$. Также сингулярен будет процесс с аналитической корреляционной функцией, например $K(\tau) = 1/(1 + \tau^2)$. В этом случае процесс вблизи любой точки на оси времени разлагается в ряд Тейлора, сходящийся в среднем квадратическом; линейная формула, осуществляющая абсолютно точный прогноз на небольшой промежуток времени, такая:

$$\xi_{t_1} = \xi_{t_0} + \xi'_{t_0}(t_1 - t_0) + \xi''_{t_0}(t_1 - t_0)^2/2 + \dots$$

Линейно регулярными являются: последовательность ξ_k с некоррелированными значениями; последовательность ее разностей $\eta_k = \xi_k - \xi_{k-1}$; стационарный вопрос с корреляционной функцией $K(\tau) = (1 - |\tau|) \vee 0$ (доказать!).

Пользуясь этим последним примером, мы обнаруживаем, что стационарный процесс может быть сингулярным и в то же время линейно регулярным: процесс $\xi_t = A \cos(\eta t + \varphi)$ — случайная синусоида — допускает абсолютно точный нелинейный прогноз, но он линейно регулярен, если подобрать (A, η) так, чтобы у него была соответствующая корреляционная функция.

2. Рассмотрим применение к задаче линейного прогнозирования спектральных представлений; ограничимся более простым случаем стационарных последовательностей. Предположим для простоты, что $m = \mathbf{M}\xi_t = 0$.

Изоморфное соответствие $f \leftrightarrow \int_{(-\pi, \pi]} f(\lambda) \zeta(d\lambda)$ между

пространствами $L^2((-\pi, \pi], d\mu)$ и H_T^0 сводит задачу прогнозирования ξ_m по значениям ξ_n , $n \leq 0$ ^{*}, к задаче нахождения элемента g замыкания в $L^2(d\mu)$ линейной оболочки функций $e^{in\lambda}$, $n \leq 0$, такого, что

^{*}) Задача прогнозирования по наблюдению случайной последовательности до момента $n \neq 0$ сводится к рассмотренной задаче при помощи операторов сдвига; см. п. 8 § 3.3.

$e^{im\lambda} - g(\lambda)$ ортогонально этому подпространству в смысле соответствующей метрики. Достаточно ортогональности ко всем образующим этого пространства; поэтому условия на g следующие:

$$\int_{(-\pi, \pi]} [e^{im\lambda} - g(\lambda)] e^{-in\lambda} \mu(d\lambda) = 0, \quad n \leq 0. \quad (1)$$

Условие линейной сингулярности заключается в том, чтобы множество линейных комбинаций функций $e^{in\lambda}$, $n \leq 0$, было всюду плотно в $L^2(d\mu)$. Достаточно, чтобы только функцию $e^{i\lambda}$ можно было приблизить в среднем квадратическом этими линейными комбинациями.

В качестве примера докажем следующую микротеорему.

Микротеорема. *Замкнем отрезок от $-\pi$ до π в окружность. Если на этой окружности существует дуга длиной более половины окружности, на которой спектральная мера равна нулю, то рассматриваемая стационарная последовательность линейно сингулярна.*

Доказательство. Положим $e^{-i\lambda} = z$, и пусть середине той дуги, на которой мера не равна нулю, соответствует при этом точка z_0 . Выберем настолько большое $N > 0$, чтобы всюду на этой дуге было $|Nz_0 - z| < N$. (Непременно сделайте чертеж.) Тогда

$$\begin{aligned} e^{i\lambda} = \frac{1}{z} &= \frac{1}{Nz_0 + (z - Nz_0)} = \\ &= \frac{1}{Nz_0} + \frac{Nz_0 - z}{(Nz_0)^2} + \frac{(Nz_0 - z)^2}{(Nz_0)^3} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Nz_0)^{-n-1} \cdot (Nz_0 - e^{-i\lambda})^n, \end{aligned}$$

причем ряд сходится равномерно на дуге, на которой мера отлична от нуля. Значит, он сходится и в смысле $L^2(d\mu)$.

Можно доказать, что для линейной сингулярности достаточно обращения меры μ в нуль на сколь угодно маленькой дуге. В связи с этим предлагается необязательная задача.

Задача 1*. Можно ли функцию $1/z$ приблизить равномерно сколь угодно точно многочленами на всей единичной окружности комплексной плоскости, за исключением произвольно малой дуги?

3. В случае линейно сингулярных последовательностей наилучший (абсолютно точный) линейный прогноз находится при самом доказательстве сингулярности: например, для последовательности, удовлетворяющей условиям микротеоремы п. 2 прогноз на один шаг дается формулой

$$\widehat{(\xi_1)}_{\leqslant 0} = \sum_{n=0}^{\infty} (Nz_0)^{-n-1} \sum_{k=0}^n C_n^k (Nz_0)^{n-k} (-1)^k \xi_{-k}.$$

Посмотрим, что мы можем сделать в регулярном случае.

Рассмотрим самый простой, по-видимому, случай, когда у нашей стационарной последовательности существует спектральная плотность $f(\lambda)$, ограниченная сверху и снизу двумя положительными константами: $0 < C_1 \leq f(\lambda) \leq C_2 < \infty$, $-\pi < \lambda \leq \pi$. В этом случае функция на $(-\pi, \pi]$ принадлежит $L^2(d\mu)$ тогда и только тогда, когда она интегрируема в квадрате относительно меры Лебега, и понятия сходимости в среднем квадратическом, замыкания и т. п. относительно меры μ и относительно меры Лебега совпадают (не совпадают скалярные произведения, ортогональность, проекции).

Введем ряд пространств функций на $(-\pi, \pi]$. Прежде всего определим пространства $\mathbf{h}_{\leq 0}$ и $\mathbf{h}_{>0}$ — подпространства $L^2(-\pi, \pi]$, являющиеся замкнутыми линейными оболочками множеств функций $\{e^{in\lambda}, n \leq 0\}$ и $\{e^{in\lambda}, n > 0\}$ соответственно (безразлично, рассматривать замыкание в пространстве $L^2((-\pi, \pi], \mu(d\lambda))$ или в $L^2((-\pi, \pi], d\lambda)$). Любой элемент $L^2(-\pi, \pi]$ представляется единственным образом в виде суммы элемента из $\mathbf{h}_{\leq 0}$ и элемента из $\mathbf{h}_{>0}$; но подпространства $\mathbf{h}_{\leq 0}$ и $\mathbf{h}_{>0}$ не ортогональны в смысле $L^2(\mu(d\lambda))$ (они ортогональны только в смысле $L^2(d\lambda)$). Для того чтобы функция принадлежала $\mathbf{h}_{\leq 0}$ соответственно $\mathbf{h}_{>0}$, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье, отвечающие положительным (соответственно неположительным) степеням $e^{i\lambda}$, были равны нулю (потому что любая функция из $L^2(-\pi, \pi]$ разлагается в сходящийся в среднем квадратическом ряд Фурье). Пространства $\mathbf{h}_{\leq 0}$, $\mathbf{h}_{>0}$ соответствуют при спектральном представлении нашей случайной последовательности пространствам случайных величин $\mathbf{H}_{\leq 0}^0$, $\mathbf{H}_{>0}^0$.

Условие наилучшего прогноза (1) можно теперь переписать в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} [e^{im\lambda} - g(\lambda)] f(\lambda) e^{-in\lambda} d\lambda = 0, \quad n \leq 0,$$

или

$$[e^{im\lambda} - g(\lambda)] f(\lambda) \in \mathbf{h}_{\leq 0} \quad (2)$$

(причем $g \in \mathbf{h}_{\leq 0}$).

Далее, рассмотрим множество $\mathbf{C}_{\leq 0}$ ($\mathbf{C}_{\geq 0}$) функций на $(-\pi, \pi]$, приближаемых сколь угодно точно линейными комбинациями функций $e^{in\lambda}$, $n \leq 0$ (соответственно $n \geq 0$), в смысле равномерной сходимости (все эти функции непрерывны на отрезке от $-\pi$ до π с отождествленными концами). Эти множества замкнуты не только относительно сложения и умножения на число, как $\mathbf{h}_{\leq 0}$ и $\mathbf{h}_{\geq 0}$, но и относительно умножения функций друг на друга (т. е. $\mathbf{C}_{\leq 0}, \mathbf{C}_{\geq 0}$ — алгебры функций). Это вытекает из того, что произведение двух тригонометрических многочленов, содержащих только неположительные (неотрицательные) степени $e^{i\lambda}$, — опять такой же многочлен. Более того, для $g \in \mathbf{C}_{\leq 0}$ также и $\exp g \in \mathbf{C}_{\leq 0}$ (из-за того, что целая функция e^z сколь угодно точно приближается многочленами в смысле равномерной сходимости в любой ограниченной области комплексной плоскости). Легко доказать также, что:

Задача 2. Если $g_1 \in \mathbf{h}_{\leq 0}$, $g_2 \in \mathbf{C}_{\leq 0}$, то $g_1 g_2 \in \mathbf{h}_{\leq 0}$; если $g_1 \in \mathbf{h}_{\geq 0}$, $g_2 \in \mathbf{C}_{\geq 0}$, то $g_1 g_2 \in \mathbf{h}_{\geq 0}$.

Покажем, как решается задача наилучшей линейной экстраполяции в предположении, что спектральная плотность $f(\lambda)$ (непрерывная) представляется в виде

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda), \quad (3)$$

где $f_1 \in \mathbf{C}_{\leq 0}$, $f_1^{-1} \in \mathbf{C}_{\leq 0}$, $f_2(\lambda) = \overline{f_1(\lambda)}$ при $-\pi < \lambda \leq \pi$.

Условие (2) переписывается теперь в виде

$$[e^{im\lambda} - g(\lambda)] f_1(\lambda) f_2(\lambda) \in \mathbf{h}_{\geq 0}. \quad (4)$$

Функции $f_2(\lambda) = \overline{f_1(\lambda)}$, $f_2(\lambda)^{-1} = \overline{f_1(\lambda)^{-1}}$ принадлежат $\mathbf{C}_{\geq 0}$; значит, умножая выражение (4) на $f_2(\lambda)^{-1}$,

получаем равносильное условие:

$$[e^{im\lambda} - g(\lambda)] f_1(\lambda) \in h_{>0}.$$

Обозначая эту функцию $h(\lambda)$, получаем условие наилучшего линейного прогноза:

$$e^{im\lambda} f_1(\lambda) = g(\lambda) f_1(\lambda) + h(\lambda), \quad g \in h_{\leq 0}, \quad h \in h_{>0}.$$

Требование принадлежности g подпространству $h_{\leq 0}$ равносильно требованию $g \cdot f_1 \in h_{\leq 0}$, так как $f_1^{-1} \in C_{\leq 0}$. Значит, дело сводится к тому, чтобы представить функцию $e^{im\lambda} f_1(\lambda)$ в виде суммы функции из $h_{\leq 0}$ и функции из $h_{>0}$. Но это разложение получается очень легко, если разбить ряд Фурье этой функции (сходящийся в среднем квадратическом) на сумму по неположительным степеням $e^{i\lambda}$ и по положительным.

Проделаем это. Пусть

$$f_1(\lambda) = c_0 + c_{-1} e^{-i\lambda} + c_{-2} e^{-2i\lambda} + \dots$$

(ряд сходится в смысле $L^2(-\pi, \pi)$). Тогда

$$\begin{aligned} e^{im\lambda} f_1(\lambda) &= c_0 e^{im\lambda} + c_{-1} e^{i(m-1)\lambda} + \dots \\ &\quad \dots + c_{-m+1} e^{i\lambda} + c_{-m} + c_{-m-1} e^{-i\lambda} + \dots \end{aligned}$$

Ясно, что первые слагаемые (до $c_{-m+1} e^{i\lambda}$) представляют собой $h(\lambda)$, а бесконечный ряд, начинающийся с c_{-m} , дает $g(\lambda) f_1(\lambda)$.

Значит, наилучший прогноз получается следующим образом: функция

$$g(\lambda) = [c_{-m} + c_{-m-1} e^{-i\lambda} + c_{-m-2} e^{-2i\lambda} + \dots] f_1(\lambda)^{-1} \quad (5)$$

разлагается в ряд Фурье

$$g(\lambda) = b_0 + b_{-1} e^{-i\lambda} + b_{-2} e^{-2i\lambda} + \dots,$$

и прогноз для ξ_m по значениям ξ_n , $n \leq 0$, дается формулой

$$\widehat{(\xi_m)}_{\leq 0} = b_0 \xi_0 + b_{-1} \xi_{-1} + b_{-2} \xi_{-2} + \dots \quad (6)$$

(сходимость в среднем квадратическом).

Что касается средней квадратической ошибки прогноза, то она равна

$$\begin{aligned}\sigma^2(m) &= \int_{-\pi}^{\pi} |e^{im\lambda} - g(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda = \\&= \int_{-\pi}^{\pi} |[e^{im\lambda} - g(\lambda)] f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |h(\lambda)|^2 d\lambda = \\&= \int_{-\pi}^{\pi} |c_0 e^{im\lambda} + c_{-1} e^{i(m-1)\lambda} + \dots + c_{-m+1} e^{i\lambda}|^2 d\lambda = \\&= 2\pi [|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + \dots + |c_{-m+1}|^2]. \quad (7)\end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ это выражение стремится к

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |c_{-n}|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda = K(0) = D\xi_k.$$

Таким образом, здесь имеет место *линейная регулярность*.

4. Чтобы можно было применить построенную теорию, нам нужно научиться разлагать спектральную плотность на сопряженные друг другу множители, принадлежащие вместе с их обратными $\mathbf{C}_{\leq 0}$, соответственно $\mathbf{C}_{\geq 0}$. Для любой достаточно гладкой (на окружности) положительной функции f это можно сделать следующим образом. Логарифм положительной функции столь же гладок, как и сама функция; значит, его можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$\ln f(\lambda) = \dots + a_{-2} e^{-2i\lambda} + a_{-1} e^{-i\lambda} + a_0 + \\+ a_1 e^{i\lambda} + a_2 e^{2i\lambda} + \dots,$$

причем в силу вещественности логарифма $a_{-n} = \bar{a}_n$, a_0 действительно. Эту функцию можно представить в виде суммы двух сопряженных друг другу функций: $\frac{a_0}{2} + a_{-1} e^{-i\lambda} + a_{-2} e^{-2i\lambda} + \dots$ из $\mathbf{C}_{\leq 0}$ и $\frac{a_0}{2} + a_1 e^{i\lambda} + a_2 e^{2i\lambda} + \dots$ из $\mathbf{C}_{\geq 0}$. Теперь остается положить $f_1(\lambda) = \exp \left\{ \frac{a_0}{2} + a_{-1} e^{-i\lambda} + a_{-2} e^{-2i\lambda} + \dots \right\}$ и аналогично для f_2 . Функции f_1 и f_1^{-1} принадлежат $\mathbf{C}_{\leq 0}$ как \exp от функций из $\mathbf{C}_{\leq 0}$.

Пользуясь разложением $e^z = 1 + z + z^2/2 + \dots$, мы можем выразить коэффициенты Фурье функции f_1 через $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots$. В частности, $c_0 = 1 + \frac{a_0}{2} + \frac{(a_0/2)^2}{2!} + \dots = e^{a_0/2}$. Отсюда

$$\sigma^2(1) = 2\pi |c_0|^2 = 2\pi e^{a_0} = 2\pi \exp \left\{ (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\}. \quad (8)$$

Заметим, что для практических применений нам зачастую важнее знать ошибку наилучшего прогноза, чем формулы, осуществляющие этот прогноз. Дело в том, что, если наилучший прогноз окажется сложным и неудобным для вычисления, можно вместо него пользоваться какой-либо более простой — но не наилучшей — оценкой; но нам необходимо знать, много ли мы при этом теряем, намного ли лучших результатов можно было бы добиться, используя наилучшую оценку.

Выше предполагалось, что функция f — гладкая и что ряд Фурье для ее логарифма равномерно сходится. Но совершенно нет необходимости, чтобы к функции $\ln f(\lambda)$ равномерно сходились именно частичные суммы $S_n(\lambda)$ ее ряда Фурье, — достаточно, чтобы это были любые тригонометрические многочлены. Пользуясь теоремой Фейера, говорящей, что к любой непрерывной периодической функции равномерно сходятся суммы $\sigma_n(\lambda) = (S_0(\lambda) + S_1(\lambda) + \dots + S_{n-1}(\lambda))/n$ (см. Колмогоров и Фомин (1968, гл. VIII, § 2)), мы получаем представление (3) для любой непрерывной положительной спектральной плотности.

Для разрывных, но ограниченных сверху и снизу спектральных плотностей можно получить аналогичные результаты, воспользовавшись вместо пространств $C_{\leq 0}, C_{\geq 0}$ пространствами функций, к которым последовательности тригонометрических многочленов с неположительными (неотрицательными) степенями $e^{i\lambda}$ сходятся почти всюду, оставаясь равномерно ограниченными

5. Указанный метод факторизации плотности является общим, и, значит, в конкретных случаях выгоднее пользоваться не им, а какими-нибудь методами с более узкой областью применимости. Так, часто приходится рассматривать случай, когда $f(\lambda)$ представляется рациональной функцией от $e^{i\lambda}$:

$$f(\lambda) = \frac{P(e^{i\lambda})}{Q(e^{i\lambda})},$$

где P и Q — многочлены. Из действительности отношения многочленов на единичной окружности вытекает, что их корни (корни и полюсы рациональной функции P/Q) разбиваются на пары симметричных

относительно окружности (т. е. получаемых друг из друга инверсией), и еще они могут иметь какой-то кратности корень 0:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = cz^k \frac{(z - z_1)(z - \bar{z}_1^{-1}) \dots (z - z_n)(z - \bar{z}_n^{-1})}{(z - w_1)(z - \bar{w}_1^{-1}) \dots (z - w_m)(z - \bar{w}_m^{-1})},$$

где k может быть и положительным, и отрицательным, и нулем. Пусть корни $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_m$ по модулю больше единицы, а $\bar{z}_1^{-1}, \dots, \bar{z}_n^{-1}, \bar{w}_1^{-1}, \dots, \bar{w}_m^{-1}$ — меньше. Перепишем выражение для P/Q :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = Cz^{k+n-m} \frac{(z_1 - z)(\bar{z}_1 - z^{-1}) \dots (z_n - z)(\bar{z}_n - z^{-1})}{(w_1 - z)(\bar{w}_1 - z^{-1}) \dots (w_m - z)(\bar{w}_m - z^{-1})}.$$

При $z = e^{i\lambda}$ дробь действительна, поэтому коэффициент C тоже действителен, а степень $k + n - m = 0$. Таким образом, получаем

$$f(\lambda) = C \frac{(z_1 - e^{i\lambda})(\bar{z}_1 - e^{-i\lambda}) \dots (z_n - e^{i\lambda})(\bar{z}_n - e^{-i\lambda})}{(w_1 - e^{i\lambda})(\bar{w}_1 - e^{-i\lambda}) \dots (w_m - e^{i\lambda})(\bar{w}_m - e^{-i\lambda})}.$$

Теперь в $f_1(\lambda)$ включаем множитель \sqrt{C} и скобки, в которых участвует $e^{-i\lambda}$:

$$f_1(\lambda) = \sqrt{C} \prod_{j=1}^n (\bar{z}_j - e^{-i\lambda}) \prod_{k=1}^m (\bar{w}_k - e^{-i\lambda})^{-1}.$$

При этом $f(\lambda) = f_1(\lambda) \overline{f_1(\lambda)}$; докажем, что $f_1, f_1^{-1} \in \mathbf{C}_{\leq 0}$. Для этого достаточно проверить, что для $|a| > 1$ функция $(a - e^{-i\lambda})^{-1} \in \mathbf{C}_{\leq 0}$ (то, что $(a - e^{-i\lambda}) \in \mathbf{C}_{\leq 0}$, очевидно). Имеем

$$(a - e^{-i\lambda})^{-1} = a^{-1} + a^{-2}e^{-i\lambda} + a^{-3}e^{-2i\lambda} + \dots \in \mathbf{C}_{\leq 0}.$$

Рассмотрим пример: $f(\lambda) = 5 + 4 \cos \lambda$ (соответствующая корреляционная функция: $K(0) = 10\pi$, $K(\pm 1) = 4\pi$, $K(n) = 0$ при $|n| > 1$). Имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 5 + 2(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) = e^{-i\lambda}(2e^{2i\lambda} + 5e^{i\lambda} + 2) = \\ &= 2e^{-i\lambda} \left(e^{i\lambda} + \frac{1}{2} \right) (e^{i\lambda} + 2) = (2 + e^{+i\lambda})(2 + e^{i\lambda}). \end{aligned}$$

Здесь первый множитель есть $f_1(\lambda)$, а второй $f_2(\lambda)$. По формулам (5), (6) получаем для прогноза на

один шаг

$$\begin{aligned}g(\lambda) &= c_{-1} f_1(\lambda)^{-1} = \\&= 1 \cdot (2 + e^{-i\lambda})^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-i\lambda}}{4} + \frac{e^{-2i\lambda}}{8} - \dots, \\(\widehat{\xi}_1)_{\leq 0} &= \frac{\xi_0}{2} - \frac{\xi_{-1}}{4} + \frac{\xi_{-2}}{8} - \frac{\xi_{-3}}{16} + \dots\end{aligned}$$

Для прогноза на большее число шагов $g = 0$, т. е. наилучший линейный прогноз не использует наблюдаемых значений $\xi_0, \xi_{-1}, \xi_{-2}, \dots$; ошибка прогноза $(\widehat{\xi}_m)_{\leq 0} = 0$ равна $D\xi_m = 10\pi$.

Средний квадрат отклонения от истинного значения прогноза на один шаг равен $2\pi|c_0|^2 = 8\pi$, т. е. и прогноз на один шаг тоже очень плох в данном случае.

Задача 3. Найти наилучший линейный прогноз для ξ_n по значениям $\xi_n, n \leq 0$, в случае стационарной последовательности с математическим ожиданием 2 и спектральной плотностью $f(\lambda) = (25 + 24 \cos \lambda)^{-1}$ (корреляционная функция равна $K(n) = \frac{2\pi}{7} \left(-\frac{3}{4}\right)^{|n|}$).

Не забудьте учесть, что $M\xi_n \neq 0$, и внести в формулы для прогноза соответствующие изменения.

6. Формулы (5)–(8) могут сохранять смысл и тогда, когда плотность $f(\lambda)$ в некоторых точках обращается в нуль или в бесконечность, но их применение уже не обосновано. Полезно посмотреть, что можно при этом сказать о задаче наилучшего линейного прогноза. Наилучший прогноз в этом случае не обязательно представляется в виде суммы ряда (6), потому что соответствующая функция $g(\lambda)$ может не принадлежать $L^2(d\lambda)$, имея точки, при приближении к которым она слишком быстро растет.

Задача 4*. Найдите наилучший прогноз за один шаг для стационарной последовательности со спектральной плотностью $f(\lambda) = 2 + 2 \cos \lambda$ ($K(0) = 4\pi$, $K(\pm 1) = 2\pi$, $K(n) = 0$ при $|n| > 1$).

А. Н. Колмогоровым было доказано, что стационарная в широком смысле последовательность, имеющая спектральную плотность, тогда и только тогда линейно сингулярна, когда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda = -\infty \quad (9)$$

(этот интеграл уже возникал у нас в формуле (8)), и тогда и только тогда линейно регулярна, когда интеграл сходится.

Задача 5*. Докажите, что из сингулярности следует (9) (в случае, когда есть спектральная плотность).

Задача 6*. Приведите пример стационарной в широком смысле последовательности, не являющейся ни линейно регулярной, ни линейно сингулярной.

Формулы для наилучшего линейного прогноза в случае стационарного процесса с *непрерывным временем* можно также написать по аналогии с формулами для стационарной последовательности, используя вместо рядов Фурье преобразование Фурье. Разумеется, после того, как формулы написаны, их следует доказать.

В частности, для корреляционной функции $K(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}$ имеем

$$f(\lambda) = \frac{a\sigma^2/\pi}{a^2 + \lambda^2} = \frac{\sigma\sqrt{a/\pi}}{a + i\lambda} \frac{\sigma\sqrt{a/\pi}}{a - i\lambda}.$$

Здесь первая функция

$$f_1(\lambda) = \sigma\sqrt{a/\pi} \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{i\lambda t} dt$$

представляется в виде интеграла Фурье только по отрицательным значениям t , а вторая — комплексно-сопряженная к первой. По аналогии с формулой (5) имеем для прогноза на время $s > 0$

$$g(\lambda) = \sigma\sqrt{a/\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda t} e^{a(t-s)} dt \cdot f_1(\lambda)^{-1} = e^{-as}.$$

Этой функции (константе) соответствует такой наилучший линейный прогноз для ξ_s по $\{\xi_t, t \leq 0\}$:

$$\widehat{(\xi_s)}_{\leq 0} = e^{-as} \xi_0.$$

В более сложных случаях g содержит слагаемые вида $C_n(i\lambda)^n$, а также остаток, стремящийся к нулю на бесконечности; в $\widehat{(\xi_s)}_{\leq 0}$ это дает $\sum_n C_n \xi_0^{(n)}$ — линейную комбинацию производных в последний наблюдаемый момент времени плюс интеграл с некоторой плотностью по всему прошлому процесса.

Задача 7*. Найдите наилучший линейный прогноз для стационарного процесса с корреляционной функцией $K(\tau) = (1 + a|\tau|) e^{-a|\tau|}$.

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. СВОЙСТВА С ВЕРОЯТНОСТЬЮ 1

§ 5.1. Распределения случайных функций.

Теорема Колмогорова о конечномерных распределениях

1. В п. 2 а) § 1.3, мы уже наметили проблемы, о которых будет идти речь в этой главе. Прежде всего скажем, что такое распределение случайной функции.

Распределение случайной величины или случайного вектора — это мера в измеримом пространстве (R^1, \mathcal{B}^1) или (R^n, \mathcal{B}^n) , определяемая соотношением $\mu_\xi(C) = P\{\xi \in C\}$. Рассмотрим случайную функцию ξ_t , $t \in T$, принимающую значения в измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) . Пусть почти все реализации этой случайной функции принадлежат некоторому пространству X , состоящему из функций x_t , $t \in T$, со значениями в X . Распределение случайной функции — это будет мера в этом функциональном пространстве. Однако, прежде чем об этом говорить, нужно ввести в пространстве X σ -алгебру.

Цилиндрическими множествами в пространстве X будем называть множества вида $\{x \in X: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$, $t_1, \dots, t_n \in T$, $A \in \mathcal{X}^n$. (Объяснение названия: в частном случае $X = R^1$, $T = \{1, 2, 3\}$, $n = 2$ это просто цилиндры с образующими, параллельными одной из координатных осей.) Легко видеть, что цилиндрические множества образуют алгебру, но (в случае бесконечного T) не σ -алгебру. Определим σ -алгебру $\mathcal{X}^T(X)$ в пространстве X — наименьшую σ -алгебру, которая содержит все цилиндрические множества. Ясно, что $\mathcal{X}^T(X)$ является также наименьшей σ -алгеброй в X , содержащей все множества вида $\{x \in X: x_t \in A\}$, $t \in T$, $A \in \mathcal{X}$.

Распределением случайной функции ξ_t , $t \in T$, в пространстве X мы будем называть вероятностную меру μ_ξ в пространстве $(X, \mathcal{X}^T(X))$, определяемую

соотношением $\mu_{\xi}(C) = P\{\xi \in C\}$; т. е. значение этой меры на множестве C в функциональном пространстве определяется как вероятность того, что выборочная функция принадлежит этому множеству.

Мы можем рассматривать распределение случайной функции в различных пространствах, которым принадлежат все или почти все ее реализации; для любой случайной функции мы можем использовать пространство X^T всех функций x_t , $t \in T$, со значениями в X . В этом случае для соответствующей σ -алгебры мы будем использовать более короткое обозначение \mathcal{X}^T .

Почему вероятность $P\{\xi \in C\}$ определена для любого $C \in \mathcal{X}^T(X)$? Рассмотрим множество всех подмножеств X , для которых эта вероятность определена, т. е. $\xi^{-1}(C)$ принадлежит \mathcal{F} — нашей основной σ -алгебре в вероятностном пространстве. Это множество множеств является σ -алгеброй, и оно содержит все множества вида $\{x \in X : x_t \in A\}$; значит, оно содержит и наименьшую σ -алгебру, содержащую все такие множества, т. е. $\mathcal{X}^T(X)$.

На бесконечномерные распределения переносятся многие понятия и результаты, известные нам для конечномерных; в частности, для нас важно следующее свойство: если f — $\mathcal{X}^T(X)$ -измеримый функционал, то

$$Mf(\xi) = \int_X f(x) \mu_\xi(dx), \quad (1)$$

причем оба интеграла сходятся или расходятся одновременно. Это — теорема о замене переменных в интеграле Лебега (см. введение).

2. Рассмотрим немного подробнее σ -алгебру $\mathcal{X}^T(X)$. Оказывается, для любого множества C из этой σ -алгебры существует не более чем счетное число элементов $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \in T$ таких, что принадлежность функции множеству C определяется только ее значениями в точках t_1, t_2, \dots Точнее, существует множество A , принадлежащее счетному произведению σ -алгебры \mathcal{X} самой на себя $\mathcal{X}^\infty = \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \dots$, такое, что C состоит из тех и только тех функций $x \in X$, для которых $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots) \in A$. Иначе говоря,

$$\mathcal{X}^T(X) = \bigcup_{\{t_1, t_2, \dots\} \subseteq T} \mathcal{X}^{\{t_1, t_2, \dots\}}(X),$$

где $\mathcal{X}^{\{t_1, t_2, \dots\}}(X)$ — σ -алгебра в пространстве X , порождаемая множествами вида $\{x \in X : x_{t_i} \in A\}$, $A \in \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \dots$

Доказательство этого несложно. Указанная несчетная сумма σ -алгебр, как легко видеть, сама является σ -алгеброй (здесь используется то, что сумма счетного числа множеств $\{t_1, t_2, \dots\}$ сама счетна); она является частью $\mathcal{X}^T(X)$; и так как $\mathcal{X}^T(X)$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая все $\{x \in X : x_t \in A\}$, $t \in T$, $A \in \mathcal{X}$, то обе σ -алгебры совпадают.

Отсюда следует, что в случае несчетного T такие множества, как $\{x : \sup_{t \in T} x_t \leq c\}$, или множество всех функций, непрерывных в точке t_0 , или множество всех функций, непрерывных справа, не принадлежат \mathcal{B}^T (мы используем здесь обозначение \mathcal{B}^T , потому что в качестве σ -алгебры \mathcal{X} в случае числовых функций берется σ -алгебра \mathcal{B}^1). Соответственно не измеримы относительно \mathcal{B}^T такие функции на R^T (т. е. функционалы): $\sup_{t \in T} x_t$, $\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} x_t$ и т. п.

Рассмотренное нами свойство σ -алгебры $\mathcal{X}^T(X)$ напоминает факт, рассмотренный в § 3.1: для любой случайной величины η из L_T^2 существуют последовательность $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ элементов T и последовательность функций f_n от n переменных такие, что $\eta_n = 1, i. m. f_n(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$. Это не удивительно, потому что σ -алгебра \mathcal{F}_T состоит из прообразов множеств из $\mathcal{X}^T(X)$ при отображении $\omega \rightarrow \xi_\omega(m)$. Однако любой факт, относящийся к L^2 -пространствам, справедлив лишь с точностью до множеств меры 0, тогда как результат, доказанный выше, вообще не касается никакой меры.

3. Далее, σ -алгебра $\mathcal{X}^T(X)$ порождается алгеброй цилиндрических множеств:

$$\mathcal{X}^T(X) = \sigma \left(\bigcup_{\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T} \mathcal{X}^{\{t_1, \dots, t_n\}}(X) \right).$$

По теореме о продолжении меры мера на σ -алгебре $\mathcal{X}^T(X)$ однозначно определяется своими значениями на алгебре, порождающей $\mathcal{X}^T(X)$. Это означает, что распределение μ_ξ случайной функции однозначно определяется конечномерными распределениями μ_{t_1, \dots, t_n} при всевозможных различных $t_1, \dots, t_n \in T$.

Более того, вспомним, что σ -алгебра $\mathcal{X}^n = \mathcal{X} \times \dots \times \mathcal{X}$ определяется как σ -алгебра в X^n , порожденная множествами $A_1 \times \dots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{X}$, а система всех таких множеств образует

полукольцо, содержащее X^n . Так как мера продолжается однозначно также и с полукольца, то распределение случайной функции ξ_t однозначно определяется значениями мер μ_{t_1}, \dots, t_n на произведениях множеств из \mathcal{X} , т. е. с вероятностями $P\{\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\}$.

Посмотрим, какими свойствами должна обладать система конечномерных распределений.

Легко понять, что должны выполняться следующие простые условия.

I. Если i_1, i_2, \dots, i_n — перестановка чисел от 1 до n ; t_1, \dots, t_n — произвольные элементы T ; A_1, \dots, A_n — произвольные множества из \mathcal{X} , то

$$\begin{aligned}\mu_{t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}) &= \\ &= \mu_{t_1 t_2 \dots t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n).\end{aligned}$$

II. Для любых $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T$; $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}\mu_{t_1 \dots t_n t_{n+1}}(A_1 \times \dots \times A_n \times X) &= \\ &= \mu_{t_1 \dots t_n}(A_1 \times \dots \times A_n).\end{aligned}$$

Действительно, вспоминая, что такое конечномерные распределения, убеждаемся, что речь каждый раз идет об одной и той же вероятности, а именно, о $P\{\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\}$.

Система распределений $\mu_{t_1 \dots t_n}$ на (X^n, \mathcal{X}^n) , $t_1, \dots, t_n \in T$, называется *согласованной*, если выполнены условия I, II (*условия согласованности*). Мы установили, что система конечномерных распределений любой случайной функции является согласованной.

Конечномерные распределения играют по отношению к бесконечномерным приблизительно ту же роль, что функция распределения по отношению к распределениям на R^1 или R^n , а условия I, II — ту же роль, что простейшие свойства функции распределения ($0 \leq F \leq 1$; монотонность в случае R^1 и немного более сложное условие в случае R^n). Возникает вопрос: какие дополнительные условия типа непрерывности нужно наложить на систему конечномерных распределений, чтобы ей соответствовала какая-то случайная функция, реализации которой принадлежат данному пространству функций X (для функций распределе-

ния, как мы знаем, такими дополнительными условиями являются $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$? Естественно, дополнительные ус-

ловия зависят от функционального пространства X . Оказывается, для $X = X^T$ никаких дополнительных условий не надо (все требования непрерывности уже заключаются в том, чтобы $\mu_{t_1 \dots t_n}$ были мерами).

Сначала установим это для случайных функций, принимающих значения из отрезка $[0, 1]$ (в качестве σ -алгебры в этом пространстве берем σ -алгебру $\mathcal{B}_{[0, 1]}$ борелевских подмножеств этого отрезка).

4. Теорема Колмогорова (о конечномерных распределениях). Пусть любому конечному набору не совпадающих друг с другом элементов t_1, \dots, t_n множества T поставлена в соответствие вероятностная мера $\mu_{t_1 \dots t_n}$ на $([0, 1]^n, \mathcal{B}_{[0, 1]}^n)$. Для того чтобы эти меры составляли систему конечномерных распределений какой-то случайной функции, принимающей значения в $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$, необходимо и достаточно согласованности системы $\{\mu_{t_1 \dots t_n}, t_1, \dots, t_n \in T, n = 1, 2, \dots\}$.

Доказательство. Необходимость — причем не только для числовых случайных функций, но и для принимающих значения в произвольном измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) — уже доказана.

Достаточность. Мы построим распределение μ на $([0, 1]^T, \mathcal{B}_{[0, 1]}^T)$, соответствующее данной системе конечномерных распределений. Затем в качестве основного вероятностного пространства возьмем $([0, 1]^T, \mathcal{B}_{[0, 1]}^T, \mu)$. При этом каждое элементарное событие ω есть функция x на T со значениями из $[0, 1]$; случайную величину $\xi_t(\omega)$ мы определим как значение этой функции в точке t : $\xi_t(x_t) = x_t$. Случайная функция ξ_t , $t \in T$, и будет искомой.

Определим вероятностную меру μ сначала не на σ -алгебре $\mathcal{B}_{[0, 1]}^T$, а на порождающей ее алгебре цилиндрических множеств. А именно, для множества

$$C = \{x.: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}, \quad (2)$$

где $A \in \mathcal{B}_{[0, 1]}^n$, положим

$$\mu(C) = \mu_{t_1 \dots t_n}(A). \quad (3)$$

Но одно и то же цилиндрическое множество C может быть представлено в виде (2) по-разному — с разными наборами $t_1, \dots, t_n \in T$ и соответственно разными множествами A , так что нужно еще доказать корректность этого определения.

Задача 1. Выведите из условий согласованности, что разным представлениям цилиндрического множества C в виде (2) отвечает одно и то же значение $\mu(C)$, вычисленное по формуле (3).

Теперь докажем счетную аддитивность функции множества $\mu(C)$ на алгебре цилиндрических множеств, и тогда эту функцию можно будет продолжить до меры на порожденной этой алгеброй σ -алгебре $\mathcal{B}_{[0, 1]}^T$. Счетная аддитивность функции множества, определенной на алгебре, равносильна ее конечной аддитивности плюс выполнение условия непрерывности в нуле:

из $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ должно вытекать $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = 0$.

Конечная аддитивность очевидна — она вытекает из аддитивности мер $\mu_{t_1, \dots, t_n}(A)$, $A \in \mathcal{B}_{[0, 1]}^n$ (ведь для любого конечного числа множеств вида (2) можно выбрать общий набор t_1, \dots, t_n). Докажем непрерывность в нуле. Для счетной последовательности цилиндрических множеств C_n можно выбрать счетную последовательность t_1, \dots, t_n, \dots элементов T такую, что каждое из рассматриваемых множеств связано с каким-то конечным числом элементов этой последовательности. Без ограничения общности можно считать, что

$$C_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A_n\}, \quad A \in \mathcal{B}_{[0, 1]}^n. \quad (4)$$

Предположим, что счетная аддитивность не имеет места, т. е. существует такая последовательность $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$, множеств вида (4), для которой $\mu(C_n)$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Последовательность $\mu(C_n)$ — невозрастающая (в силу конечной аддитивности), ограниченная снизу нулем; значит, предел у нее есть, но, по нашему предположению, не равный нулю, а положительный. Иначе говоря, $\mu(C_n) > \varepsilon > 0$ для всех n .

Далее, любую функцию со значениями в $[0, 1]$, определенную на счетном множестве $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ (то есть принадлежащую $[0, 1]^{\{t_1, \dots, t_n, \dots\}}$), мы можем продолжить до функции на множестве T — элемента $[0, 1]^T$. Значит, пересечение множеств C_n вида (4) в $[0, 1]^T$ пусто тогда и только тогда, когда пусто пересечение таких же множеств в $[0, 1]^{\{t_1, \dots, t_n, \dots\}}$. Будем дальше рассматривать множества именно в этом пространстве и меру μ , определенную на его цилиндрических подмножествах.

До сих пор все наши рассуждения были применимы не только к пространству функций со значениями из $[0, 1]$, но и к пространству функций, принимающих значения в произвольном множестве X . Теперь настало время воспользоваться тем, что $X = [0, 1]$.

Мы помним, что любой отрезок — компакт; компактами являются и кубы $[0, 1]^n$. Более того, в произведении счетного числа отрезков $[0, 1]^{\{t_1, \dots, t_n, \dots\}}$ можно ввести естественную метрику, в которой оно станет компактом. А именно, для двух точек из $[0, 1]^{\{t_1, \dots, t_n, \dots\}}$: $x_* = (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}, \dots)$ и $y_* = (y_{t_1}, \dots, y_{t_n}, \dots)$ полагаем

$$\rho(x_*, y_*) = \left[(x_{t_1} - y_{t_1})^2 + \left(\frac{x_{t_2} - y_{t_2}}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{t_n} - y_{t_n}}{2^{n-1}} \right)^2 + \dots \right]^{1/2}.$$

Метрическое пространство $[0, 1]^{\{t_1, \dots, t_n, \dots\}}$ с метрикой ρ — это широко известный пример компакта в бесконечномерном пространстве, так называемый *гильбертов кирпич*. Почему он так называется? Дело в том, что обычно это метрическое пространство вводится в другой форме, приводящей к тому же пространству с точностью до изоморфизма. А именно, в гильбертовом пространстве l^2 , состоящем из последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, с метрикой

$$\rho(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + \dots]^{1/2}$$

рассматривается множество точек, удовлетворяющих условиям $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1/2, \dots, 0 \leq x_n \leq 1/2^{n-1}, \dots$. Это — бесконечномерный параллелепипед

размером $1 \times 1/2 \times 1/4 \times 1/8 \times \dots$; первые три измерения у него — как у обычного трехмерного кирпича: ширина вдвое меньше длины, а высота еще вдвое меньше.

Доказательство компактности гильбертова кирпича можно прочесть в книге Колмогорова и Фомина (1968, гл. II, § 7, пп. 1, 2).

Следующий пункт нашего доказательства. Известно, что для любой конечной меры на (R^n, \mathcal{B}^n) внутри любого борелевского множества можно выбрать компактное множество сколь угодно близкой к нему меры. Примерим это к мере $\mu_{t_1 \dots t_n}$ и множеству A_n ; получим, что существует компакт $K_n \subseteq A_n$ такой, что из $\mu_{t_1 \dots t_n}(A_n \setminus K_n) < \epsilon/2^n$. Введем обозначение:

$$D_n = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in K_n\};$$

из определения K_n вытекает, что $D_n \subseteq C_n$. Множества D_n — компактные подмножества гильбертова кирпича (потому что D_n гомеоморфно произведению компакта K_n на гильбертов кирпич). Изменим немного множества D_n так, чтобы получить невозрастающую последовательность множеств с тем же пересечением:

$$D'_n = D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_n.$$

Это — также последовательность компактных подмножеств гильбертова кирпича.

Докажем, что $\mu(D'_n) > 0$. Имеем:

$$\mu(D'_n) = \mu(C_n) - \mu(C_n \setminus D'_n) =$$

$$= \mu(C_n) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (C_n \setminus D_i)\right) > \epsilon - \sum_{i=1}^n \mu(C_n \setminus D_i).$$

Из того, что C_n образуют невозрастающую последовательность, вытекает, что i -е слагаемое в последней сумме не превосходит $\mu(C_i \setminus D_i) = \mu_{t_1 \dots t_i}(A_i \setminus K_i) < \epsilon/2^i$. Отсюда получаем $\mu(D'_n) > \epsilon - \epsilon/2 - \dots - \epsilon/2^n > 0$.

Раз $\mu(D'_n) > 0$ при всех n , то компакты D'_n непусты. Невозрастающая последовательность непустых компактов имеет непустое пересечение, откуда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} D'_n \neq \emptyset,$$

что находится в противоречии с предположенной нами пустотой пересечения C_n . Это доказывает счетную аддитивность μ .

Теперь возвращаемся от пространства $[0, 1]^{t_1, \dots, t_n, \dots}$ к пространству $[0, 1]^T$. Продолжая меру μ на σ -алгебру $\mathcal{B}_{[0, 1]}^T$, получаем искомое вероятностное пространство и случайную функцию.

Теорема доказана.

5. Мы сформулировали и доказали теорему Колмогорова для случайных функций, принимающих значения в $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$; однако ясно, что она будет справедлива и для широкого класса более общих измеримых пространств (X, \mathcal{X}) . Прежде всего, это будет, если измеримое пространство (X, \mathcal{X}) изоморфно измеримому пространству $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$, т. е. если между X и $[0, 1]$ можно установить взаимно однозначное и измеримое в обе стороны соответствие.

Изоморфны отрезку с σ -алгеброй его борелевских подмножеств измеримые пространства (R^1, \mathcal{B}^1) и любое из (R^n, \mathcal{B}^n) . Чтобы установить этот изоморфизм, нужно взять доказательство равнomoщности $[0, 1]$ и R^1 (или R^n) и проверить, что то взаимно однозначное соответствие, которое при этом строится, в обе стороны измеримо. Проверка разбивается на ряд отдельных ступеней, например, такие: равнomoщность (и изоморфность как измеримых пространств) $[0, 1]$ и $[0, 1]$; далее $[0, 1]$ и $[0, 1]^n$; $[0, 1]^n$ и R^n .

Вспомним, например, как устанавливается равнomoщность полуинтервала $[0, 1]$ и квадрата $[0, 1]^2$. Любая точка $x \in [0, 1]$ записывается в виде бесконечной двоичной дроби, например $x = 0,01110010110\dots$. Однозначность записи обеспечивает, если рассматривать только записи с бесконечным числом нулей (из двух двоичных записей: $0,01000\dots = 1/4$ и $0,00111\dots = 1/8 + 1/16 + \dots = 1/4$ — использовать только первую). Двоичная запись, далее, разбивается на «грани», содержащие один нуль, причем в конце: $x = 0, \underline{0} \ 1110 \ 0 \ 10 \ 110 \dots$; и из всех граней

$\overline{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5}$

с нечетными номерами образуется двоичное число $y_1 = 0, \underline{0} \ 0 \ 110 \dots$, а из граней с четными номерами — число

$\overline{1 \ 3 \ 5}$

$y_2 = 0, \underline{1110} \ 10 \dots$ Легко видеть, что построенное таким обра-

зом соответствие между $x \in [0, 1]$ и $y = (y_1, y_2) \in [0, 1]^2$ будет взаимно однозначным. Но оно будет также и измеримым относительно соответствующих борелевских σ -алгебр. Это вытекает из того, что любая k -я грань в двоичной записи числа y_1 или y_2 принимает то или иное значение из множества $\{0; 10; 110; \dots\}$ на множестве точек x , составленном из конечного или счетного числа полуинтервалов (а любая грань числа x принимает то или иное значение для точек y из конечного или счетного числа прямоугольников).

Изоморфен измеримому пространству $([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ и гильбертов кирпич с соответствующей σ -алгеброй.

Далее, теорема Колмогорова остается верной и для измеримых пространств, изоморфных не всему отрезку $[0, 1]$ с σ -алгеброй его борелевских подмножеств, а какому-либо борелевскому подмножеству отрезка с σ -алгеброй его борелевских подмножеств. Достаточно проверить это для самих борелевских подмножеств $[0, 1]$ (а не их изоморфных образов).

Пусть X — непустое борелевское подмножество отрезка $[0, 1]$, \mathcal{B}_X — σ -алгебра борелевских подмножеств X . Пусть при всех n на (X^n, \mathcal{B}_X^n) определены согласованные друг с другом вероятностные меры $\mu_{t_1 \dots t_n}$. Эти меры естественным образом продолжаются на $([0, 1]^n, \mathcal{B}_{[0, 1]}^n)$, если положить меру той части $[0, 1]^n$, которая не попадает в X^n , равной нулю. Запись этого в виде формулы: продолжаем меру $\mu_{t_1 \dots t_n}$ на σ -алгебру $\mathcal{B}_{[0, 1]}^n$, полагая для множества A из этой σ -алгебры $\mu_{t_1 \dots t_n}(A) = \mu_{t_1 \dots t_n}(A \cap X^n)$. Легко проверяется, что и продолженные меры тоже согласованы друг с другом. Значит, существует случайная функция ξ_t , $t \in T$, со значениями в $[0, 1]$ и с конечномерными распределениями $\mu_{t_1 \dots t_n}$. Чтобы получить случайную функцию со значениями в X , берем произвольный элемент $x_0 \in X$ и полагаем

$$\tilde{\xi}_t = \begin{cases} \xi_t, & \text{если } \xi_t \in X; \\ x_0, & \text{если } \xi_t \notin X. \end{cases}$$

Эта случайная функция уже принимает значения только из X . Она имеет те же самые конечномерные распределения, так как стохастически эквивалентна ξ_t : для любого $t \in T$

$$\mathbf{P}\{\tilde{\xi}_t \neq \xi_t\} = \mathbf{P}\{\xi_t \notin X\} = \mu_t([0, 1] \setminus X) = 0.$$

В связи с этим вводится следующее определение. Измеримое пространство (X, \mathcal{X}) называется *борелевским*, если оно изоморфно какому-нибудь борелевскому подмножеству отрезка $[0, 1]$ с σ -алгеброй его борелевских подмножеств.

Пользуясь этим понятием, сформулируем теорему Колмогорова в том виде, в каком мы ее будем использовать:

Пусть (X, \mathcal{X}) — борелевское измеримое пространство; пусть каждому конечному набору не совпадающих друг с другом элементов t_1, \dots, t_n множества T поставлена в соответствие вероятностная мера $\mu_{t_1 \dots t_n}$ на (X^n, \mathcal{X}^n) . Для того чтобы эти меры составляли систему конечномерных распределений какой-либо случайной функции, необходимо и достаточно согласованности системы этих мер.

Широкую применимость теоремы Колмогорова в этой формулировке обеспечивает следующая

Микротеорема. Любое борелевское подмножество любого полного сепарабельного метрического пространства (а не только отрезка $[0, 1]$) с σ -алгеброй его борелевских подмножеств является борелевским пространством.

Доказательство читатель может найти в книге К. Куратовского «Топология» (М.: Мир. — 1966. — Т. I), а может провести самостоятельно, погрузив метрическое пространство в гильбертов кирпич.

Что же касается множества T , то специально отметим, что оно может быть *совершенно* любым.

Вопрос о том, как по системе конечномерных распределений указать, имеется ли случайная функция с данными конечномерными распределениями, реализаций которой принадлежат некоторому $X \subset X^T$, будет рассматриваться в следующем параграфе.

6. Приведем примеры применения теоремы Колмогорова.

а) Мы можем доказать существование последовательности независимых случайных величин с данными распределениями $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ — объекта изучения, привлекающего столь большое внимание. Полагаем $\mu_{i_1 i_2 \dots i_n} = \mu_{i_1} \times \mu_{i_2} \times \dots \times \mu_{i_n}$ ($i_j \neq i_k$ при $j \neq k$). Согласованность этих распределений следует из того, что для конечного числа случайных величин все в порядке.

Более того, нам совершенно безразлично, счетно или нет множество T , на котором мы собираемся определить нашу случайную функцию; т. е. если для любого $t \in T$ задано распределение μ_t ; то существует случайная функция с независимыми значениями, имеющая μ_t в качестве одномерных распределений. (Плохие свойства такой случайной функции составляли предмет задачи 4 § 2.1.)

б) Для любой действительной функции $m(t)$ на T и любой действительной неотрицательно определенной функции $K(t, s)$ на $T \times T$ (т. е. $\sum_{j, k} c_j \bar{c}_k K(t_j, t_k) \geq 0$ для любых $t_j \in T$ и комплексных c_j ; это равносильно $K(t, s) \equiv K(s, t)$) и выполнению условия неотрицательной определенности для всех действительных c_j) существует действительная гауссовская случайная функция ξ_t с $m(t) = \mathbf{M}\xi_t$ и $K(t, s)$ в качестве корреляционной функции.

Здесь в качестве $\mu_{t_1 \dots t_n}$ берем n -мерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $(m(t_1), \dots, m(t_n))$ и матрицей ковариаций $(K(t_j, t_k), j, k = 1, \dots, n)$; для существования такого распределения достаточно неотрицательной определенности матрицы.

Согласованность распределений вытекает из того, что нормальное распределение однозначно определяется математическим ожиданием и матрицей ковариаций, и того, что распределение любого подвектора нормального вектора снова нормально.

В частности, теперь мы можем установить существование винеровского процесса. Действительно, гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s) = t \wedge s$ — винеровский процесс, так что достаточно проверить неотрицательную определенность этой функции. Можно не проверять этого непосредственно, а воспользоваться тем, что $t \wedge s$ является корреляционной функцией пуассоновского процесса (при $a = 1$).

Конечно, имеется еще тысяча путей доказательства того же: например, можно прямо проверить согласованность выписанных в п. 5 § 1.2 распределений или воспользоваться результатом задачи 4* § 3.1 в применении к счетной последовательности независимых нормальных $(0, 1)$ случайных величин.

Далее, возвращаясь к задаче 7 § 1.2, мы видим, что существует гауссовский процесс $Z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, конечномерные распределения которого являются предельными для $\sqrt{n}Y_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$, — это процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s) = t \wedge s - ts$.

в) Задача 2*. Докажите существование процесса Коши (определение см. в п. 4 § 1.2).

§ 5.2. Свойства с вероятностью 1

1. Займемся свойствами выборочных функций, выполненными с вероятностью 1. Пусть имеется случайная функция ξ_t , $t \in T$, относительно реализаций которой ничего не известно (кроме того, что они принадлежат X^T). Для каких множеств $X \subset X^T$ можно утверждать, что $P\{\xi_t \in X\} = 1$? Мы видели, что для многих представляющих интерес множеств X эту вероятность нельзя найти, зная конечномерные распределения. Как мы уже говорили в п. 2а₂) § 1.3, в случае несчетного T лишь редко задача о свойствах с вероятностью 1 может быть решена в такой формулировке:

По данным конечномерным распределениям указать, равна вероятность того, что выборочная функция принадлежит X , единице или нет.

Здесь естественные постановки задач такие:

а) *По данным конечномерным распределениям указать, существует ли случайный процесс с такими распределениями, для которого $P\{\xi_t \in X\} = 1$.*

а) *По данным конечномерным распределениям процесса ξ_t указать, существует ли процесс $\tilde{\xi}_t$, стохастически эквивалентный ему (т. е. $P\{\tilde{\xi}_t = \xi_t\} = 1$ для всех $t \in T$) и такой, что $P\{\tilde{\xi}_t \in X\} = 1$.*

в) *Пусть почти все выборочные функции процесса ξ_t с данными конечномерными распределениями обладают некоторым свойством: $P\{\xi_t \in X\} = 1$. Указать, будут ли почти все выборочные функции обладать некоторым более сильным свойством, т. е. будет ли $P\{\xi_t \in Y\} = 1$, где $Y \subset X$.*

Разумеется, эти постановки задачи связаны друг с другом. Так, если б) решается положительно, то так же будет и с а), потому что стохастически эквивалентные процессы имеют одни и те же конечномерные распределения.

2. Относительно задачи в постановке а) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Для положительного ответа на вопрос а) необходимо и достаточно, чтобы внешняя мера рассматриваемого множества $X \subset X^T$, соответствующая мере μ_{ξ_t} :

$$\mu_{\xi_t}^*(X) = \inf \{\mu_{\xi_t}(A): A \supseteq X, A \in \mathcal{X}^T\},$$

была равна единице. При этом всегда существует случайная функция с данными конечномерными рас-

пределениями, у которой все реализации принадлежат X .

Что касается *необходимости*, то здесь нечего доказывать; докажем достаточность.

Пусть $\mu_{\xi}^*(X) = 1$. Возьмем в качестве пространства элементарных событий множество X , в качестве основной σ -алгебры \mathcal{F} совокупность всех подмножеств X , представимых в виде $X \cap B$, $B \in \mathcal{X}^T$ (проверить, что это — σ -алгебра!); случайный процесс определим так: $\xi_t(x.) = x_t$, $x. \in X$. Остается определить вероятность P . Если $A \in \mathcal{F}$ представляется в виде $X \cap B$, $B \in \mathcal{X}^T$, положим $P(A) = \mu_{\xi}(B)$.

Нужно проверить *корректность* этого определения. Пусть $A = X \cap B_1 = X \cap B_2$, $B_1, B_2 \in \mathcal{X}^T$. Тогда $X \cap (B_1 \Delta B_2)$ (Δ обозначает симметрическую разность множеств) — пустое множество, т. е. $X \subseteq X^T \setminus (B_1 \Delta B_2)$. Но тогда в силу сделанного предположения $\mu_{\xi}(X^T \setminus (B_1 \Delta B_2)) = 1$, т. е. $\mu_{\xi}(B_1 \Delta B_2) = 0$, откуда $\mu_{\xi}(B_1) = \mu_{\xi}(B_2)$.

После того как корректность определения доказана, счетная аддитивность P доказывается совсем просто; P — *вероятностная* мера, потому что $P(X) = \mu_{\xi}(X^T) = 1$. Наконец, конечномерные распределения построенного случайного процесса — те, что были даны заранее, т. е. соответствующие распределению μ_{ξ} .

$$\begin{aligned} P\{x. \in X: (\xi_{t_1}(x.), \dots, \xi_{t_n}(x.)) \in A\} &= \\ = P(X \cap \{x. \in X^T: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}) &= \\ = \mu_{\xi}\{x.: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\} &= \mu_{t_1 \dots t_n}(A). \end{aligned}$$

3. В силу доказанной теоремы задача о свойствах с вероятностью 1 в постановке а) в принципе разрешима, потому что распределение процесса полностью определяется конечномерными распределениями. Однако значительно больший интерес представляют критерии, позволяющие установить существование процесса с заданными свойствами реализаций по конечномерным распределениям не выше определенного порядка k . В конкретных случаях очень часто бывает удобнее не рассматривать внешние меры, а решать задачу в постановке б).

Начнем с одной микротеоремы, чтобы показать, какого рода здесь могут быть результаты и как они могут доказываться.

Микротеорема. Пусть ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$, — случайный процесс, для которого $P\{\xi_s \leq \xi_t\} = 1$ при $s \leq t$. Тогда существует стохастически эквивалентный ему процесс $\tilde{\xi}_t$, почти все траектории которого — монотонно неубывающие функции.

Доказательство. Прежде всего, в каждой точке $t \in T$, предельной для T слева (справа), существует $\lim_{s \rightarrow t^-} (\mathbf{P}) \xi_s$ ($\lim_{s \rightarrow t^+} (\mathbf{P}) \xi_s$). Действительно, если $t_1 > t_2 > \dots > t_n > \dots$, $t_n \in T$, $t_n \downarrow t$, то последовательность ξ_{t_n} сходится с вероятностью 1, так как она почти наверное монотонно убывает и ограничена снизу ξ_t . Обозначим предел этой последовательности ξ_{t+} . Для достаточно близких к t справа точек s

$$P\{\xi_{t+} \leq \xi_s < \xi_{t+} + \epsilon\} \geq P\{\xi_{t+} \leq \xi_{t_n} < \xi_{t+} + \epsilon\},$$

где n может быть сделано сколь угодно большим, и, значит, эта вероятность стремится к единице при всяком положительном ϵ .

Задача 1. Для всех точек $t \in T$, за исключением, быть может, счетного множества, $P\{\xi_{t-} = \xi_t = \xi_{t+}\} = 1$, т. е. скачков не более чем счетное число. Доказать.

Далее, рассмотрим счетное множество $T_0 \subseteq T$, всюду плотное в T и, кроме того, содержащее все точки, где ξ_t не является стохастически непрерывным. Так как множество T_0 счетно, то

$$P\{\xi_s \leq \xi_t \text{ для всех } s \leq t, s, t \in T_0\} = 1.$$

Теперь, чтобы получить процесс $\tilde{\xi}_t$, продолжим почти все траектории ξ_t по непрерывности с T_0 на $T \setminus T_0$. А именно, для точек $t \in T \setminus T_0$, являющихся предельными справа для T_0 : $t_n \downarrow t$, $t_n \in T_0$, положим $\tilde{\xi}_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{t_n}$, причем, если конечный предел не существует, положим $\tilde{\xi}_t = 0$; если же t не является точкой, предельной справа для T_0 , то она будет предельной слева (изолированные точки включаются в T_0 — иначе T_0 не будет всюду плотно в T), и применяется аналогичная конструкция с $t_n \uparrow t$. Для $t \in T_0$ полагаем $\tilde{\xi}_t = \xi_t$.

Легко понять, что с вероятностью 1 траектории процесса $\tilde{\xi}_t$ не убывают по t .

Остается доказать, что $P\{\tilde{\xi}_t = \xi_t\} = 1$ для любого $t \in T$. Для $t \in T_0$ это выполнено тривиальным образом. Пусть $t \notin T_0$; рассмотрим ту самую последовательность $t_n \rightarrow t$, которая использовалась при определении $\tilde{\xi}_t$. С вероятностью 1 $\tilde{\xi}_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_{t_n}$ равно ξ_{t+} или ξ_{t-} , а эти величины с вероятностью 1 равны ξ_t .

4. Проследим структуру доказательства микротеоремы п. 3; она будет такой же для многих других доказательств.

Выбирается счетное множество T_0 , всюду плотное в T . Это множество выбирается не совсем произвольным образом; в частности, выбор T_0 осуществляется так, чтобы процесс был стохастически непрерывен в точках $T \setminus T_0$. Затем проверяем, что процесс ξ_t на T_0 с вероятностью 1 обладает свойством, обеспечивающим возможность такого его продолжения на T_0 , для которого выполняется данное свойство (принадлежность реализаций данному $X \subset X^T$). Далее выбираем операцию (обычно *пределную* операцию), которая осуществляет такое продолжение (в случае микротеоремы п. 3 для точек $t \in T \setminus T_0$, предельных для T_0 справа, — предел по последовательности $t_n \downarrow t$; для остальных — предел по последовательности $t_n \uparrow t$). При этом нужно позаботиться о том, чтобы эта операция приводила к определенному результату не только с вероятностью 1 в применении к выборочной функции ξ_t , но и всегда, — иначе случайные величины ξ_t , которые мы хотим определить, окажутся заданными не на всем пространстве Ω , а только на почти всем (в случае нашей микротеоремы, если конечный предел не существовал, мы брали вместо него нуль). Обозначаем результат применения этой операции $\tilde{\xi}_t$ ($t \in T \setminus T_0$); доказываем \mathcal{F} -измеримость $\tilde{\xi}_t$. Для $t \in T_0$ полагаем $\tilde{\xi}_t = \xi_t$. Итак, процесс, почти все траектории которого обладают свойством X , уже получен; остается доказать, что он стохастически эквивалентен первоначальному: $P\{\tilde{\xi}_t = \xi_t\} = 1$ для любого $t \in T$. Для $t \in T_0$ доказывать нечего; для $t \in T \setminus T_0$ используются стохастическая непрерывность процесса ξ_t и совпадение (почти наверное) пределов по вероятности и с вероятностью 1.

5. Теорема 2 (теорема Колмогорова). Пусть ξ_t , $t \in [a, b]$, — случайный процесс, принимающий числовые значения. Пусть существуют константы $C > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 1$ такие, что для всех $s, t \in [a, b]$

$$\mathbf{M}|\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}. \quad (1)$$

Тогда существует стохастически эквивалентный $\tilde{\xi}_t$ случайный процесс, все реализации которого непрерывны по t .

Доказательство. Прежде всего, из (1) следует стохастическая непрерывность ξ_t .

Идея построения непрерывной модификации $\tilde{\xi}_t$ процесса ξ_t состоит в следующем. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ подмножество T_0 , состоящее из точек вида $k/2^n$, k и n — целые, $n \geq 0$. Мы будем продолжать функцию $\xi_t(\omega)$, $t \in T_0$, по непрерывности на весь отрезок $[a, b]$.

Для того чтобы $\xi_t(\omega)$, $t \in T_0$, можно было продолжить по непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы эта выборочная функция была равномерно непрерывна на T_0 . Поэтому оценим $\sup_{\substack{s, t \in T_0 \\ |s-t| \leq h}} |\xi_t - \xi_s|$.

Для $s, t \in T_0$, $0 < |s - t| \leq 1$, положим $n_0 = [-\log_2 |s - t|]$. Сейчас мы докажем, что если знаменатели двоично-рациональных чисел s и t не превосходят 2^m ($m \geq n_0$), то

$$|\xi_t - \xi_s| \leq 2 \sum_{n=n_0}^m \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|. \quad (2)$$

Докажем это по индукции. При $m = n_0$, раз $|s - t| \leq 2^{-n_0}$, либо s и t совпадают, либо это — соседние точки $k/2^n$, $(k+1)/2^n$; неравенство (2) выполняется, причем даже с множителем 1 вместо 2. Предположим, что для значений m , меньших n_0 , (2) доказано; докажем эту формулу для n_0 . Обозначим через s' ближайшее справа к s двоично-рациональное число со знаменателем, меньшим 2^{m_0} ($s' = s$, если знаменатель s после сокращения меньше 2^{m_0} , и $s' = s + 1/2^{m_0}$, если он равен 2^{m_0}). Аналогично определим t' — ближайшее к t слева двоично-рациональное число со знаменателем, меньшим 2^{m_0} . Имеем $s' \leq t'$, $|s' - t'| \leq |s - t| \leq 1/2^{-n_0}$; пользуясь неравенством (2) с $m =$

$= m_0 - 1$ для s' и t' и неравенством $|\xi_t - \xi_s| \leq |\xi_{t'} - \xi_{s'}| + |\xi_{s'} - \xi_s| + |\xi_t - \xi_{t'}|$, получаем (2) для s и t .

Итак, $\sup_{\substack{s, t \in T_0 \\ |s-t| \leq h}} |\xi_t - \xi_s|$ не превосходит остатка ряда

$$A(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|, \quad (3)$$

начиная с члена с номером $n_0 = [-\log_2 h]$. Докажем, что этот ряд с вероятностью 1 сходится (тогда остаток ряда с вероятностью 1 стремится к нулю и реализация равномерно непрерывна на множестве T_0).

Для этого вычислим математическое ожидание A . Воспользуемся неравенством $M\xi \leq (M\xi^a)^{1/a}$, справедливым для любого $a > 1$ и любой неотрицательной случайной величины ξ :

$$\begin{aligned} M A &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} M \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}| \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[M \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a \right]^{1/a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользуемся тем, что максимум какого-то числа неотрицательных чисел не превосходит их суммы; получим:

$$\begin{aligned} M \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a &\leq \\ &\leq \sum_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} M |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a. \end{aligned}$$

Число слагаемых здесь не превосходит $(b-a)/2^{-n} = 2^n(b-a)$, а каждое слагаемое не больше $C(2^{-n})^{1+\varepsilon}$; из (4) получаем

$$M A \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} [2^n(b-a)C(2^{-n})^{1+\varepsilon}]^{1/a} = 2 \frac{C^{1/a}(b-a)^{1/a}}{1-2^{-\varepsilon/a}} < \infty.$$

Теперь определим $\tilde{\xi}_t(\omega)$ как $\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in T_0}} \xi_s(\omega)$, если $A(\omega) < \infty$, и $\tilde{\xi}_t(\omega) = 0$, если $A(\omega) = \infty$.

Нетрудно проверить, что определенное выше $\tilde{\xi}_t$ при каждом t измеримо относительно нашей основной σ -алгебры. Остается доказать, что $P\{\tilde{\xi}_t = \xi_t\} = 1$. Для двоично-рациональных t это так, потому что $\tilde{\xi}_t$ просто с вероятностью 1 совпадает с ξ_t . Для остальных t имеем с вероятностью 1

$$\tilde{\xi}_t = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in T_0}} \xi_s = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in T_0}} (P) \xi_s = \xi_t$$

в силу стохастической непрерывности процесса ξ_t .

Теорема доказана.

6. Замечание 1. Если ξ_t — случайный процесс, определенный на неограниченном промежутке времени, то для существования эквивалентного ему процесса с непрерывными траекториями достаточно, чтобы (1) было выполнено для $|t - s| \leq h$, где h — положительная константа. Действительно, неограниченный промежуток можно разбить на счетное число отрезков длины не более h и на каждом из них определять $\tilde{\xi}_t$ отдельно; при этом вероятность того, что выборочная функция $\tilde{\xi}_t$ будет всюду непрерывна, равна вероятности пересечения счетного числа событий вероятности 1, а значит, и сама равна 1.

В частности, отметим следующее.

а) Любой стационарный в широком смысле процесс имеет модификацию с непрерывными траекториями, если только он дифференцируем в среднем квадратическом; здесь в качестве α можно взять 2:

$$M|\xi_t - \xi_s|^2 = 2 \operatorname{Re}(K(0) - K(t - s)) = O((t - s)^2);$$

если процесс дважды дифференцируем в среднем квадратическом, то его траектории можно считать один раз непрерывно дифференцируемыми и т. д.

б) Теперь мы можем, наконец, доказать существование винеровского процесса. Мы уже построили процесс с независимыми приращениями w_t , $t \geq 0$, $w_0 = x_0$, такой, что его приращения $w_t - w_s$ имеют нормальное распределение с параметрами $(0, t - s)$. К нему можно применить теорему Колмогорова, взяв $\alpha = 4$: $M(w_t - w_s)^4 = 3(t - s)^2$.

Замечание 2. Условия $M|\xi_t - \xi_s|^\alpha \leq C|t - s|$ недостаточно для существования непрерывной модификации, как показывает пример пуассоновского про-

цесса (его реализации нельзя сделать непрерывными с сохранением тех же конечномерных распределений).

Замечание 3. Теорема Колмогорова справедлива не только для процессов с числовыми значениями, но и для процессов, принимающих значения в произвольном полном метрическом пространстве. Теорема также обобщается на случайные поля в R^m ; в этом случае вместо (1) нужно требовать, чтобы момент приращения не превосходил $C|t-s|^{m+\epsilon}$, потому что число пар соседних двоично-рациональных точек со знаменателями 2^n , а значит, и слагаемых в соответствующей сумме, заменяющей максимум, будет порядка $(2^n)^m$.

Задача 2. Докажите, что существует гауссовский процесс $Z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s) = t \wedge s - ts$ с непрерывными реализациями.

7. Теорему Колмогорова можно уточнить: из ее условий вытекает не просто существование непрерывной модификации $\tilde{\xi}_t$, но и то, что эта модификация удовлетворяет условию Гёльдера.

Теорема 3. При выполнении условий теоремы Колмогорова для любого β , $0 < \beta < \epsilon/\alpha$, при всех $s, t \in [a, b]$, $|s-t| \leq 1$

$$|\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_s| \leq C(\alpha, \beta) B^{1/\alpha} |t-s|^\beta, \quad (5)$$

где $C(\alpha, \beta)$ — число, зависящее от α и β , а $B = B(\omega)$ — случайная величина, с вероятностью 1 конечная и такая, что

$$\mathbf{M}B \leq \frac{C(b-a)}{1-2^{-\epsilon+\alpha\beta}}.$$

Доказательство. Достаточно установить (5) для двоично-рациональных s, t . Воспользуемся оценкой (2) и неравенством Гёльдера: для любых $a_n \geq 0$, $b_n > 0$

$$\sum_{n \in A} a_n = \sum_{n \in A} (a_n b_n) b_n^{-1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n \in A} (a_n b_n)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{n \in A} (b_n^{-1})^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

В качестве b_n берем $2^{\beta n}$; получаем:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_s| &= |\xi_t - \xi_s| \leq \\
 &\leq 2 \sum_{n=-\lceil -\log_2 |s-t| \rceil}^{\infty} \max_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}| \leq \\
 &\leq 2 \left(\sum_{n=-\lceil -\log_2 |s-t| \rceil}^{\infty} \max |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a \cdot 2^{na\beta} \right)^{1/a} \times \\
 &\quad \times \left(\sum_{n=-\lceil -\log_2 |s-t| \rceil}^{\infty} 2^{-n\beta \frac{a}{a-1}} \right)^{\frac{a-1}{a}} \leq \\
 &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \max |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a \cdot 2^{na\beta} \right)^{1/a} \times \\
 &\quad \times 2 \left(\frac{2^{-\beta \frac{a}{a-1} (-\lceil -\log_2 |s-t| \rceil)}}{1 - 2^{-\beta \frac{a}{a-1}}} \right)^{\frac{a-1}{a}}.
 \end{aligned}$$

Сумма от 0 до ∞ со случайными величинами — это и есть случайная величина $B = B(\omega)$; так как $[-\log_2 |s-t|]$ лежит между $-\log_2 |s-t| - 1$ и $-\log_2 |s-t|$, то множитель при $B^{1/\alpha}$ не превосходит

$$2 \left(\frac{2^{-\beta \frac{a}{a-1} (-\log_2 |s-t| - 1)}}{1 - 2^{-\beta \frac{a}{a-1}}} \right)^{\frac{a-1}{a}} = \frac{2^{1+\beta}}{\left(1 - 2^{-\beta \frac{a}{a-1}} \right)^{\frac{a-1}{a}}} |s-t|^{\beta}.$$

Множитель при $|s-t|^\beta$ есть $C(\alpha, \beta)$.

Что же касается случайной величины B , то мы оцениваем $\mathbf{M}B$ так же, как $\mathbf{M}A$ при доказательстве теоремы 2:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}B &= \mathbf{M} \sum_{n=0}^{\infty} \max |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}|^a \cdot 2^{na\beta} \leq \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M} \sum_{a \leq k/2^n < (k+1)/2^n \leq b} |\xi_{(k+1)/2^n} - \xi_{k/2^n}| \cdot 2^{na\beta} \leq \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (b-a) C \cdot 2^{-n(1+\varepsilon)} \cdot 2^{na\beta} = \frac{C(b-a)}{1 - 2^{-\varepsilon+a\beta}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача 3*. Установите, при каких β винеровский процесс w_t , $0 \leq t \leq 1$, удовлетворяет условию Гельдера с показателем β .

8. В некоторых случаях задачу о том, существует ли случайный процесс с данными конечномерными распределениями, почти все реализации которого принадлежат данному подмножеству $Y \subset X^T$, удобно разбить на две: первую — о том, существует ли процесс с данными конечномерными распределениями, почти все реализации которого принадлежат некоторому более широкому подмножеству $X \subset X^T$, и вторую — задачу в постановке в) п. 1. (Это выгодно, если полученные задачи оказываются проще первоначальной.) Скажем несколько слов о решении задачи о свойствах с вероятностью 1 в постановке в).

Она может решаться для X и $Y \notin \mathcal{X}^T$ из-за того, что Y представляется в виде $Y = X \cap B$, $B \in \mathcal{X}^T$, $\mu_{\xi_t}(B) = 1$. В этом случае $P\{\xi_t \notin Y\} = P(\{\xi_t \notin X\} \cup \{\xi_t \in B\}) \leq P\{\xi_t \notin X\} + P\{\xi_t \in B\} = 0$.

9. Сепарабельность. Свойству *сепарабельности* уделяется большое внимание во многих книгах по теории случайных процессов. Его можно рассматривать как очень слабое требование регулярности реализаций — настолько слабое, что у каждого процесса существует сепарабельная модификация; и можно доказывать результаты такого рода: если процесс сепарабелен, а его конечномерные распределения удовлетворяют таким-то требованиям, то почти все выборочные функции обладают такими-то свойствами (результаты в постановке в) п. 1).

Случайный процесс ξ_t , $t \in T$, называется *сепарабельным*, если в T существует подмножество T_0 такое, что с вероятностью 1 для всех $t \in T \setminus T_0$ $\xi_t(\omega)$ принадлежит множеству частичных

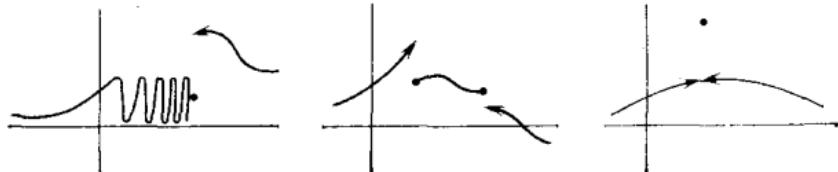


Рис. 12

пределов $\xi_s(\omega)$ при $s \rightarrow t$, $s \in T_0$. Иначе говоря, почти все реализации должны обладать следующим свойством: график $\xi_t(\omega)$, $t \in T$, содержится в замыкании графика $\xi_s(\omega)$, $s \in T_0$ (этим свойством обладают, например, функции на рис. 12 слева и в середине, но не функция на том же рисунке справа).

Теорема 4. Пусть ξ_t , $t \in T$, — стохастически непрерывный случайный процесс. Тогда существует стохастически эквивалентный ему сепарабельный процесс $\tilde{\xi}_t$, $t \in T$, принимающий значения в расширенной числовой прямой $[-\infty, \infty]$; при этом

в качестве множества сепарабельности T_0 может быть выбрано любое всюду плотное в T счетное подмножество.

Доказательство. Разумеется, для $t \in T_0$ мы оставляем ξ_t , как есть: $\xi_t = \xi_t$. Для $t \in T \setminus T_0$ мы оставляем $\xi_t = \xi_t$, если ξ_t попадает в множество частичных пределов ξ_s при $s \rightarrow t$, $s \in T_0$; если же ξ_t не попадает в это множество, то полагаем $\xi_t = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in T_0}} \xi_s$. При этом нужно доказать три вещи. Во-первых,

что таким образом получится случайный процесс; для этого достаточно доказать измеримость множества $A_t = \{\xi_t \text{ не принадлежит} \xi_s \text{ при } s \rightarrow t, s \in T_0\}$ и измеримость функции $\lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in T_0}} \xi_s$, которая ясна, так как эта функ-

ция равна $\inf_m \sup_{\substack{|s-t| < 1/m \\ s \in T_0}} \xi_s$.

Задача 4. Докажите, что

$$A_t = \bigcup_{\substack{\alpha < \beta \\ \alpha, \beta \text{ рац.}}} \left[\{\alpha < \xi_t < \beta\} \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{|s-t| < 1/m \\ s \in T_0}} \{\xi_s \notin (\alpha, \beta)\} \right].$$

Во-вторых, нужно проверить, что полученный процесс сепарабелен; но это ясно. В-третьих, — что он стохастически эквивалентен первоначальному; для этого достаточно доказать, что

$P(A_t) = 0$. Но это вытекает из того, что $\xi_s \xrightarrow{(P)} \xi_t$ при $s \rightarrow t$, $s \in T_0$, а значит, существует последовательность $t_n \rightarrow t$, $t_n \in T_0$, такая, что $\xi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{t_n}$ почти наверное.

Замечание 1. Если рассматривать только процессы, принимающие числовые значения (без $\pm\infty$), то утверждение теоремы неверно, и по понятным причинам (постройте пример!).

Замечание 2. Разумеется, в качестве T можно взять любое сепарабельное метрическое пространство, а не только часть R^1 ; в качестве пространства X , в котором лежат значения ξ_t , — компакт (вместо интервалов с рациональными концами нужно тогда брать счетную базу открытых множеств).

Замечание 3. Если процесс не стохастически непрерывен, то, оказывается, у него тоже есть сепарабельная модификация, только множество сепарабельности T_0 нельзя выбирать произвольным всюду плотным в T подмножеством (см. Дуб (1956, гл. II, § 2, теорема 2.4)).

Теорему Колмогорова и микротеорему п. 3 можно переформулировать следующим образом: если процесс ξ_t сепарабелен и если выполнено условие (1) (или $P\{\xi_s \leq \xi_t\} = 1$ при $s \leq t$ и т. п.), то почти все реализации процесса непрерывны (мононотонны, ...).

Однако польза от рассмотрения свойства сепарабельности не так уж значительна, потому что, разбивая задачу о свойствах с вероятностью 1 на две, мы получаем одну задачу слишком легкой, а другую ненамного легче первоначальной.

§ 5.3. Абсолютная непрерывность бесконечномерных распределений и плотности

Для единообразия в этом параграфе всюду рассматриваются распределения на (X^T, \mathcal{X}^T) .

Распределения случайных функций — меры на (X^T, \mathcal{X}^T) , и, естественно, имеет смысл говорить об абсолютной непрерывности одного распределения относительно другого, сингулярности и т. п. Помимо теоретической важности, все эти понятия также очень важны для задач математической статистики, связанных со случайными процессами. В этом параграфе материал дается в основном в виде задач — и типа упражнений, и типа микротеорем.

В задачах общего характера всюду приняты следующие обозначения: μ — распределение случайной функции ξ_t , $t \in T$, на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) ; μ' — распределение случайной функции η_t , $t \in T$, на $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ (случайные функции ξ_t и η_t принимают значения в одном и том же измеримом пространстве); $\mu_{t_1 \dots t_n}$ и $\mu'_{t_1 \dots t_n}$ — соответствующие конечномерные распределения.

1. Задача 1. Докажите, что распределения следующих процессов на $T = [0, 1]$ сингулярны относительно друг друга: винеровского процесса w_t , процессов $\xi_t = w_t + 1$ и $\eta_t = 2w_t$.

Указание. Чтобы доказать сингулярность, скажем, μ_ξ , и μ_η , достаточно придумать \mathcal{X}^T -измеримый функционал f такой, что $f(\xi.)$ принимает с вероятностью 1 какое-нибудь одно значение a , а $f(\eta.)$ — с вероятностью 1 значение $b \neq a$. Тогда для множества $C_a = \{x.: f(x.) = a\}$ будет $\mu_\xi(C_a) = 1$, $\mu_\eta(C_a) = 0$, а для его дополнения $\mu_\xi(R^T \setminus C_a) = 0$, $\mu_\eta(R^T \setminus C_a) = 1$.

Если распределение μ' абсолютно непрерывно относительно μ , то существует плотность $h(x.) = \mu'(dx.)/\mu(dx.)$, измеримая относительно \mathcal{X}^T : для любого $C \in \mathcal{X}^T$

$$\mu'(C) = \int_C h(x.) \mu(dx.). \quad (1)$$

В силу известных свойств интеграла Лебега при этом для любой \mathcal{X}^T -измеримой функции f

$$\int_{X^T} f(x.) \mu'(dx.) = \int_{X^T} f(x.) h(x.) \mu(dx.), \quad (2)$$

причем если один из этих интегралов расходится, то и другой тоже. Пользуясь формулой (1) § 5.1, формулы (1) и (2) можно переписать в виде

$$P' \{ \eta_t \in C \} = M \chi_{\{\xi_t \in C\}} \pi, \quad (3)$$

$$M' f(\eta_t) = M f(\xi_t) \pi, \quad (4)$$

где $\pi = h(\xi_t)$, M' — математическое ожидание, соответствующее вероятностной мере P' . Легко видеть, что π — неотрицательная случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_{\xi_t, t \in T}$, с $M\pi = 1$.

Задача 2. Чтобы неотрицательная \mathcal{X}^T -измеримая функция $h(x)$ была плотностью распределения случайной функции η_t , $t \in T$, на пространстве $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ относительно распределения случайной функции ξ_t , $t \in T$, на (Ω, \mathcal{F}, P) , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$P' \{ (\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}) \in A \} = \int_{\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in A\}} \pi(\omega) P(d\omega)$$

для любых $t_1, \dots, t_n \in T$, $A \in \mathcal{X}^n$, где $\pi(\omega) = h(\xi_t(\omega))$.

Задача 3. Для того чтобы распределение μ' было абсолютно непрерывно относительно μ , достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta > 0$ такое, что для любых $t_1, \dots, t_n \in T$, $A \in \mathcal{X}^n$ из $\mu_{t_1 \dots t_n}(A) < \delta$ следует неравенство $\mu'_{t_1 \dots t_n}(A) < \varepsilon$.

Задача 4. Для того чтобы распределения μ и μ' были сингулярны, достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали $t_1, \dots, t_n \in T$, $A \in \mathcal{X}^n$ такие, что

$$\mu_{t_1 \dots t_n}(A) > 1 - \varepsilon, \quad \mu'_{t_1 \dots t_n}(X^n \setminus A) > 1 - \varepsilon.$$

Задача 5. Пусть w_t — винеровский процесс, выходящий из нуля; $\xi_t = w_t + bt$. Докажите, что распределение процесса ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, абсолютно непрерывно относительно распределения w_t , $0 \leq t \leq 1$, с плотностью $\frac{\mu_\xi(dx)}{\mu_{w_t}(dx)} = h(x) = \exp\{bx_1 - b^2/2\}$.

Задача 6*. Докажите, что условия абсолютной непрерывности и сингулярности задач 3, 4 не только достаточны, но и необходимы.

Если при каких-то t_1, \dots, t_n распределение $\mu'_{t_1 \dots t_n}$ не абсолютно непрерывно относительно $\mu_{t_1 \dots t_n}$, то ясно, что бесконечномерное распределение

ние μ' не абсолютно непрерывно относительно μ ; если же все конечномерные распределения $\mu'_{t_1 \dots t_n}$ абсолютно непрерывны относительно $\mu_{t_1 \dots t_n}$, то распределение μ' может быть и абсолютно непрерывно относительно μ , и нет, и даже сингулярно. Случай, когда для всех конечномерных распределений имеет место абсолютная непрерывность, самый интересный. Введем в этом случае обозначение

$$h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mu'_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n)}{\mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n)}. \quad (5)$$

Задача 7. Если при некотором $0 < \alpha < 1$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют $t_1, \dots, t_n \in T$ такие, что

$$\int \dots \int_{X^n} [h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)]^\alpha \mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n) < \varepsilon, \quad (6)$$

то распределения μ и μ' сингулярны по отношению друг к другу.

Задача 8. Пусть ξ_t , $0 \leq t \leq 1$, — процесс Коши (см. п. 4 § 1.2), $\eta_t = \xi_t + ct$, $0 \leq t \leq 1$. Докажите, что при $c \neq 0$ распределения μ_ξ и μ_η сингулярны относительно друг друга.

Подставим в функцию $h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)$ значения x_{t_1}, \dots, x_{t_n} произвольной функции $x \in X^T$. Легко видеть, что при перестановке t_1, \dots, t_n функция $h_{t_1 \dots t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ меняется только на множестве μ -меры 0, и можно выбрать варианты плотности (5), чтобы $h_{t_1 \dots t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ зависело только от x и от множества $S = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$. Обозначим эту функцию h_S :

$$h_S(x) = h_{\{t_1, \dots, t_n\}}(x) = h_{t_1 \dots t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}).$$

Это — плотность распределения μ' относительно μ , но не на всей σ -алгебре \mathcal{X}^T , а только на ее под- σ -алгебре $\mathcal{X}^S(X^T)$, порожденной функционалами x_{t_1}, \dots, x_{t_n} (т. е. состоящей из множеств вида $\{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$, $A \in \mathcal{X}^n$). (Докажите!)

Интеграл в формуле (6) записывается через $h_S(x_*)$ как

$$\int_{X^T} [h_S(x_*)]^\alpha \mu(dx_*).$$

Условие задачи 7 можно переписать также, пользуясь интегралами по Ω вместо интегралов по X^T . Введем для каждого конечного $S = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$ случайную величину

$$\pi_S = h_S(\xi_*) = h_{t_1 \dots t_n}(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}).$$

Интеграл в формуле (6) — не что иное, как $M\pi_S^\alpha$.

2. Теперь займемся вопросом о том, как плотность $h(x_*)$ бесконечномерных распределений находить по плотностям конечномерных — по $h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)$ или $h_S(x_*)$; или, что то же, как находить $\pi = h(\xi_*)$ по введенным выше случайным величинам π_S .

Может оказаться, что, когда берутся конечные множества S , все более плотно заполняющие T , величина π_S сходится к какой-то случайной величине π^* (скажем, сходится по вероятности). Введем соответствующие определения.

Пусть $a(S)$ — числовая функция от конечных подмножеств множества T . По определению число a — предел $a(S)$ при неограниченно возрастающем S (обозначения: $a(S) \rightarrow a$ при $S \uparrow$ или $\lim_{S \uparrow} a(S) = a$), если

для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $S_0 \subseteq T$ такое, что $|a(S) - a| < \varepsilon$ для всех $S, S_0 \subseteq S \subseteq T$. В соответствии с этим определяется сходимость по вероятности: пусть $\xi(S)$ — случайная функция, определенная на конечных подмножествах T ; тогда $\xi = \lim_{S \uparrow} (\mathbf{P}) \xi(S)$, если $\lim_{S \uparrow} \mathbf{P}\{\|\xi(S) - \xi\| \geq \varepsilon\} = 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Итак, предположим, что существует случайная величина

$$\pi^* = \lim_{S \uparrow} (\mathbf{P}) \pi_S.$$

Может показаться, что если такой предел существует, то распределение μ' абсолютно непрерывно относительно μ и совпадает (почти наверное) со случайной величиной π , получаемой подстановкой выбо-

рочной функции ξ . в бесконечномерную плотность. Однако это не обязательно так, хотя бы потому, что $M\pi^*$ может быть не равно 1.

Задача 9. Докажите, что $M\pi^* \leq 1$.

Задача 10. Если распределение μ' абсолютно непрерывно относительно μ , то $M\pi^* = 1$. Докажите.

Задача 11. Докажите: если $M\pi^* = 1$, то распределение μ' абсолютно непрерывно относительно μ , и $\pi^* = \pi = h(\xi)$ (почти наверное), где $h(x) = \frac{\mu'(dx)}{\mu(dx)}$.

Задача 12*. Распределения μ и μ' сингулярны относительно друг друга тогда и только тогда, когда $M\pi^* = 0$ (иначе говоря, когда $\pi^* = 0$ почти наверное).

В § 7.4 мы докажем, что предел случайных величин π_S , связанных с плотностями μ' относительно μ на σ -алгебрах $\mathcal{X}^S(XT)$, существует почти наверное для любой неубывающей последовательности конечных множеств $S_n \subseteq T$. Однако при решении конкретных задач нам не нужно ссыльаться на этот общий факт, потому что существование предела π_S нами так или иначе все равно будет устанавливаться.

Задача 13. Пусть w_t , $t \in [0, 1]$, — винеровский процесс, $\eta_t = w_t - ctw_0$, (c — константа). При каких c имеет место абсолютная непрерывность μ_{η_t} относительно μ_w , и как выражается плотность?

В приведенных до сих пор задачах мы сталкивались только с крайними ситуациями: оба распределения либо абсолютно непрерывны относительно друг друга, либо сингулярны. Это совершенно не обязательно.

Задача 14. Пусть ξ_t , $t \in [0, 1]$, — пуассоновский процесс с параметром $a > 0$; $\eta_t \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. Будут ли определения μ_{ξ_t} , μ_{η_t} абсолютно непрерывны относительно друг друга? Найдите плотность распределения μ_{η_t} относительно μ_{ξ_t} .

Следующая задача важна, в частности, для теории диффузионных процессов. Это целая большая теорема.

Задача 15. Пусть w_t — винеровский процесс на отрезке от 0 до T ($\leq \infty$), $\xi_t = w_t + \varphi_t$. Для того чтобы распределение μ_{ξ_t} было абсолютно непрерывно относительно μ_w , необходимо и достаточно, чтобы функция φ_t была абсолютно непрерывной, $\varphi_0 = 0$

(т. е. $\varphi_t = \int_0^t \dot{\varphi}_s ds$, где точка означает дифференцирование по времени), и чтобы $\int_0^T \dot{\varphi}_t^2 dt < \infty$. При этом

плотность μ_{ξ} относительно μ_{w_0} задается формулой

$$\pi = \frac{d\mu_{\xi}}{d\mu_{w_0}}(w_0) = \exp \left\{ \int_0^T \dot{\phi}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \dot{\phi}_t^2 dt \right\}.$$

Указание. Нужно доказать сначала, что $M\pi = 1$.

Так как $\pi > 0$, то абсолютная непрерывность взаимна. Легко доказать, что если ϕ_t не является абсолютно непрерывной функцией с интегрируемой в квадрате производной или $\phi_0 \neq 0$, то распределения μ_{ξ} и μ_{w_0} сингулярны.

Результат задачи 15 непосредственно и самым естественным образом обобщается на r -мерный винеровский процесс:

$$\pi = \exp \left\{ \sum_{i=1}^r \int_0^T \dot{\phi}_t^i dw_t^i - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^r (\dot{\phi}_t^i)^2 dt \right\}.$$

3. Дадим небольшой кусочек теории не в виде задач.

Пусть распределение μ' случайной функции η_t , $t \in T$, абсолютно непрерывно относительно μ — распределения ξ_t , $t \in T$, причем плотность нам известна. Пусть нам известно μ_{ξ} — распределение случайной величины ξ , получаемой применением к ξ_t некоторого \mathcal{X}^T -измеримого функционала f : $\xi = f(\xi_t)$. Что можно сказать тогда о распределении μ_{τ} случайной величины $\tau = f(\eta_t)$, определенной по случайной функции η_t так же, как ξ по ξ_t ?

Оказывается, распределение μ_{τ} будет абсолютно непрерывно относительно μ_{ξ} ; действительно, из $\mu_{\xi}(A) = 0$, $A \in \mathcal{B}^1$, вытекает $\mu \{x : f(x) \in A\} = 0$, откуда $\mu' \{x : f(x) \in A\} = 0$, т. е. $\mu_{\tau}(A) = 0$. Как выражается $\frac{\mu_{\tau}(dx)}{\mu_{\xi}(dx)}$? Обозначим эту плотность,

которая по теореме Радона — Никодима существует, через $g(x)$. Имеем $P' \{\tau \in A\} = \int_A g(x) \mu_{\xi}(dx)$, или по-другому:

$$P' \{\tau \in A\} = \int_{\{\xi \in A\}} g(\xi) P(d\xi). \quad (7)$$

С другой стороны, в силу (3)

$$P' \{\tau \in A\} = P' \{\eta_t \in f^{-1}(A)\} = \int_{\{\xi \in A\}} \pi P(d\xi). \quad (8)$$

Так как в (7) функция $g(\xi)$ измерима относительно σ -алгебры, порожденной случайной величиной ξ , а интегрирование ведется

по произвольному множеству из этой σ -алгебры, то формулы (7), (8) означают, что $g(\zeta)$ являются одним из вариантов условного математического ожидания $M(\pi | \zeta)$, или, в другой форме записи:

$$g(x) = M\{\pi | \zeta = x\}. \quad (9)$$

Разумеется, эта плотность определяется однозначно лишь с точностью до множества μ_ζ -меры нуль. Чтобы найти ее, достаточно знать совместное распределение случайных величин π и ζ .

Предложим несколько необязательных задач.

Задача 16*. Пусть $\xi_t, t \in T$ — случайная функция на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , π — произвольная неотрицательная случайная величина на этом пространстве, $M\pi = 1$. Положим $P'(B) = M\chi_B \pi, B \in \mathcal{F}$. Докажите, что распределение μ' случайной функции ξ_t на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P')$ абсолютно непрерывно относительно μ — распределения случайной функции ξ_t на пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) .

Известно (см. Ито и Маккин, 1968, задача 1.7.1), что совместное распределение максимума винеровского процесса w_t на отрезке $[0, T]$ и его значения в конце этого отрезка задаются плотностью, которую мы сейчас выпишем. Считаем $w_0 = 0$, положим $\eta = \max_{0 \leq t \leq T} w_t$. Тогда

$$\begin{aligned} p_{w_T, \eta}(a, b) &= \\ &= \begin{cases} (2/\pi T^3)^{1/2} (2b - a) e^{-(2b-a)^2/(2T)}, & \text{если } 0 \leq b, \quad b \geq a; \\ 0, & \text{если } b < 0 \quad \text{или} \quad b < a. \end{cases} \end{aligned}$$

Пользуясь этим и результатами задач 2, 13, в которых устанавливается, что плотность распределения соответствующих процессов относительно распределения винеровского процесса зависит только от значения траектории в последний момент времени, а также формулой (9), решите следующие задачи.

Задача 17*. Найдите распределение случайной величины

$$\max_{0 \leq t \leq T} (w_t + bt),$$

где w_t — винеровский процесс, выходящий из нуля, а b — константа.

Предельным переходом получите распределение $\max_{0 \leq t < \infty} (w_t + bt)$.

Задача 18*. Найдите распределение случайной величины

$$\max_{0 \leq t \leq 1} (w_t - ct w_1),$$

где c — константа, не равная 1. Предельным переходом найдите также это распределение при $c = 1$.

§ 5.4. Слабая сходимость бесконечномерных распределений

1. Напомним определение слабой сходимости мер. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность вероятностных мер в метрическом пространстве X с σ -алгеброй \mathcal{B}_X его борелевских подмножеств; v — вероятностная мера.

Мы говорим, что μ_n слабо сходится к v при $n \rightarrow \infty$, если для любой ограниченной непрерывной функции f на X

$$\int_X f(x) \mu_n(dx) \rightarrow \int_X f(x) v(dx) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Семейство мер $\{\mu\}$ называется *относительно слабо компактным*, если из любой последовательности мер, принадлежащих этому семейству, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к какой-то мере (вообще говоря, не принадлежащей этому семейству). Вопрос об относительной слабой компактности очень важен для установления условий слабой сходимости (вспомним доказательство теоремы о взаимной непрерывности соответствия между распределениями и характеристическими функциями). Условия относительной слабой компактности дает следующая теорема.

Теорема 1 (теорема Прохорова). а) *Достаточным условием относительной слабой компактности семейства вероятностных мер $\{\mu\}$ на метрическом пространстве X является следующее:*

для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subseteq X$ такой, что $\mu(K) > 1 - \varepsilon$ для любой меры μ из нашего семейства.

б) *Если метрическое пространство X — полное и сепарабельное (польское пространство), то это условие и необходимо.*

Доказательство мы приводить не будем (его можно прочесть в различных источниках, в частности в книге Биллингсли (1977)); прокомментируем эту теорему.

Прежде всего, для свойства: для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт K такой, что ... — употребляется термин: *плотность семейства мер* (не очень удачный термин, хотя бы из-за путаницы с терминами *всюду плотность* и *плотность одной меры относительно другой*).

Далее, следует иметь в виду, что обе части теоремы занимают в нашей теории совершенно различное место. Первая часть — более прозаическая, но она постоянно употребляется — когда нам нужно установить компактность того или иного семейства мер. Вторая часть вряд ли когда употребляется, но она имеет чрезвычайно большое принципиальное значение. Она показывает, что нам нужно делать, и в особенности — чего *не нужно* делать: если мы хотим установить относительную компактность семейства мер, нам нужно искать для каждого $\varepsilon > 0$ соответствующий компакт K , и больше ничего; а если не удалось — то нам не следует биться над все более хитрыми методами, которыми мы могли бы установить компактность: это бесполезно.

Доказательство первой части следует тому же пути, что доказательство соответствующей теоремы на прямой; чуть-чуть наметим его. Рассмотрим семейство мер $\{\mu\}$ на компакте K такое, что все значения $\mu(K)$ ограничены какой-то константой. Пространство $C(K)$ непрерывных функций на K с обычной метрикой сепарабельно. Пользуясь этим, при помощи диагонального процесса из любой последовательности $\{\mu_n\}$ мер из нашего семейства выделяем подпоследовательность $\{\mu_{n_i}\}$ такую, что для

любой функции $f \in C(K)$ существует $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_K f d\mu_{n_i}$. Этот пре-

дел — линейный ограниченный функционал на $C(K)$ (причем принимающий неотрицательные значения для $f \geq 0$). Имеет место теорема Рисса, утверждающая, что каждый такой функционал представляется в виде $\int_K f d\nu_K$, где ν_K — некоторая мера на K (см. Халмуш, 1953, § 56). После этого нужно, расширяя компакты K , охватить ту ε -долю мер μ_{n_i} , которая еще остается снаружи.

Второе утверждение теоремы в случае числовой прямой ($X = R^1$) или вообще локально компактного пространства просто; но хорошие бесконечномерные функциональные пространства не локально компактны. Удивительным оказывается то, что достаточно полноты и сепарабельности (а этого-то у хороших функциональных пространств не отнимешь). Не будем касаться доказательства второй части, хотя оно тоже не слишком сложно.

2. Все сказанное, конечно, относится и к мерам в метрических пространствах, состоящих из функций; только функции на них называются функционалами, и формулу (1) записываем в виде

$$\int_X f(x_*) \mu_n(dx_*) \rightarrow \int_X f(x_*) v(dx_*). \quad (1')$$

Однако здесь возникают некоторые сложности, и первая из них — такая: согласно п. 1, нужно рассматривать меры на борелевской σ -алгере \mathcal{B}_X нашего метрического функционального пространства; тогда как в § 5.1 распределения определялись на σ -алгебре $\mathcal{B}^T(X)$. Значит, то, что сказано в п. 1, можно применять к пространствам X , для которых эти σ -алгебры совпадают.

Этим свойством обладает, в частности, пространство $C = C[a, b]$ непрерывных действительных функций на отрезке $[a, b]$ с обычной метрикой. Надо проверить две вещи:

- a) $\mathcal{B}_C \subseteq \mathcal{B}^{[a, b]}(C)$;
- б) $\mathcal{B}^{[a, b]}(C) \subseteq \mathcal{B}_C$

(мы употребляем в обозначении $\mathcal{B}^{[a, b]}(\mathbf{C})$ букву \mathcal{B} потому, что пространство $X = R^1$ рассматривается как снабженное его борелевской σ -алгеброй \mathcal{B}^1).

Чтобы проверить а), достаточно доказать, что все открытые подмножества \mathbf{C} (они порождают \mathcal{B}_c) содержатся в $\mathcal{B}^{[a, b]}(\mathbf{C})$. Но \mathbf{C} — сепарабельное метрическое пространство, значит, любое его открытое подмножество представляется в виде суммы счетного числа сферических окрестностей точек; значит, достаточно установить принадлежность $\mathcal{B}^{[a, b]}(\mathbf{C})$ только множества вида $\{y.: \rho_{[a, b]}(y., x.) < \epsilon\}$ (изображение такой сферы см. рис. 13).

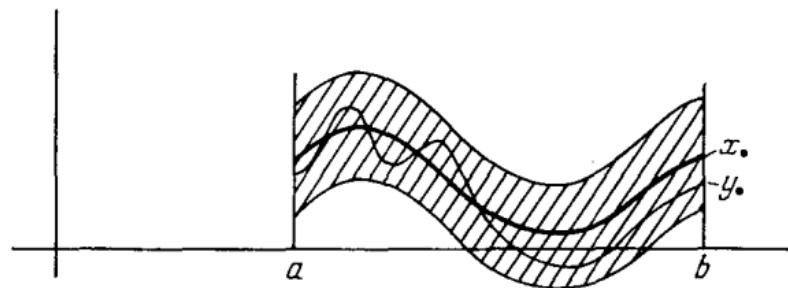


Рис. 13

Задача 1. Проверьте, что

$$\{y. \in \mathbf{C}: \rho_{[a, b]}(y., x.) < \epsilon\} \neq$$

$$\neq \bigcap_{\text{рац. } r \in [a, b]} \{y. \in \mathbf{C}: |y_r - x_r| < \epsilon\};$$

однако

$$\{y. \in \mathbf{C}: \rho_{[a, b]}(y., x.) < \epsilon\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\text{рац. } r \in [a, b]} \{y. \in \mathbf{C}: |y_r - x_r| < \epsilon - 1/n\}.$$

Это доказывает а).

Что касается б), достаточно установить, что для любого $t \in [a, b]$, $\Gamma \in \mathcal{B}^1$ множество $\{x. \in \mathbf{C}: x_t \in \Gamma\} \in \mathcal{B}_c$. Но это вытекает из того, что функционал, ставящий в соответствие функции $x. \in \mathbf{C}$ ее значение x_t в точке t , непрерывен (любая непрерывная функция на метрическом пространстве измерима относительно борелевской σ -алгебры).

3. Вопрос об относительной слабой компактности семейств мер на функциональном пространстве X связывается с условиями компактности подмножеств X . В частности, условие компактности в пространстве \mathbf{C} дается теоремой Арцела; теорема Прохорова показы-

вает, что для того, чтобы установить относительную слабую компактность семейства вероятностных мер на $(\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}})$, нужно для каждого $\epsilon > 0$ загнать все меры из семейства целиком, за исключением ϵ , в одно и то же множество, удовлетворяющее условиям теоремы Арцела.

С учетом этого из теоремы 3 § 5.2 получаем следующую теорему:

Теорема 2. Для того чтобы семейство распределений μ^h в пространстве \mathbf{C} , отвечающих случайным функциям ξ_t^h , $t \in [a, b]$, с непрерывными реализациями, было относительно компактно в смысле слабой сходимости, достаточно, чтобы существовали константы $C > 0$, $\alpha > 1$, $\gamma > 0$ такие, что для любых h, s, t

$$\mathbf{M} |\xi_t^h - \xi_s^h|^\alpha \leq C |t - s|^{1+\gamma},$$

$$\mathbf{M} |\xi_a^h|^\alpha \leq C.$$

Доказательство. Согласно теореме 3 § 5.2, для непрерывной модификации процесса выполняется неравенство:

$$|\tilde{\xi}_t^h - \tilde{\xi}_s^h| \leq C(\alpha, \beta) B_h^{1/\alpha} |t - s|^\beta,$$

где $0 < \beta < \gamma/\alpha$, а B_h — случайная величина, для которой $\mathbf{M} B_h \leq C(b-a)/(1-2^{-\gamma+\alpha\beta})$. В данном случае $\tilde{\xi}_t^h$ совпадает с ξ_t^h , потому что мы предположили процессы уже непрерывными.

Рассмотрим компактное подмножество пространства $\mathbf{C}[a, b]$:

$$K = \left\{ x : |x_a| \leq (2C/\epsilon)^{1/\alpha}, |x_t - x_s| \leq C(\alpha, \beta) \left(\frac{2C(b-a)}{\epsilon(1-2^{-\gamma+\alpha\beta})} \right)^{1/\alpha} |t-s|^\beta \text{ для всех } s, t, |s-t| \leq 1 \right\}$$

(оно компактно в силу теоремы Арцела). Вероятность того, что ξ_a^h не попадет в это множество (т. е. $\mu^h(\mathbf{C} \setminus K)$), не превосходит

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ |\xi_a^h| > \left(\frac{2C}{\epsilon} \right)^{1/\alpha} \right\} + \mathbf{P} \left\{ B_h > \frac{2C(b-a)}{\epsilon(1-2^{-\gamma+\alpha\beta})} \right\} \leq \\ \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему.

Рассмотрим пример. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Устроим при любом положительном h случайную функцию S_t^h , $t \geq 0$, следующим образом: $S_{kh^2}^h = h(\xi_1 + \dots + \xi_k)$, а между kh^2 и $(k+1)h^2$ сделаем эту функцию линейной: $S_t^h = (h^{-2}t - k)S_{(k+1)h^2}^h + (k+1 - h^{-2}t)S_{kh^2}^h$ при $kh^2 \leq t \leq (k+1)h^2$. То есть S_t^h — ломаная, начинающаяся со значения $S_0^h = 0$ и состоящая из звеньев длиной по горизонтали h^2 , идущих на каждом шагу с вероятностью $1/2$ вверх или вниз на высоту h (рис. 14).

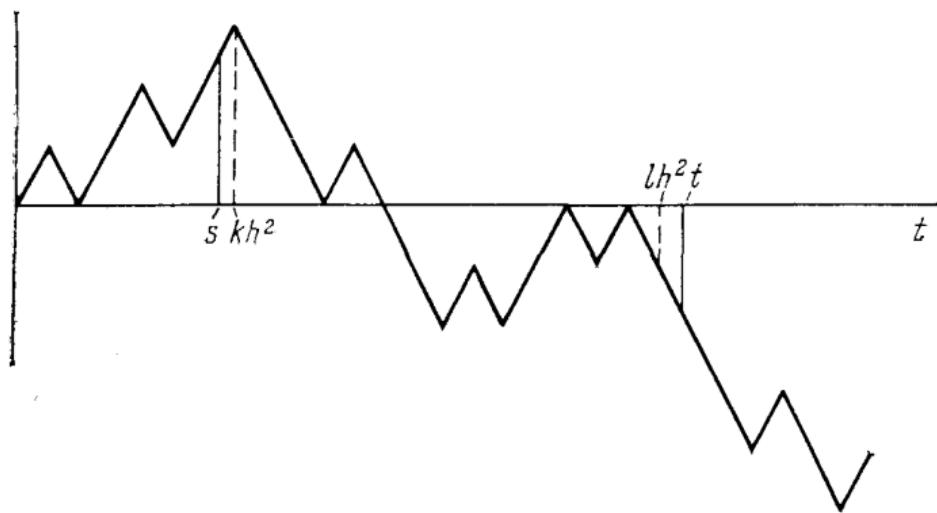


Рис. 14

Будем рассматривать эти случайные функции на отрезке $[0, T]$; реализации все принадлежат $\mathbf{C} = \mathbf{C}[0, T]$. Обозначим через μ^h распределение S_t^h в пространстве \mathbf{C} и докажем, что семейство $\{\mu^h, h > 0\}$ относительно слабо компактно.

Для этого оценим $\mathbf{M}[S_t^h - S_s^h]^4$ (что же касается $\mathbf{M}[S_0^h]^4$, то это просто 0). Если $|t - s| \leq h^2$, пользуемся очевидным неравенством

$$\mathbf{M}[S_t^h - S_s^h]^4 \leq h^{-4}(t - s)^4 \leq (t - s)^2.$$

Для $|t - s| > h^2$ пользуемся тем, что $S_t^h - S_s^h$ равно слагаемому, не превосходящему по модулю $2h$ (см. рис. 14), плюс h , умноженное на сумму независимых случайных величин $\xi_{k+1} + \dots + \xi_l$ в числе $l - k \leq$

$\geq h^{-2} |t-s|$. Пользуясь неравенством $(\alpha + \beta)^4 \leq 8\alpha^4 + 8\beta^4$, получаем оценку:

$$\mathbf{M}[S_t^h - S_s^h]^4 \leq 8(2h)^4 + 8\mathbf{M}h^4(\xi_{k+1} + \dots + \xi_l)^4.$$

Задача 2. Установите, что $\mathbf{M}(\xi_{k+1} + \dots + \xi_l)^4 = 3(l-k)^2 - 2(l-k)$.

Для нахождения этого момента можно непосредственно раскрыть скобки и подсчитывать математические ожидания произведений $\xi_i \xi_j \xi_u \xi_v$ разного сорта и численности; а можно четыре раза продифференцировать в нуле характеристическую функцию $\Phi_{\xi_{k+1} + \dots + \xi_l}(z) = \mathbf{M}e^{iz(\xi_{k+1} + \dots + \xi_l)} = \cos^{l-k} z$.

Итак, при $|t-s| > h^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[S_t^h - S_s^h]^4 &\leq 128h^4 + 24h^4(l-k)^2 \leq \\ &\leq 128(t-s)^2 + 24(t-s)^2 = 152(t-s)^2. \end{aligned}$$

Такое же неравенство, как мы видели, выполняется и при $|t-s| \leq h^2$.

Применение только что доказанной теоремы дает нужную компактность.

4. Как применяется относительная компактность, показывает

Теорема 3. Пусть $\{\mu^h, h > 0\}$ — относительно компактное семейство вероятностных мер в метрическом пространстве X ; \mathfrak{F} — некоторое множество ограниченных непрерывных функций f на X . Пусть для любого $f \in \mathfrak{F}$ существует $\lim_{h \downarrow 0} \int f d\mu^h$. Тогда существует вероятностная мера ν на X такая, что $\lim_{h \downarrow 0} \int f d\mu^h = \int f d\nu$ для любого $f \in \mathfrak{F}$. Если не существует другой меры ν' на X такой, что $\int f d\nu' = \int f d\nu$ для любого $f \in \mathfrak{F}$, то $\mu^h \rightarrow \nu$ при $h \downarrow 0$ в смысле слабой сходимости.

Доказательство. Мера ν , о которой говорится в первом утверждении теоремы, — слабый предел подпоследовательности μ^{h_n} , где $h_n \downarrow 0$. Вторая часть теоремы: если $\mu^h \not\rightarrow \nu$, то существует непрерывная ограниченная функция f_0 такая, что $\int f_0 d\mu^h \not\rightarrow$

$\nrightarrow \int f_0 d\nu$. Можно выбрать подпоследовательность мер $\mu^{h_n'}$ такую, что $\left| \int f_0 d\mu^{h_n'} - \int f_0 d\nu \right| > \epsilon > 0$, $h_n' \downarrow 0$. Из нее можно выбрать подпоследовательность $h_n'' \downarrow 0$ такую, что $\mu^{h_n''} \rightarrow \nu'$. Легко видеть, что $\nu' \neq \nu$. При этом для любого $f \in \mathfrak{F}$ имеем: $\int f d\nu' = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu^{h_n''} = \lim_{h \downarrow 0} \int f d\mu^h = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu^{h_n} = \int f d\nu$, а отсюда вытекает, что $\nu' = \nu$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Частные случаи. 1) Теорема о взаимной непрерывности соответствия между характеристическими функциями и распределениями. Здесь \mathfrak{F} — множество всех функций $f(x)$ вида e^{izx} , $z \in R^1$. Из теоремы единственности получается теорема непрерывности.

2) Теорема 4. Пусть X — метрическое пространство, состоящее из функций x , на множестве T со значениями в метрическом пространстве X ; пусть его борелевская σ -алгебра \mathcal{B}_X совпадает с σ -алгеброй $\mathcal{B}_X^T(X)$, порожденной цилиндрическими множествами. Пусть для любого t отображение X в X , ставящее в соответствие функции x , ее значение x_t в точке t , непрерывно.

Тогда для сходимости семейства вероятностных мер μ^h на X достаточно относительной компактности семейства $\{\mu^h\}$ и слабой сходимости всех соответствующих конечномерных распределений $\mu_{t_1 \dots t_n}^h$ на (X^n, \mathcal{B}_X^n) ,

Доказательство. В качестве \mathfrak{F} берем множество функционалов вида $F(x) = f(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$. Утверждение вытекает из того, что мера на (X^n, \mathcal{B}_X^n) однозначно задается интегралами по ней от всех непрерывных ограниченных непрерывных функций, а распределение в $(X, \mathcal{B}_X^T(X))$ однозначно задается соответствующими конечномерными распределениями.

Применим это к распределениям случайных ломаных S_t^h . Установим, что при $h \downarrow 0$ их конечномерные распределения сходятся к гауссовским, и найдем, к каким именно (с какими параметрами). Достаточно для

любых $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ найти предельное распределение для $S_{t_1}^h, S_{t_2}^h - S_{t_1}^h, \dots, S_{t_n}^h - S_{t_{n-1}}^h$. Эти случайные величины не более, чем на $2h$, отличаются от $h(\xi_1 + \dots + \xi_{[h^{-2}t_1]}), h(\xi_{[h^{-2}t_1]+1} + \dots + \xi_{[h^{-2}t_2]}), \dots, h(\xi_{[h^{-2}t_{n-1}]+1} + \dots + \xi_{[h^{-2}t_n]})$; предельное распределение у них — то же. Эти суммы — первая, вторая, \dots, n -я — независимы друг от друга. Из центральной предельной теоремы вытекает, что они имеют в пределе нормальное распределение с нулевым средним и дисперсиями соответственно $t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}$.

Задача 3. Пусть $\mu_1^h \rightarrow v_1, \dots, \mu_n^h \rightarrow v_n$ при $h \downarrow 0$. Тогда мера $\mu_1^h \times \dots \times \mu_n^h$ (совместное распределение n независимых случайных величин с распределениями μ_1^h, \dots, μ_n^h) при $h \downarrow 0$ слабо сходится к $v_1 \times \dots \times v_n$.

Это вместе с предыдущими результатами дает следующую теорему.

Теорема 5. Распределения μ^h случайных ломаных S_\cdot^h в пространстве $C[0, T]$ при $h \downarrow 0$ имеют предел. Этот предел — распределение в этом пространстве винеровского процесса, выходящего из нуля.

Между прочим, это — еще один метод установления существования винеровского процесса. Но важно не это, а важно, что отсюда сразу вытекает огромная масса различных предельных теорем; для любого функционала F из $C(C)$ (пространства ограниченных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций) получаем, что

$$\lim_{h \downarrow 0} MF(S_\cdot^h) = MF(w_\cdot)$$

(обратите внимание, что математические ожидания в левой и в правой частях действуют на случайные величины, определенные, вообще говоря, на разных вероятностных пространствах: слева — на пространстве, на котором определены независимые случайные величины ξ_i , справа — на пространстве, на котором определен винеровский процесс). В частности, для любой непрерывной функции $c(x)$

$$M \exp \left\{ \int_0^T c(S_t^h) dt \right\} \rightarrow M \exp \left\{ \int_0^T c(w_t) dt \right\} \quad (h \downarrow 0).$$

Задача 4. Докажите, что распределение случайной величины $\max_{0 \leq t \leq T} S_t^h$ при $h \downarrow 0$ слабо сходится к распределению $\max_{0 \leq t \leq T} w_t$.

Задача 5. К распределению какого случайного процесса сходятся распределения μ^h случайных ломаных S_t^h при $h \rightarrow \infty$?

Задача 6*. Приведите пример последовательности случайных функций ξ_t^n , $t \in [0, T]$, с непрерывными реализациями, для которых все конечномерные распределения слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям случайной функции η ; с непрерывными реализациями, но соответствующие распределения в пространстве непрерывных функций не сходятся: $\mu_{\xi_t^n} \not\rightarrow \mu_\eta$.

5. Мы установили, что конечномерные распределения процесса $\sqrt{n} Y_n(t)$ примера 5 § 1.2 сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(t)$ с непрерывными реализациями. Конечно, о сходимости в пространстве C не может быть и речи — просто потому, что реализации $\sqrt{n} Y_n(t)$ разрывны. Поэтому для установления сходимости распределений функционалов от $\sqrt{n} Y_n$ к распределениям тех же функционалов от Z приходится либо пользоваться функциональными пространствами, состоящими из разрывных функций, либо «подправлять» $\sqrt{n} Y_n(t)$, загоняя реализации в пространство непрерывных функций. В этой книге мы не сможем разобрать этот вопрос.

МАРКОВСКИЕ МОМЕНТЫ, СВОЙСТВА НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ БУДУЩЕГО

§ 6.1. Марковские моменты

1. Пусть дано неубывающее семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t в пространстве элементарных событий, $t \in T \subseteq R^1$: $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$. Все эти σ -алгебры мы будем предполагать под- σ -алгебрами основной σ -алгебры \mathcal{F} .

С примерами таких семейств σ -алгебр мы уже знакомы: таковы, например, σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq t}$, определенные по какому-нибудь случайному процессу (см. § 3.1), или — в случае непрерывного времени — $\mathcal{F}_{\leq t+}$.

Дадим определение *марковского момента*.

Пусть $\tau(\omega)$ — случайная величина, принимающая значения из T или значение $+\infty$. Мы говорим, что τ — марковский момент (относительно данного семейства σ -алгебр), если для любого $t \in T$ событие

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (1)$$

Рассмотрим пример — самый простой, когда и время дискретно: $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, и σ -алгебры $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ — это просто конечные алгебры, каждая из которых порождается каким-то конечным разбиением пространства Ω (требование $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$ сводится в этом случае к тому, чтобы каждое следующее разбиение было мельче предыдущего). Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ — симметричное случайное блуждание на целочисленных точках прямой, начинающееся из нуля. Его можно представлять себе так: производится ряд бросаний монеты, и $\xi_n = \xi_{n-1} + 1$, если в n -м бросании выпадет герб, $\xi_n = \xi_{n-1} - 1$, если выпадет решка ($\xi_0 = 0$). В качестве σ -алгебр \mathcal{F}_n возьмем σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq n} = \sigma\{\xi_k, k \leq n\}$. Здесь алгебра \mathcal{F}_0 порождается целым разбиением пространства элементарных событий, т. е. в \mathcal{F}_0 войдут два множества: \emptyset и Ω ; \mathcal{F}_1 — разбиением $\Omega = \{\xi_1 = -1\} \cup \{\xi_1 = 1\}$; \mathcal{F}_2 — разбиением $\Omega = \{\xi_1 = -1, \xi_2 = -2\} \cup \{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\}$; и т. д.

Рассмотрим случайный момент τ первого достижения нашим блужданием точек ± 2 (если случайное блуждание не достигает их никогда, полагаем $\tau = \infty$):

$$\tau = \begin{cases} \min\{i : |\xi_i| = 2\}, & \text{если такие } i \text{ есть;} \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это — марковский момент, потому что событие $\{\tau \leq n\}$ при каждом n складывается из элементов разбиения, порождающего \mathcal{F}_n . Конечно, $\{\tau \leq 0\} = \{\tau \leq 1\} = \emptyset$; далее, $\{\tau \leq 2\} = \{\xi_1 = -1, \xi_2 = -2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\}$

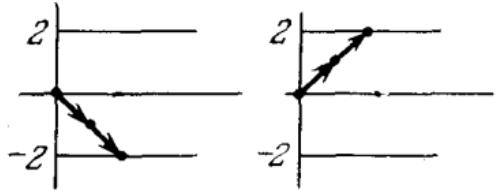


Рис. 15

(рис. 15), $\{\tau \leq 3\} = \{\tau \leq 2\}$; $\{\tau \leq 4\}$ состоит из элементов разбиения, входящих в $\{\tau \leq 2\}$, и еще четырех: $\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = -2\} \cup \{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = -2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 2\}$ (рис. 16), и т. д.

Рассмотрим еще один пример, связанный с тем же семейством σ -алгебр \mathcal{F}_n . Пусть

$$\sigma = \begin{cases} \max \{i: 1 \leq i \leq 4, |\xi_i| = 2\}, & \text{если такие } i \text{ есть;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это — последний момент достижения точек ± 2 от начала блуждания до момента 4, если к этому моменту какая-нибудь из точек ± 2 была достигнута (мы не берем в качестве примера

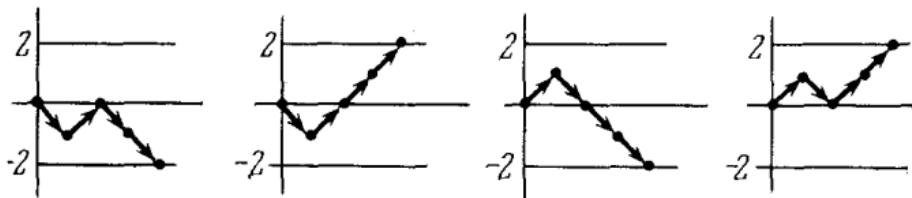


Рис. 16

последний момент среди *всех* натуральных i , $|\xi_i| = 2$, потому что, оказывается, с вероятностью 1 число достижений точек ± 2 бесконечно, и последнего момента нет). Случайный момент σ — не марковский. Действительно, например, событие $\{\sigma \leq 2\}$, как легко проверить, осуществляется тогда и только тогда, когда $|\xi_4| \neq 2$; оно не содержит целиком ни одного из событий, порождающих алгебру \mathcal{F}_2 , и не принадлежит этой алгебре.

Из рассмотренных примеров уже видно, в чем суть понятия марковского момента. Будем интерпретировать σ -алгебру \mathcal{F}_t как совокупность всех событий, о наступлении или ненаступлении которых нам становится известно к моменту t . Тогда, если при каком-то ω марковский момент принял значение t , то к моменту t нам это уже известно. Такова приведенная в качестве примера случайная величина τ . Случайная величина σ не обладает этим свойством: скажем, в случае $\xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \xi_3 = 1, \xi_4 = 0$ (герб — герб — решка — решка) $\sigma = 2$, но узнаем мы об этом лишь к моменту $t = 4$ (потому что еще в момент $t = 3$ мы

можем ожидать, что выпадет последовательность герб — герб — решка — герб).

Коротко говоря, марковский момент — это такой случайный момент, о наступлении которого можно узнать, не зная того, что будет после этого момента.

С этим связан другой термин для марковского момента, отчасти более выразительный, — *случайная величина, не зависящая от будущего*, принятый в книге Дынкина (1959). Однако этот термин очень длинный, к тому же одна из основных областей применения этого понятия — теория марковских процессов, где оно связано с очень важным *строго марковским свойством*, так что в настоящее время употребляется более короткий термин.

Отметим особо, что понятие марковского момента никак не связано с вероятностью P на пространстве элементарных событий, а только с самим этим пространством и заданными на нем σ -алгебрами.

2. Дальнейшие примеры и свойства марковских моментов.
Прежде всего, любой неслучайный момент $\tau(\omega) \equiv t (\in T)$ — это марковский момент (и также $\tau(\omega) \equiv +\infty$). Рассмотрим несколько классов более интересных примеров.

Все доказательства, связанные с марковскими моментами, — просто теоретико-множественные выкладки; однако они приобретают смысл (и упрощаются), если все время не упускать из виду наглядный смысл понятия марковского момента как момента, определяемого по прошлому случайному процесса.

Задача 1. Пусть $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$, — случайная последовательность, принимающая значения в измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) ; Γ — произвольное множество из \mathcal{X} . Определим τ_Γ как первый момент достижения последовательностью ξ_n множества Γ : $\tau_\Gamma = \min\{n: \xi_n \in \Gamma\}$ или $+\infty$, если случайная последовательность ξ_n так никогда и не достигнет Γ . Докажите, что τ_Γ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq n}, n = 0, 1, 2, \dots$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k, \dots$ — измеримые подмножества X . Положим $\tau_1 = \min\{n: \xi_n \in \Gamma_1\}$ или $+\infty$, если последовательность не достигает Γ_1 ; $\tau_2 = \min\{n > \tau_1: \xi_n \in \Gamma_2\}$, если $\tau_1 < \infty$ и последовательность достигает Γ_2 при $n > \tau_1$, и $+\infty$ в противном случае; вообще, τ_{k+1} — первый после τ_k момент достижения Γ_{k+1} : $\tau_{k+1} = \min\{n > \tau_k: \xi_n \in \Gamma_{k+1}\}$ или $+\infty$, если $\tau_k = \infty$ или последовательность не достигает Γ_{k+1} после момента τ_k .

Докажите, что $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ — марковские моменты.

В частности, это справедливо для первого, второго, третьего и т. д. моментов пребывания в одном и том же множестве Γ .

Задача 3. Пусть $\xi_t, t \in [0, \infty)$, — случайный процесс, пространство (X, \mathcal{X}) , в котором он принимает свои значения, — метрическое пространство с σ -алгеброй борелевских подмножеств. Предположим, что траектории $\xi_t(\omega)$ непрерывны, Γ — замкнутое

множество. Пусть τ_Γ — первый момент достижения Γ : $\tau_\Gamma = \min \{t: \xi_t \in \Gamma\}$, если такие t есть, и $\tau_\Gamma = \infty$, если ξ_t не достигает Γ . Докажите, что τ_Γ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, $t \in [0, \infty)$.

Пример п. 3 § 3.1 показывает, как решается

Задача 4. В условиях предыдущей задачи пусть Γ — открытое множество, $\tau_\Gamma = \inf \{t: \xi_t \in \Gamma\}$ (или $+\infty$, если ξ_t не принадлежит Γ ни при каком $t \in [0, \infty)$). Тогда τ_Γ , вообще говоря, не является марковским моментом относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, но является марковским моментом относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$.

Этот результат сохраняется и в случае, когда траектории не непрерывны, а только непрерывны справа.

Задача 5. Для того чтобы случайная величина τ была марковским моментом относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$, порожденного каким-то случайным процессом, необходимо и достаточно, чтобы $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_{\leq t}$ при любом t .

Задача 6. Пусть τ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$. Докажите, что случайная величина τ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_\infty = \sigma \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t \right)$.

Очень легко доказываются такие свойства марковских моментов:

если τ_1, τ_2 — марковские моменты, то $\tau_1 \wedge \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$ — тоже марковские моменты;

если $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ — марковские моменты, $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \leq \dots$, то $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ — тоже марковский момент (предполагается, что пределы всех возрастающих последовательностей элементов T принадлежат T).

Действительно,

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\},$$

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\}.$$

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau_n \leq t\},$$

и все эти события принадлежат \mathcal{F}_t .

Если τ — марковский момент, то, скажем, $\tau + 1$ и 2τ ($T = [0, \infty)$) — тоже марковские моменты, но $\tau/2$ не будет, вообще говоря, марковским моментом (относительно того же семейства σ -алгебр).

3. Связанные с марковскими моментами σ -алгебры. Мы интерпретировали σ -алгебру \mathcal{F}_t как совокупность всех событий, о наступлении которых нам становится известно к моменту t . Такая σ -алгебра связана с любым неслучайным моментом $t \in T$. Оказывается, и с каждым марковским моментом τ можно связать σ -алгебру \mathcal{F}_τ , имеющую смысл системы всех событий, о наступлении которых мы узнаем к моменту τ .

По определению $A \in \mathcal{F}_\tau$, если $A \in \mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$

и для любого $t \in T$

$$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \quad (2)$$

Докажем, что \mathcal{F}_τ — σ -алгебра. Прежде всего, $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$, потому что $\Omega \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ в силу определения марковского момента. Далее, если $A \in \mathcal{F}_\tau$, то и $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_\tau$:

$$(\Omega \setminus A) \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus A \cap \{\tau \leq t\}.$$

И совсем уже просто доказывается, что счетная сумма множества из \mathcal{F}_τ снова принадлежит этой системе множеств.

Легко видеть, что для не марковского момента τ определенная таким образом система событий не окажется σ -алгеброй.

Интуитивно понятно, каков смысл определения \mathcal{F}_τ при помощи требования (2): пусть наступление или ненаступление события A становится нам известным к моменту τ ; тогда, если к моменту t нам стало известно, что $\tau \leq t$, мы должны также узнать, наступило ли A .

В случае семейств σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$ или $\mathcal{F}_{\leq t+}$ для σ -алгебр, связанных с марковским моментом τ , мы будем употреблять обозначения $\mathcal{F}_{\leq \tau}$, $\mathcal{F}_{\leq \tau+}$.

Для марковского момента τ примера п. 1 σ -алгебра \mathcal{F}_τ порождается всеми $\mathcal{F}_{\leq \infty}$ -измеримыми подмножествами множества $\{\tau = \infty\}$ (имеющего меру 0) и счетным разбиением множества $\{\tau < \infty\} = \{\xi_1 = -1, \xi_2 = -2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 2\} \cup \{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = -2\} \cup \{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = -2\} \cup \{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 2\} \cup \{\xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = -1, \xi_4 = 0, \xi_5 = -1, \xi_6 = -2\} \cup \dots$ В качестве примера случайной величины, измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{F}_τ , можно рассмотреть число попаданий в точки 0 и 1 до момента τ .

Задача 7. Докажите, что марковский момент τ всегда измерим относительно σ -алгебры \mathcal{F}_τ .

Задача 8. Докажите, что если τ и σ — марковские моменты, $\tau(\omega) \leq \sigma(\omega)$ при всех ω , то $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.

Задача 9. Пусть τ — марковский момент, σ — случайная величина, принимающая значения из $T \cup \{\infty\}$, причем $\sigma(\omega) \geq \tau(\omega)$ при всех ω . Если случайная величина σ измерима относительно \mathcal{F}_τ , то σ — также марковский момент.

Задача 10. Для произвольных марковских моментов σ, τ событие $\{\tau < \sigma\}$ измеримо относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_\tau, \mathcal{F}_\sigma$, $\mathcal{F}_\tau \wedge \sigma$.

§ 6.2. Свойства независимости от будущего

Часто наряду с тем случайным процессом ξ_t , $t \in T \subseteq R^1$, который нас интересует, нам приходится рассматривать различные вспомогательные случайные функции. При этом, если мы интересуемся зависимостью будущего от прошлого, нам оказывается существенно различать случайные функции, не зависящие от будущего и зависящие от будущего. Так, если вспомогательная случайная функция η_t определяется, скажем, как $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-1}$, о ней естественно сказать, что она не зависит от будущего, а о случайной функции

$$\zeta_t = \int_{t-1}^{t+2} \xi_s ds — что она зависит от будущих значений$$

случайного процесса ξ (чтобы узнать значение случайной функции ζ_t при данном t , нужно знать значения ξ_s не только для s до t , но и после t).

Эти неопределенные соображения превращаются в точные математические определения, причем не одним способом.

Все свойства независимости от будущего, которые мы будем рассматривать, формулируются как свойства *измеримости* случайной функции *по паре аргументов* t, ω относительно определенных σ -алгебр в пространстве $T \times \Omega$. В исследованиях по теории случайных процессов различных таких σ -алгебр и соответственно свойств независимости случайной функции от будущего рассматривается очень много; мы ограничимся тремя.

1. Пусть \mathcal{F}_t , $t \in T \subseteq R^1$, — неубывающее семейство σ -алгебр, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Введем σ -алгебры в пространстве $T \times \Omega$, связанные с семейством (\mathcal{F}_t) : σ -алгебру *согласованных с семейством* (\mathcal{F}_t) множеств \mathcal{Ad} (сокращение от английского или французского термина); σ -алгебру *прогрессивно измеримых* множеств \mathcal{Prog} ; и σ -алгебру *предсказуемых* множеств \mathcal{Pred} .

По определению множество $A \subseteq T \times \Omega$ принадлежит σ -алгебре \mathcal{Ad} в пространстве $T \times \Omega$, если для любого $t \in T$ сечение A «на уровне t » — то есть $\{\omega : (t, \omega) \in A\}$ — принадлежит σ -алгебре \mathcal{F}_t .

Более сложные определения σ -алгебр \mathcal{Prog} и \mathcal{Pred} даются только в том случае, когда T — борелевское подмножество прямой. Обозначим через $\mathcal{B}_{\leq t}$ σ -алгебру на множестве $T \cap (-\infty, t]$, состоящую из всех

борелевских подмножеств этого множества. По определению множество $A \subseteq T \times \Omega$ принадлежит $\mathcal{P}rog$, если для любого $t \in T$ множество $A \cap ((-\infty, t] \times \Omega)$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{B}_{\leq t} \times \mathcal{F}_t$.

Наконец, σ -алгебра $\mathcal{P}red$ определяется как наименьшая σ -алгебра в $T \times \Omega$, содержащая все множества вида $(T \cap (t, \infty)) \times B$, где $t \in T$, $B \in \mathcal{F}_t$.

Разумеется, что $\mathcal{A}d$ и $\mathcal{P}rog$ — действительно σ -алгебры, нужно еще проверить ($\mathcal{P}red$ — σ -алгебра по определению); но это очень легко. Например, проверка того, что из $A \in \mathcal{P}rog$ вытекает $(T \times \Omega) \setminus A \in \mathcal{P}rog$: $((T \times \Omega) \setminus A) \cap ((-\infty, t] \times \Omega) = ((T \cap (-\infty, t]) \times \Omega) \setminus (A \cap ((-\infty, t] \times \Omega))$. Уменьшаемое принадлежит $\mathcal{B}_{\leq t} \times \mathcal{F}_t$ просто потому, что $\mathcal{B}_{\leq t} \times \mathcal{F}_t$ — σ -алгебра на $(T \cap (-\infty, t]) \times \Omega$; а вычитаемое — по предположению $A \in \mathcal{P}rog$.

Случайная функция $\eta_t = \eta_t(\omega)$, $t \in T$, называется *согласованной с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t (прогрессивно измеримой, предсказуемой)*, если она измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{A}d$ (соответственно $\mathcal{P}rog$, $\mathcal{P}red$).

Так как определения $\mathcal{A}d$ и $\mathcal{P}rog$ даны указанием свойств входящих в эти σ -алгебры подмножеств $T \times \Omega$, то определения согласованной с семейством σ -алгебр или прогрессивно измеримой случайной функции можно переформулировать:

случайная функция η_t , $t \in T$, согласована с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t , если при любом $t \in T$ случайная величина η_t измерима относительно \mathcal{F}_t ;

случайная функция η_t , $t \in T$, прогрессивно измерима относительно (\mathcal{F}_t) , если для любого t случайная функция $\eta_s = \eta_s(\omega)$, рассматриваемая лишь для $s \in T \cap (-\infty, t]$, как функция от пары s, ω измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_{\leq t} \times \mathcal{F}_t$.

Понятие согласованности с данным семейством σ -алгебр выражает идею «независимости от будущего» наиболее непосредственно. Однако этого простого понятия, совершенно пренебрегающего измеримостью по временному параметру, оказывается недостаточно. Понятие прогрессивной измеримости предназначено для выражения, в сущности, той же идеи, но таким образом, чтобы лучше соответствовать техническим требованиям теории. Понятие предсказуемости скорее выражает не идею зависимости от прошлого, включая в него настояще, а зависимости только от прошлого, без настоящего. Это будет яснее, когда мы рассмотрим свойства введенных понятий.

2. Микротеорема 1. Любая прогрессивно измеримая случайная функция и любая предсказуемая

случайная функция согласована с данным семейством σ -алгебр (то есть $\mathcal{Prog} \subseteq \mathcal{Ad}$, $\mathcal{Pred} \subseteq \mathcal{Ad}$); если в T есть наименьший элемент t_0 , то любая предсказуемая случайная функция при этом значении временного параметра есть константа: $\eta_{t_0}(\omega) \equiv c = \text{const.}$

На языке множеств, а не функций последнее утверждение звучит так: если $A \in \mathcal{Pred}$, то

$$\{\omega: (t_0, \omega) \in A\} = \emptyset \quad \text{или} \quad \Omega. \quad (1)$$

Доказательство. Утверждение, касающееся \mathcal{Prog} , вытекает из простого факта: функция $f(x, y)$, измеримая относительно σ -алгебры $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, при любом фиксированном x \mathcal{Y} -измерима по y .

Порождающие σ -алгебру \mathcal{Pred} множества

$$A = ((t, \infty) \cap T) \times B, \quad B \in \mathcal{F}_t, \quad (2)$$

принадлежат \mathcal{Ad} . Действительно, докажем, что индикатор $\chi_A(s, \omega) = \chi_{(t, \infty) \cap T}(s) \chi_B(\omega)$ согласован с нашим семейством σ -алгебр. При любом s функция $\chi_A(s, \omega)$ измерима по ω относительно \mathcal{F}_s : при $s \leq t$ это тождественный нуль; а при $s > t$, $s \in T$ эта функция равна $\chi_B(\omega)$, она измерима относительно \mathcal{F}_t , а тем более и относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_s \supseteq \mathcal{F}_t$.

Отсюда вытекает, что и вся σ -алгебра $\mathcal{Pred} \subseteq \mathcal{Ad}$.

Наконец, все множества вида (2) удовлетворяют условию (1); а именно, если $t_0 = \min T$, а $t \in T$, то

$$\{\omega: (t_0, \omega) \in ((t, \infty) \cap T) \times B\} = \emptyset.$$

Отсюда легко выводится, что (1) выполняется и для σ -алгебры \mathcal{Pred} , порожденной множествами вида (2).

Микротеорема 2. Пусть T — отрезок, конечный или бесконечный, состоящий из целых чисел: $T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}$, или $T = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots\}$, или $T = \{t \in \mathbb{Z}^1: t \leq t_1\}$, или $T = \mathbb{Z}^1$. Пусть задано неубывающее семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$, в пространстве Ω . Тогда а) прогрессивная измеримость — все равно, что согласованность (т. е. $\mathcal{Prog} = \mathcal{Ad}$); б) случайная функция η_t тогда и только тогда предсказуема, когда она согласована с семейством σ -алгебр $(\mathcal{F}_{t-1}, t \in T)$, где при $t = t_0 = \min T$ в качестве \mathcal{F}_{t_0-1} , берется тривиальная σ -алгебра (\emptyset, Ω) (коротко это можно выразить так: $\mathcal{Pred} = \mathcal{Ad}_{-1}$).

Доказательство. а) То, что $\mathcal{Prog} \subseteq \mathcal{Ad}$, уже доказано; проверяем $\mathcal{Ad} \subseteq \mathcal{Prog}$: для любой согласо-

ванной с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t случайной функции η_t , принимающей значения в измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) , для любого $t \in T$ и любого $C \in \mathcal{X}$

$$\{(s, \omega) : s \leq t, \eta_s(\omega) \in C\} = \bigcup_{s \leq t} \{s\} \times \{\omega : \eta_s(\omega) \in C\}.$$

Любое одноточечное множество $\{s\}$ — борелевское; ω -множество принадлежит σ -алгебре \mathcal{F}_s , тем более \mathcal{F}_t ($t \geq s$); счетная сумма множеств из $\mathcal{B}_{\leq t} \times \mathcal{F}_t$ принадлежит этой σ -алгебре.

б) Чтобы установить $\text{Pred} \subseteq \text{Ad}_{-1}$, достаточно проверить, что все порождающие σ -алгебру Pred множества вида (2) согласованы с семейством $(\mathcal{F}_{t-1}, t \in T)$. Это вытекает из того, что

$$\{\omega : (s, \omega) \in (T \cap (t, \infty)) \times B\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_{s-1} & \text{при } s \leq t, \\ B & \text{при } s > t; \end{cases}$$

но $B \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{s-1}$ (ведь для целых чисел из $t < s$ вытекает $t \leq s - 1$).

Обратно, пусть множество A согласовано с семейством σ -алгебр $(\mathcal{F}_{t-1}, t \in T)$, докажем, что $A \in \text{Pred}$. Имеем:

$$A = \bigcup_{t \in T} \{t\} \times B_t, \quad (3)$$

где $B_t = \{\omega : (t, \omega) \in A\}$ — событие, принадлежащее σ -алгебре \mathcal{F}_{t-1} . Докажем, что все слагаемые в сумме (3) принадлежат σ -алгебре Pred . Если в этой сумме есть первое слагаемое, т. е. слагаемое $\{t_0\} \times B_{t_0}$, $t_0 = \min T$, то либо $B_{t_0} = \emptyset$, либо $B_{t_0} = \Omega$. В первом случае $\{t_0\} \times B_{t_0} = \emptyset$, и это множество принадлежит Pred , как и любой σ -алгебре в пространстве $T \times \Omega$; во втором случае $\{t_0\} \times B_{t_0} = \{t_0\} \times \Omega = (T \times \Omega) \setminus ((T \cap (t_0, \infty)) \times \Omega)$ принадлежит σ -алгебре Pred как разность двух множеств из этой σ -алгебры.

Для не первого слагаемого:

$$\{t\} \times B_t = ((T \cap (t-1, \infty)) \times B_t) \setminus ((T \cap (t, \infty)) \times B_t).$$

Здесь событие $B_t \in \mathcal{F}_{t-1}$, так что множество-уменьшаемое по определению принадлежит σ -алгебре Pred ; но в силу $\mathcal{F}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_t$ также и $B_t \in \mathcal{F}_t$, и множество-вычитаемое тоже принадлежит σ -алгебре предсказуемых множеств.

Значит, принадлежит этой σ -алгебре и вся счетная сумма (3).

Доказанная микротеорема позволяет нам привести примеры случайных функций, с одной стороны, согласованных с семейством σ -алгебр и прогрессивно измеримых, а с другой — предсказуемых. Так, случайная функция $\eta_t = \sum_{s=0}^t f(s, \xi_s)$ согласована с семейством σ -алгебр $\mathcal{F}_{\xi_s, s \leq t}$, порожденных случайной последовательностью ξ_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, и она, разумеется, прогрессивно измерима, но, вообще говоря, не предсказуема. Пример предсказуемой относительно того же семейства σ -алгебр случайной функции: $\zeta_t = \sum_{s=0}^{t-1} f(s, \xi_s)$.

3. Микротеорема 3. Пусть T — отрезок, интервал или полуинтервал, конечный или бесконечный, на действительной оси; η_t , $t \in T$, — случайная функция, согласованная с данным семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t . Если $\eta_t(\omega)$ при любом ω непрерывно справа (или слева) по t , то случайная функция η_t прогрессивно измерима.

Доказательство не нужно проводить заново: оно следует из результата задачи 4 § 1.3.

Микротеорема 4. Пусть T — отрезок, интервал или полуинтервал, конечный или бесконечный, на действительной оси; η_t , $t \in T$, — случайная функция, согласованная с данным семейством σ -алгебр, причем в случае, когда в T есть наименьший элемент t_0 , предполагается $\eta_{t_0}(\omega) \equiv c = \text{const}$. Если $\eta_t(\omega)$ при любом ω непрерывно слева по t , то случайная функция η_t предсказуема.

Доказательство будем для простоты обозначений проводить в случае $T = [0, \infty)$. Определим случайную функцию

$$\eta_t^n(\omega) = \begin{cases} \eta_0(\omega) \equiv c & \text{при } t = 0; \\ \eta_{(k-1)/n}(\omega) & \text{при } \frac{k-1}{n} < t \leq \frac{k}{n}, \quad k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что в силу непрерывности слева $\eta_t^n(\omega) \rightarrow \eta_t(\omega)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех t, ω , потому что значение аргумента, в котором берется функция η в определении (4), не превосходит t и отличается от t не более, чем на $1/n$. Поточечный предел последовательности измеримых функций измерим, поэтому достаточно доказать

предсказуемость случайной функции η_t^n . Имеем для любого измеримого множества C (в том пространстве, в котором принимает значения случайная функция η_t):

$$\{(t, \omega): \eta_t^n(\omega) \in C\} =$$

$$= \{0\} \times \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset, & \text{если } c \notin C \\ \Omega, & \text{если } c \in C \end{array} \right\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right] \times$$

$$\times \{\omega: \eta_{(k-1)/n}(\omega) \in C\}.$$

Самое первое слагаемое при $c \notin C$ пусто и принадлежит σ -алгебре $\mathcal{P}red$; при $c \in C$ оно представляется в виде $(T \times \Omega) \setminus ((0, \infty) \times \Omega)$ и принадлежит $\mathcal{P}red$ как дополнение множества из этой σ -алгебры. Далее, k -е слагаемое представляется в виде

$$\left(\left(\frac{k-1}{n}, \infty \right) \times \{\omega: \eta_{(k-1)/n}(\omega) \in C\} \right) \setminus$$

$$\setminus \left(\left(\frac{k}{n}, \infty \right) \times \{\omega: \eta_{(k-1)/n}(\omega) \in C\} \right).$$

Первое множество здесь принадлежит $\mathcal{P}red$ потому, что $\{\omega: \eta_{(k-1)/n}(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}_{(k-1)/n}$; второе — потому, что это же событие принадлежит $\mathcal{F}_{k/n}$.

Микротеорема 5. Пусть T — отрезок, интервал или полуинтервал. Тогда σ -алгебра $\mathcal{P}red \equiv \mathcal{P}rog$.

Доказательство. Достаточно проверить, что принадлежат σ -алгебре $\mathcal{P}rog$ порождающие $\mathcal{P}red$ множества вида $A = (T \cap (t, \infty)) \times B$, $B \in \mathcal{F}_t$; то есть что их индикаторы $\chi_A(s, \omega) = \chi_{T \cap (t, \infty)}(s) \chi_B(\omega)$ прогрессивно измеримы. Это вытекает из того, что индикатор $\chi_A(s, \omega)$ согласован с данным семейством σ -алгебр и при любом ω непрерывен слева по s .

Полученные результаты дают возможность рассмотреть примеры предсказуемых и прогрессивно измеримых случайных функций в случае непрерывного времени. Если ξ_t , $-\infty < t < \infty$, — числовой случайный процесс с дифференцируемыми траекториями, случайная функция ξ'_t прогрессивно измерима и предсказуема относительно порожденного процессом ξ_t семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$. Действительно, при всех t, ω имеем: $\xi'_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (\xi_t(\omega) - \xi_{t-1/n}(\omega))$, а случайные функции ξ_t и $\xi_{t-1/n}$ предсказуемы как функции с непрерывными реализациями, согласованные с дан-

ным семейством σ -алгебр. Если ξ_t — случайный процесс с непрерывными справа и не имеющими разрывов второго рода реализациями, то прогрессивно измерима относительно того же семейства σ -алгебр случайная функция η_t , определяемая как величина скачка в точке t : $\eta_t = \xi_t - \xi_{t-}$ (в точках непрерывности, то есть всюду, за исключением счетного числа точек, $\eta_t = 0$). Это вытекает из того, что сам случайный процесс ξ_t , будучи непрерывен справа, прогрессивно измерим, а его левый предел ξ_{t-} даже предсказуем (будучи непрерывен слева).

Задача 1. Пусть случайная функция η_t прогрессивно измерима; τ — марковский момент. Докажите, что функция $\eta_\tau = \eta_{\tau(\omega)}(\omega)$ на множестве $\{\omega: \tau(\omega) < \infty\}$ измерима относительно σ -алгебры \mathcal{F}_τ .

Задача 2. Пусть $T = [0, \infty)$, η_t , $t \in T$, — случайная функция, прогрессивно измеримая относительно семейства σ -ал-

гебр \mathcal{F}_t , $t \in T$. Пусть $\zeta_t(\omega) = \int_0^t \eta_s(\omega) ds$ существует как интеграл Лебега при любом $t \in T$. Тогда ζ_t — предсказуемая случайная функция.

Задача 3. Пусть ξ_t , $t \in [0, \infty)$, — случайный процесс с непрерывными справа траекториями в метрическом пространстве X (в качестве σ -алгебры \mathcal{X} на этом пространстве взята σ -алгебра \mathcal{B}_X его борелевских подмножеств); $f(t, x)$ — ограниченная $\mathcal{B}_{[0, \infty)} \times \mathcal{B}_X$ -измеримая функция на $[0, \infty) \times X$. Докажите, что $\int_0^t f(s, \xi_s) ds$ — предсказуемая случайная функция относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, $0 \leq t < \infty$.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи пусть τ — марковский момент относительно $(\mathcal{F}_{\leq t})$. Докажите, что $\psi = \int_0^\tau f(s, \xi_s) ds$ — $\mathcal{F}_{\leq \tau}$ -измеримая случайная величина (если интеграл расходится как интеграл Лебега, полагаем $\psi = 0$).

Поговорим об интуитивном фоне, стоящем за термином *предсказуемость*. Отличие понятия предсказуемости от прогрессивной измеримости проявляется в случае непрерывного времени только при рассмотрении разрывных случайных функций. Рассмотрим случайную функцию, совершающую время от времени скачки величины 1. Эти скачки могут быть двух родов. Во-первых, они могут происходить в строго определенные моменты времени; или в случайные моменты, но такие, скажем, как момент времени, когда мы коснемся какого-то множества. Это — скачки, которые мы можем *предсказать*: приближаясь к множеству, мы уже видим, что вот-вот его коснемся. Во-вторых, могут быть совершенно неожиданные, непредсказуемые скачки, происходящие «ни с того, ни с сего», как, например, у пуассоновского процесса.

Для различения в пределах строгой математической теории этих случаев и вводится понятие предсказуемости.

Рассмотрим пример. Только пуассоновский процесс нам сейчас ни к чему, потому что у нас сейчас нет не только пуассоновского распределения, но и вообще вероятностей. Кроме того, счетное число скачков — это слишком много, ограничимся одним скачком.

Задача 5. Пусть $\Omega = [0, \infty)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0, \infty)}$, $T = [0, \infty)$, $\xi_t(\omega) = 0$ при $t < \omega$ и $\xi_t(\omega) = 1$ при $t \geq \omega$. Проверить, что $\mathcal{F}_{[0, \infty)} = \mathcal{B}_{[0, \infty)}$;

σ -алгебра $\mathcal{F}_{\leq t}$ состоит из всех борелевских подмножеств A отрезка $[0, t]$ и из всех множеств вида $A \cup (t, \infty)$, $A \in \mathcal{B}_{[0, t]}$;

$$\mathcal{F}_{\leq t+} = \mathcal{F}_{\leq t};$$

марковские моменты τ могут быть двоякого рода: во-первых, вида

$$\tau(\omega) \begin{cases} \geq \omega & \text{при } \omega \in [0, t_0]; \\ = t_0 & \text{при } \omega > t_0 \end{cases}$$

(функция $\tau(\omega)$ предполагается борелевской): и, во-вторых, вида $\tau(\omega) \geq \omega$ при всех ω (рис. 17);

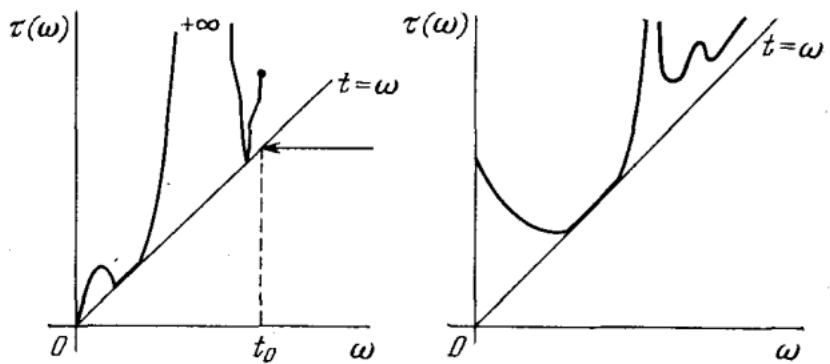


Рис. 17

σ -алгебра $\mathcal{F}_{\leq \tau}$ (раз семейство σ -алгебр обозначается в данном случае $\mathcal{F}_{\leq t}$, то и σ -алгебры, связанные с марковскими моментами, обозначаются $\mathcal{F}_{\leq \tau}$) для марковских моментов первого рода совпадает с $\mathcal{B}_{[0, t_0]}$, для второго — с $\mathcal{B}_{[0, \infty)}$;

согласованные с $(\mathcal{F}_{\leq t})$, прогрессивно измеримые, предсказуемые множества в $T \times \Omega = [0, \infty) \times [0, \infty)$ мы опишем с помощью рисунков. Обратите внимание на то, что, хотя время — первое переменное в паре (t, ω) , на следующих далее рисунках в качестве оси ω выбрана ось абсцисс; это сделано для того, чтобы не расходиться с формой, в которой даны графики марковских моментов (см. рис. 17).

Согласованные с $(\mathcal{F}_{\leq t})$ множества имеют вид, указанный на рис. 18 (выше биссектрисы координатного угла и на ней — что угодно, а правее ее множество должно состоять из горизонтальных полупрямых, взятых целиком). При этом требуется (чего не выразишь на чертеже), чтобы любое горизонтальное сечение было

борелевским (это — ограничение, касающееся только части чертежа с $t \geq \omega$).

Прогрессивно измеримые множества изображаются в точности таким же чертежом, но требуется, чтобы множество было двумерным борелевским множеством.

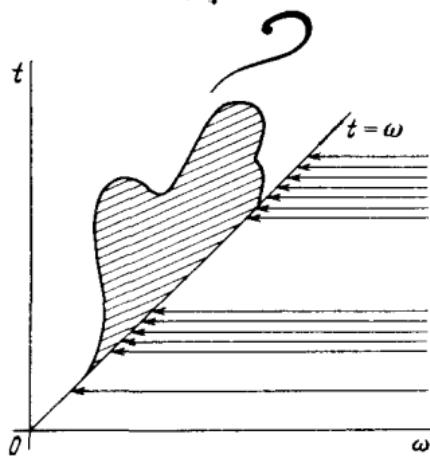


Рис. 18

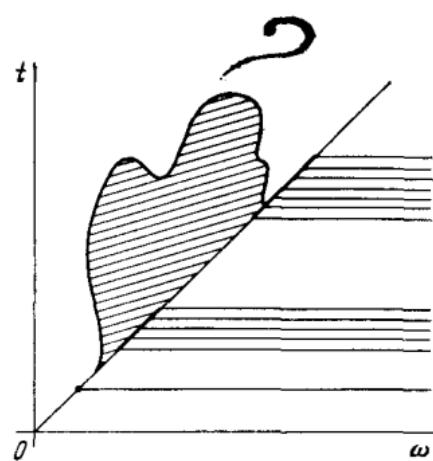


Рис. 19

Предсказуемые множества — почти то же самое, но прямая $t = \omega$ отнесена не к верхней половине, а к нижней (рис. 19; направо идут замкнутые лучи, а на том уровне t , где нет луча; там и точка (t, t) не принадлежит множеству).

В частности, сама случайная функция $\xi_t(\omega)$ прогрессивно измерима, но не предсказуема, потому что множество $\{(t, \omega) : \xi_t(\omega) = 1\}$ имеет вид, указанный на рис. 20 (биссектриса включается в множество).

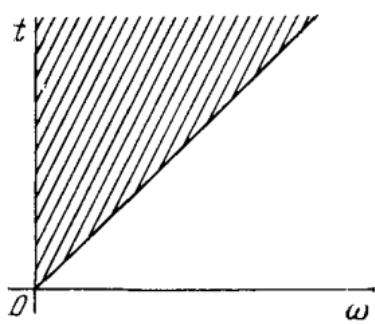


Рис. 20

5. Еще раз напомним, что введенные в этой главе понятия — чисто теоретико-множественные и никак не связаны с вероятностью и мерой, поэтому и глава такая короткая.

МАРТИНГАЛЫ

§ 7.1. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство; $\mathcal{F}_t, t \in T \subseteq R^1$, — неубывающее семейство σ -алгебр ($\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$). Случайная функция $\xi_t, t \in T$, называется *мартингалом* относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , если

- a) случайная функция ξ_t согласована с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t (т. е. ξ_t при любом t \mathcal{F}_t -измеримо);
- б) для любых $s, t \in T, s \leq t$, почти наверное

$$\xi_s = \mathbf{M}(\xi_t | \mathcal{F}_s). \quad (1)$$

Согласно определению условного математического ожидания (см. Феллер, 1967, т. 2), мы считаем, что $\mathbf{M}\xi_t$ конечно при всех t .

Естественно, раз речь идет о математических ожиданиях, ξ_t — числовая или векторная случайная функция.

Условное математическое ожидание относительно \mathcal{F}_s по определению — \mathcal{F}_s -измеримая случайная величина такая, что выполнено определенное интегральное соотношение. Поэтому с учетом а) условие б) можно переписать так:

$$\int_A \xi_s d\mathbf{P} = \int_A \xi_t d\mathbf{P} \quad (2)$$

для любых $s, t \in T, s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$.

Случайная функция $\xi_t, t \in T$, называется *субмартингалом* относительно данного семейства σ -алгебр, если выполнены условия а) и

- б') для любых $s, t \in T, s \leq t$, почти наверное

$$\xi_s \leq \mathbf{M}(\xi_t | \mathcal{F}_s); \quad (3)$$

супермартингалом, если вместо условия б) выполняется

б'') для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, почти наверное

$$\xi_s \geq \mathbf{M}(\xi_t | \mathcal{F}_s). \quad (4)$$

Суб- и супермартингалы рассматриваются только принимающие значения из \mathbb{R}^1 (или из расширенной числовой прямой).

Условие б') (соответственно б'') можно переписать в интегральном виде:

$$\int_A \xi_s d\mathbf{P} \leq \int_A \xi_t d\mathbf{P} \quad (5)$$

для $s, t \in T$, $s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$ (соответственно \geq). Мартингал, принимающий значения в \mathbb{R}^1 , является одновременно суб- и супермартингалом; если субмартингал взять с обратным знаком, получится супермартингал.

Первый пример мартингала — симметричное случайное блуждание по целочисленным точкам прямой (мы его рассматривали в п. I § 6.1). Его можно рассматривать как суммарный выигрыш одного из игроков в игру с подбрасыванием монеты при ставке 1 после n партий. Вообще любой мартингал относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_n , связанного с последовательными подбрасываниями монеты, можно интерпретировать как суммарный выигрыш одного из игроков в орлянку, если ставка в каждой партии назначается в зависимости от результатов предыдущих партий ($\xi_0 \equiv \text{const}$ интерпретируется как начальная плата за участие в игре).

Термин *мартингал* был введен в 1939 г. Ж. Виллем. Французское слово *martingale* означает часть конской упряжи — ремень, не позволяющий лошади вздергивать голову; но оно означает также удвоение ставки при проигрыше. По-видимому, последовательность суммарных выигрышей игрока, пользующегося этим приемом, — простейший пример мартингала, не являющегося процессом с независимыми приращениями.

2. Примеры мартингалов.

a) Винеровский процесс w_t , $t \geq 0$, выходящий из нуля ($w_0 = 0$), является мартингалом относительно семейства порожденных им σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$. Действительно, он тривиальным образом согласован с $\mathcal{F}_{\leq t}$, и при $0 \leq s \leq t$ почти наверное

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(w_t | \mathcal{F}_{\leq s}) &= w_s + \mathbf{M}(w_t - w_s | \mathcal{F}_{\leq s}) = \\ &= w_s + \mathbf{M}(w_t - w_s) = w_s, \end{aligned}$$

потому что случайная величина $w_t - w_s$ независима от всех событий σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq s}$. (Это вытекает из

того, что $w_t - w_s$ не зависит от любого конечного числа порождающих эту σ -алгебру случайных величин w_{t_1}, \dots, w_{t_n} , $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s$.)

Совершенно так же получается, что пуассоновский процесс ξ_t , $t \geq 0$, $\xi_0 = 0$, после вычитания из него *at* (его математического ожидания) становится мартингалом; и вообще, если ξ_t , $t \geq 0$, $\xi_0 = 0$, — процесс с независимыми приращениями, $M\xi_t = 0$, то это мартингал.

Следующая задача показывает, что мартингал — что-то промежуточное между процессом с независимыми приращениями с нулевым средним и процессом с некоррелированными приращениями.

Задача 1. Пусть ξ_t , $t \in T$, — мартингал относительно семейства \mathcal{F}_t , $M|\xi_t|^2 < \infty$. Докажите, что ξ_t имеет некоррелированные приращения.

б) Пусть ξ_t , $0 \leq t < \infty$, $\xi_0 = 0$, $M\xi_t = 0$, — процесс с независимыми приращениями, $M(\xi_t - \xi_s)^2 = F(t) - F(s)$ при $0 \leq s \leq t$. Тогда $\xi_t^2 - F(t)$ — мартингал относительно $\mathcal{F}_{\leq t}$. Согласованность процесса с семейством σ -алгебр тривиальна; далее,

$$\begin{aligned} M(\xi_t^2 - F(t) | \mathcal{F}_{\leq s}) &= \\ &= M[\xi_s^2 + 2\xi_s(\xi_t - \xi_s) + (\xi_t - \xi_s)^2 - F(t) | \mathcal{F}_{\leq s}] = \\ &= \xi_s^2 + 2\xi_s M(\xi_t - \xi_s | \mathcal{F}_{\leq s}) + M[(\xi_t - \xi_s)^2 | \mathcal{F}_{\leq s}] - F(t) = \\ &= \xi_s^2 + M(\xi_t - \xi_s)^2 - F(t) = \xi_s^2 - F(s) \end{aligned}$$

почти наверное при $0 \leq s \leq t$.

В частности, для винеровского процесса w_t , $0 \leq t < \infty$, $w_0 = 0$, мартингалом относительно $\mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{w_s, s \leq t}$ является $w_t^2 - t$, $t \geq 0$.

в) Если ξ — случайная величина, $M|\xi| < \infty$, \mathcal{F}_t , $t \in T \subseteq R^1$, — неубывающее семейство σ -алгебр, то $\xi_t = M(\xi | \mathcal{F}_t)$, $t \in T$, — мартингал: для $s \leq t$

$$M(\xi_t | \mathcal{F}_s) = M(M(\xi | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = M(\xi | \mathcal{F}_s) = \xi_s.$$

Обобщением этого примера служит пример п. 10 § 1.2; только в том примере $T = \mathfrak{F}$ — не подмножество R^1 и вообще не линейно упорядоченное, а только частично упорядоченное множество.

г) Следующий пример связан с плотностями бесконечномерных распределений. Пусть на произвольном

пространстве X задано неубывающее семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$, и на σ -алгебре \mathcal{F} , содержащей все \mathcal{F}_t , заданы две вероятностные меры μ и μ' . Пусть мера μ' абсолютно непрерывна относительно μ на каждой из σ -алгебр \mathcal{F}_t ; обозначим соответствующую плотность через $h_t(x)$. Функция $h_t(x)$, если ее рассматривать как случайную функцию на вероятностном пространстве (X, \mathcal{F}, μ) , оказывается мартингалом. Действительно, плотность $h_t(x)$ при фиксированном t — это функция, измеримая относительно \mathcal{F}_t и такая, что для любого $A \in \mathcal{F}_t$

$$\int_A h_t(x) \mu(dx) = \mu'(A).$$

Согласованность $h_t(x)$ с семейством \mathcal{F}_t есть; остается проверить (1) или, что то же, (2). Но если $A \in \mathcal{F}_s$, то также $A \in \mathcal{F}_t$, и

$$\int_A h_s(x) \mu(dx) = \mu'(A) = \int_A h_t(x) \mu(dx).$$

В частности, мы можем в качестве X взять X^T , $\mathcal{F} = \mathcal{X}^T$, а в качестве неубывающего семейства σ -алгебр — последовательность $\mathcal{X}^{T_1}(X^T) \subseteq \mathcal{X}^{T_2}(X^T) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}^{T_n}(X^T) \subseteq \dots$, где $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \dots$ — конечные подмножества T (см. § 5.3). Мы получаем, что плотности $h_{T_1}(x), h_{T_2}(x), \dots, h_{T_n}(x), \dots$ на пространстве $(X^T, \mathcal{X}^T, \mu)$ образуют мартингал. Другое выражение того же факта: случайные величины $\pi_{T_n} = h_{T_n}(\xi), n = 1, 2, \dots$, на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ образуют мартингал относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{T_n} = \sigma\{\xi_t, t \in T_n\}, n = 1, 2, \dots$.

3. Построить сколько угодно примеров субмартингалов (и супермартингалов) нам дает возможность следующая

Микротеорема. Пусть ξ_t , $t \in T$, — мартингал относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$; пусть f — выпуклая вниз числовая функция такая, что существует $Mf(\xi_t)$. Тогда $f(\xi_t)$, $t \in T$, — субмартингал.

Доказательство. Согласованность $f(\xi_t)$ с семейством \mathcal{F}_t проверять не нужно; проверим, что для $f(\xi_t)$ выполнено неравенство (5), т. е. что для любых

$s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$

$$\int_A f(\xi_s) d\mathbf{P} \leq \int_A f(\xi_t) d\mathbf{P}. \quad (6)$$

Из выпуклости $f(x)$ вниз следует существование для каждого x_0 опорной прямой $y = f(x_0) + C(x_0)(x - x_0)$, лежащей под графиком $y = f(x)$ (рис. 21). (В качестве $C(x_0)$ можно взять, например, правую производную в точке x_0 .) Воспользуемся этим для ξ_s в качестве x_0 , ξ_t в качестве x ; получим

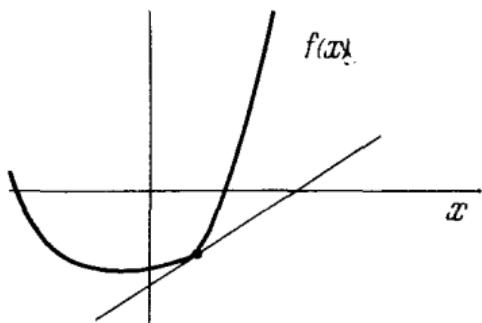
$$f(\xi_t) \geq f(\xi_s) + C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s).$$


Рис. 21

Идея состоит в том, чтобы проинтегрировать это неравенство по множеству A и получить (6). Однако будем осторожнее: интеграл $\int_A C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s) d\mathbf{P}$, может быть, расходится из-за неограниченности функции $C(\xi_s)$; поэтому возьмем интеграл лишь по множеству $A_N = A \cap \{|C(\xi_s)| \leq N\}$:

$$\int_{A_N} f(\xi_t) d\mathbf{P} \geq \int_{A_N} f(\xi_s) d\mathbf{P} + \int_{A_N} C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s) d\mathbf{P}.$$

Второй интеграл в правой части здесь равен нулю; действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \chi_{A_N} C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s) &= \mathbf{MM} [\chi_{A_N} C(\xi_s)(\xi_t - \xi_s) | \mathcal{F}_{\leq s}] = \\ &= \mathbf{M} [\chi_{A_N} C(\xi_s) \mathbf{M} (\xi_t - \xi_s | \mathcal{F}_{\leq s})] = 0 \end{aligned}$$

почти наверное. Отсюда

$$\int_{A_N} f(\xi_s) d\mathbf{P} \geq \int_{A_N} f(\xi_t) d\mathbf{P};$$

устремляя N к бесконечности, получаем (6).

Микротеорема доказана.

Заметим, что эта микротеорема годится также для мартингалов с векторными значениями, и доказательство остается тем же; только вместо *опорной прямой*

нужно использовать опорную плоскость или гиперплоскость.

Из одного только винеровского процесса w_t , $t \geq 0$, $w_0 = 0$, получаем множество примеров субмартингалов: $|w_t|$, w_t^2 , w_t^4 , e^{cw_t} , $e^{cw_t^2}$ (последнее при $0 \leq t < 2/c$); супермартингал $w_t \wedge c$ (функция $y = x \wedge c$ выпукла вверх).

4. Пусть w_t , $t \geq 0$, $w_0 = 0$, — r -мерный винеровский процесс, $f(x)$ — непрерывная супергармоническая функция в R^r (т. е. непрерывная функция, значение которой в каждой точке x не меньше среднего ее значений по любой сфере с центром x). Если $\mathbf{M}f(w_t)$ при положительных t существует, то $f(w_t)$, $t \geq 0$, — супермартингал относительно семейства $\mathcal{F}_{\leq t}$.

В одномерном случае это вытекает из результатов п. 3, потому что все супергармонические функции на R^1 — выпуклые вверх; приведем доказательство для многомерного случая. Для $0 \leq s \leq t$ почти наверное $\mathbf{M}(f(w_t) | \mathcal{F}_{\leq s}) = \varphi(w_s)$, где

$$\varphi(x) = [2\pi(t-s)]^{-r/2} \int_{R^r} e^{-|y-x|^2/[2(t-s)]} f(y) dy$$

(докажите, пользуясь конечномерными распределениями). Интегрирование по R^r можно заменить интегрированием функции f по сферам: $\{y: |y-x|=\rho\}$ и интегрированием результата с каким-то весом по ρ ; каждый интеграл по сфере не превосходит интеграла от значения $f(x)$ функции f в центре сферы, так что

$$\varphi(x) \leq [2\pi(t-s)]^{-r/2} \int_{R^r} e^{-|y-x|^2/[2(t-s)]} f(y) dy = f(x).$$

Отсюда вытекает, что $f(w_s) \geq \mathbf{M}(f(w_t) | \mathcal{F}_s)$.

В частности, в двумерном случае супермартингалом является $\eta_t = -\ln|w_t - x_0|$, а в r -мерном ($r \geq 2$) $\eta_t = 1/|w_t - x_0|^{r-2}$, потому что $f(x) = -\ln|x-x_0|$, $f(x) = 1/|x-x_0|^{r-2}$ — супергармонические функции в соответствующих пространствах (мы полагаем $f(x_0) = +\infty$, так что η_t может принимать значение $+\infty$, но $\mathbf{P}\{\eta_t = \infty\} = \mathbf{P}\{w_t = x_0\} = 0$ при $t > 0$).

5. Задача 2. Для того чтобы последовательность ξ_n была мартингалом, необходимо и достаточно, чтобы при всех n почти наверное $\mathbf{M}(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \xi_n$. Докажите.

§ 7.2. Компенсаторы

1. Понятие *компенсатора* и связанные с ним понятия составляют важную часть аппарата, используемого для учета зависимости будущего от прошлого. Эти понятия, хотя и без разработанной в полном объеме терминологии, широко используются в исследованиях по теории случайных процессов.

Прежде чем вводить их, приведем пару теорем.

Микротеорема 1. Пусть ξ_t , $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ — мартингал относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{t_0} \subseteq \mathcal{F}_{t_0+1} \subseteq \mathcal{F}_{t_0+2} \subseteq \dots$. Если случайная функция ξ_t предсказуема относительно этого семейства σ -алгебр, то почти наверное ξ_t является константой, не зависящей ни от t , ни от ω .

Доказательство. Мы знаем, что предсказуемая случайная функция равна какой-то константе с в левом конце t_0 множества моментов времени. Докажем, что $P\{\xi_t = c\} = 1$.

Пишем цепочку равенств, выполненных с вероятностью 1:

$$\begin{aligned} c &\equiv \xi_{t_0} = M(\xi_{t_0+1} | \mathcal{F}_{t_0}) = \xi_{t_0+1} = \\ &= M(\xi_{t_0+2} | \mathcal{F}_{t_0+1}) = \xi_{t_0+2} = \dots \end{aligned}$$

(используем тот факт, что ξ_{t+1} измеримо относительно \mathcal{F}_t , и условное математическое ожидание почти наверное равняется самой случайной величине).

Теорема. Пусть ξ_t , $t \geq t_0$, — мартингал относительно неубывающего семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \geq t_0$. Если случайная функция ξ_t предсказуема, а ее реализации непрерывны справа и имеют ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке, то с вероятностью 1 $\xi_t = c$, где c — какая-то константа.

Не будем приводить доказательство, оно сложно, его можно найти в книге Липцера и Ширяева («Теория мартингалов», 1986). Приведем более простой вариант теоремы, относящийся к случаю, который будет дальше использоваться.

Микротеорема 2. Пусть ξ_t , $t \geq t_0$, — предсказуемый мартингал, реализации которого удовлетворяют условию Липшица с константой L (неслучайной): $|\xi_t - \xi_s| \leq L|t - s|$ (это обеспечивает и ограниченность вариации, и непрерывность). Тогда ξ_t почти наверное равно константе.

Доказательство. Как и в случае дискретного времени, $\xi_{t_0}(\omega) \equiv c$. Докажем для любого $t > t_0$, что $\mathbf{P}\{\xi_t = \xi_{t_0}\} = 1$. Выберем произвольное разбиение $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ отрезка от t_0 до t ; имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_t - \xi_{t_0})^2 &= \mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})\right)^2 = \\ &= \mathbf{M} \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \mathbf{M}(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})(\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j}) \end{aligned}$$

(рассматриваем случай одномерного, причем действительного ξ_t). Первая сумма, а с ней и ее математическое ожидание не превосходит $\sum_{i=0}^{n-1} L^2(t_{i+1} - t_i)^2 \leq L^2 \max_i (t_{i+1} - t_i) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)$. Вторая сумма равна нулю, так как мартингал имеет некоррелированные приращения. Итак, $\mathbf{M}(\xi_t - \xi_{t_0})^2 \leq L^2(t - t_0) \max_i (t_{i+1} - t_i)$. Так как разбиение можно взять произвольно мелким, правая часть может быть сделана сколь угодно малой, $\mathbf{M}(\xi_t - \xi_{t_0})^2 = 0$, и $\mathbf{P}\{\xi_t = \xi_{t_0}\} = 1$.

2. Теперь дадим определение компенсатора. Пусть η_t , $t \in T$, — случайная функция, согласованная с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t , принимающая числовые или векторные значения. Случайная функция $\tilde{\eta}_t$, $t \in T$, называется *компенсатором* случайной функции η_t , если разность $\eta_t - \tilde{\eta}_t$, $t \in T$, является мартингалом относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t ;

случайная функция $\tilde{\eta}_t$, $t \in T$, предсказуема; в случае непрерывного времени ее реализации непрерывны справа по t и имеют ограниченную вариацию на любом конечном отрезке, содержащемся в T (в случае T , состоящего из целых чисел, это требование бессодержательно и всегда выполнено).

Как и в определении мартингала, здесь две части: одна связанная только со случайной функцией и σ -алгебрами — предсказуемость, непрерывность справа, ограниченность вариации; другая — связанная с вероятностями — мартингальность разности.

Конечно, мы вполне готовы к тому, что для некоторых случайных функций η_t компенсатор может не

существовать; и что компенсатор определяется не единственным образом. Теоремы, приведенные в п. 1, устанавливают почти единственность компенсатора: если $T = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots\}$ или T — отрезок или полуинтервал, содержащий левый конец, то два компенсатора $\tilde{\eta}_t$ и $\tilde{\eta}'_t$ одной и той же случайной функции с вероятностью 1 при всех значениях t различаются лишь на неслучайную константу.

Приведем примеры компенсаторов. Прежде всего, ясно, что компенсатором любого мартингала η_t является любая константа: $\tilde{\eta}_t = \tilde{\eta}_t(\omega) = c$; а компенсатором предсказуемой случайной функции η_t с непрерывными справа реализациями, имеющими ограниченную вариацию (в случае непрерывного времени), является она сама: $\tilde{\eta}_t = \eta_t$ — или она сама плюс произвольная константа. В частности, $\tilde{\eta}_t = \tilde{\eta}_t (+\text{const})$. Другие примеры мы можем получить, переформулировав в новых терминах некоторые примеры предыдущего параграфа. Так, пример б) п. 2 § 7.1: компенсатором квадрата процесса с независимыми приращениями ξ_t с $M\xi_t = 0$ служит указанная там неслучайная функция $F(t)$, если только она непрерывна справа.

Ясно, что компенсатор суммы равен сумме компенсаторов и что постоянный множитель можно вынести за знак компенсатора.

Задача 1. Пусть η_t , $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ — случайная функция, согласованная с данным неубывающим семейством σ -алгебр, $M|\eta_t| < \infty$. Докажите, что тогда у нее существует компенсатор, а именно:

$$\tilde{\eta}_t = \sum_{s=t_0}^{t-1} M(\eta_{s+1} - \eta_s | \mathcal{F}_s) (+\text{const}).$$

Задача 2. В случае непрерывного времени приведите пример случайной функции с $M|\eta_t| < \infty$, не имеющей компенсатора.

Задача 3*. Найдите компенсатор случайной функции w_t^3 , $t \geq 0$, где w_t — винеровский процесс, начинающийся из нуля.

3. Компенсатор играет в теории случайных процессов ту же роль, что математическое ожидание в теории случайных величин. Что здесь играет роль дисперсии (или ковариации)?

Пусть согласованные с данным семейством σ -алгебр случайные функции η_t , ζ_t имеют компенсаторы $\tilde{\eta}_t$, $\tilde{\zeta}_t$. Тогда *бикомпенсатором* η_t , ζ_t называется

случайная функция $\langle \eta, \zeta \rangle_t$, являющаяся компенсатором произведения $(\eta_t - \tilde{\eta}_t)(\zeta_t - \tilde{\zeta}_t)$:

$$\langle \eta, \zeta \rangle_t = \overline{(\eta - \tilde{\eta})(\zeta - \tilde{\zeta})_t}.$$

Так как $\tilde{\eta}_t, \tilde{\zeta}_t$ можно изменить на любую константу, то $\langle \eta, \zeta \rangle_t$ определяется неоднозначно; но эта неоднозначность тоже ограничивается прибавлением константы. Действительно, пусть $\tilde{\eta}'_t = \tilde{\eta}_t + c, \tilde{\zeta}'_t = \tilde{\zeta}_t + d$; тогда

$$\begin{aligned} (\eta_t - \tilde{\eta}'_t)(\zeta_t - \tilde{\zeta}'_t) &= (\eta_t - \tilde{\eta}_t - c)(\zeta_t - \tilde{\zeta}_t - d) = \\ &= (\eta_t - \tilde{\eta}_t)(\zeta_t - \tilde{\zeta}_t) - c(\zeta_t - \tilde{\zeta}_t) - d(\eta_t - \tilde{\eta}_t) + cd. \end{aligned}$$

Так как $\zeta_t - \tilde{\zeta}_t$ и $\eta_t - \tilde{\eta}_t$ — мартингалы, то все члены, прибавляемые к компенсатору первого слагаемого, — константы.

В частности, *квадратичным компенсатором* действительной случайной функции η_t называется случайная функция $\langle \eta, \eta \rangle_t$ (она оказывается неубывающей).

§ 7.3. Неравенства и равенства, связанные с мартингалами

В этом параграфе мы рассмотрим математические ожидания значений мартингалов и полумартингалов в случайный момент времени, причем в марковский момент.

1. Пусть T — конечное множество; для простоты обозначений будем считать, что $T = \{1, 2, \dots, N\}$. Пусть $\xi_n, n = 1, 2, \dots, N$ — субмартингал относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N$.

Задача 1. Пусть τ — марковский момент, принимающий значения $1, 2, \dots, N$. Докажите, что почти наверное

$$\xi_\tau \leq M(\xi_N | \mathcal{F}_\tau). \quad (1)$$

Если проинтегрировать (1) по всему Ω , получим $M\xi_\tau \leq M\xi_N$.

Микротеорема задачи 1 довольно простая; следующая сложнее.

Микротеорема 1. Пусть ξ_n — субмартингал, τ — марковский момент, принимающий значения

1, 2, ..., N. Тогда

$$\mathbf{M}^{\xi_1} \leqslant \mathbf{M}^{\xi_{\tau}}. \quad (2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\xi_{\tau}} &= \int_{\{\tau=1\}} \xi_1 d\mathbf{P} + \int_{\{\tau=2\}} \xi_2 d\mathbf{P} + \dots + \int_{\{\tau=N\}} \xi_N d\mathbf{P} = \\ &= \int_{\Omega} \xi_1 d\mathbf{P} - \int_{\{\tau>1\}} \xi_1 d\mathbf{P} + \int_{\{\tau>1\}} \xi_2 d\mathbf{P} - \int_{\{\tau>2\}} \xi_2 d\mathbf{P} + \dots \\ &\dots + \int_{\{\tau>n-1\}} \xi_n d\mathbf{P} - \int_{\{\tau>n\}} \xi_n d\mathbf{P} + \dots + \int_{\{\tau>N-1\}} \xi_N d\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\{\tau > n-1\} = \Omega \setminus \{\tau \leqslant n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau>n-1\}} \xi_n d\mathbf{P} &= \\ &= \int_{\{\tau>n-1\}} \mathbf{M}(\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) d\mathbf{P} \geqslant \int_{\{\tau>n-1\}} \xi_{n-1} d\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем (2).

Так же легко доказать, что (почти наверное)

$$\xi_1 \leqslant \mathbf{M}(\xi_{\tau} | \mathcal{F}_1). \quad (5)$$

Формулы (1), (5) подсказывают нам, что имеет место

Микротеорема 2. Пусть ξ_n — субмартингал, τ и σ — два марковских момента, $1 \leqslant \tau \leqslant \sigma \leqslant N$. Тогда почти наверное

$$\xi_{\tau} \leqslant \mathbf{M}(\xi_{\sigma} | \mathcal{F}_{\tau}). \quad (6)$$

Задача 2. Докажите эту микротеорему.

Из (6) вытекает, в частности, что $\mathbf{M}^{\xi_{\tau}} \leqslant \mathbf{M}^{\xi_{\sigma}}$ для марковских моментов τ, σ , $\tau \leqslant \sigma$.

Для мартингалов неравенство (6), естественно, обращается в равенство; для супермартингалов оно меняет знак.

2. Посмотрим, можно ли перенести неравенства (для мартингалов — равенства) п. 1 на случай непрерывного времени. Пусть T — отрезок, интервал или полуинтервал. Очевидно, идея должна состоять в том, чтобы приблизить произвольные марковские моменты τ, σ марковскими моментами $\tau_n \rightarrow \tau$, $\sigma_n \rightarrow \sigma$, принимающими при каждом фиксированном n конечное число значений, воспользоваться для них результатами

п. 1; затем, воспользовавшись свойствами непрерывности реализаций ξ_t , получить $\xi_{\tau_n} \rightarrow \xi_\tau$, $\xi_{\sigma_n} \rightarrow \xi_\sigma$ и вывести то, что нужно, при помощи теорем о предельном переходе под знаком математического ожидания. При этом придется предположить реализации ξ_t непрерывными не то справа, не то слева — в зависимости от того, будет ли τ_n сходиться к τ сверху или снизу. После некоторого размышления становится понятным, что τ_n должно сходиться к τ сверху, и, стало быть, речь должна идти о непрерывности справа; ведь, скажем, $\tau_n = [2^n \tau] / 2^n$, вообще говоря, не марковский момент, а $\tau_n = ([2^n \tau] + 1) / 2^n$ — марковский момент в силу задачи 9 § 6.1.

Итак, будем предполагать, что реализации ξ_t непрерывны справа. Оказывается, это еще не обеспечивает сохранения результатов п. 1.

Например, пусть w_t , $t \geq 0$, — винеровский процесс, выходящий из нуля. Положим $\tau = \min\{t: w_t = -1\}$ (если w_t не достигает -1 , полагаем $\tau = \infty$). Это — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$.

Задача 3. Докажите, что τ с вероятностью 1 конечно.

Выбросим из пространства элементарных событий те элементарные события, для которых $\tau = \infty$; тогда τ будет конечным марковским моментом.

Мы видим, что $0 = w_0 \neq M(w_\tau | \mathcal{F}_{\leq 0}) = Mw_\tau = -1$.

3. Таким образом, для перенесения результатов п. 1 на непрерывный случай нужно накладывать некоторые дополнительные условия, кроме непрерывности реализаций справа. Эти условия связаны с применением теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. Некоторые результаты будут связаны с теоремой о мажорируемой сходимости или, общее, с применением равномерной интегрируемости; другие — с применением леммы Фату (естественно, это будут результаты типа неравенств). Мы не можем надеяться получить что-либо интересное из теоремы о монотонном предельном переходе, так как соответствующие результаты для суб- или супермартингалов с монотонными реализациями тривиальны.

Микротеорема 3. Пусть T — отрезок или полуинтервал с правым концом t_{\max} ; ξ_t , $t \in T$, — мартингал относительно семейства \mathcal{F}_t , $t \in T$, с непрерывными справа реализациями. Пусть τ , σ — марковские мо-

менты, $\tau \leq \sigma \leq t_{\max}$. Тогда почти наверное

$$\xi_\tau = \mathbf{M}(\xi_\sigma | \mathcal{F}_\tau).$$

Доказательство. Прежде всего, $\xi_\tau - \mathcal{F}_\tau$ -измеримая случайная величина в силу задачи 1 § 6.2. Поэтому достаточно доказать, что

$$\int_A \xi_\tau dP = \int_A \xi_\sigma dP \quad (7)$$

для любого события $A \in \mathcal{F}_\tau$ (при этом мы заодно докажем, что ξ_τ и ξ_σ интегрируемы). Положим $\tau_n = ([2^n \tau] + 1)/2^n$, если $([2^n \tau] + 1)/2^n \in [-n, t_{\max}]$; если $([2^n \tau] + 1)/2^n$ попадает левее $-n$, полагаем $\tau_n = -n$; если же правее t_{\max} , то $\tau_n = t_{\max}$. Аналогично определим $\sigma_n = (-n) \vee ([2^n \sigma] + 1)/2^n \wedge t_{\max}$. Ясно, что $\tau_n \leq \sigma_n$, $\tau_n \downarrow \tau$, $\sigma_n \downarrow \sigma$ при $n \rightarrow \infty$ для всех ω . Согласно задаче 9 § 6.1, τ_n и σ_n — марковские моменты; они принимают конечное число значений, поэтому для них имеет место формула (6):

$$\xi_{\tau_n} = \mathbf{M}(\xi_{\sigma_n} | \mathcal{F}_{\tau_n}). \quad (8)$$

Так как $\tau \leq \tau_n$, то событие $A \in \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$, и из (8) получаем

$$\int_A \xi_{\tau_n} dP = \int_A \xi_{\sigma_n} dP. \quad (9)$$

Из непрерывности реализаций справа вытекает $\xi_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tau_n}$, $\xi_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\sigma_n}$. Покажем, что в формуле (9) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Имеем почти наверное (опять-таки согласно результатам п. 1)

$$\xi_{\tau_n} = \mathbf{M}(\xi_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\tau_n}), \quad \xi_{\sigma_n} = \mathbf{M}(\xi_{t_{\max}} | \mathcal{F}_{\sigma_n}).$$

Согласно задаче 12 § 1.2, случайные величины ξ_{τ_n} , ξ_{σ_n} равномерно интегрируемы, и предельный переход под знаком интеграла закончен. Получаем формулу (7).

Микротеорема доказана.

Задача 4. Пусть ξ_t , $t \geq 0$, — супермартингал с непрерывными справа реализациями, $\xi_t \geq 0$ при всех t . Докажите, что $M\xi_0 \geq M\xi_\tau$ для любого конечного марковского момента τ .

Задача 5. Для винеровского процесса w_t , $t \geq 0$, с непрерывными траекториями, выходящего из нуля, найдите вероятность того, что w_t достигнет раньше точки a , чем b ($a < 0 < b$).

4. Неравенство Колмогорова. Неравенство Колмогорова — обобщение неравенства Чебышёва. Первоначально оно было получено А. Н. Колмогоровым для сумм независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием, но затем, как и неравенство Чебышёва, значительно обобщено.

Микротеорема 4. Пусть T — конечное множество (с максимальным элементом t_{\max}), ξ_t — субmartингал относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$; пусть ξ_t принимает только неотрицательные значения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon \right\} \leq M \xi_{t_{\max}} / \varepsilon \quad [= \max_{t \in T} M \xi_t / \varepsilon].$$

Доказательство. Положим $\tau = \min \{t \in T : \xi_t \geq \varepsilon\}$, а если таких t нет, положим $\tau = t_{\max}$. Это — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{\xi_s, s \leq t}$ (задача 1 § 6.1). Но из того, что случайная функция ξ_t согласована с \mathcal{F}_t , $t \in T$, вытекает, что $\mathcal{F}_{\leq t} \subseteq \mathcal{F}_t$; поэтому τ — марковский момент также относительно семейства \mathcal{F}_t , $t \in T$.

Далее, $\max_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\xi_\tau \geq \varepsilon$; по чебышёвскому неравенству для неотрицательной случайной величины ξ_τ

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon \right\} = \mathbf{P} \left\{ \xi_\tau \geq \varepsilon \right\} \leq M \xi_\tau / \varepsilon \leq M \xi_{t_{\max}} / \varepsilon.$$

Для неотрицательных *супремартингалов* неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon \right\} \leq \max_{t \in T} M \xi_t / \varepsilon$$

остается верным, но при доказательстве используется неравенство $M \xi_\tau \leq M \xi_{t_{\min}} (= \max_{t \in T} M \xi_t)$.

5. Теперь посмотрим, как выглядит неравенство Колмогорова для бесконечного T .

Микротеорема 5. Пусть ξ_t , $t \in T \subseteq \mathbb{R}^1$, — неотрицательный субmartингал с непрерывными справа реализациями (или с непрерывными слева, или сепарабельный). Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon \right\} \leq \sup_{t \in T} M \xi_t / \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq \dots$ — возрастающая последовательность конечных подмножеств T такая, что для каждой точки $t \in T$

существует последовательность t_n , сходящаяся справа к t , причем каждое $t_n \in T_n$. Тогда $\sup_{t \in T} \xi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in T_n} \xi_t$.

Из того, что $\sup_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon$, не вытекает, что $\max_{t \in T_n} \xi_t \geq \varepsilon$ при достаточно больших n ; однако сумма неубывающей последовательности событий $\{\max_{t \in T_n} \xi_t \geq \varepsilon\}$ содержит в себе событие $\{\sup_{t \in T} \xi_t > \varepsilon\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\sup_{t \in T} \xi_t > \varepsilon\} &\leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\max_{t \in T_n} \xi_t \geq \varepsilon\}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max_{t \in T_n} \xi_t \geq \varepsilon\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in T_n} \mathbf{M}\xi_t / \varepsilon \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M}\xi_t / \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь оценим $\mathbf{P}\{\sup_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\sup_{t \in T} \xi_t \geq \varepsilon\} &= \lim_{\varepsilon' \uparrow \varepsilon} \mathbf{P}\{\xi_t > \varepsilon'\} \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon' \uparrow \varepsilon} \sup_{t \in T} \mathbf{M}\xi_t / \varepsilon' = \sup_{t \in T} \mathbf{M}\xi_t / \varepsilon. \end{aligned}$$

Микротеорема доказана.

6. Микротеорема п. 3 § 1 позволяет нам получить *неравенство Колмогорова для мартингалов*:

если ξ_t , $t \in T$, — мартингал с непрерывными справа реализациами, f — неотрицательная выпуклая вниз функция, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in T} f(\xi_t) \geq \varepsilon\} \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M}f(\xi_t) / \varepsilon. \quad (10)$$

В частности, взяв функцию $f(x) = (x - m)^2$, где $m = \mathbf{M}\xi_t$ ($= \text{const}$), получим для $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in T} |\xi_t - m| \geq \varepsilon\} \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M}(\xi_t - m)^2 / \varepsilon^2. \quad (11)$$

Классическое неравенство Чебышёва дает лишь

$$\mathbf{P}\{|\xi_t - m| \geq \varepsilon\} \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M}(\xi_t - m)^2 / \varepsilon^2.$$

Неравенство (11) сохраняется и для мартингалов с векторными значениями, но участвующую в нем дисперсию нужно тогда записывать как $\mathbf{M}|\xi_t - m|^2$. Другой частный случай неравенства (10) получим, взяв

$f(x) = e^{cx}$, $c > 0$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} \xi_t \geq K \right\} \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M} e^{c \xi_t} / e^{cK};$$

еще другие — взяв $f(x) = e^{cx}$, $c < 0$, или $f(x) = |x|$:

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in T} |\xi_t| \geq \varepsilon \right\} \leq \sup_{t \in T} \mathbf{M} |\xi_t| / \varepsilon,$$

или $f(x) = |x|^x$, $x > 1$, в частности, x^4 , и т. д.

Задача 6. Воспользовавшись неравенством Колмогорова (10) с $f(x) = e^{cx^2/2}$, $c > 0$, выведите как можно более точную оценку для $\mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s \leq t} |w_s| \geq \delta \right\}$, где w_t — винеровский процесс, выходящий из нуля.

Закон повторного логарифма для винеровского процесса.

Задача 7*. Пусть w_t , $t \geq 0$, — выходящий из нуля винеровский процесс. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существует число T такое, что $|w_t| < f^\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon) \sqrt{2t \ln \ln t}$ при $t \geq T$.

Указание. Для $Q > 1$ рассмотрите счетное число событий $A_n = \{|w_t| > f^\varepsilon(Q^n)\}$ при каком-то $t \in [0, Q^{n+1}]$. Используя оценку задачи 6 и лемму Бореля—Кантелли и подобрав соответствующим образом Q , получите утверждение задачи.

Задача 8*. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существуют сколь угодно большие t такие, что $|w_t| > f_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon) \sqrt{2t \ln \ln t}$.

Указание. Рассмотрите счетное число независимых событий

$$B_n = \left\{ |w_{Q^{n+1}} - w_{Q^n}| > f_\varepsilon(Q^{n+1}) + f_\varepsilon(Q^n) \right\}.$$

Задачи 7*, 8* можно суммировать следующим образом: с вероятностью 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| / \sqrt{2t \ln \ln t} = 1.$$

Локальный закон повторного логарифма.

Задача 9*. Докажите, что с вероятностью 1

$$\lim_{t \downarrow 0} |w_t| / \sqrt{2t \ln |\ln t|} = 1.$$

Задача 10*. Пусть $\xi_t = w_t + \int_0^t \psi_s ds$, $t \geq 0$, где $\int_0^t \psi_s^2 ds < \infty$. Докажите, что с вероятностью 1

$$\lim_{t \downarrow 0} |\xi_t| / \sqrt{2t \ln |\ln t|} = 1.$$

Задача 11. Докажите следующий вариант неравенства Колмогорова: пусть ξ_t , $t_0 \leq t \leq t_{\max}$, — согласованный с семейством σ -алгебр случайный процесс, обладающий непрерывными хотя бы с одной стороны реализациями (в случае непрерывного времени), компенсатором и квадратичным компенсатором; пусть $\xi_{t_0} = M\xi_{t_0}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq t_{\max}} |\xi_t - \tilde{\xi}_t| \geq \varepsilon \right\} \leq \frac{M [\langle \xi, \xi \rangle_{t_{\max}} - \langle \xi, \xi \rangle_{t_0}]^2}{\varepsilon^2}.$$

§ 7.4. Теорема о сходимости супермартингалов

1. Выведем еще одну оценку, относящуюся к мартингалам и супермартингалам. Пусть ξ_n , $n = 1, \dots, N$, — супермартингал относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_n , причем все $\xi_n \geq 0$. Рассмотрим положительные числа $c < d$ и обозначим через v число пересечений последовательностью ξ_1, \dots, ξ_N полосы от c до d

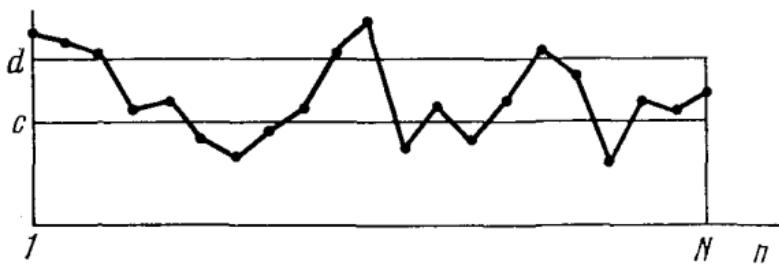


Рис. 22

в направлении снизу вверх. (Так, для реализации, изображенной на рис. 22, значение v равно 2.) Докажем, что

$$Mv \leq M\xi_1 / (d - c). \quad (1)$$

Для доказательства продолжим данный нам супермартингал, положив $\xi_{N+1} = \xi_N$, $\mathcal{F}_{N+1} = \mathcal{F}_N$; от этого он не перестанет быть супермартингалом. Определим марковские моменты $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2, \tau_2, \dots$ следующим образом. Положим σ_1 равным наименьшему из тех n от 1 до N , для которых $\xi_n \leq c$; если таких n нет, положим $\sigma_1 = N + 1$. Далее, τ_1 определим как наименьшее из тех n от $\sigma_1 + 1$ до N , для которых $\xi_n \geq d$; если таких n нет, $\tau_1 = N + 1$. Затем σ_2 определяется как $\min\{n > \tau_1 : \xi_n \leq c\}$ или как $N + 1$, если таких n нет; τ_2 так же определяется через σ_2 , как τ_1 через σ_1 , и т. д. Ясно, что $\sigma_k = \tau_k = N + 1$ при $2k > N$. На рис. 22 $\sigma_1 = 6$, $\tau_1 = 10$, $\sigma_2 = 12$, $\tau_2 = 16$, $\sigma_3 = 18$, τ_3 и все

следующие за ним равны $N + 1 = 22$. То, что это все марковские моменты, мы уже доказывали (см. задачу 2 § 6.1). С величиной v они связаны следующим образом: событие $\{v \geq k\}$ равносильно $\{\tau_k \leq N\}$.

Докажем, что $P\{\tau_1 \leq N\} \leq M\xi_1/d$, $P\{\tau_k \leq N\} \leq P\{\tau_{k-1} \leq N\} \cdot c/d$. Воспользовавшись определением условных вероятностей, можно написать

$$\begin{aligned} P\{\tau_k \leq N\} &= \sum_{n=1}^N P(\{\sigma_k = n\} \cap \{\tau_k \leq N\}) = \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{\{\sigma_k=n\}} P\{\tau_k \leq N | \mathcal{F}_n\} P(d\omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Чебышёвское неравенство дает нам почти наверное $P\{\tau_k \leq N | \mathcal{F}_n\} \leq P\{\xi_{\tau_k} \geq d | \mathcal{F}_n\} \leq M(\xi_{\tau_k} | \mathcal{F}_n)/d$. (3)

На множестве $\{\sigma_k = n\}$ случайная величина τ_k больше n ; отсюда на этом множестве $\xi_{\tau_k} = \xi_{\tau_k \vee n}$, и условное математическое ожидание в (3) почти наверное равно $M(\xi_{\tau_k \vee n} | \mathcal{F}_n) \leq \xi_n$ (последнее неравенство — по результатам предыдущего параграфа в применении к супермартингалам). На множестве интегрирования в (2) $\xi_n \leq c$; поэтому

$$P\{\tau_k \leq N\} \leq P\{\sigma_k \leq N\} \cdot c/d \leq P\{\tau_{k-1} \leq N\} \cdot c/d.$$

Что же касается $P\{\tau_1 \leq N\}$, то эта вероятность не превосходит $M\xi_{\tau_1}/d \leq M\xi_1/d$.

Итак, $P\{v \geq k\} \leq (c/d)^{k-1} M\xi_1/d$, откуда

$$Mv = \sum_{k=1}^{\infty} P\{v \geq k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (c/d)^{k-1} M\xi_1/d = M\xi_1/(d - c).$$

2. Посмотрим, какие следствия из этого можно вывести.

Теорема 1. Пусть ξ_t — неотрицательный супермартингал на счетном подмножестве T числовой оси относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$; $\sup_{t \in T} M\xi_t < \infty$. Тогда с вероятностью 1 выборочная функция ξ_t имеет конечные пределы слева и справа во всех предельных точках множества T (в том числе и в предельных точках, не принадлежащих T).

В частности, если T имеет своей предельной точкой $+\infty$, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t$, а если $-\infty$, то существует $\lim_{t \rightarrow -\infty} \xi_t$.

Доказательство. Для функции $f(t)$, определенной на бесконечном подмножестве T числовой оси, можно определить число пересечений полосы от c до d в направлении снизу вверх как верхнюю грань тех k , для которых существуют точки $s_1 < t_1 < s_2 < \dots \dots < t_{k-1} < s_k < t_k$ из множества T такие, что $f(s_i) \leq c$, $f(t_i) \geq d$. Разумеется, число пересечений полосы может быть равно нулю или бесконечности.

Если мы определим число пересечений v полосы от c до d для функции ξ_t , то это будет функция от ω (пока мы не можем сказать, что это случайная величина).

Занумеруем каким-нибудь образом все точки нашего счетного множества T : $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ Обозначим через v_n число пересечений снизу вверх полосы от c до d функцией ξ_t , определенной лишь на конечном множестве $\{t_1, \dots, t_n\}$. Легко понять, что v при любом ω — предел монотонно возрастающих к нему v_n . Так как v_n — случайные величины, причем для них выполнена оценка

$$Mv_n \leq M\xi_{\min(t_1, \dots, t_n)} / (d - c) \quad (0 < c < d),$$

то и v — случайная величина, и ее математическое ожидание удовлетворяет неравенству

$$Mv \leq \sup_{t \in T} M\xi_t / (d - c).$$

Во всяком случае, v с вероятностью 1 конечно. Взяв все интервалы (c, d) с положительными рациональными концами (а их счетное множество), получаем, что с вероятностью 1 выборочная функция пересекает снизу вверх любой интервал с рациональными концами только конечное число раз. Отсюда вытекает, что функция $\xi_t(\omega)$ не может совершать бесконечное число колебаний, и она должна иметь конечные или бесконечные односторонние пределы. Остается доказать, что с вероятностью 1 бесконечные пределы исключаются. Для того чтобы где-то был бесконечный предел, нужно, чтобы было хотя бы одно пересечение снизу вверх бесконечного числа из интер-

валов $(1, 2), (2, 4), \dots, (2^n, 2^{n+1}), \dots$. Из оценки $\mathbf{P}\{\nu \geq 1\} \leq \sup_{t \in T} M\xi_t/d$ вытекает, что сумма вероятностей сходится, и по лемме Бореля — Кантелли получаем, что с вероятностью 1 невозможно, чтобы осуществилось бесконечное число пересечений.

Это рассуждение не годится в наименьшей предельной точке T , если она не принадлежит T , так как для наличия бесконечного предела в этой точке нет необходимости в пересечении какой-либо полосы в направлении *снизу вверх*. Чтобы сделать его годным, дополним множество T элементом $-\infty$, по определению меньшим всех элементов T , положим $\xi_{-\infty} = \sup_{t \in T} M\xi_t$,

$\mathcal{F}_{-\infty} = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F}_t$ при любом t ; ξ_t остается супермартингалом и для $t \in \{-\infty\} \cup T$, и к нему мы уже можем применить наше рассуждение: для бесконечного предела в наименьшей предельной точке нужно, чтобы $\xi_t, t \in \{-\infty\} \cup T$, пересекло снизу вверх любую полосу (c, d) , $c \geq \xi_{-\infty}$.

Разумеется, теорема относится и к неотрицательным мартингалам.

Аналогичная теорема выполняется и для субмартингалов, но в ее доказательстве используются пересечения сверху вниз (см. Гихман и Скороход. Теория случайных процессов. Т. 1. — М.: Наука, 1971, гл. II, § 2).

Условие неотрицательности в теореме отбросить нельзя; пример — винеровский процесс.

3. Доказанную теорему мы можем перенести и на несчетное множество T — для случайных функций с реализациями, непрерывными справа (или слева); утверждается существование с вероятностью 1 конечных пределов слева (справа) в каждой точке, на $+\infty$ и на $-\infty$ (если имеет смысл о них говорить). Другой вариант перенесения теоремы на несчетное T : для стохастически непрерывного супермартингала существует стохастически эквивалентный ему с реализациями, непрерывными справа и имеющими конечный предел слева в каждой точке (и на $\pm\infty$).

4. В качестве приложения докажем теорему — вариант «в узком смысле» задачи 1 § 3.3.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ — неубывающая последовательность σ -алгебр; обозначим через \mathcal{F}_∞ наименьшую σ -алгебру, содержащую все \mathcal{F}_n . Пусть ξ — случайная величина с конеч-

ным математическим ожиданием. Тогда почти наверное

$$\mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_n). \quad (4)$$

Доказательство. Достаточно доказать (4) только для неотрицательных случайных величин, ибо, если это выполняется для случайных величин $\xi_+ = \xi \vee 0$ и $\xi_- = (-\xi) \vee 0$, оно выполняется и для ξ . Если $\xi \geq 0$, то, согласно теореме 1, предел в (4) почти наверное существует. Обозначим через η случайную величину, равную этому пределу, если он существует и конечен, и нулю в противном случае. Эта случайная величина измерима относительно \mathcal{F}_∞ ; она интегрируема как предел равномерно интегрируемой последовательности случайных величин (см. введение); поэтому достаточно проверить, что

$$\int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \eta d\mathbf{P} \quad (5)$$

для любого множества $A \in \mathcal{F}_\infty$. Достаточно доказать (5) для произвольного множества A из порождающей \mathcal{F}_∞ алгебры $\bigcup_n \mathcal{F}_n$. Для $A \in \mathcal{F}_n$ имеем

$$\begin{aligned} \int_A \eta d\mathbf{P} &= \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_k) d\mathbf{P} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_k) d\mathbf{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \xi d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались равномерной интегрируемостью и тем, что $A \in \mathcal{F}_k$, начиная с $k = n$, и интеграл от $\mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_k)$ равен интегралу от ξ .

Частный случай только что доказанной теоремы — соответствующее утверждение относительно условных вероятностей одного и того же события.

Задача 1. Пусть $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{F}_n \supseteq \dots$ — невозрастающая последовательность σ -алгебр; обозначим через \mathcal{F}_∞ пересечение всех этих σ -алгебр. Пусть ξ — случайная величина с конечным математическим ожиданием. Докажите, что тогда почти наверное

$$\mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\xi | \mathcal{F}_n).$$

5. Еще одно применение теоремы о сходимостиmartингалов — к плотностям мер — см. п. 2г) § 7.1,

а также в § 5.3. Так как последовательность π_{T_n} — неотрицательный маркинг, то с вероятностью 1 существует $\pi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{T_n}$.

Этот результат — некоторое ослабление и в то же время обобщение известной теоремы Лебега, согласно которой любая монотонная функция действительного переменного почти всюду дифференцируема. Действительно, пусть на отрезке $[0, 1]$ задана неубывающая функция f ; будем для простоты считать, что f — функция распределения. Дифференцируемость в точке x означает, что существует $\lim_{\substack{y \uparrow x, z \downarrow x}} (f(z) - f(y))/(z - y)$. Из нашей кон-

струкции мы выводим существование почти всюду не этого предела, а $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(k/2^n) - f((k-1)/2^n))/(1/2^n)$, где $(k-1)/2^n < x \leq k/2^n$. Для этого достаточно взять в качестве μ меру Лебега, в качестве μ' — меру, соответствующую неубывающей функции f , а в качестве σ -алгебр \mathcal{F}_n — конечные алгебры, порождаемые полуинтервалами $((k-1)/2^n, k/2^n]$, $k = 1, \dots, 2^n$.

6. Задача 2*. Пусть w_t , $t \geq 0$, — трехмерный винеровский процесс с непрерывными траекториями, выходящий из нуля. Докажите, что с вероятностью 1 существует $\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t| = \infty$ и что

для любой точки $x_0 \in R^3$ с вероятностью 1 процесс w_t ни при каком значении t не попадет в x_0 (при $x_0 = 0$ — не вернется в нуль ни при каком положительном t).

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 8.1. Марковские процессы и марковские семейства

В теории марковских процессов используется терминология, заимствованная из физики: пространство, в котором принимает значения процесс, называется *фазовым пространством* (или *пространством состояний*), а его точки — *состояниями*. Мы будем предполагать, что фазовое пространство — измеримое пространство (X, \mathcal{X}) , в котором все одноточечные множества измеримы.

1. Сначала определим, что такое переходная функция. Пусть имеется множество $T \subseteq R^1$. Функция $P(s, x, t, \Gamma)$, определенная для $s, t \in T$, $s \leq t$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$, называется *переходной функцией (марковской переходной функцией)*, если

- 1) при фиксированных s, x, t функция $P(s, x, t, \cdot)$ — вероятностная мера на σ -алгебре \mathcal{X} (вероятностная — т. е. $P(s, x, t, X) = 1$);
- 2) при фиксированных s, t, Γ функция измерима по x (относительно σ -алгебры \mathcal{X});
- 3) при $s = t$ это — единичная мера, сосредоточенная в точке x : $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$ (т. е. это мера, равная единице, когда $\Gamma \ni x$, и нулю, когда $\Gamma \not\ni x$);
- 4) для любых $s, t, u \in T$, $s \leq t \leq u$, $x \in X$ и $\Gamma \in \mathcal{X}$

$$P(s, x, u, \Gamma) = \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, \Gamma).$$

Последнее равенство называется *уравнением Чэпмена — Колмогорова*. Это — самое сложное из условий 1)—4).

Прежде чем приводить примеры, рассмотрим частные случаи дискретной и абсолютно непрерывной переходной функции. В дискретном случае для задания меры достаточно задать счетный набор чисел — меры всех одноточечных множеств. Поэтому переходная

функция определяется заданием матрицы вероятностей перехода (или переходной матрицы) P^{st} , зависящей от двух моментов времени $s \leq t$:

$$P^{st} = (p(s, x, t, y), x, y \in X),$$

$$p(s, x, t, y) = P(s, x, t, \{y\})$$

(элементы матрицы мы обозначаем буквой p малое, строки и столбцы нумеруем элементами X). Легко проверить, что условия 1)—4), налагаемые на переходную функцию, в дискретном случае превращаются в следующие:

1) матрица P^{st} — стохастическая, т. е. она состоит из неотрицательных элементов с суммой 1 в каждой строке: $\sum_y p(s, x, t, y) = 1$;

2) — отпадает как тривиально выполненное;

3) $P^{ss} = E$ (E — единичная матрица);

4) $P^{su} = P^{st}P^{tu}$ при $s \leq t \leq u$.

В случае несчетного пространства X иногда имеет смысл говорить о плотности вероятностей перехода, или переходной плотности, т. е. о функции $p(s, x, t, y)$ такой, что $P(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(s, x, t, y) m(dy)$ для всех

$s, x, t, \Gamma, s < t$ (для $s = t$, конечно, не имеет смысла говорить о плотности, потому что всё распределение сосредоточено в точке x). Здесь m — некоторая фиксированная мера на (X, \mathcal{X}) , например, мера Лебега в случае евклидова пространства или его части. Условия 1)—4) можно заменить на следующие:

1), 2) $p(s, x, t, y)$ измеримо по (x, y) относительно $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $p(s, x, t, y) \geq 0, \int_{\mathcal{X}} p(s, x, t, y) m(dy) = 1$;

3) — отпадает, потому что при $s = t$ плотности нет;

4) $p(s, x, u, y) = \int_{\mathcal{X}} p(s, x, t, z) p(t, z, u, y) m(dz)$.

Задача 1. Проверьте, что матричная функция

$$P^{st} = \begin{pmatrix} (2 + e^{-3(t-s)})/3 & (1 - e^{-3(t-s)})/3 \\ (2 - 2e^{-3(t-s)})/3 & (1 + 2e^{-3(t-s)})/3 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям 1)—4) и, таким образом, задает переходную функцию на фазовом пространстве $X = \{1, 2\}$.

Каким образом была построена функция P^{st} , станет ясно позже, когда мы больше узнаем о марковских процессах.

Задача 2. Пусть T — произвольное подмножество прямой, и любой паре его элементов $s \leq t$ сопоставлены действительное число m_{st} и неотрицательное число σ_{st}^2 . Для $s \leq t$ из T , $x \in R^1$ определим $P(s, x, t, \cdot)$ как нормальное распределение со средним $m_{st}x$ и дисперсией σ_{st}^2 . Найдите условия на m_{st} и σ_{st}^2 , необходимые и достаточные для того, чтобы выполнялось уравнение Чэпмена — Колмогорова (то, что выполнены условия 1), 2), ясно; для условия 3) необходимо и достаточно $m_{ss} = 1$, $\sigma_{ss}^2 = 0$).

2. Пусть ξ_t , $t \in T$, — случайный процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, принимающий значения в измеримом пространстве (X, \mathcal{X}) .

Мы говорим, что ξ_t , $t \in T$, — марковский процесс с данной переходной функцией $P(s, x, t, \Gamma)$, если для любых $t, u \in T$, $t \leq u$, $\Gamma \in \mathcal{X}$ почти наверное

$$\mathbf{P}\{\xi_u \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t}\} = P(t, \xi_t, u, \Gamma). \quad (1)$$

Условие 2) п. I сразу обеспечивает выполнение одного из требований в определении условной вероятности — измеримость относительно $\mathcal{F}_{\leq t}$.

Это определение непосредственно выражает идею зависимости будущего от прошлого только через настоящее: настоящее здесь выражается значением ξ_t процесса в момент времени t , будущее — значением ξ_u , $u \geq t$; а прошлое — σ -алгеброй $\mathcal{F}_{\leq t}$.

Из определения сразу следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi_u \in \Gamma | \xi_t\} = P(t, \xi_t, u, \Gamma) \quad (2)$$

(точнее, правая часть — один из вариантов этой условной вероятности). Действительно, воспользуемся формулой $\mathbf{P}(A | \mathcal{B}) = \mathbf{M}(\mathbf{P}(A | \mathcal{A}) | \mathcal{B})$, справедливой для любых σ -алгебр $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, беря $\mathcal{A} = \mathcal{F}_{\leq t}$, $\mathcal{B} = \sigma(\xi_t)$:

$$\mathbf{P}\{\xi_u \in \Gamma | \xi_t\} = \mathbf{M}(P(t, \xi_t, u, \Gamma) | \xi_t) = P(t, \xi_t, u, \Gamma).$$

В другом виде с тем же смыслом формула (2) переписывается так:

$$\mathbf{P}\{\xi_u \in \Gamma | \xi_t = x\} = P(t, x, u, \Gamma). \quad (3)$$

Это позволяет находить переходную функцию, соответствующую данному процессу.

Эта интерпретация переходной функции делает также понятными условия 1), 3), 4) переходной функции (хотя вывести их из (1) можно лишь для всех x ,

за исключением множества меры 0; 2) — чисто техническое условие: просто мы никогда не рассматриваем неизмеримых функций).

Теперь мы можем понять, о чем, собственно, данная выше задача 2. Мы знаем, что в случае двумерного гауссовского распределения условное распределение одной координаты при условии, что другая приняла значение x , — гауссовское со средним, линейно зависящим от x , и дисперсией, не зависящей от x . Итак, задача 2 — задача о переходных функциях гауссовых марковских процессов.

Поговорим немного о терминологии. В связи с формулой (3) для значения переходной функции $P(s, x, t, \Gamma)$ используется такое словесное выражение: *вероятность перехода из точки x в момент s в множество Γ в момент t .*

Марковский процесс, определенный на множестве T , состоящем только из целых чисел, — т. е. марковская последовательность — называется, согласно традиции, *цепью Маркова* (или *марковской цепью*). Особенно просты *дискретные цепи Маркова*, т. е. те, для которых X — конечное или счетное множество (а σ -алгебра \mathcal{X} , естественно, — σ -алгебра всех его подмножеств); среди дискретных цепей выделяются конечные цепи (для которых фазовое пространство конечно).

3. Рассмотрим примеры марковских процессов (а также немарковских).

а) Предлагается решить следующие задачи. Полезно, решая их, прежде чем искать строгое рассуждение, постараться наглядно представить себе, действительно ли в рассматриваемых случайных процессах будущее зависит от прошлого только через положение процесса в настоящий момент времени.

Задача 3. Пусть w_t , $t \geq 0$, $w_0 = x_0$, — винеровский процесс, выходящий из точки x_0 . Докажите, что этот процесс — марковский, найдите его переходную функцию.

Задача 4. Пусть w_t , $t \geq 0$, — винеровский процесс, выходящий из нуля; определим случайный процесс $\xi_t = w_{-t}$, $-\infty < t \leq 0$. Найдите переходную функцию этого марковского процесса.

Этот пример подчеркивает, что описание марковского процесса с помощью переходной функции существенно несимметрично относительно времени.

Задача 5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины с одной и той же плотностью распределения $p(x)$, положительной на всей прямой. Укажите, являются ли следующие случайные последовательности цепями Маркова:

- а) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$;
- б) $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, где $S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \dots$;

в) $S_0^+, S_1^+, S_2^+, \dots, S_n^+, \dots$, где $S_n^+ = 0$ при $S_n < 0$, $S_n^+ = S_n$ при $S_n \geq 0$;

г) $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$, где $\eta_n = \max(S_0, S_1, \dots, S_n)$;

д) $(S_0, \eta_0), (S_1, \eta_1), \dots, (S_n, \eta_n), \dots$ (в качестве фазового пространства берется $R^1 \times [0, \infty)$).

Для тех, которые окажутся цепями Маркова, укажите переходные вероятности «за один шаг», т. е. $P(n, x, n+1, \Gamma)$.

Задача 6. Для таких же $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ построим случайный процесс с непрерывным временем: $T = [0, \infty)$, положив $S_t = S_k \cdot (k+1-t) + S_{k+1} \cdot (t-k)$ для $k \leq t \leq k+1$. Будет ли этот случайный процесс марковским?

Задача 7. Докажите, что процессы примеров 2—5, 7—9, § 1.2 — марковские; найдите соответствующие переходные функции.

Задача 8. *Винеровский процесс с отражением*. Докажите, что $|\omega_t|$, $t \geq 0$, — марковский процесс, где ω_t — винеровский процесс, выходящий из x_0 . Найдите переходную функцию.

б) Под схему марковского процесса хорошо подходят некоторые процессы, происходящие в реальном мире.

Например, так называемое *бронновское движение* — движение маленькой частицы в жидкости под влиянием ударов молекул. В качестве фазового пространства здесь берется (R^3, \mathcal{B}^3) , и если инерция частицы пренебрежимо мала, то описание блюждания частицы при помощи марковского процесса оказывается достаточно точным: будущее движение частицы зависит только от положения, которое она занимает в настоящее время, и не зависит от того, как и откуда частица туда пришла, потому что удары молекул, которые ей предстоит испытать, — это удары не тех молекул, что были до того, или тех же самых, но совершивших изменения свое движение в результате многочисленных столкновений.

Если нельзя не учитывать инерцию частицы (например, при рассмотрении движения одной молекулы в разреженном газе), то мы уже не можем считать изменение координат (ξ_t, η_t, ζ_t) протекающим в соответствии с марковским процессом: будущее движение зависит также от значения скорости $(\dot{\xi}_t, \dot{\eta}_t, \dot{\zeta}_t)$ в настоящий момент времени. Но если мы рассмотрим другое фазовое пространство, а именно (R^6, \mathcal{B}^6) , т. е. будем фиксировать положение частицы и значение ее скорости, то марковское приближение хорошо подходит к этому случаю.

Пока что мы не можем сказать ничего разумного о переходной функции броуновского движения.

в) Пусть теперь броуновская частица движется не в жидкости, а в раскаленном газе, и в определенный момент она вспыхивает и сгорает. При помощи какого фазового пространства можно описывать такой процесс? Добавим к фазовому пространству R^3 (или R^6) одну дополнительную точку $*$, снабдим это пространство σ -алгеброй $\sigma(\mathcal{B}^3, \{*\})$ и будем в нашей идеальной схеме считать, что частица вместо того, чтобы исчезать, попадает в состояние $*$ и навсегда там остается. Естественно, при этом $P(s, *, t, \Gamma) = \delta_*(\Gamma)$.

При помощи введения такого дополнительного состояния — «загробного мира» — удается избежать рассмотрения марковских процессов, определенных лишь до какого-то случайного момента времени (см., например, задачу 2 § 8.1).

В книгах Дынкина (1959, 1963) принятые другие определения, согласно которым марковский процесс может быть определен лишь до некоторого случайного момента, когда он обрывается; это усложняет определения, но позволяет обойтись без введения дополнительного состояния. При такой концепции процессы, обрывающиеся с положительной вероятностью, называют *чеконсервативными*.

г) Марковские процессы возникают также, например, в задачах теории массового обслуживания. Пусть, скажем, у нас есть система с одним каналом обслуживания, с отказами (т. е. если заявка на обслуживание приходит, когда канал занят, она получает отказ). Предположим, что заявки на обслуживание приходят «совершенно хаотическим образом» (как говорят в теории массового обслуживания, заявки образуют простейший поток) и a — среднее число заявок, приходящих в единицу времени, а время обслуживания первой заявки, второй заявки и т. д. — случайные величины с одной и той же функцией распределения

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy \quad (f — \text{плотность распределения}), \text{ причем не зависящие друг от друга и от прихода заявок.}$$

Будем описывать состояние системы массового обслуживания при помощи фазового пространства, изображенного на рис. 23. Здесь точка S соответствует тому, что канал обслуживания свободен, а точка x на

луче $[0, \infty)$ — такому состоянию системы, когда канал занят, причем уже в течение времени x . Движение системы происходит следующим образом: то она находится в состоянии S , то на полупрямой $[0, \infty)$; находясь в точке S , система может внезапно перескочить в точку 0 луча (что соответствует приходу заявки), и она начинает двигаться вправо с единичной скоростью. Затем в какой-то момент система (или частица, изображающая ее) опять перескакивает в состояние S (конец обслуживания); там она остается какое-то время, а потом опять скачет и т. д.

Можно доказать (если уточнить свойства потока заявок), что это будет марковский процесс.

Что касается переходной функции, то здесь легко выписать переходную функцию за малый промежуток времени Δt с точностью до бесконечно малых высшего порядка по сравнению с Δt . Это весьма общая ситуация. Как мы увидим впоследствии (см. § 10.2), это уже однозначно определяет и всю переходную функцию.

Так вот, для $x = S$

$$P(t, S, t + \Delta t, \{S\}) = 1 - a \Delta t + o(\Delta t), \quad (4)$$

где a — «плотность потока заявок»; для любого $h > 0$

$$P(t, S, t + \Delta t, [0, h)) = a \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(t, S, t + \Delta t, [h, \infty)) = 0$$

при малых Δt . Откуда берется (4)? Дело в том, что мы еще не уточнили, что значит «простейший поток заявок»; один из воз-

можных способов — это принять за определение марковский характер процесса и соотношение (4).

Теперь для $x \in [0, \infty)$. Если обслуживание продлилось время x , а в течение еще промежутка времени Δt закончилось, то система попадает в состояние S и с вероятностью $1 - O(\Delta t)$ остается там в течение времени Δt . Поэтому

$$P(t, x, t + \Delta t, \{S\}) \sim P\{\tau \in (x, x + \Delta t] | \tau > x\},$$

где τ — длительность обслуживания. Значит,

$$P(t, x, t + \Delta t, \{S\}) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \Delta t + o(\Delta t);$$

далее,

$$P(t, x, t + \Delta t, \{x + \Delta t\}) = 1 - \frac{f(x)}{1 - F(x)} \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P(t, x, t + \Delta t, [0, \infty) \setminus \{x + \Delta t\}) = o(\Delta t).$$

д) За дальнейшими примерами марковских процессов (в частности, цепь Маркова, возникающая при тасовании карт) автор отсылает читателя к книге Феллера (1984).

4. Перейдем к определению *марковского семейства случайных процессов* (или, короче, *марковского семейства*). Это понятие связано с представлением о возможности начать случайное движение системы по произволу в любой точке фазового пространства. Определение будет довольно сложным, но эта сложность оправдана.

Пусть фиксированы некоторое множество T на числовой прямой и фазовое пространство (X, \mathcal{X}) и задана функция $P(s, x, t, \Gamma)$, удовлетворяющая условиям 1)—4) п. 1. Пусть имеется пространство элементарных событий Ω , и на $T \times \Omega$ задана произвольная функция $\xi_t(\omega)$, принимающая значения в X . Заметим, что это еще не случайный процесс, так как на Ω не только нет пока никакой вероятностной меры, но даже еще и не задано никакой σ -алгебры. Свяжем (см. § 3.1) с функцией $\xi_t(\omega)$ σ -алгебры $\mathcal{F}_T = \sigma\{\xi_t, t \in T\}$, $\mathcal{F}_{\leq t} = \sigma\{\xi_s, s \leq t\}$, $\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma\{\xi_s, s \geq t\}$, $\mathcal{F}_{[s, t]} = \sigma\{\xi_u, s \leq u \leq t\}$.

Далее, предположим, что для каждого $s \in T$ и каждого $x \in X$ на σ -алгебре $\mathcal{F}_{\geq s}$ определена вероятностная мера $P_{s, x}$. Мы говорим, что набор элементов $(\xi_t(\omega), P_{s, x})$ является *марковским семейством с переходной функцией* $P(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, если при любых s, x

I) случайный процесс $\xi_t(\omega), t \in T \cap [s, \infty)$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_{\geq s}, P_{s, x})$ — марков-

ский с данной переходной функцией;

$$\text{II}) \quad P_{s,x} \{\xi_s = x\} = 1. \quad (5)$$

С учетом определения марковского процесса требование I) расшифровывается так: для $s \leq t \leq u$ из T , для любого $x \in X$ и Γ из \mathcal{X} должно быть

$$P_{s,x} \{\xi_u \in \Gamma | \mathcal{F}_{[s,t]}\} = P(t, \xi_t, u, \Gamma) \quad (6)$$

$P_{s,x}$ -почти наверное. (Здесь берутся условные вероятности, соответствующие исходной вероятностной мере $P_{s,x}$ на σ -алгебре $\mathcal{F}_{\geq s}$; соответственно мы должны пояснить, почти наверное относительно какой вероятностной меры имеет место равенство.) Требование II) в расшифровке не нуждается: оно означает, что вероятность $P_{s,x}$ берется в предположении, что процесс в момент s выпускается из точки x (с этим связано также и то, что мы рассматриваем процесс только на значениях $t \geq s$ и берем события только из σ -алгебры $\mathcal{F}_{\geq s}$).

Формулу (6) можно записать в виде интегрального соотношения, вспоминая определение условных вероятностей относительно σ -алгебры: для любого $A \in \mathcal{F}_{[s,t]}$

$$P_{s,x}(A \cap \{\xi_u \in \Gamma\}) = \int_A P(t, \xi_t(\omega), u, \Gamma) P_{s,x}(d\omega).$$

В частности, если здесь в качестве A взять всё Ω , положить $t = s$, а вместо u взять t , то получим

$$P_{s,x} \{\xi_t \in \Gamma\} = \int_{\Omega} P(s, \xi_s(\omega), t, \Gamma) P_{s,x}(d\omega).$$

Так как в силу (5) $\xi_s(\omega) = x$ почти наверное ($P_{s,x}$), то функция под знаком интеграла почти всюду равна $P(s, x, t, \Gamma)$. Значит,

$$P_{s,x} \{\xi_t \in \Gamma\} = P(s, x, t, \Gamma). \quad (7)$$

Можно рассмотреть семейство винеровских процессов, выходящих из всевозможных начальных точек, — марковское семейство $(w_t, P_{s,x})$ с плотностью вероятностей перехода (в r -мерном случае)

$$p(s, x, t, y) = [2\pi(t-s)]^{-r/2} e^{-|y-x|^2/[2(t-s)]},$$

т. е. с переходной функцией

$$P(s, x, t, \Gamma) = [2\pi(t-s)]^{-r/2} \int_{\Gamma} e^{-|y-x|^2/[2(t-s)]} dy$$

(при $s < t$; при $s = t$, как и для любого марковского процесса, $P(s, x, t, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$).

Существование такого семейства (и даже с непрерывными траекториями) читатель легко докажет; но с этим и другими примерами можно подождать до § 8.2, где будут развиты соответствующие общие методы.

Термин *цепь Маркова* применяется не только к марковским процессам, но и к целым семействам.

5. Ту же идею о возможности выпустить марковский процесс из любой точки можно выразить по-другому. Можно рассмотреть семейство марковских процессов $\xi_t^{s, x}(\omega)$, причем $\xi_s^{s, x}(\omega) = x$; зато вероятность P в этом случае можно взять не зависящей от x (на такой концепции строится изложение в книге Ито (1963)). Оказывается, семейства такого рода можно свести к марковским семействам, но мы не будем на этом останавливаться. Мы еще коснемся этих вопросов, когда будем говорить о стохастических уравнениях (§ 12.5).

§ 8.2. Различные формы марковского свойства. Конечномерные распределения

1. Свяжем определение марковского процесса с конечномерными распределениями.

Теорема 1. Для того чтобы случайный процесс ξ_t , $t \in T$, был марковским с данной переходной функцией $P(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $t_1 < \dots < t_n$ из T и любого множества $C \in \mathcal{X}^n$ было

$$\begin{aligned} P\left\{\left(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\right) \in C\right\} &= \\ &= \int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ &\dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n) \quad (1) \end{aligned}$$

(порядок интегрирования — с конца), где μ_{t_1} — одномерное распределение, связанное с моментом времени t_1 : $\mu_{t_1}(A) = P\{\xi_{t_1} \in A\}$.

Для доказательства нам понадобится одно вспомогательное средство из теории множеств.

Назовем систему множеств \mathcal{A} *μ-системой*, если она замкнута относительно сложения конечного числа непересекающихся множеств, вычитания из множества

его части и монотонного предельного перехода:
 $A, B \in \mathcal{A}, AB = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}; A, B \in \mathcal{A}, A \supseteq B \Rightarrow$
 $\Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}; A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow$
 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}.$

Всякая σ -алгебра является μ -системой, но не всякая μ -система является σ -алгеброй: она может не содержать вместе с множествами A и B множества $A \cdot B$ и $A \cup B$. Буква μ в названии напоминает об основной операции, характерной для системы, — *монотонном предельном переходе*.

Так же, как для любой системы \mathcal{C} подмножества множества X доказывается существование наименьшей σ -алгебры $\sigma(\mathcal{C})$ подмножеств X , содержащей \mathcal{C} , — так же доказывается и существование наименьшей μ -системы $\mu(\mathcal{C})$, содержащей \mathcal{C} . Из того, что любая σ -алгебра является μ -системой, вытекает $\mu(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{C})$.

Лемма 1. *Пусть система \mathcal{C} подмножеств некоторого множества X содержит X и замкнута относительно взятия пересечения пары множеств: $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB \in \mathcal{C}$. Тогда $\mu(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Мы будем пользоваться этой леммой, не доказывая ее, потому что это доказательство, хотя и несложное, было бы совершенно лишним в этой книге (см. Халмуш (1953); Дынкин (1959, лемма 1.1)).

Нам нужно прежде всего проверить, что n -кратный повторный интеграл (1) имеет смысл.

Лемма 2. *Пусть для функции $P(s, x, t, \Gamma)$ выполнены условия 1), 2) § 8.1, $f_n(x_1, \dots, x_n)$ — ограниченная \mathcal{X}^n -измеримая функция от $x_1, \dots, x_n \in X$. Тогда функция*

$$f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) f_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

\mathcal{X}^{n-1} -измерима.

Доказательство. Любую измеримую функцию можно представить в виде предела последовательности простых измеримых функций (линейных комбинаций индикаторов измеримых множеств), причем в случае ограниченной функции этот предел равномерен. Так как при равномерном предельном переходе интеграл предела равен пределу интегралов, а предел последовательности измеримых функций измерим, то до-

достаточно доказать утверждение леммы только для простых функций. Далее, линейная комбинация измеримых функций измерима, и в силу линейности интеграла достаточно провести доказательство, в конце концов, для индикаторов:

$$\int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Обозначим через \mathcal{A} систему всех множеств C , для которых интеграл (3) \mathcal{X}^{n-1} -измерим. Легко видеть, что \mathcal{A} — это μ -система: действительно, например, из $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$, $C_1 \supseteq C_2$ вытекает, что функция

$$\begin{aligned} & \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_{C_1 \setminus C_2}(x_1, \dots, x_n) = \\ & = \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_{C_1}(x_1, \dots, x_n) - \\ & - \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_{C_2}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

измерима. Далее, через \mathcal{C} обозначим систему всех множеств вида $C = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n$, $\Gamma_i \in \mathcal{X}$. Для таких множеств интеграл (3) равен $\chi_{\Gamma_1}(x_1) \dots \dots \chi_{\Gamma_{n-1}}(x_{n-1}) P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, \Gamma_n)$ и измерим, значит, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{A} \supseteq \mu(\mathcal{C})$. Лемма 1 здесь применима, потому что \mathcal{C} содержит X^n и замкнуто относительно пересечений. Получаем $\mathcal{A} \supseteq \mu(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{X}^n$, т. е. измеримость в (3) имеет место для всех множеств $C \in \mathcal{X}^n$.

Из леммы 2 по индукции вытекает, что правая часть (1) имеет смысл при любых $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ из T , если только $P(s, x, t, \Gamma)$ удовлетворяет условиям 1), 2) § 8.1.

Легко видеть также, что из (1) вытекает: для любой ограниченной измеримой функции $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} Mf(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) &= \int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ &\dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) f(x_1, \dots, x_n). \quad (4) \end{aligned}$$

Теперь докажем, что из (1) вытекает: ξ_t — марковский процесс с данной переходной функцией.

Как мы уже говорили, $P(t, \xi_t, u, \Gamma)$ измеримо относительно $\mathcal{F}_{\leq t}$, так что требуется доказать только, что для всех $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi_u \in \Gamma\}) = \mathbf{M}\chi_A P(t, \xi_t, u, \Gamma). \quad (5)$$

Проверим сначала это для событий вида $A = \{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in C\}$, $t_1 < \dots < t_n = t$, $C \in \mathcal{X}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}, \xi_u) \in C \times \Gamma\} &= \\ &= \mathbf{M}\chi_C(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) P(t, \xi_t, u, \Gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $t_1 < \dots < t_n \leq u$.

Лемма 3. Пусть функция $P(s, x, t, \Gamma)$ удовлетворяет условиям 1)–3) § 8.1. Тогда из того, что (1) выполняется для всех $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из T , вытекает, что это равенство выполняется и для $t_1 \leq \dots \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$.

Доказательство очень просто. Например, если $t_1 < t_2 = t_3$, то $\mathbf{P}\{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3}) \in C\} = \mathbf{P}\{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) \in D\}$, где $D = \{(x_1, x_2): (x_1, x_2, x_3) \in C\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3}) \in C\} &= \\ &= \int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \chi_D(x_1, x_2) = \\ &= \int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \chi_C(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Тому же равен интеграл $\int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \times \int_X P(t_2, x_2, t_3, dx_3) \chi_C(x_1, x_2, x_3)$, потому что

$$P(t_2, x_2, t_3, dx_3) = P(t_2, x_2, t_3, dx_3) = \delta_{x_2}(dx_3),$$

$$\text{а } \int \delta_x(dy) f(y) = f(x).$$

Теперь левая часть (6) выражается через $(n+1)$ -мерное распределение, правая же — формулой (4) че-

рез n -мерное. Получаем, что левая часть равна

$$\int_X \mu_{t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \times \\ \times \int_X P(t, x_n, u, dy) \chi_C(x_1, \dots, x_n) \chi_\Gamma(y)$$

(помним, что $t_n = t$); правая — тому же, но с заменой интеграла $\int_X P(t, x_n, u, dy) \chi_\Gamma(y)$ на равную ему переходную вероятность $P(t, x_n, u, \Gamma)$.

2. Теперь выведем из определения марковского процесса с данной переходной функцией формулу для конечномерных распределений.

Из определения стандартным способом немедленно вытекает, что для любой ограниченной измеримой функции f почти наверное

$$M(f(\xi_u) | \mathcal{F}_{\leq t}) = g(\xi_t), \quad (7)$$

где

$$g(x) = \int_X P(t, x, u, dy) f(y). \quad (8)$$

Лемма 4. Из определения марковского процесса с данной переходной функцией вытекает, что для $t_1 \leq \dots \leq t_n$ и любой ограниченной измеримой функции f почти наверное

$$M[f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) | \mathcal{F}_{\leq t_1}] = g_n(\xi_{t_1}), \quad (9)$$

где

$$g_n(x_1) = \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) f(x_1, \dots, x_n). \quad (10)$$

В частности, для любого $C \in \mathcal{X}^n$

$$P\{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} \in C | \mathcal{F}_{\leq t_1}\} = g_n(\xi_{t_1}), \quad (11)$$

где функция g_n задается формулой (10) с индикатором χ_C в качестве f .

Доказательство. Формула (9) у нас уже имеется при $n = 1$; будем доказывать по индукции. Ясно, что на каждом этапе достаточно доказать (11), и (9) выводится отсюда стандартным образом.

Пусть утверждение доказано для n ; докажем (11) с заменой n на $n + 1$. Правая часть измерима относительно $\mathcal{F}_{\leq t_1}$, так что нужно доказать, что для любого $A \in \mathcal{F}_{\leq t_1}$ и $C \in \mathcal{X}^{n+1}$

$$\mathbf{P}(A \cap \{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_{n+1}}) \in C\}) = \mathbf{M}\chi_A g_{n+1}(\xi_{t_1}), \quad (12)$$

где

$$g_{n+1}(x_1) = \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \times \\ \times \int_X P(t_n, x_n, t_{n+1}, dx_{n+1}) \chi_C(x_1, \dots, x_{n+1}). \quad (13)$$

Обе части (12) — меры как функции от C ; чтобы установить равенство двух мер на σ -алгебре \mathcal{X}^{n+1} , достаточно установить их совпадение на полукольце, содержащем X^{n+1} и порождающем эту σ -алгебру. Таким полукольцом является система всех множеств вида $C = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n \times \Gamma_{n+1}$, $\Gamma_i \in \mathcal{X}$. Нужно проверить, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n, \xi_{t_{n+1}} \in \Gamma_{n+1}\}) = \\ = \mathbf{M}\chi_A g_{n+1}(\xi_{t_1}), \quad (14)$$

где g_{n+1} задается формулой (13) с $\chi_C(x_1, \dots, x_{n+1}) = \chi_{\Gamma_1}(x_1) \dots \chi_{\Gamma_n}(x_n) \chi_{\Gamma_{n+1}}(x_{n+1})$. Представляем событие в левой части (14) в виде пересечения события $A \cap \{\xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n\}$, принадлежащего $\mathcal{F}_{\leq t_n}$, и события $\{\xi_{t_{n+1}} \in \Gamma_{n+1}\}$ и пользуемся формулой (5) с t_n вместо t и t_{n+1} вместо u :

$$\mathbf{P}(A \cap \{\xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n\} \cap \{\xi_{t_{n+1}} \in \Gamma_{n+1}\}) = \\ = \mathbf{M}\chi_A \chi_{\Gamma_1}(\xi_{t_1}) \dots \chi_{\Gamma_n}(\xi_{t_n}) P(t_n, \xi_{t_n}, t_{n+1}, \Gamma_{n+1}) = \\ = \mathbf{M}\chi_A \mathbf{M}[\chi_{\Gamma_1}(\xi_{t_1}) \dots \\ \dots \chi_{\Gamma_n}(\xi_{t_n}) P(t_n, \xi_{t_n}, t_{n+1}, \Gamma_{n+1}) | \mathcal{F}_{\leq t_1}] = \mathbf{M}\chi_A g_n(\xi_{t_1}),$$

где в силу (9) и (10)

$$g_n(x_1) = \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_{\Gamma_1}(x_1) \dots \\ \dots \chi_{\Gamma_n}(x_n) P(t_n, x_n, t_{n+1}, \Gamma_{n+1}).$$

Это означает, что выполнено (12).

Шаг индукции проведен, лемма доказана.

Теперь для вывода (1) достаточно заметить, что

$$\mathbf{P}\left\{\left(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\right) \in C\right\} = \mathbf{MP}\left\{\left(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\right) \in C \mid \mathcal{F}_{\leq t_1}\right\} = \\ = \mathbf{M} g_n(\xi_{t_1}) = \int_X \mu_{t_1}(dx_1) g_n(x_1).$$

Применение доказанной теоремы дает регулярный способ решения задач § 8.1.

3. Применим полученные результаты к марковским семействам.

Теорема 1'. Пусть $\xi_t = \xi_t(\omega)$ — функция от $t \in T$ и $\omega \in \Omega$; $\mathbf{P}_{s, x}$ — меры на σ -алгебрах $\mathcal{F}_{\geq s}$, порожденных функциями $\xi_t(\omega)$, $t \geq s$; $\mathbf{P}_{s, x}(\Omega) = 1$. Чтобы $(\xi_t, \mathbf{P}_{s, x})$ было марковским семейством с данной переходной функцией $P(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $s \leq t_1 < \dots < t_n$, $x \in X$ и $C \in \mathcal{X}^n$ было

$$\mathbf{P}_{s, x}\left\{\left(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\right) \in C\right\} = \\ = \int_X P(s, x, t_1, dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n). \quad (15)$$

Доказательство. Согласно теореме 1, из того, что $(\xi_t, \mathbf{P}_{s, x})$ — марковское семейство, вытекает

$$\mathbf{P}_{s, x}\left\{\left(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}\right) \in C\right\} = \\ = \int_X \mu_{s, x; t_1}(dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n), \quad (16)$$

где $\mu_{s, x; t_1}$ — одномерное распределение, соответствующее моменту t_1 , относительно вероятностной меры $P_{s, x}$: $\mu_{s, x; t_1}(\Gamma) = P_{s, x}\{\xi_{t_1} \in \Gamma\}$. Но формула (6) предыдущего параграфа дает $\mu_{s, x; t_1} = P(s, x, t_1, \cdot)$, откуда получаем (15).

Обратно, из (15) при $n = 1$ вытекает, что $\mu_{s, x; t_1} = P(s, x, t_1, \cdot)$; значит, (15) при любом n переписывается в виде (16). Теорема 1 дает нам, что ξ_t , $t \geq s$, относительно вероятностной меры $P_{s, x}$ — марковский процесс с данной переходной функцией. Условие $P_{s, x}\{\xi_s = x\} = 1$ получаем из (15) с $n = 1$, $t_1 = s$, пользуясь условием 3) § 8.1 для переходной функции.

4. При рассмотрении примеров марковских процессов в § 8.1 одной из первых ступеней было нахождение переходной функции; причем нужно было проверить все свойства 1) — 4). Для первых трех это просто, но проверка уравнения Чэпмена — Колмогорова требует значительного труда. Оказывается, в случае марковских семейств отдельно проверять это условие не нужно.

Теорема 2. Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — функция, удовлетворяющая условиям 1) — 3) § 8.1 и пусть для $(\xi_t, P_{s, x})$ выполнены формулы (4), (5) § 8.1 или формула (15) этого параграфа.

Тогда для $P(s, x, t, \Gamma)$ выполнено условие 4), и $(\xi_t, P_{s, x})$ — марковское семейство с данной переходной функцией.

Доказательство. Просматривая доказательство теорем 1, 1', убеждаемся, что условие 4) § 8.1 не использовалось, так что условие (15) этого параграфа равносильно условиям (4), (5) § 8.1. Из (15) получаем:

$$\begin{aligned} P(s, x, u, \Gamma) &= P_{s, x}\{\xi_u \in \Gamma\} = P_{s, x}\{(\xi_t, \xi_u) \in X \times \Gamma\} = \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, dz) \chi_\Gamma(z) = \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, \Gamma). \end{aligned}$$

Большинство марковских процессов, рассмотренных в § 8.1, естественным образом включается в марковские семейства, что облегчает рассмотрение этих примеров.

5. Выведем еще одну форму марковского свойства.

Теорема 3. Если $(\xi_t, P_{s, x})$ — марковское семейство, то для любых $s \leq t$ из T , $x \in X$ и события $B \in \mathcal{F}_{\geq t}$

$$P_{s, x}(B | \mathcal{F}_{[s, t]}) = P_{t, \xi_t(\omega)}(B) \quad (17)$$

почти наверное относительно вероятностной меры $\mathbf{P}_{s,x}$.

Иначе говоря, поведение процесса после момента времени t при условии, что фиксировано его течение до момента t , — такое же, как если бы он начинался в момент t из точки $\xi_t(\omega)$. Это опять выражает зависимость будущего от прошлого только через настоящее; но в качестве будущего рассматривается не один момент времени $u \geq t$, а целая σ -алгебра $\mathcal{F}_{\geq t}$ событий, связанных со всеми моментами времени, начиная с t .

Доказательство. Для событий B вида $B = \{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in C\}$, $t = t_1 < \dots < t_n$, $C \in \mathcal{X}^n$, это уже доказано — см. формулу (11) в применении к вероятности $\mathbf{P}_{s,x}$, (10) и (15). Чтобы перейти к произвольным $B \in \mathcal{F}_{\geq t}$, прежде всего выведем вспомогательный результат.

Лемма 5. Для любого $B \in \mathcal{F}_{\geq t}$, вероятность $\mathbf{P}_{t,x}(B)$ измерима по x .

Доказательство. Обозначим через \mathcal{A} систему множеств $B \in \mathcal{F}_{\geq t}$, для которых выполняется утверждение леммы; через \mathcal{C} систему множеств вида $B = \{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in C\}$, $t = t_1 < \dots < t_n$, $C \in \mathcal{X}^n$. Уже установлено, что $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ (лемма 2); значит, $\mathcal{A} \supseteq \mu(\mathcal{C})$. Применение леммы 1 дает $\mathcal{A} \supseteq \mu(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_{\geq t}$.

Продолжим доказательство теоремы.

Теперь мы видим, что правая часть (17) измерима относительно $\mathcal{F}_{[s,t]}$; остается доказать, что для любого $A \in \mathcal{F}_{[s,t]}$

$$\mathbf{P}_{s,x}(A \cap B) = \mathbf{M}_{s,x} \chi_A \mathbf{P}_{t,\xi_t}(B),$$

где символом $\mathbf{M}_{s,x}$ обозначено математическое ожидание, связанное с вероятностной мерой $\mathbf{P}_{s,x}$. Легко видеть, что обе части являются мерами как функции множества B ; они совпадают на алгебре \mathcal{C} , а значит, и на $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_{\geq t}$.

Теорема доказана.

6. В этом параграфе мы занимались таким вопросом: дан марковский процесс (марковское семейство); каковы тогда его конечномерные распределения? Теперь займемся вопросом о существовании. Он проще в случае марковских семейств.

Теорема 4. Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$, $s \leq t$, $s, t \in T$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$ — марковская переходная функция. Определим для любых $s \leq t_1 < \dots < t_n$ и $x \in X$ вероятностную меру $\mu_{s, x; t_1, \dots, t_n}$ на (X^n, \mathcal{X}^n) формулой

$$\begin{aligned} \mu_{s, x; t_1, \dots, t_n}(C) = & \int_X P(s, x, t_1, dx_1) \int_X P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \int_X \dots \\ & \dots \int_X P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (18)$$

(порядок интегрирования — с конца). Тогда при фиксированных s, x эти меры образуют согласованную систему конечномерных распределений.

Доказательство. Первое условие согласованности, связанное с перестановками t_1, \dots, t_n , проверять не надо: просто для моментов времени, идущих не в порядке возрастания, мы определяем конечномерные распределения так, чтобы это условие было выполнено. Что касается второго условия согласованности, то нужно учитывать, что опускаемый момент времени может быть любым по порядку среди t_1, \dots, t_n .

Нужно проверить, что

$$\begin{aligned} \mu_{s, x; t_1, t_2, \dots, t_n}(X \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n) = \\ = \mu_{s, x; t_2, \dots, t_n}(\Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu_{s, x; t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times X \times \\ \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n) = \\ = \mu_{s, x; t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n} \times (\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{i-1} \times \\ \times \Gamma_{i+1} \times \dots \times \Gamma_n); \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mu_{s, x; t_1, \dots, t_{n-1}, t_n}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1} \times X) = \\ = \mu_{s, x; t_1, \dots, t_{n-1}}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Формулы (19), (20) выводятся из уравнения Чэпмена — Колмогорова при помощи следующей леммы (данной в виде задачи).

Задача 1. Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — марковская переходная функция. Тогда для любой ограниченной измеримой функции f на фазовом пространстве X , для лю-

бых $s \leq t \leq u$ и $x \in X$

$$\int\limits_X P(s, x, t, dy) \int\limits_X P(t, y, u, dz) f(z) = \\ = \int\limits_X P(s, x, u, dz) f(z). \quad (22)$$

При выводе формулы (20) полагаем

$$f(z) = \chi_{\Gamma_{i+1}}(z) \int\limits_{\Gamma_{i+2}} P(t_{i+1}, z, t_{i+2}, dx_{i+2}) \int\limits_{\Gamma_{i+3}} \dots \\ \dots \int\limits_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n),$$

$s = t_{i-1}$, $t = t_i$, $u = t_{i+1}$, а в качестве x берется переменное x_{i-1} ; обе части (20) оказываются интегралами от выражения (22) по одному и тому же множеству. При выводе (19) еще проще: s — это s , а x — это x .

Для вывода формулы (21) не нужно даже использовать уравнение Чэпмена — Колмогорова: она следует из $P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, X) \equiv 1$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть (X, \mathcal{X}) — борелевское измеримое пространство; пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — марковская переходная функция на нем. Тогда существует марковское семейство $(\xi_t, \mathbf{P}_{s,x})$ с $P(s, x, t, \Gamma)$ в качестве переходной функции.

Доказательство. Воспользуемся только что доказанной теоремой и теоремой Колмогорова (см. § 5.1). При любых s и x мы можем в качестве пространства элементарных событий взять $X^T \cap [s, \infty)$, в качестве основной σ -алгебры — $\mathcal{X}^T \cap [s, \infty)$ и определить случайный процесс $\xi_t(x.) = x_t$ и вероятностную меру $\mathbf{P}'_{s,x}$ на $(X^T \cap [s, \infty), \mathcal{X}^T \cap [s, \infty))$, относительно которой конечномерные распределения процесса будут $\mu_{s,x; t_1, \dots, t_n}$.

Это еще не то, что нам надо: мы хотим, чтобы для всех s, x было одно и то же пространство элементарных событий. Этому легко помочь: берем $\Omega = X^T$, определяем $\xi_t(x.)$ как x_t , рассматриваем σ -алгебру $\mathcal{F}_{\geq s} = \mathcal{X}^T \cap [s, \infty)(X^T)$, порождаемую в пространстве X^T функционалами x_t , $t \in T \cap [s, \infty)$, и переносим вероятностную меру с пространства $X^T \cap [s, \infty)$ естественным

образом на пространство X^T . А именно, легко видеть, что любое множество $A \in \mathcal{X}^{T \cap [s, \infty)}(X^T)$ представляется, причем единственным образом, в виде

$$A = \{x_\cdot : x'_\cdot \in A'\}, \quad A' \in \mathcal{X}^{T \cap [s, \infty)},$$

где x'_\cdot означает сужение функции x_\cdot на множество $T \cap [s, \infty)$: $x'_t = x_t$, $t \in T \cap [s, \infty)$ (функция x'_\cdot принадлежит пространству $X^{T \cap [s, \infty)}$). Полагаем $\mathbf{P}_{s, x}(A) = \mathbf{P}'_{s, x}(A')$.

Конечномерные распределения ξ_t , $t \geq s$, относительно вероятностной меры $\mathbf{P}_{s, x}$ задаются формулой (15), и по теореме 1' (ξ_t , $\mathbf{P}_{s, x}$) — марковское семейство с данной переходной функцией.

Теперь мы можем установить, скажем, существование семейства винеровских процессов, выходящих из всех точек.

7. Теорема 6. Пусть $P(s, x, t, \Gamma)$ — марковская переходная функция. Чтобы система конечномерных распределений, задаваемых формулой (1), была согласована, необходимо и достаточно, чтобы вероятностные меры μ_t , соответствующие разным моментам времени $s \leq t$, были связаны уравнением $\mu_t(\Gamma) = \int_X \mu_s(dx) P(s, x, t, \Gamma)$. Если это условие выполнено, а (X, \mathcal{X}) — борелевское измеримое пространство, то существует марковский процесс с переходной функцией $P(s, x, t, \Gamma)$ и одномерными распределениями μ_t : $\mu_t(\Gamma) = \mathbf{P}\{\xi_t \in \Gamma\}$.

Доказательство — такое же, как у теоремы 4; мы его не приводим.

§ 8.3. Семейства операторов, связанные с марковскими процессами

0. Пусть (X, \mathcal{X}) — измеримое пространство. Мы будем связывать с ним два банаховых пространства. Первое, B — пространство всех ограниченных \mathcal{X} -измеримых числовых функций $f(x)$ на X с нормой $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ (сходимость в смысле этой нормы — это равномерная сходимость). Второе, V — пространство всех счетно-аддитивных числовых функций множества (или «обобщенных мер», или «мер со знаком», или «зарядов»; см. Колмогоров и Фомин, 1968, гл. VI, § 5), определенных на σ -алгебре \mathcal{X} ; в качестве нормы элемента $v \in V$ мы возьмем его полную вариацию на всем пространстве: $\|v\| = |v|(X)$ (определение см. там же). Нетрудно видеть, что для $\|v\|$ вы-

полнены все свойства нормы; доказательство полноты пространства V см. Гихман и Скороход, 1965, гл. II, § 1, теорема 5.

Между пространствами B и V имеется определенная связь. Положим

$$\langle v, f \rangle = \int_X f(x) v(dx)$$

(интеграл определяется как $\int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-$, где

$v = v^+ - v^-$ — разложение Жордана; см. все тот же параграф книги Колмогорова и Фомина (1968)). При этом каждому элементу $v \in V$ ставится в соответствие линейный функционал $\langle v, \cdot \rangle$ на B , а каждому элементу $f \in B$ — функционал $\langle \cdot, f \rangle$ на V . Таким образом, мы получаем естественное вложение V в B^* (пространство, сопряженное к B), а B — в V^* . Норма элемента и норма соответствующего линейного функционала совпадают:

$$\|v\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle v, f \rangle|,$$

$$\|f\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v, f \rangle|$$

(это нуждается в доказательстве, но мы его не приводим).

Линейные операторы в пространстве B мы будем записывать слева от обозначения элемента B : Af , $P^{st}f$ и т. п., а в V — справа: vB и т. п.

1. Теперь определим операторы, связанные с переходной функцией марковского процесса (или семейства).

Сначала введем операторы P^{st} , $s \leq t$, $s, t \in T$, на пространстве B : для $f \in B$ определим $P^{st}f$ как функцию, значение которой в точке x задается формулой

$$P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y). \quad (1)$$

Здесь существование интеграла и его ограниченность обеспечиваются тем, что $P(s, x, t, \cdot)$ — конечная мера; измеримость $P^{st}f(x)$ по x — измеримостью $P(s, \cdot, t, \Gamma)$.

Переходная функция однозначно определяется семейством операторов P^{st} : разным переходным функциям соответствуют разные семейства операторов

(докажите!). Однако не каждому семейству операторов соответствует какая-то переходная функция.

Выпишем семейство операторов, связанное с переходной функцией винеровского процесса, хотя этот пример (как и любой другой на нашем уровне знаний) не очень интересен: просто какие-то интегральные операторы. Для $s < t$, $f \in B$

$$\begin{aligned} P^{st}f(x) &= \int_{R^d} p(s, x, t, y) f(y) dy = \\ &= [2\pi(t-s)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-x)^2/[2(t-s)]} f(y) dy. \end{aligned}$$

Посмотрим, какими свойствами обладают операторы P^{st} . Прежде всего, по самому способу построения ясно, что это линейные операторы; остальные свойства получаются из свойств переходной функции. Из того, что $P(s, x, t, \cdot)$ — мера, а не просто счетно-аддитивная функция множества, вытекает, что оператор P^{st} переводит неотрицательные функции в неотрицательные; то, что это *вероятностная* мера, дает нам

$$|P^{st}f(x)| \leq \int_X P(s, x, t, dy) \|f\| = \|f\|. \quad (2)$$

Отсюда же вытекает, что $P^{st}1 \equiv 1$. Измеримость по x мы уже учли. Из $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$ получается, что P^{ss} — тождественный оператор. Посмотрим, что дает уравнение Чэпмена — Колмогорова: при $s \leq t \leq u$

$$\begin{aligned} P^{su}f(x) &= \int_X P(s, x, u, dz) f(z) = \\ &= \int_X \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, dz) f(z) = \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, z) f(z) = P^{st}(P^{tu}f)(z). \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu}. \quad (3)$$

Это — обобщение формулы, которая была у нас в § 8.1 для счетного X .

Формулу (2) можно записать так: $\|P^{st}f\| \leq \|f\|$, или $\|P^{st}\| \leq 1$. Операторы в банаховом пространстве, не

увеличивающие норму элемента, естественно назвать *сжимающими*.

Итак, мы установили следующие свойства операторов P^{st} в пространстве \mathbf{B} :

- а) P^{st} — линейные операторы;
- б) P^{st} — сжимающие операторы, т. е. они не увеличивают норму элемента;
- в) P^{st} — операторы, сохраняющие положительность, т. е. они переводят неотрицательные элементы в неотрицательные;
- г) $P^{st}1 \equiv 1$;
- д) $P^{ss} = E$ (тождественный оператор);
- е) $P^{su} = P^{st}P^{tu}$ при $s \leq t \leq u$.

2. Введем теперь операторы в пространстве V . Будем их обозначать также P^{st} ($s \leq t$, $s, t \in T$), но записывать справа от обозначения элемента V : vP^{st} . Положим по определению

$$vP^{st}(\Gamma) = \int_X v(dx) P(s, x, t, \Gamma). \quad (4)$$

Существование интеграла обеспечивается измеримостью переходных вероятностей по x ; счетная аддитивность функции vP^{st} — счетной аддитивностью $P(s, x, t, \cdot)$. То, что $P(s, x, t, \cdot)$ — вероятностная мера, влечет за собой $\|vP^{st}\| \leq \|v\|$, $vP^{st}(X) = v(X)$ и то, что оператор P^{st} переводит меры (т. е. неотрицательные $v \in V$) опять в меры. Уравнение Чэпмена — Колмогорова превращается в

$$vP^{su} = (vP^{st}) P^{tu}$$

при $s \leq t \leq u$, или

$$P^{su} = P^{st} \cdot P^{tu}. \quad (5)$$

(Заметим, что при внешнем совпадении с формулой (3) формула (5) имеет другой смысл: не говоря о том, что здесь рассматриваются операторы на другом пространстве, порядок их применения другой: в (3) сначала применяется оператор P^{tu} , а потом P^{st} , а здесь сначала P^{st} , а потом P^{tu} .)

Формулировка свойств операторов P^{st} в пространстве V остается такой же, как для операторов P^{st} в \mathbf{B} (см. п. 1), за исключением свойства г), которое заменяется на

г') $vP^{st}(X) = v(X)$; в частности, вероятностные меры переводятся в вероятностные.

Операторы P^{st} в пространствах \mathbf{B} и \mathbf{V} сопряжены друг к другу; т. е. для $f \in \mathbf{B}$, $v \in \mathbf{V}$

$$\langle v, P^{st}f \rangle = \langle vP^{st}, f \rangle \quad (6)$$

(точнее, оператор P^{st} на \mathbf{V} — сужение оператора в \mathbf{B}^* , сопряженного к оператору P^{st} в \mathbf{B} , и наоборот). Справедливость (6) вытекает из того, что обе части равны

$$\int_X \int_X v(dx) P(s, x, t, dy) f(y).$$

Свойства операторов P^{st} в одном пространстве можно выводить из свойств операторов P^{st} в другом; в частности, формулу (5) можно вывести из (3) (или (3) из (5)), пользуясь тем, что сопряженный оператор к произведению — это операторы, сопряженные к сомножителям, перемноженные в другом порядке.

Задача 1. Докажите, что $\|P^{st}\| = 1$.

3. Операторы P^{st} связаны непосредственно лишь с переходной функцией, а не со случайным процессом. Укажем, в каком отношении они находятся к марковским процессам и марковским семействам, т. е. какой их вероятностный смысл.

Определение (1) переходит в

$$P^{st}f(x) = \mathbf{M}_{s, x}f(\xi_t), \quad f \in \mathbf{B}. \quad (7)$$

Пользуясь этими операторами, можно в еще одной форме записать марковское свойство:

$$\mathbf{M}_{s, x}(f(\xi_u) | \mathcal{F}_{[s, t]}) = P^{tu}f(\xi_t) \quad (\text{п. н. } \mathbf{P}_{s, x}).$$

Что касается операторов, действующих на меры, их вероятностный смысл более прозрачен. Пусть v — вероятностная мера на (X, \mathcal{X}) . Если мы выпустим наш процесс в момент времени s из случайной точки, имеющей распределение v (т. е. рассмотрим марковский процесс ξ_t , $t \in T \cap [s, \infty)$), соответствующий вероятностной мере $\mathbf{P}_{s, v}(A) = \int_X v(dx) \mathbf{P}_{s, x}(A)$, то распределение в момент $t \geq s$ будет как раз vP^{st} :

$$vP^{st}(\Gamma) = \mathbf{P}_{s, v}\{\xi_t \in \Gamma\}.$$

Итак, операторы P^{st} в пространстве \mathbf{V} описывают эволюцию одномерного распределения с течением времени.

4. Естественно возникает такой вопрос. Пусть дано семейство операторов P^{st} в пространстве \mathbf{B} (будем

говорить о пространстве функций, так как вообще удобнее иметь дело с функциями, чем с мерами), и пусть это семейство удовлетворяет условиям а) — е) п. 1. Можно ли утверждать, что существует марковское семейство, которому соответствует данное семейство операторов? Оказывается, для ответа на этот вопрос существенно, совпадает ли пространство \mathbf{B}^* , сопряженное к \mathbf{B} , с пространством V мер со знаком или имеет место строгое включение: $\mathbf{B}^* \supset V$. Равенство $\mathbf{B}^* = V$ будет иметь место для конечного фазового пространства X : оба банаховых пространства — конечномерные, одного и того же числа измерений; но уже для счетного X , пользуясь теоремой Хана — Банаха, можно построить пример линейного ограниченного функционала, не представимого в виде интеграла; т. е. $\mathbf{B}^* \supset V$.

Посмотрим, что будет, если $\mathbf{B}^* = V$ (т. е. для конечного X). Любой линейный ограниченный функционал $\varphi(f)$ представляется в виде $\langle v, f \rangle$, где v — некоторая мера со знаком; применим это к функционалу $P^{st}f(x)$ (s, t и x фиксированы). Получим $P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y)$, где $P(s, x, t, \cdot)$ — мера со знаком (в данном случае интеграл сводится к сумме). В силу свойства в) $P(s, x, t, \cdot)$ — мера, т. е. неотрицательная счетно-аддитивная функция множества; она является вероятностной в силу свойства г). Измеримость по x здесь тривиальна; свойство д) превращается в $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$, а свойство е) — в уравнение Чэлмена — Колмогорова.

Вся беда в том, что в большинстве случаев математического исследования мы имеем дело с бесконечными множествами, а для конечного фазового пространства незачем вообще рассматривать операторы — можно обойтись просто матрицами. К счастью, при некоторых ограничениях на пространство (X, \mathcal{X}) банаово пространство V будет сопряженным пространством по отношению к определенному пространству функций.

А именно, пусть X — компактное метрическое пространство; $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$ — множество всех борелевских подмножеств X ; C — пространство непрерывных числовых функций на X . Все непрерывные функции на компакте автоматически ограничены и измеримы, так что $C \subseteq \mathbf{B}$. Известно, что любой линейный ограниченный функционал на пространстве C представляется

в виде интеграла по некоторой мере со знаком:

$$\Phi(f) = \langle v, f \rangle = \int_X v(dx) f(x),$$

причем функционалу, принимающему на неотрицательных функциях неотрицательные значения, соответствует неотрицательная мера v (для случая, когда X — отрезок, это — теорема Ф. Рисса; общий случай см. Халмуш, 1953, § 56). Это вместе с тем факт, что разным мерам соответствуют разные функционалы (доказать!), и означает, что $V = C^*$.

Это не спасает, однако, положения во всех случаях. Дело в том, что операторы P^{st} действуют на пространстве B и тем самым переводят любую функцию из C в некоторую функцию, принадлежащую пространству B , но, вообще говоря, эти операторы нельзя рассматривать как действующие в пространстве непрерывных функций. Требование $P^{st}C \subseteq C$ является ограничением — не слишком жестким и не слишком уродливым, но ограничением. Это ограничение выделяет некоторый класс марковских семейств; так как ограничение $P^{st}C \subseteq C$ было впервые введено В. Феллером, такие марковские семейства называются феллеровскими.

5. *Феллеровские марковские семейства.* Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$; C — пространство ограниченных непрерывных функций (на некомпактном X могут быть неограниченные непрерывные функции). Семейство $(\xi_t, P_{s,x})$ называется *феллеровским*, если $P^{st}C \subseteq C$ при любых $s \leq t$. Иначе говоря, для любой непрерывной ограниченной функции f на X функция $P^{st}f(x)$ должна быть непрерывна по x (ограниченность выполняется автоматически): при $x \rightarrow x_0 \in X$ должно быть

$$\int_X P(s, x, t, dy) f(y) \rightarrow \int_X P(s, x_0, t, dy) f(y).$$

Итак, требование феллеровости семейства (касающееся, между прочим, только его переходной функции) состоит в том, что распределение $P(s, x, t, \cdot)$ слабо сходится к $P(s, x_0, t, \cdot)$ при $x \rightarrow x_0$; т. е. это — требование, состоящее в слабо непрерывной зависимости переходной функции от второго аргумента (точка отправления). Это весьма естественное требование,

что, разумеется, не означает, что оно выполнено для всех марковских семейств.

Приведем примеры феллеровских и не феллеровских марковских семейств. В качестве X возьмем прямую R^1 , $\mathcal{X} = \mathcal{B}^1$. Процесс ξ_t устроим следующим образом: это — неслучайное движение вправо с единичной скоростью, т. е. $\xi_t = \xi_s + t - s$. Переходная функция такого процесса будет $P(s, x, t, \Gamma) = \delta_{x+t-s}(\Gamma)$. Строим семейство операторов P^{st} :

$$P^{st}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(s, x, t, dy) f(y) = f(x + t - s).$$

Это — сдвиг влево на $t - s$; оператор этот, естественно, переводит непрерывные функции в непрерывные, т. е. семейство таких процессов — феллеровское. Чтобы понять это, можно было и не строить семейства операторов, а просто заметить, что распределение $P(s, x, t, \cdot)$, сосредоточенное в точке $x + t - s$, зависит слабо непрерывным образом от x .

Теперь рассмотрим такое семейство процессов на (R^1, \mathcal{B}^1) : на левой полупрямой — движение влево с единичной скоростью, на правой полупрямой — вправо; а траектория, начинающаяся в граничной точке 0, идет с вероятностью 1/2 влево и с вероятностью 1/2 вправо. Запишем это формально с помощью вероятностей $\mathbf{P}_{s, x}$:

$$\mathbf{P}_{s, x}\{\xi_t = x + t - s, t \geq s\} = 1, \quad x > 0;$$

$$\mathbf{P}_{s, x}\{\xi_t = x - (t - s), t \geq s\} = 1, \quad x < 0;$$

$$\mathbf{P}_{s, 0}\{\xi_t = t - s, t \geq s\} = \mathbf{P}_{s, 0}\{\xi_t = -(t - s), t \geq s\} = 1/2.$$

Легко видеть, что это — марковское семейство; соответствующие ему операторы P^{st} задаются формулой

$$P^{st}f(x) = \begin{cases} f(x + (t - s)), & x > 0; \\ f(x - (t - s)), & x < 0; \\ \frac{1}{2} f(t - s) + \frac{1}{2} f(-(t - s)), & x = 0. \end{cases}$$

На рис. 24 показано, как действует оператор P^{st} на произвольную непрерывную ограниченную функцию f . Функция $P^{st}f$ терпит разрыв в нуле, значит, рассматриваемое семейство — не феллеровское. Это можно было видеть сразу: распределения, соответствующие

начальной точке 0 и близким к ней справа и слева точкам, далеки друг от друга, а именно: первое сосредоточено поровну в точках $t-s$ и $-(t-s)$, симметричных относительно нуля; распределение, соответствующее начальной точке, близкой к нулю, но лежащей справа от него, сосредоточено вблизи точки $t-s$, а слева — вблизи точки $-(t-s)$.

Конечно, легко построить примеры феллеровских и не феллеровских марковских цепей.

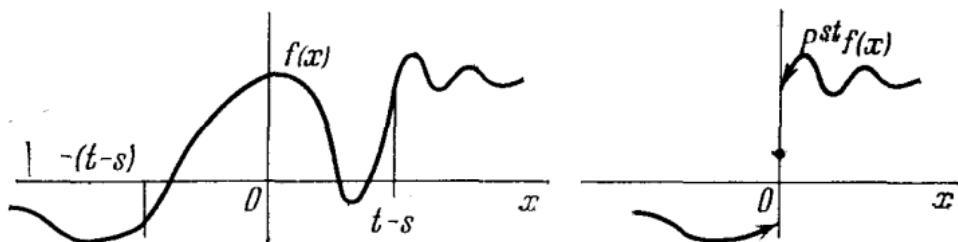


Рис. 24

6. Любому феллеровскому марковскому семейству соответствует семейство операторов P^{st} на пространстве \mathbf{C} , удовлетворяющее требованиям а) — е) п. 1. Сейчас мы докажем для случая компактного фазового пространства обратную теорему.

Теорема. Пусть X — компактное метрическое пространство, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$. Пусть на пространстве \mathbf{C} непрерывных функций на X задано семейство операторов P^{st} , $s \leq t$, $s, t \in T \subseteq R^1$, удовлетворяющее требованиям а) — е) п. 1. Тогда существует феллеровское марковское семейство $(\xi_t, t \in T; \mathbf{P}_{s,x})$, которому соответствует данное семейство операторов.

Доказательство. Достаточно доказать, что $P^{st}f$ представляется в виде

$$P^{st}f(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y), \quad (8)$$

где $P(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ — функция, удовлетворяющая много-кратно упоминавшимся ранее условиям 1)—4) п. 1 § 8.1.

Зафиксируем s, t, x ; тогда $P^{st}f(x)$, согласно условиям а), б), — линейный ограниченный функционал на \mathbf{C} (с нормой ≤ 1), и, значит, он представляется в виде интеграла от f по некоторой мере со знаком. Обозначим эту меру — она, конечно, зависит от s, t, x — через $P(s, x, t, \cdot)$; мы получили формулу (8),

остается установить свойства функции $P(s, x, t, \Gamma)$. Как функция последнего аргумента это — мера в силу условия в); это — вероятностная мера в силу условия г). Условие д) превращается в условие 3) ($P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$). Что касается условия 2) и уравнения Чэпмена — Колмогорова (которое должно появиться из условия е)), то тут необходима некоторая техника.

Условие 2) состоит в измеримости по x функции $P(s, x, t, \Gamma)$, или, что то же, $\int_X P(s, x, t, dy) \chi_\Gamma(y)$.

Это — выражение того вида, что и (8), но только вместо непрерывной функции f в нем стоит разрывная. Пусть сначала множество Γ замкнуто. Известно, что для любого замкнутого множества Γ в метрическом пространстве X можно построить непрерывную функцию f на X , равную единице на Γ и лежащую строго между нулем и единицей вне Γ . (Например, в качестве такой функции можно взять $f(x) = \exp\{-\rho(x, \Gamma)\}$, где ρ — расстояние.) Функция f^n принадлежит C для любой положительной степени n , поэтому функция

$$(P^{st} f^n)(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f^n(y)$$

непрерывна и стало быть, измерима по Борелю. Устремим n к бесконечности; получим, что функция

$$\begin{aligned} P(s, x, t, \Gamma) &= \int_X P(s, x, t, dy) \chi_\Gamma(y) = \\ &= \int_X P(s, x, t, dy) \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X P(s, x, t, dy) f^n(y) \end{aligned}$$

измерима по x как предел сходящейся в каждой точке последовательности измеримых функций.

Чтобы перейти от замкнутых Γ к произвольным борелевским множествам, мы пользуемся леммой 1 § 8.2. При операциях сложения непересекающихся множеств, вычитания из множества его части и монотонного предельного перехода измеримость функции $P(s, x, t, \Gamma)$ сохраняется, поэтому она имеет место для наименьшей системы μ (замкн.) множеств, содержащей все замкнутые множества и замкнутой относительно указанных операций; пересечение замкнутых

множеств замкнуто, $\mu(\text{замкн.}) = \sigma(\text{замкн.}) = \sigma(\text{откр.}) = \mathcal{B}_X$, и измеримость установлена.

Теперь покажем, что выполнено уравнение Чэпмена — Колмогорова. Имеем

$$\int_X P(s, x, u, dz) f^n(z) = (P^{su} f^n)(x) = P^{st} (P^{tu} f^n)(x) = \\ = \int_X P(s, x, t, dy) \int_X P(t, y, u, dz) f^n(z).$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$P(s, x, u, \Gamma) = \int_X P(s, x, t, dy) P(t, y, u, \Gamma). \quad (9)$$

Здесь в качестве Γ можно взять любое замкнутое множество. Чтобы перейти к произвольным борелевским множествам, можно воспользоваться той же леммой, что и выше, а можно тем, что обе части (9) являются мерами как функции Γ .

7. Приведем пример применения доказанной теоремы. Рассмотрим параболическое уравнение с частными производными

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u(s, x)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) описывает распространение тепла в стержне, причем граничные условия (11) соответствуют случаю теплоизолированных концов стержня. Существует единственное решение задачи (10), (11) в полуполосе $(s, x) \in (-\infty, t] \times [0, 1]$, удовлетворяющее при $s = t$ условию

$$u(t, x) = f(x), \quad (12)$$

где f — данная функция из $C = C[0, 1]$.

Обозначим через $P^{st}f(x)$ значение решения u задачи (10) — (12) в точке (s, x) , $s \leq t$, $x \in [0, 1]$. При $s = t$ имеем $P^{ss}f(x) = f(x)$, т. е. оператор P^{ss} равен E . При $s < t$ функция $P^{st}f(x)$ дифференцируема по x и, следовательно, непрерывна; значит, оператор P^{st} переводит C в C . Ясно, что это линейный оператор. Далее, этот оператор является сжимающим и сохраняющим положительность — это следствие принципа максимума для параболических уравнений; с физической точки зрения это соответствует тому, что тепло в процессе теплопроводности не может переходить от более холодных участков к более теплым, и, стало

быть максимальная температура с течением времени не увеличивается, а минимальная не уменьшается. Легко видеть, что $P^{st}1 = 1$ потому, что $\frac{\partial 1}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 1}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial 1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial 1}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$. Наконец, для того чтобы найти $u(s, x)$, если дано, что $u(u, x) = f(x)$, можно решить уравнение во временному промежутке $[t, u]$, а потом решить его во временному промежутке $[s, t]$ с тем $u(t, x)$, которое было получено; иначе говоря, $P^{su}f = P^{st}(P^{tu}f)$, $f \in C$, или $P^{su} = P^{st}P^{tu}$.

Итак, выполнены все нужные требования, и семейству операторов P^{st} соответствует марковское семейство. Впоследствии мы увидим, что класс марковских семейств, связанных с уравнением теплопроводности и другими параболическими уравнениями, — очень важный класс (это так называемые диффузии).

Заметим, что здесь нам приходилось говорить о решении уравнения в полуполосе $(-\infty, t] \times [0, 1]$, а не в полуполосе, бесконечной вверх, как это нам привычно и как, разумеется, следует делать, если рассматривается не уравнение (10), а уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Это связано с тем, что мы хотим, чтобы оператор P^{su} представлялся в виде произведения операторов, где первым применяется оператор P^{tu} , а вторым P^{st} . Для операторов, действующих на меры, порядок как раз противоположный; поэтому они связаны с решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ «вверх», а не уравнения (10) «вниз». К этой теме мы еще вернемся в гл. 11.

§ 8.4. Однородные марковские семейства

1. Переходная функция $P(s, x, t, \Gamma)$ называется *однородной* (по времени), если она определена для $s, t \in T = R^1$, R_+ ($= [0, \infty)$), Z^1 ($= \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) или Z_+ ($= \{0, 1, 2, \dots\}$) и если она не меняется при сдвиге вдоль временной оси: $P(s+h, x, t+h, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma)$. Такая переходная функция зависит только от разности $t-s$ ($\in R_+$ или Z_+): можно ввести такую функцию $P(t, x, \Gamma)$ от трех аргументов, что будет выполнимо равенство $P(s, x, t, \Gamma) = P(t-s, x, \Gamma)$. Условия, которым должна удовлетворять функция $P(t, x, \Gamma)$ (для процессов с непрерывным временем $t \in [0, \infty)$, для цепей Маркова t — целое неотрицательное; $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$), — следующие:

- 1) $P(t, x, \cdot)$ — вероятностная мера на (X, \mathcal{X}) ;
- 2) измеримость по x ;
- 3) $P(0, x, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$;
- 4) уравнение Чэпмена — Колмогорова: для $s, t \geq 0$

$$P(t+s, x, \Gamma) = \int_X P(t, x, dy) P(s, y, \Gamma).$$

Значение $P(t, x, \Gamma)$ называется вероятностью перехода из состояния x за время t в множество Γ . В случае дискретного времени говорят также: за t шагов.

Большинство рассмотренных ранее переходных функций были однородными; но, например, переходная функция процесса задачи 2 § 8.1 — неоднородная.

2. Однородным переходным функциям ставятся в соответствие семейства операторов, зависящие от одного параметра:

$$P^t f(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y),$$

$$\nu P^t(\Gamma) = \int_X \nu(dx) P(t, x, \Gamma),$$

где $t \in [0, \infty)$ для процессов с непрерывным временем, $t = 0, 1, 2, \dots$ для цепей. Операторы P^{st} выражаются через операторы этих однопараметрических семейств так: $P^{st} = P^{t-s}$. Свойства операторов P^{st} превращаются в следующие:

а) P^t — линейные операторы на соответствующем банаховом пространстве;

б), в) это сжимающие и сохраняющие положительность операторы;

г) $P^t 1 = 1$, $\nu P^t(X) = \nu(X)$;

д) $P^0 = E$;

е) $P^{t+s} = P^t P^s$.

Обозначение P^t внешне совпадает с обозначением степени оператора, и с этим хорошо согласуются свойства д), е); для дискретного времени операторы P^t действительно являются степенями одного оператора $P = P^1$. Но для непрерывного t это уже не так.

Свойство е) показывает, в частности, что операторы данного семейства можно умножать друг на друга. Как мы знаем, умножение операторов ассоциативно; значит, семейство операторов, связанных с однородной марковской переходной функцией, образует *полугруппу*.

Эта полугруппа является гомоморфным образом полугруппы неотрицательных чисел по сложению (для цепей Маркова — неотрицательных целых чисел), поэтому ее полный титул — *однопараметрическая полугруппа операторов*.

Свойства д), е) можно сформулировать так: P^t — однопараметрическая полугруппа, содержащая единичный оператор (если полугруппа содержит единичный оператор не на нулевом «месте»: $P^t = E$, $t \neq 0$, то $E = P^t = P^{0+t} = P^0 P^t = P^0 E = P^0$, т. е. и $P^0 = E$). В дальнейшем вместо однопараметрическая полугруппа операторов, содержащая единичный оператор, мы будем говорить коротко: полугруппа.

Дискретные полугруппы ($t=0, 1, 2, \dots$) полностью определяются заданием оператора P^1 (или, что то же, вероятностей перехода за один шаг $P(1, x, \Gamma)$); полугруппы с непрерывным параметром по понятным причинам так просто задавать нельзя. Однако ясно, что для того, чтобы задать P^t при всех $t \geq 0$, достаточно задать P^t только в сколь угодно малом отрезке $[0, h]$ вблизи нуля: P^t на отрезке $[h, 2h]$ определится как $P^h P^{t-h}$, и т. д. Оказывается, при некоторых условиях регулярности можно ввести инфинитезимальные, дифференциальные характеристики полугруппы, которые, описывая ее предельное поведение вблизи нуля, позволяют однозначно восстановить всю полугруппу.

Теория полугрупп операторов — весьма развитая область функционального анализа (см. книги: Э. Хилле. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1951; Э. Хилле и Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962; К. Иосида. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967), и она успешно применяется к теории марковских процессов.

3. До сих пор мы говорили только о переходных функциях и связанных с ними операторах; обратимся к марковским семействам с однородной переходной функцией. Если выполнены условия, при которых можно определить операторы сдвига θ_h , θ_h^{-1} (существование для любой траектории $\xi_t(\omega)$ и любого $h \in T$ траектории $\xi_t(\omega_h^+) \equiv \xi_{t+h}(\omega)$; см. § 3.2), то из формулы для конечномерных распределений марковского семейства (§ 8.2, формула (15)) вытекает, что для любого $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}$

$$\mathbf{P}_{s, x}(\theta_s^{-1} B) = \mathbf{P}_{0, x}(B). \quad (1)$$

Действительно, обе части — меры как функции B , и они совпадают на σ -алгебре $\mathcal{F}_{\geq 0}$, так как совпадают для множеств вида $B = \{\xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n\}$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$.

$\leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{s,x} \{ \xi_{s+t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{s+t_n} \in \Gamma_n \} = \\ = \mathbf{P}_{0,x} \{ \xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n \}. \end{aligned}$$

Задача 1. Докажите, что любое событие $A \in \mathcal{F}_{\geqslant s}$ может быть представлено в виде $A = \theta_s^{-1}B$, $B \in \mathcal{F}_{\geqslant 0}$.

Таким образом, вероятности $\mathbf{P}_{s,x}$ однозначно определяются вероятностями $\mathbf{P}_{0,x}$, и все можно свести к семейству мер $\mathbf{P}_x = \mathbf{P}_{0,x}$, зависящему только от одного параметра $x \in X$. Это делает понятным следующее определение.

Пусть $T = R_+$ или Z_+ ; (X, \mathcal{X}) — измеримое пространство; $P(t, x, \Gamma)$ — функция, удовлетворяющая условиям 1) — 3) п. 1. Пусть на пространстве элементарных событий задана функция $\xi_t(\omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в X , и для любых $h \in T$ и $\omega \in \Omega$ существует хотя бы одно $\omega_h^+ \in \Omega$ такое, что $\xi_t(\omega_h^+) = \xi_{t+h}(\omega)$ при всех $t \in T$. Определяются σ -алгебры $\mathcal{F}_{\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_{\leqslant t}$, порождаемые множествами $\{\xi_s \in \Gamma\}$, $s \geqslant 0$, соответственно $s \leqslant t$. Пусть \mathbf{P}_x при каждом $x \in X$ — вероятностная мера на σ -алгебре $\mathcal{F}_{\geqslant 0}$. Пара (ξ_t, \mathbf{P}_x) называется *однородным марковским семейством с переходной функцией* $P(t, x, \Gamma)$, если для любых $t, h \in T$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$ почти наверное (\mathbf{P}_x)

$$\mathbf{P}_x \{ \xi_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leqslant t} \} = \mathbf{P}(h, \xi_t, \Gamma). \quad (2)$$

При этом уравнение Чепмена — Колмогорова (условие 4) п. 1) выполняется автоматически.

Марковское свойство (2) можно переписать в большом числе различных эквивалентных форм; скажем, с условными математическими ожиданиями в интегральной форме: для $t, h \in T$, $x \in X$, $f \in \mathbf{B}$ и любого события $\Gamma \in \mathcal{F}_{\leqslant t}$

$$\int_A f(\xi_{t+h}) \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_A P^h f(\xi_t) \mathbf{P}_x(d\omega).$$

Конечномерные распределения однородного марковского семейства записываются так: для $0 \leqslant$

$\leq t_1 \leq \dots \leq t_n, C \in \mathcal{X}^n$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in C\} = \\ = \int\limits_X P(t_1, x, dx_1) \int\limits_X P(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \dots \\ \dots \int\limits_X P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n) \chi_C(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема существования.

Теорема 1. Пусть (X, \mathcal{X}) — борелевское измеримое пространство. Пусть $P(t, x, \Gamma)$ — функция от $t \in T$ ($= R^1$ или Z^1), $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$, удовлетворяющая условиям 1) — 4) п. 1. Тогда существует однородное марковское семейство с $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ в качестве переходной функции.

Это — приспособленная к однородному случаю теорема 5 § 8.2. Единственное, что нуждается в отдельном доказательстве, — это то, что выполнены условия, обеспечивающие существование операторов сдвига. Но эти условия выполнены для случайных функций, которые получаются конструкцией, примененной при доказательстве теоремы Колмогорова: при этом траекториями оказываются все функции, и между траекториями и элементарными событиями имеется взаимно однозначное соответствие.

Переносится на однородный случай также теорема п. 6 § 8.3:

Теорема 2. Пусть на пространстве C непрерывных функций на компактном пространстве X задана полугруппа P^t сжимающих и сохраняющих положительность операторов такая, что $P^t 1 = 1$. Тогда существует феллеровское однородное марковское семейство (ξ_t, \mathbf{P}_x) на (X, \mathcal{B}_X) , которому соответствует данная полугруппа.

4. Марковское свойство для однородных марковских семейств можно сформулировать в более сильной с виду форме, соответствующей формуле (17) § 8.2. Предоставим его доказательство читателю.

Задача 2. Докажите, что если (ξ_t, \mathbf{P}_x) — однородное марковское семейство, то для любого события $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}$ и любых $t \in T$, $x \in X$ почти наверное (\mathbf{P}_x)

$$\mathbf{P}_x(\theta_t^{-1} B | \mathcal{F}_{\leq t}) = \mathbf{P}_{\xi_t}(B). \quad (3)$$

Марковское свойство в форме (3) интерпретируется так: поведение процесса после момента t при условии, что фиксировано его течение до этого момента, такое же, как если бы мы выпустили его из точки $\xi_t(\omega)$.

Некоторые другие формы марковского свойства, родственные форме (3): для любой ограниченной $\mathcal{F}_{\geq 0}$ -измеримой случайной величины η почти наверное (\mathbf{P}_x)

$$\mathbf{M}_x(\theta_t \eta | \mathcal{F}_{\leq t}) = \mathbf{M}_{\xi_t} \eta;$$

или: для любой ограниченной $\mathcal{F}_{\geq 0}$ -измеримой случайной величины η и любого $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$

$$\int_A \theta_t \eta \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_A \mathbf{M}_{\xi_t} \eta \mathbf{P}_x(d\omega); \quad (4)$$

или: для любой ограниченной $\mathcal{F}_{\geq 0}$ -измеримой величины η и любой ограниченной $\mathcal{F}_{\leq t}$ -измеримой величины ξ

$$\mathbf{M}_x \xi \theta_t \eta = \mathbf{M}_x \xi \mathbf{M}_{\xi_t} \eta.$$

5. Оказывается, неоднородные марковские семейства можно при помощи некоторого искусственного приема свести к однородным.

Пусть $T = R_+$ или Z_+ , и $(\xi_t, t \in T; \mathbf{P}_{s,x})$ — неоднородное марковское семейство. Введем:

новое фазовое пространство $X' = T \times X$; в качестве σ -алгебры \mathcal{X}' возьмем σ -алгебру всех множеств $\Gamma \subseteq X'$, для которых любое сечение $\Gamma_s = \{x: (s, x) \in \Gamma\}$ измеримо относительно \mathcal{X} ;

новое пространство элементарных событий $\Omega' = T \times \Omega$: $\omega' = (s, \omega)$, $s \in T$, $\omega \in \Omega$;

новые траектории $\xi'_t(\omega') = \xi'_t(s, \omega) = (s + t, \xi_{s+t}(\omega))$ со значениями в X' ;

новые вероятностные меры $\mathbf{P}'_{x'}(A) = \mathbf{P}'_{(s,x)}(A) = \mathbf{P}_{s,x}(A_s)$, где $A_s = \{\omega: (s, \omega) \in A'\}$;

новую переходную функцию (однородную), определенную при $t \in T$, $x' = (s, x) \in X'$, $\Gamma \in \mathcal{X}'$:

$$P'(t, x', \Gamma) = P(s, x, s + t, \Gamma_{s+t}),$$

$$\Gamma_{s+t} = \{x: (s + t, x) \in \Gamma\}.$$

Покажем, что это будет однородное марковское семейство, причем именно с данной переходной функцией. Достаточно проверить выполнение условий, налагаемых на переходную функцию, возможность определить операторы сдвига и выполнение условия

$$\mathbf{P}'_{x'}(A \cap \{\omega': \xi'_{t+h}(\omega') \in \Gamma\}) = \mathbf{M}'_{x'} \chi_A P'(h, \xi'_t(\omega'), \Gamma), \quad (5)$$

при $A \in \mathcal{F}'_{\leq t}$.

Покажем только, как проверяется последнее условие. Слева здесь, согласно определению вероятности P'_x , стоит $P_{s,x}(A_s \cap \{\omega: \xi'_{t+h}(s, \omega) \in \Gamma\})$, $A_s = \{\omega: (s, \omega) \in A\} \in \mathcal{F}_{[s, s+t]}$. Второе ω -множество здесь в силу определения новых траекторий можно заменить на $\{\omega: \xi_{s+t+h}(\omega) \in \Gamma_{s+t+h}\}$. В правой части (5), опять-таки в силу нашего определения новой вероятностной меры, стоит $M_{s,x} \chi_{A_s} P'(h, \xi'_t(s, \omega), \Gamma)$. Но $\xi'_t(s, \omega) = (s+t, \xi_{s+t}(\omega))$, и значение переходной функции под знаком математического ожидания равно $P(s+t, \xi_{s+t}(\omega), s+t+h, \Gamma_{s+t+h})$. В силу марковского свойства для исходного марковского семейства правая часть превращается в $P_{s,x}(A_s \cap \{\omega: \xi_{s+t+h}(\omega) \in \Gamma_{s+t+h}\})$, т. е. в левую часть (5).

Смысл введенного нами преобразования, превращающего неоднородное марковское семейство в однородное, очень простой: мы просто вводим еще одну дополнительную пространственную координату, по которой происходит равномерное движение направо со скоростью 1; при этом неоднородность по времени превращается в неоднородность по пространству, которой мы не боимся.

Отныне, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только однородные марковские семейства.

§ 8.5. Строго марковские процессы

0. Сначала введем одно определение, близкое к нашему определению марковского процесса, но не совпадающее с ним. Пусть на пространстве элементарных событий Ω задано неубывающее семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$; пусть задан случайный процесс ξ_t , $t \in T$. Мы будем говорить, что ξ_t — марковский процесс относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t с данной переходной функцией, если, во-первых, процесс ξ_t согласован с семейством σ -алгебр, а во-вторых, для любых $t \geq u$, $\Gamma \in \mathcal{X}$ почти наверное

$$P\{\xi_u \in \Gamma | \mathcal{F}_t\} = P(t, \xi_t, u, \Gamma). \quad (1)$$

Любой марковский процесс является марковским относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$; для некоторого класса процессов мы докажем (§ 9.2), что они являются марковскими относительно семейства $\mathcal{F}_{\leq t+1}$.

Ясно, как дается определение марковского семейства относительно данного семейства σ -алгебр.

1. При изучении марковских процессов бывают ситуации, в которых нам важно, сохраняется ли свойство независимости будущего от прошлого при фиксированном настоящем, если настоящее понимать не как значение процесса в фиксированный момент времени, а как значение его в *случайный* момент времени. Рассмотрение этого вопроса показывает, что, во-первых, даже для самых хороших марковских процессов здесь в качестве настоящего нельзя брать произвольный случайный момент времени. Например, предположим, что наш случайный процесс

достигает какой-нибудь точки a конечное число v раз, причем v — случайная величина, принимающая значения $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Обозначим через τ тот момент времени, в который процесс достигает этой точки в $[(v+1)/2]$ -й раз; тогда прошлое и будущее относительно этого момента зависмы, хотя положение процесса в момент τ фиксировано: это — точка a . Действительно, число раз, которые процесс побывал в данной точке до момента τ , — случайная величина $[(v-1)/2]$, принимающая значения $0, 1, 2, \dots$; число раз, которые процесс побывает в этой точке после момента τ , — случайная величина $[v/2]$, принимающая те же самые значения. Но они никоим образом не независимы, потому что эта пара случайных величин может принимать не любые значения, а лишь совпадающие друг с другом или отличающиеся на единицу. Поэтому приходится ограничиться только марковскими моментами; для них точно определяется, что означает, что будущее зависит от прошлого только через настоящее, и это некоторое особое свойство процесса, строго марковское свойство. Так же, как и марковское, оно имеет ряд формулировок различной силы и применимости и различного вида.

Затем, и это во-вторых, оказывается, что есть «плохие» марковские процессы, для которых зависимости прошлого и будущего нет для неслучайных моментов, но она есть для марковских случайных моментов. Это означает, что строго марковское свойство — не только не то же, что марковское, но даже и не эквивалентно ему (а сильнее).

Все дальнейшие формулировки относятся к марковским семействам, а не к отдельным процессам.

2. Пусть (ξ_t, P_x) — однородное марковское семейство ($t \in T = [0, \infty)$ или $\{0, 1, 2, \dots\}$). Пусть в пространстве элементарных событий задано неубывающее семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t , $t \in T$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{\geq 0}$.

Микротеорема 1. Пусть процесс $\xi_t(\omega)$ прогрессивно измерим относительно семейства \mathcal{F}_t (см. § 6.2). Тогда переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ измерима по (t, x) относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_t \times \mathcal{X}$ при любом $\Gamma \subseteq \mathcal{X}$.

Доказательство. Разумеется, здесь есть что доказывать только для $T = R_+$. Достаточно для любого $t \geq 0$ проверить измеримость $P(s, x, \Gamma)$ при $(s, x) \in [0, t] \times X$ относительно $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{X}$. Введем $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$ -измеримое множество $A = \{(s, \omega) : 0 \leq s \leq t, \xi_s(\omega) \in \Gamma\} \subseteq [0, t] \times \Omega$. Переходная вероятность $P(s, x, \Gamma)$ — не что иное, как P_x -вероятность сечения этого множества «на уровне s », т. е.

$$P_x\{\omega : (s, \omega) \in A\}. \quad (2)$$

Докажем больше, чем мы хотели заранее: что для любого $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$ -измеримого подмножества $[0, t] \times$

$\times \Omega$ функция (2) на множестве $[0, t] \times X$ измерима по (s, x) относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{X}$.

Ясно, что система \mathcal{A} всех таких множеств замкнута относительно сложения непересекающихся множеств, вычитания из множества его части и монотонного предельного перехода; она содержит все множества вида $C \times B$, где C — произвольное борелевское подмножество отрезка $[0, t]$, а B — произвольное событие из \mathcal{F}_t (для них выражение (2) равно $\chi_C(s) \mathbf{P}_x(B)$, а последняя вероятность измерима по x как вероятность любого события из $\mathcal{F}_{\geq 0}$). Поэтому $\mathcal{A} \supseteq \mu \{C \times B : C \in \mathcal{B}_{[0, t]}, B \in \mathcal{F}_t\}$ (см. § 8.2). Система множеств вида $C \times B$ содержит все $[0, t] \times \Omega$ и замкнута относительно пересечения двух множеств: $(C_1 \times B_1) \cap (C_2 \times B_2) = (C_1 \cap C_2) \times (B_1 \cap B_2)$, причем оба сомножителя принадлежат нужным σ -алгебрам. По лемме 1 § 8.2 $\mathcal{A} \supseteq \sigma \{C \times B : C \in \mathcal{B}_{[0, t]}, B \in \mathcal{F}_t\}$, что, по определению, есть $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$. Это доказывает микротеорему.

Марковское семейство (ξ_t, \mathbf{P}_x) называется строго марковским относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t , если

- случайный процесс ξ_t прогрессивно измерим;
- для любого марковского момента τ ; любой функции $\eta = \eta(\omega)$, принимающей значения из множества $T \cup \{\infty\}$, определенной на $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ и измеримой относительно σ -алгебры \mathcal{F}_τ ; любого $x \in X$ и $\Gamma \in \mathcal{X}$ и любого события $A \subseteq \Omega_\tau \cap \Omega_\eta = \{\tau, \eta < \infty\}$, принадлежащего \mathcal{F}_τ ,

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) = \int_A P(\eta, \xi_\tau, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (3)$$

Интеграл имеет смысл, потому что функция $P(\eta, \xi_\tau, \Gamma)$ измерима относительно \mathcal{F}_τ (а значит, и относительно $\mathcal{F}_{\geq 0}$). Действительно, τ и η измеримы относительно \mathcal{F}_τ ; функция ξ_τ прогрессивно измерима, поэтому случайная величина ξ_τ измерима относительно \mathcal{F}_τ на множестве $\{\tau < \infty\}$; функция (η, ξ_τ) со значениями в $(T \times X, \mathcal{B}_T \times \mathcal{X})$ измерима относительно \mathcal{F}_τ ; в силу доказанной микротеоремы функция $P(t, x, \Gamma)$ измерима относительно $\mathcal{B}_t \times \mathcal{X}$, и результат подстановки в нее измеримой функции измерим.

Формулу (3), выражющую одну из форм строго марковского свойства, можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_x\{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma | \mathcal{F}_\tau\} = P(\eta, \xi_\tau, \Gamma) \quad (4)$$

почти наверное (P_x) на множестве $\{\tau, \eta < \infty\}$ (вне этого множества условная вероятность равна, естественно, нулю, потому что при $\tau = \infty$ или $\eta = \infty$ случайная величина $\xi_{\tau+\eta}$ не может принадлежать множеству Γ , так как она просто не определена). Правая часть (4) измерима относительно \mathcal{F}_τ , интеграл от этой правой части по любому $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \subseteq \{\tau, \eta < \infty\}$, равен в силу (3) вероятности пересечения этого события с $\{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma\}$; это и означает, что выполнено (4).

Другие равносильные формы строго марковского свойства: для $f \in B$

$$M_x [f(\xi_{\tau+\eta}) | \mathcal{F}_\tau] = P^\eta f(\xi_\tau) \quad (5)$$

почти наверное (P_x) на $\Omega_\tau \cap \Omega_\eta$;

$$\int_A f(\xi_{\tau+\eta}) P_x(d\omega) = \int_A P^\eta f(\xi_\tau) P_x(d\omega) \quad (6)$$

для $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \subseteq \{\tau, \eta < \infty\}$; или, что то же,

$$M_x \chi_A f(\xi_{\tau+\eta}) = M_x \chi_A P^\eta f(\xi_\tau); \quad (7)$$

и т. д.

Строго марковское семейство является марковским относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t (см. п. 0). Это вытекает из того, что неслучайный момент t является марковским.

3. Микротеорема 2. Любая (однородная) цепь Маркова является автоматически строго марковской относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Требование а) выполнено, так как T счетно, а цепь согласована с данным семейством σ -алгебр; докажем, что выполнено (3). Имеем

$$P_x(A \cap \{\xi_{\tau+\eta} \in \Gamma\}) =$$

$$= P_x \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap \{\tau = m\} \cap \{\eta = n\} \cap \{\xi_{m+n} \in \Gamma\} \right). \quad (8)$$

Так как η и A измеримы относительно $\mathcal{F}_{\leq \tau}$, то пересечение первых трех сомножителей измеримо относительно $\mathcal{F}_{\leq m}$. Разбивая выражение (8) на счетное число слагаемых и применяя к (m, n) -му слагаемому простое марковское свойство относительно момента m , получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau = m, \eta = n\}} P(n, \xi_m, \Gamma) P_x(d\omega).$$

Заменяя здесь в функции под знаком интеграла t на τ , n на η и собирая интегралы снова воедино, получаем правую часть (3).

Совершенно так же доказывается и

Микротеорема 3. Для произвольного марковского семейства и семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$ строго марковское свойство (3) выполняется, во всяком случае, тогда, когда τ и η принимают не более чем счетное число значений.

Впоследствии мы докажем, что любое феллеровское марковское семейство с непрерывными справа траекториями является строго марковским относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$ и даже, более того, $\mathcal{F}_{\leq t+}$ (не будем сейчас говорить о том, почему речь идет о непрерывности справа). В частности, это относится к винеровскому процессу.

4. Приведем примеры применения строго марковского свойства.

a) Пусть имеется дискретная цепь Маркова ξ_t , $t = 0, 1, 2, \dots$, с вероятностями перехода $p(n, x, y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $x, y \in X$. Обозначим через $f(n, x, y)$ вероятность того, что ξ_t впервые при положительном t достигает y в момент n , вычисленную в предположении, что $\xi_0 = x$, т. е.

$$f(n, x, y) = P_x \{\xi_t \neq y, 0 < t < n; \xi_n = y\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p(n, x, y) &= f(n, x, y) + f(n-1, x, y) p(1, y, y) + \dots \\ &\quad \dots + f(1, x, y) p(n-1, y, y). \end{aligned} \quad (9)$$

Это получается применением строго марковского свойства (3) к моменту τ первого достижения точки y , $\eta = (n - \tau) \vee 0$, $\Gamma = \{y\}$, $A = \{\tau \leq n\}$.

Формула (9) и ее частный случай при $x = y$ являются основными при изучении предельного поведения $p(n, x, y)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. Феллер, 1967, т. 1, гл. XIII, § 3; гл. XV, § 5).

б) «Принцип отражения» для винеровского процесса. Предположим, что доказано, что винеровский процесс — строго марковский. Пусть фиксированы какие-то точки $x < a \in R^1$ и $t > 0$. Рассмотрим марковский момент τ — первый момент достижения a , $\eta = (t - \tau) \vee 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}^1$, $A = \{\tau \leq t\}$. Запишем формулу (3):

$$P_x \{\tau \leq t, w_t \in \Gamma\} = \int_{\{\tau \leq t\}} P(t - \tau, a, \Gamma) P_x(d\omega). \quad (10)$$

Если отразить множество Γ в точке a , то в силу симметричности нормального распределения вероятность (10) не изменится. Для множества $\Gamma \subseteq (-\infty, a)$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \{\tau \leq t, w_t \in \Gamma\} &= \\ &= \mathbf{P}_x \{\tau \leq t, w_t \in 2a - \Gamma\} = \mathbf{P}_x \{w_t \in 2a - \Gamma\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе равенство выполняется потому, что если траектория начинается в точке $x < a$, а в момент t оказывается правее a , то она непременно побывает в точке a до момента t .

Из формулы (11) можно получить распределения различных случайных величин, например совместное распределение w_t и $\max_{0 \leq s \leq t} w_s$ и т. п. (ср. задачи 17, 18 § 5.3). В частности, из формулы (11) при $\Gamma = (-\infty, a)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x \{\tau \leq t\} &= \mathbf{P}_x \{\tau \leq t, w_t \in (-\infty, a)\} + \\ &+ \mathbf{P}_x \{\tau \leq t, w_t \in (a, \infty)\} = 2\mathbf{P}_x \{w_t \in (a, \infty)\} = \\ &= 2 \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/(2t)} dy = 2 [1 - \Phi((a-x)/\sqrt{t})]. \end{aligned}$$

(Ср. найденное распределение с оценкой задачи 6 § 7.3.) Дифференцируя функцию распределения, получаем плотность распределения случайной величины τ : $p_{\tau}(t) = \frac{a-x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(a-x)^2/2t}$, $t > 0$.

Задача 1. Пусть (w_t, \mathbf{P}_x) — семейство винеровских процессов, выходящих из всех точек прямой; τ — первый момент, когда w_t достигает нуля. Положим $w_t^0 = w_t$ при $t < \tau$, $w_t^0 = 0$ при $t \geq \tau$ (иначе: $w_t^0 = w_{t \wedge \tau}$); это — винеровский процесс, остановленный в момент первого достижения нуля. Докажите, что $(w_t^0, \mathbf{P}_x, x \in \mathbb{R}_+)$ — марковское семейство; найдите переходную функцию.

5. Теперь рассмотрим пример марковского, но не строго марковского семейства. Ясно, что это будет не цепь Маркова и не феллеровское семейство; в частности, вряд ли какой-либо из приведенных ранее примеров.

Пусть $(w_t, t \geq 0; \mathbf{P}_x)$ — семейство винеровских процессов, выходящих из каждой точки прямой. Изменим это семейство в одной точке следующим образом: по-

ложим $\xi_t = w_t$, если $w_0 \neq 0$, и $\xi_t \equiv 0$, если $w_0 = 0$; пример траектории, выходящей не из нуля, и траектории, выходящей из нуля, представлен на рис. 25.

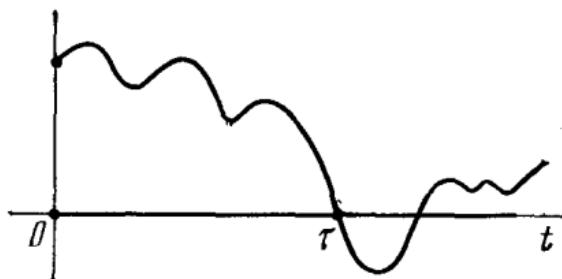


Рис. 25

Семейство $(\xi_t, t \geq 0; \mathbf{P}_x)$ будет марковским с переходной функцией

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} e^{-(y-x)^2/2t} dy, & x \neq 0, \\ \delta_0(\Gamma), & x = 0. \end{cases}$$

Действительно, эта функция измерима и всем хороша; нужно доказать, что для $t, h \geq 0$, $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$, $\Gamma \in \mathcal{B}^1$ при любом $x \in R^1$

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{\xi_{t+h} \in \Gamma\}) = \int_A P(h, \xi_t, \Gamma) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (12)$$

Но если $x \neq 0$, то с вероятностью 1 $\xi_t \equiv w_t$; вероятностная мера \mathbf{P}_x слева и справа та же, что для винеровского процесса, выходящего из точки x . При этом $\mathbf{P}_x\{\xi_t = 0\} = \mathbf{P}_x\{w_t = 0\} = 0$, и функция под знаком интеграла совпадает с соответствующей переходной вероятностью для винеровского процесса при значении второго аргумента, не равном нулю, т. е. почти всюду. Итак, в этом случае (12) сводится к марковскому свойству для винеровского процесса. Если же $x = 0$, то здесь все будет так же, как у марковского процесса, состоящего в стоянии на месте; а именно, если A содержит элементарное событие, для которого $w_0 = 0$ (и значит, $\xi_t \equiv 0$), а $\Gamma \ni 0$, то обе части (12) равны единице, в противном случае — нулю.

В то же время семейство ξ_t не будет строго марковским: взяв $x \neq 0$ и подставив в (3) $\tau = \min\{t: \xi_t = 0\}$, $\eta = (1 - \tau) \vee 0$, $A = \{\tau \leq 1\}$, $\Gamma = R^1 \setminus \{0\}$,

получим слева $P_x\{\tau \leqslant 1, \xi_1 \neq 0\} = P_x\{\tau \leqslant 1\} = 2[1 - \Phi(|x|)] > 0$, а справа нуль.

Траектории ξ_t непрерывны, так что мы можем быть уверены, что это семейство не феллеровское; и действительно, соответствующая полугруппа переводит непрерывные функции, вообще говоря, в разрывные (рис. 26).

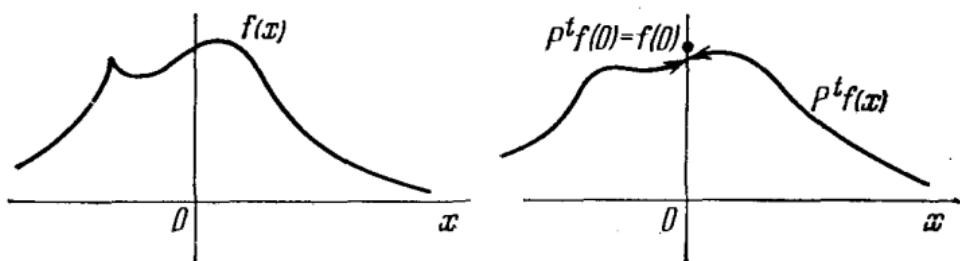


Рис. 26

Разумеется, можно привести примеры, когда строгое марковости нет из-за нарушения условия измеримости а): таков, например, процесс с независимыми значениями из задачи 4 § 2.1; но такие теоретико-множественные тонкости и уродства неинтересны.

6. Выведем форму строго марковского свойства, которая будет касаться не событий, состоящих в попадании процесса в какой-то один момент в какое-то множество, а произвольных событий из σ -алгебры $\mathcal{F}_{\geqslant 0}$ (ср. формулы (17) § 8.2, (3) § 8.4). Прежде всего для строго марковского семейства процессов ξ_t введем операторы сдвига $\theta_\tau, \theta_\tau^{-1}$ на случайное время.

Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — случайный момент, измеримый относительно $\mathcal{F}_{\geqslant 0}$, принимающий значения из множества $T \cup \{\infty\}$: В пространстве Ω определены операторы $\theta_t, t \in T$, вообще говоря, не однозначные, а ставящие в соответствие одному элементарному событию ω целое множество элементарных событий $\theta_t \omega$. Оператор θ_τ мы определили как оператор, ставящий в соответствие элементарному событию ω элементарные события $\theta_\tau \omega = \theta_{\tau(\omega)} \omega$. Иначе говоря, $\theta_\tau \omega$ — результат подстановки в (неоднозначную) функцию $\theta_t \omega$ вместо первого ее аргумента функции от второго, а именно $\tau(\omega)$. Аргумент t в $\theta_t \omega$ должен принимать только конечные значения, а τ может равняться бесконечности, в этом случае $\theta_\tau \omega$ не определено, потому что не определено $\theta_\infty \omega$. Это означает, что оператор θ_τ определен, вообще говоря, не на всем Ω , а только на той его части Ω_τ , где $\tau < \infty$. Множество Ω_τ оператор θ_τ отображает

в Ω (совсем не обязательно, чтобы все $\theta_t \omega$ или хотя бы одно из этих элементарных событий принадлежали Ω_τ). Итак, для $\omega \in \Omega_\tau$ определяется множество элементарных событий $\theta_t \omega$, для каждого из которых $\xi_t(\theta_t \omega) = \xi_{\tau+t}(\omega)$.

Теперь для событий $A \in \mathcal{F}_{\geq 0}$ определим $\theta_\tau^{-1}A$ как прообраз при отображении θ_τ : $\theta_\tau^{-1}A$ составим из тех элементарных событий ω , для которых хотя бы один из элементов $\theta_\tau \omega \in A$ (можно доказать, что при этом автоматически все $\theta_\tau \omega \in A$). Оператор θ_τ^{-1} отображает любое событие из σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq 0}$ обязательно в какое-то подмножество Ω_τ ; докажем, что это будет также событие из $\mathcal{F}_{\geq 0}$.

Легко видеть, что все события A , для которых это так, образуют σ -алгебру; поэтому достаточно проверить сохранение измеримости лишь для событий $\{\xi_t \in \Gamma\}$, порождающих σ -алгебру $\mathcal{F}_{\geq 0}$. Но $\theta_\tau^{-1}\{\xi_t \in \Gamma\} = \{\xi_{t+\tau} \in \Gamma\}$, и измеримость этого множества вытекает из того, что случайная функция ξ_t прогрессивно измерима.

Далее, для $\mathcal{F}_{\geq 0}$ -измеримой функции $\eta = \eta(\omega)$ на Ω определяется $\theta_\tau \eta = \eta(\theta_\tau \omega)$ — функция, определенная всюду на множестве Ω_τ . Доказывается, что значение η одно и то же для всех элементарных событий $\theta_\tau \omega$ (см. § 3.2, п. 3) и что полученная функция $\mathcal{F}_{\geq 0}$ -измерима. Рассмотрим примеры.

Пусть τ — момент первого достижения процессом множества $\Gamma \subset X$: $\tau = \inf\{t: \xi_t \in \Gamma\}$. Здесь Ω_τ состоит из тех элементарных событий, для которых траектория вообще когда-либо достигает Γ . Сделаем чертеж для случая, когда ξ_t — процесс с непрерывными траекториями на прямой, а множество Γ — отрезок

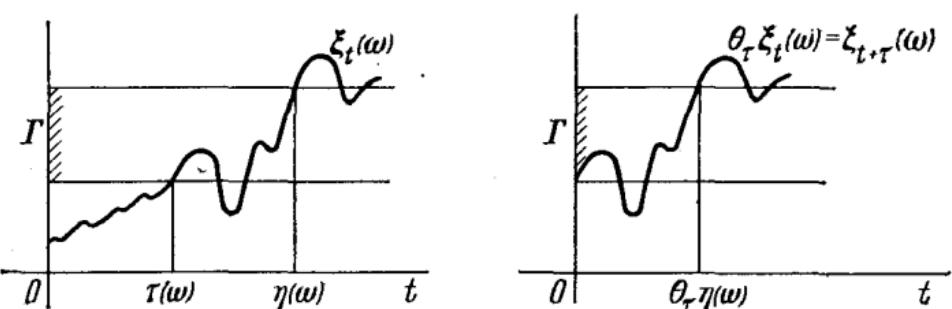


Рис. 27

(рис. 27). Изобразим сдвиг траектории. (Для траектории, начинающейся в пределах отрезка Γ , $\tau = 0$, так что сдвиг траектории совпадает с ней самой; на рис. 27 изображен случай $\xi_0 \notin \Gamma$.)

Для события $A = \{\xi_1 > 0\}$ прообраз выразится так: $\theta_{\tau}^{-1}A = \{\tau < \infty, \xi_{\tau+1} > 0\}$. Мы видели, что для события $B = \{\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = 0\}$ любой его сдвиг $\theta_{\tau}^{-1}B$ совпадал с ним самим. Но $\theta_{\tau}^{-1}B = \{\tau < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = 0\}$, что, вообще говоря, будет лишь частью события B . Еще пример: если $C = \{\xi_0 \notin \Gamma\}$, то $\theta_{\tau}^{-1}C = \{\tau < \infty, \xi_{\tau} \notin \Gamma\}$, что в данном случае является невозможным событием. Таким образом, может быть $A \neq \emptyset, \theta_{\tau}^{-1}A = \emptyset$.

В качестве примеров действия оператора θ_{τ} на функции рассмотрим $\theta_{\tau}\tau$, что в данном случае равно нулю на всем множестве определения, т. е. на $\Omega_{\tau}, \theta_{\tau}\eta = \eta - \tau$ на Ω_{τ} , где η — первый момент достижения верхнего конца отрезка (см. рис. 27). Если же мы рассмотрим случайный момент β первого достижения какой-либо точки $a \notin \Gamma$, то $\theta_{\tau}\beta$ равно $\beta - \tau$ только в том случае, если траектория прежде достигает Γ , чем точки a . И т. д.

Форма строго марковского свойства, использующая операторы сдвига, запишется так: для любого марковского момента τ , любого события $A \in \mathcal{F}_{\tau}, A \subseteq \Omega_{\tau}$, любого события $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}$ при любом $x \in X$

$$\mathbf{P}_x(A\theta_{\tau}^{-1}B) = \int_A \mathbf{P}_{\xi_{\tau}}(B) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (13)$$

Иначе это можно записать так:

$$\mathbf{P}_x(\theta_{\tau}^{-1}B | \mathcal{F}_{\tau}) = \mathbf{P}_{\xi_{\tau}}(B) \quad (14)$$

почти наверное (\mathbf{P}_x) на множестве $\{\tau < \infty\}$; в форме с математическими ожиданиями:

$$\mathbf{M}_x(\theta_{\tau}\eta | \mathcal{F}_{\tau}) = \mathbf{M}_{\xi_{\tau}}\eta \quad (15)$$

почти наверное (\mathbf{P}_x) на том же множестве или

$$\mathbf{M}_x\xi\theta_{\tau}\eta = \mathbf{M}_x\xi\mathbf{M}_{\xi_{\tau}}\eta, \quad (16)$$

где ξ и η — ограниченные случайные величины, ξ — равная нулю вне множества Ω_{τ} и \mathcal{F}_{τ} -измеримая на этом множестве, а η — \mathcal{F}_{τ} -измеримая.

Строго марковское свойство (13) выводится из строго марковского свойства (3) или (6) с $\eta = h = \text{const}$ так же, как выводится марковское свойство в форме (17) § 8.2: сначала для событий B вида $B = \{\xi_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, \xi_{t_n} \in \Gamma_n\}, 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, а затем распространяется на все $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}$, причем измеримость $\mathbf{P}_x(B)$ по x , которая здесь существенна, уже не нужно

доказывать заново. Мы не будем проводить доказательства.

Строго марковское свойство в форме (13)–(16) можно интерпретировать так: поведение процесса после марковского момента τ при условии, что фиксировано течение процесса до момента τ , — такое же, как если бы процесс был с самого начала выпущен из точки ξ_τ .

7. В качестве применения дается

Задача 2. Пусть $(\xi_t, t = 0, 1, 2, \dots; P_x)$ — цепь Маркова на фазовом пространстве (X, \mathcal{X}) . Пусть Y — \mathcal{X} -измеримое непустое подмножество X . Обозначим через τ_n n -й момент времени, не считая нулевого, когда $\xi_t \in Y$; если ξ_t побывало в множестве Y менее чем n раз при $t > 0$, полагаем $\tau_n = \infty$. Для тех элементарных событий, для которых $\xi_0 \in Y$, определим новую случайную последовательность $\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots$: $\eta_0 = \xi_0$; $\eta_n = \xi_{\tau_n}$, если $\tau_n < \infty$, и $\eta_n = *$ (дополнительное состояние), если $\tau_n = \infty$. Те элементарные события, для которых $\xi_0 \notin Y$, выбросим; зато добавим еще одно элементарное события ω_* , причем положим $\eta_n(\omega_*) = *, n = 0, 1, 2, \dots$ Положим $P_x\{\omega_*\} = 0, x \in Y; P_x\{\omega_*\} = 1$. Докажите, что $(\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots; P_x, x \in Y \cup \{*\})$ — марковская цепь на фазовом пространстве $(Y \cup \{*\}, \mathcal{X}(Y \cup \{*\}))$, где $\mathcal{X}(Y \cup \{*\})$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая все \mathcal{X} -измеримые подмножества Y и одноточечное множество $\{*\}$.

Смысл этой формально изложенной конструкции таков: мы наблюдаем за цепью ξ_t только в то время, которое она проводит в множестве Y , и это снова получается цепь Маркова (она может вместо Y попадать в дополнительное состояние $*$, если возвращение в множество Y происходит с вероятностью, меньшей 1). Для доказательства стоит сначала выписать переходную функцию.

Задача 3*. Пусть $w_t, t \geq 0$, — одномерный винеровский процесс, выходящий из нуля; обозначим через τ_a момент первого достижения процессом точки a . Докажите, что $\tau_a, a \geq 0$, — процесс с независимыми приращениями. Найдите соответствующую характеристическую функцию.

§ 8.6. Стационарные марковские процессы

1. Найдем условия, при которых марковский процесс будет стационарным.

Прежде всего, ясно, что стационарные марковские процессы могут обладать только однородными переходными функциями (ведь стационарность — это однородность по времени).

Далее, введем определение.

Инвариантной мерой, соответствующей однородной переходной функции (или инвариантной мерой однородного марковского семейства), называется мера μ

на фазовом пространстве (X, \mathcal{X}) , удовлетворяющая условию

$$\mu(\Gamma) = \int_X \mu(dx) P(t, x, \Gamma), \quad t \geq 0, \quad \Gamma \in \mathcal{X}. \quad (1)$$

Можно рассматривать как конечные инвариантные меры, так и меры, принимающие также значение $+\infty$. Для конечной меры условие (1) в наших обозначениях (см. § 8.3) запишется так:

$$\mu = \mu P^t, \quad t \geq 0.$$

Вероятностную инвариантную меру (т. е. $\mu \equiv \mu P^t$, $\mu(X) = 1$) называют также *стационарным распределением* марковского семейства.

Примеры инвариантных мер предлагается получить, решив следующие задачи.

Задача 1. Существуют ли конечные инвариантные меры для семейства винеровских процессов? Докажите, что мера Лебега — инвариантная мера для этого семейства.

Задача 2. Найдите все инвариантные меры, соответствующие матрице вероятностей перехода задачи 1 § 8.1.

Задача 3. Приведите пример марковского семейства с двумя не пропорциональными друг другу конечными инвариантными мерами.

2. Микротеорема. Пусть ξ_t , $t \in T (= R^1, R_+, Z^1$ или Z_+) — стационарный марковский процесс. Тогда любое одномерное распределение μ_t этого процесса — некоторая инвариантная мера (одна и та же для всех t):

$$\mu_t(\Gamma) = P\{\xi_t \in \Gamma\} \equiv \mu(\Gamma), \quad (2)$$

где $\mu \equiv \mu P^t$.

Обратно, если μ — вероятностная инвариантная мера для переходной функции $P(t, x, \Gamma)$ и если фазовое пространство — борелевское, то существует стационарный марковский процесс с данной переходной функцией, такой, что выполнено (2).

Доказательство первой части тривиально. Для доказательства существования марковского процесса, удовлетворяющего (2) и имеющего данную переходную функцию, пользуемся теоремой 6 § 8.2; его стационарность следует из формулы (1) того же параграфа (при этом мы полагаем $P(s, x, t, \Gamma) = P(t - s, x, \Gamma)$).

Доказанная микротеорема позволяет строить примеры стационарных марковских процессов.

Задача 4. Найти все одномерные стационарные гауссовские марковские процессы, непрерывные в среднем (т. е. скажем, найти корреляционные функции всех таких процессов).

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ. СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ. СТРОГО МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО

§ 9.1. Свойства траекторий

1. В этом параграфе мы укажем некоторые условия на переходную функцию, при которых существует марковское семейство с непрерывными или непрерывными справа траекториями, обладающее данной переходной функцией. Условия такого рода выводились нами для произвольных процессов (теорема Колмогорова); но, конечно, к большему числу марковских процессов могут быть применены условия, специально для них предназначенные.

Пусть X — полное метрическое пространство; введем обозначения: $U_\varepsilon(x) = \{y: \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — ε -окрестность точки x , $V_\varepsilon(x) = \{y: \rho(x, y) \geq \varepsilon\}$ — ее дополнение. Пусть на фазовом пространстве $(X, \mathcal{X}) = (X, \mathcal{B}_X)$ задана переходная функция $P(t, x, \Gamma)$, $t \in [0, \infty)$. Положим

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup_{x \in X, t \leq h} P(t, x, V_\varepsilon(x)).$$

Теорема 1 (теорема Дынкина — Кинни). *Пусть $\alpha_\varepsilon(h) = o(h)$ при $h \downarrow 0$ для любого положительного ε . Тогда существует марковское семейство с данной переходной функцией, все траектории которого непрерывны.*

Доказательство проведем, пользуясь теоремой 1 § 5.2. (Можно было бы воспользоваться приемом построения процесса, стохастически эквивалентного данному, непрерывным продолжением со счетного всюду плотного множества $T_0 \subset [0, \infty)$; но тогда возникли бы некоторые трудности с требованием возможности ввести операторы сдвига (§ 8.4, п. 3): ведь никакое счетное T_0 не инвариантно относительно сдвигов на любое $h \in [0, \infty)$.) Возьмем в качестве X множество C всех непрерывных функций на $[0, \infty)$ со значениями в X . Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — марковское семейство

с данной переходной функцией. Мы докажем, что из $\mathbf{C} \subseteq A$, $A \in \mathcal{X}^{[0, \infty)}$ вытекает $P_x\{\xi_t \in A\} = 1$ при любом x . Тогда мы сможем взять в качестве пространства элементарных событий множество \mathbf{C} , на нем σ -алгебру \mathcal{F}' , состоящую из множеств вида $\mathbf{C} \cap B$, $B \in \mathcal{X}^{[0, \infty)}$, и при каждом x определить вероятность P'_x на \mathcal{F}' такую, что процесс $\xi'_t(x) = x_t$ будет иметь те же конечномерные распределения, что ξ_t . Получим марковское семейство (ξ'_t, P'_x) с данной переходной функцией; траекториями будут все непрерывные функции и только они. Нужно еще проверить, что определены операторы сдвига; но это вытекает из того, что сдвиг любой непрерывной функции непрерывен.

Зафиксируем множество A из $\mathcal{X}^{[0, \infty)}$, содержащее \mathbf{C} . Принадлежность функции $x \in X^{[0, \infty)}$ множеству A определяется ее значениями в счетном числе точек $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$

Задача 1. Пусть $T_0 = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. Докажите, что среди всех $A \in \mathcal{X}^{T_0}(X^{[0, \infty)})$, $A \supseteq \mathbf{C}$, есть наименьшее, A_0 : оно состоит из всех функций x , равномерно непрерывных на множестве $T_0 \cap [0, N]$ при любом N .

Докажем, что $P_x\{\xi_t \in A_0\} = 1$; раз $A_0 \subseteq A$, отсюда получится и $P_x\{\xi_t \in A\} = 1$. Для этого используем выражение множества A_0 через более простые.

Задача 2. Докажите, что $X^{[0, \infty)} \setminus A_0 = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{Nnm}$, где $B_{Nnm} = \bigcup_{k=0}^{Nn-1} \bigcup_{t \in T_0 \cap [k/n, (k+2)/n]} \{x : \rho(x_{k/n}, x_t) \geqslant 1/m\}$.

Оценить $P_x\{\xi_t \in B_{Nnm}\}$ нам поможет следующая **Лемма**. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_k \leqslant h$. Тогда

$$P_x\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k} \in U_{\varepsilon}(x)\} \geqslant 1 - 2\alpha_{\varepsilon/2}(h).$$

Доказательство. Введем марковский момент $\tau = \min\{t_i : \xi_{t_i} \notin U_{\varepsilon}(x)\}$ или $+\infty$, если все $\xi_{t_i} \in U_{\varepsilon}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Нам нужно доказать, что $P_x\{\tau \leqslant h\} \leqslant 2\alpha_{\varepsilon/2}(h)$. Положим $\eta = h - \tau$, $A = \{\tau \leqslant h\}$ и воспользуемся строгим марковским свойством (оно выполнено, так

как случайные величины τ и η дискретны):

$$\mathbf{P}_x(A \cap \{\xi_h \in U_{\varepsilon/2}(x)\}) = \int_A P(h - \tau, \xi_\tau, U_{\varepsilon/2}(x)) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (1)$$

Точка ξ_τ находится от x на расстоянии не менее ε , поэтому все точки из $U_{\varepsilon/2}(x)$ удалены от ξ_τ больше чем на $\varepsilon/2$, т. е. $U_{\varepsilon/2}(x) \subseteq V_{\varepsilon/2}(\xi_\tau)$. Значит,

$$P(h - \tau, \xi_\tau, U_{\varepsilon/2}(x)) \leq P(h - \tau, \xi_\tau, V_{\varepsilon/2}(\xi_\tau)) \leq \alpha_{\varepsilon/2}(h).$$

Отсюда следует, что вероятность (1) не превосходит $\alpha_{\varepsilon/2}(h)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(A) &\leq \mathbf{P}_x(A \cap \{\xi_h \in U_{\varepsilon/2}(x)\}) + \mathbf{P}_x\{\xi_h \notin U_{\varepsilon/2}(x)\} \leq \\ &\leq \alpha_{\varepsilon/2}(h) + \alpha_{\varepsilon/2}(h). \end{aligned}$$

Из доказанной леммы вытекает, что $\mathbf{P}_x\{\xi_t \in U_\varepsilon(x)\}$ для всех $t \in T_0 \cap [0, h]\} \geq 1 - 2\alpha_{\varepsilon/2}(h)$; это следует из того, что событие под знаком вероятности — предел последовательности событий $\{\xi_{t_i} \in U_\varepsilon(x)\}$ для всех $t_i \leq h, 1 \leq i \leq n\}$.

Используя марковское свойство относительно момента s , получаем, что также $\mathbf{P}_x\{\xi_t \in U_\varepsilon(\xi_s)\}$ для всех $t \in T_0 \cap [s, s+h]\} = \mathbf{P}_x(\theta_s^{-1}\{\xi_t \in U_\varepsilon(\xi_s)\})$ для всех $t \in (T_0 - s) \cap [0, h]\} \geq 1 - 2\alpha_{\varepsilon/2}(h)$.

Из этих оценок вытекает неравенство

$$\mathbf{P}_x\{\xi_\cdot \in B_{Nnm}\} \leq Nn \cdot 2\alpha_{1/2m}(2/n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty);$$

так как $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{Nnm} \subseteq B_{Nnm}$ для любого n , то

$$\mathbf{P}_x\left\{\xi_\cdot \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{Nnm}\right\} \leq \mathbf{P}_x\{\xi_\cdot \in B_{Nnm}\} \text{ для всех } n, \text{ и}$$

$$\mathbf{P}_x\left\{\xi_\cdot \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{Nnm}\right\} = 0. \text{ Отсюда } \mathbf{P}_x\{\xi_\cdot \notin A\} = 0, \text{ что}$$

доказывает теорему.

2. Теорема 2. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$ такое, что $\alpha_{\varepsilon/2}(h) < 1/2$. Тогда существует марковское семейство с данной переходной функцией, траектории которого имеют пределы справа и слева в каждой точке временной оси.

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 1 и основывается на той же лемме. Не будем

приводить его, только дадим основной пункт в виде необязательной задачи.

Введем определение. Пусть функция $f(t)$, заданная на каком-то подмножестве T числовой оси, принимает значения в метрическом пространстве. Мы будем говорить, что $f(t)$ имеет k ε -колебаний на T , если существуют $t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $t_i \in T$ такие, что $\rho(f(t_{i-1}), f(t_i)) \geq \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$, причем k — наибольшее из таких чисел. Например, функция $\sin t$, $0 \leq t \leq 10$, имеет шесть 1-колебаний.

Задача 3*. Пусть $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq h$; обозначим через v число ε -колебаний в последовательности $\xi_0, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k}$. Тогда $P_x\{v \geq m\} \leq [2a_{\varepsilon/4}(h)]^m$.

Совершенно так же, как раньше, получаем для числа $v^\varepsilon[s, s+h]$ ε -колебаний функции $\xi_t(\omega)$ на множестве $T_0 \cap [s, s+h]$ (T_0 счетно) оценку $P_x\{v^\varepsilon[s, s+h] \geq m\} \leq [2a_{\varepsilon/4}(h)]^m$; во всяком случае, с вероятностью 1 это число колебаний конечно.

Далее нужно иметь в виду, что функцию на T_0 со значениями в полном метрическом пространстве тогда и только тогда можно продолжить на $[0, \infty)$ без разрывов второго рода, когда она для любого $\varepsilon > 0$ имеет конечное число ε -колебаний на каждом конечном отрезке.

Теорема 3. Пусть $\alpha_\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \downarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда существует марковское семейство с данной переходной функцией, траектории которого непрерывны справа и имеют пределы слева в каждой точке.

Заметим, что условие $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$ является условием равномерной стохастической непрерывности соответствующего марковского семейства. Действительно, для $0 \leq s \leq t$ обозначим через B событие, состоящее в том, что $\rho(\xi_0, \xi_{t-s}) \geq \varepsilon$. Имеем $P_x\{\rho(\xi_s, \xi_t) \geq \varepsilon\} = P_x(\theta_s^{-1}B) = M_x P_{\xi_s}(B)$. Но $P_y(B) = P_y\{\rho(\xi_0, \xi_{t-s}) \geq \varepsilon\} = P_y\{\rho(y, \xi_{t-s}) \geq \varepsilon\} = P_y\{\xi_{t-s} \in V_\varepsilon(y)\} = P(t-s, y, V_\varepsilon(y)) \leq a_\varepsilon(t-s)$. Поэтому $P_x\{\rho(\xi_s, \xi_t) \geq \varepsilon\} \leq a_\varepsilon(t-s) \rightarrow 0$ при $t-s \rightarrow 0$. Но это и есть равномерная стохастическая непрерывность — равномерная и по начальной точке x , и по всему множеству $[0, \infty)$ изменения s, t .

Доказательство. Из условия теоремы 3 вытекает условие теоремы 2; пусть (ξ_t, P_x) — марковское семейство с траекториями без разрывов второго рода с данной переходной функцией. Положим $\xi_t = \xi_{t+}$, $t \in [0, \infty)$ (предел справа, по предположению, существует). Стохастическая эквивалентность $\tilde{\xi}_t$ и ξ_t вытекает из стохастической непрерывности ξ_t ; $(\tilde{\xi}_t, P_x)$ —

марковское семейство с данной переходной функцией, его траектории непрерывны справа, а пределы слева в каждой точке остались прежние.

Отсюда, в частности, вытекает, что траектории стохастически непрерывных, однородных по времени процессов с независимыми приращениями можно считать непрерывными справа и имеющими пределы слева; это относится, например, к процессу Коши.

3. Приведем еще пример применения теоремы 3. Матрице вероятностей перехода из задачи 1 § 8.1 отвечает марковское семейство на фазовом пространстве из двух состояний с непрерывным справа и имеющими пределы слева траекториями, т. е. все траектории — ступенчатые функции с конечным числом ступенек на каждом конечном промежутке времени, причем в ступеньку включается ее левый конец, но не включается правый. То же самое будет для любого марковского процесса со счетным множеством состояний, для которого $\sup_x [1 - P(t, x, \{x\})] \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$.

Это вытекает из теоремы 3, если на фазовом пространстве ввести метрику, задающую дискретную топологию: $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$; функции без разрывов второго рода относительно этой метрики — как раз ступенчатые функции (рис. 28).

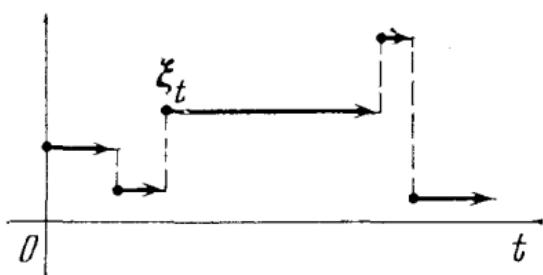


Рис. 28

Применимому к несчетному фазовому пространству (X, \mathcal{X}) препятствует то, что теорема 3 сформулирована нами для случая, когда фазовое пространство — метрическое пространство с σ -алгеброй борелевских множеств, т. е. σ -алгеброй, порожденной всеми открытыми множествами. В дискретной топологии ($\rho(x, y) = 1$, $x \neq y$) все множества открыты, и σ -алгебра борелевских множеств — это система всех подмножеств X . Но мы не умеем задавать меры на всех подмножествах несчетного множества, за исключе-

нием мер, которые на самом деле сосредоточены на каком-то счетном числе точек в этом несчетном множестве. К счастью, теорему 3 (и предшествующие ей теоремы 1, 2) можно обобщить, потребовав вместо $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$ того, чтобы метрика $\rho(x, y)$ была измерима (относительно \mathcal{X}), и того, чтобы σ -алгебра \mathcal{X} порождалась измеримыми открытыми множествами. Из этой видоизмененной теоремы выводится

Теорема 4. Пусть $P(t, x, \Gamma)$ — переходная функция марковского семейства на произвольном фазовом пространстве (X, \mathcal{X}) . Если $\sup_x [1 - P(t, x, \{x\})] \rightarrow 0$

при $t \downarrow 0$, то существует марковское семейство с этой переходной функцией, все траектории которого являются непрерывными справа ступенчатыми функциями с конечным числом ступенек на каждом конечном промежутке времени.

4. Имеются различные обобщения теорем этого параграфа; в частности, теоремы, обеспечивающие непрерывность траекторий только до момента перескока в дополнительную точку $*$, в которую процесс попадает вместо того, чтобы исчезать (ср. § 8.1, п. 5в)). См. Дынкин (1959, гл. 6), Гихман, Скороход (1965, гл. IV, §§ 4, 5).

§ 9.2. Строго марковское свойство для феллеровских марковских семейств с непрерывными справа траекториями

1. Мы докажем, что все феллеровские марковские семейства с непрерывными справа траекториями являются строго марковскими относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$ ($t \in [0, \infty)$). Прежде всего докажем вспомогательный результат.

Задача 1. Пусть τ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$. Тогда $\tau_n = ([2^n \tau] + 1)/2^n$ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$, и соответствующая ему σ -алгебра $\mathcal{F}_{\leq \tau_n} \supseteq \mathcal{F}_{\leq \tau+}$.

Теперь пусть у нас имеется феллеровское марковское семейство (ξ_t, \mathbf{P}_x) с непрерывными справа траекториями на метрическом фазовом пространстве X , $\mathcal{X} = \mathcal{B}_X$. Требование прогрессивной измеримости, входящее в определение строго марковского семейства (§ 8.5, п. 2), обеспечивается непрерывностью справа

траекторий. Нужно доказать, что

$$\int_A f(\xi_{\tau+\eta}) \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_A P^\eta f(\xi_\tau) \mathbf{P}_x(d\omega) \quad (1)$$

для любой функции $f \in \mathbf{B}$, где относительно τ, η, A выполняется следующее условие:

$A++$) τ — произвольный марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$; η — произвольная функция на $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$ со значениями в $[0, \infty]$, измеримая относительно $\mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$; $A \in \mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$, $A \subseteq \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$.

Нам известно (см. § 8.5), что (1) выполнено, если

A) τ — дискретный марковский момент относительно семейства $\mathcal{F}_{\leqslant \tau}$; η — функция на Ω_τ , принимающая счетное число значений из $[0, \infty]$ и измеримая относительно $\mathcal{F}_{\leqslant \tau}$; $A \in \mathcal{F}_{\leqslant \tau}$, $A \subseteq \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$.

Введем еще промежуточное условие:

$A+$) τ — произвольный марковский момент относительно семейства $\mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$; η — функция на Ω_τ , принимающая счетное число значений, измеримая относительно $\mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$; $A \in \mathcal{F}_{\leqslant \tau+}$, $A \subseteq \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$.

При условии A) (1) уже доказано; отсюда мы перейдем к (1) при условии $A+$), а затем уже при условии $A++$). Для последнего перехода нам понадобится еще один вспомогательный результат.

Задача 2. Для $f \in \mathbf{C}$ функция $P^t f(x)$ при каждом x непрерывна справа по t .

Формулу (1) достаточно доказать только для функций $f \in \mathbf{C}$ (переход ко всем $f \in \mathbf{B}$ осуществляется так же, как при доказательстве теоремы п. 6 § 8.3).

Предположим, что $f \in \mathbf{C}$; τ, η, A удовлетворяют условию $A+$). Возьмем $\tau_n = ([2^n \tau] + 1)/2^n$, а η и A оставим без изменения. Согласно задаче 1, для τ_n, η, A будет выполнено условие A), поэтому

$$\int_A f(\xi_{\tau_n+\eta}) \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_A P^\eta f(\xi_{\tau_n}) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (2)$$

Здесь $P^\eta f$ при каждом $\omega \in \Omega_\eta$ — непрерывная функция (используется феллеровость). Устремим $n \rightarrow \infty$; при этом $\tau_n \downarrow \tau$, в силу непрерывности траекторий справа $\xi_{\tau_n} \rightarrow \xi_\tau$, $\xi_{\tau_n+\eta} \rightarrow \xi_{\tau+\eta}$. Используя непрерывность числовых функций $f(\cdot)$ и $P^\eta f(\cdot)$, получаем, что $f(\xi_{\tau_n+\eta}) \rightarrow$

$\rightarrow f(\xi_{\tau+\eta})$, $P^\eta f(\xi_{\tau_n}) \rightarrow P^\eta f(\xi_\tau)$ при всех ω ; так как все эти функции ограничены $\|f\|$, то законен предельный переход под знаком интеграла, и из (2) вытекает (1). Итак, (1) доказано в предположении А+).

Пусть теперь τ , η , A удовлетворяют условию А++). Положим $\eta_n = ([2^n\eta] + 1)/2^n$, а τ и A оставим без изменения. Для τ , η_n , A выполнено условие А+), значит,

$$\int_A f(\xi_{\tau+\eta_n}) \mathbf{P}_x(d\omega) = \int_A P^{\eta_n} f(\xi_\tau) \mathbf{P}_x(d\omega). \quad (3)$$

Устремим n к ∞ и воспользуемся задачей 2; получим что $P^{\eta_n} f(\xi_\tau) \rightarrow P^\eta f(\xi_\tau)$ при любом $\omega \in \Omega_\tau \cap \Omega_\eta$. То, что в левой части функция под знаком интеграла стремится к $f(\xi_{\tau+\eta})$, так же, как и раньше, вытекает из непрерывности траекторий справа. Предельный переход от (3) дает нам (1) при условии А++).

2. Теперь обоснованы все применения строго марковского свойства к винеровскому процессу (§ 8.5, п. 4б), задачи 1, 3*).

3. Наконец, теперь мы можем понять, почему требуется непрерывность справа, а не слева. При переходе от дискретных η к произвольным мы могли бы совершенно так же воспользоваться непрерывностью слева, положив $\eta_n = [2^n\eta]/2^n$; но при оперировании с τ существенно, что мы заменяем эту величину на большие τ_n . Здесь дело в том, что τ определяется своим прошлым (и ближайшим будущим). Случайная величина τ_n , будучи функцией от τ , тоже определяется прошлым и ближайшим будущим относительно τ ; но это прошлое и ближайшее будущее — прошлое по отношению к τ_n , так как $\tau_n > \tau$. Это и приводит к тому, что τ_n — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$. Напротив, если бы мы взяли $\tau_n < \tau$, то не получили бы в общем случае марковского момента, потому что прошлое по отношению к τ частично является будущим для $\tau_n < \tau$, и даже не «ближайшим» будущим.

4. Из доказанной теоремы следует, что феллеровские марковские семейства с непрерывными справа траекториями являются марковскими относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$ (см. § 8.5, п. 0). В частности, для таких марковских семейств имеет место

Закон 0—1 Р. Блюменталя. Для любого события $B \in \mathcal{F}_{\leq 0+}$ и любого $x \in X$ либо $\mathbf{P}_x(B) = 0$, либо $\mathbf{P}_x(B) = 1$.

Доказательство. Пользуемся (строго) марковским свойством (формула (1) § 8.5) относительно

момента $\tau = 0$, $A = B$. Получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x(B) &= \mathbf{P}_x(BB) = \mathbf{P}_x(B\theta_0^{-1}B) = \int_B \mathbf{P}_{\xi_0}(B) \mathbf{P}_x(d\omega) = \\ &= \int_B \mathbf{P}_x(B) \mathbf{P}_x(d\omega) = \mathbf{P}_x(B)^2.\end{aligned}$$

Разумеется, $\mathbf{P}_x(B)$ может зависеть от x (это будет \mathcal{X} -измеримая функция, т. е. в данном случае индикатор какого-то борелевского подмножества X).

5. Доказанная теорема обобщается на случай, когда вместо пространства C берется не все пространство непрерывных функций, а лишь его подмножество, достаточно плотное в пространстве B (чтобы две меры совпадали, если совпадают интегралы по ним от любых двух функций из данного подмножества). Например, в случае сепарабельного локально компактного X достаточно потребовать, чтобы $P^t f$ было непрерывно для любой финитной (т. е. обращающейся в нуль вне некоторого компакта) непрерывной функции: $P^t C_{\text{фин}} \subseteq C$.

Дадим несколько задач, связанных с материалом этого параграфа лишь, может быть, методом решения.

Задача 3. Пусть (ξ_n, \mathbf{P}_x) — цепь Маркова на фазовом пространстве (X, \mathcal{X}) . Обозначим через $\tau(x)$ первый момент, когда ξ_n покидает точку x : $\tau(x) = \min\{n: \xi_n \neq x\}$ (если $\xi_n = x$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, полагаем $\tau(x) = +\infty$). Докажите, что $\tau(x)$ имеет (относительно вероятности \mathbf{P}_x) геометрическое распределение с параметром $q(x) \in [0, 1]$, т. е. $\mathbf{P}_x\{\tau(x) = n\} = [1 - q(x)] q(x)^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, и что случайные величины $\tau(x)$ и $\xi_{\tau(x)}$ независимы (также относительно вероятности \mathbf{P}_x).

Конечно, о $\xi_{\tau(x)}$ имеет смысл говорить, только когда $q(x) < 1$, иначе с \mathbf{P}_x -вероятностью 1 $\tau(x) = \infty$.

Задача 4. Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — марковское семейство с непрерывными справа траекториями; $\tau(x) = \inf\{t: \xi_t \neq x\}$. Докажите, что $\tau(x)$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda(x) \in [0, \infty]$, т. е. $\mathbf{P}_x\{\tau(x) > t\} = e^{-\lambda(x)t}$, $t \geq 0$.

(То, что $\tau(x)$ — случайная величина, следует из задачи 4 § 6.1.)

Для семейства винеровских процессов в каждой точке $\lambda(x) = +\infty$, $\mathbf{P}_x\{\tau(x) = 0\} = 1$.

Задача 5. Найдите $\lambda(1)$, $\lambda(2)$ для процесса с матрицей вероятностей перехода задачи 1 § 8.1.

Задача 6*. Вытекает ли из условий задачи 4, что $\tau(x)$ и $\xi_{\tau(x)}$ независимы?

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 10.1. Инфинитезимальный оператор полугруппы

1. Мы уже говорили (§ 8.1, п. 3г)), что типичной для марковских процессов является такая ситуация, когда мы знаем переходные вероятности за малый промежуток времени Δt с точностью до $o(\Delta t)$, и что этого при известных условиях регулярности достаточно для того, чтобы восстановить всю переходную функцию. В этом параграфе мы введем *инфинитезимальный оператор* — как раз такую характеристику, которая задает полугруппу операторов, связанную с марковским семейством, с точностью до бесконечно малых выше первого порядка. Что она однозначно определяет переходную функцию, мы увидим в § 10.2.

Инфинитезимальный оператор определяется для любых полугрупп (также и групп) линейных операторов в банаховом пространстве, независимо от того, связаны они с марковскими процессами или нет.

Пусть в банаховом пространстве E задана полу-группа ограниченных линейных операторов P^t , $0 \leqslant t < \infty$, $P^0 = E$.

В отличие от операторов P^t , инфинитезимальный оператор (мы будем обозначать его A) будет определен, вообще говоря, *не всюду* на E , а только на некотором его подмножестве D_A , и это не будет *ограниченный* линейный оператор. По определению $f \in D_A$, если существует $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(P^t f - f)$ в смысле сходимости по норме; этот предел и есть по определению значение оператора A на элементе f :

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(P^t f - f).$$

Иначе говоря, Af — правая производная от $P^t f$ в нуле: $Af = \frac{d}{dt} P^t f|_{t=0}$.

Разумеется, область определения A , D_A — линейное подпространство (хотя, вообще говоря, незамкнутое), а A — линейный оператор.

2. Рассмотрим примеры (связанные с марковскими процессами). Инфинитезимальный оператор полугруппы $P^t f$, связанной с марковским семейством, будем называть *инфinitезимальным оператором марковского семейства*.

Если вспомнить, какую норму мы рассматриваем в пространстве B , определение Af можно переписать в виде

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t f(x) - f(x)) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\mathbf{M}_x f(\xi_t) - f(x)),$$

причем f принадлежит области определения D_A , если этот предел равномерен по x .

а) С детерминированным процессом движения вправо с единичной скоростью на прямой связана полугруппа сдвигов: $P^t f(x) = f(x + t)$. Имеем

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (f(x + t) - f(x)) = \frac{d^+ f(x)}{dx}. \quad (1)$$

Однако не нужно забывать, что это правая производная должна существовать равномерно по x .

Задача 1. Из того, что предел (1) существует равномерно по x , вытекает равномерная непрерывность функции f . Докажите.

Более того, функции $t^{-1}(f(x + t) - f(x))$, стало быть, тоже ограничены и равномерно непрерывны, а значит, и их равномерный предел $\frac{d^+ f(x)}{dx}$ ограничен и равномерно непрерывен. Отсюда вытекает, что функция f дифференцируема не только справа, но и слева.

Окончательно получаем, что D_A состоит из тех и только тех функций f , которые ограничены и равномерно непрерывны вместе с первой производной: $f \in \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(1)}$, и $Af(x)$ для них равно $f'(x)$.

б) Рассмотрим еще один детерминированный процесс — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx_t}{dt} = b(x_t)$ в r -мерном пространстве. Не будем здесь находить в точности область D_A определения инфинитезимального оператора: заранее ограничимся непрерывно дифференцируемыми финитными функциями ($f \in \mathbf{C}_{\text{фин}}^{(1)}$). Для таких функций при $t \downarrow 0$

$$f(x_t(x)) = f(x + b(x)t + o(t)) = f(x) + \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) b^i(x)t + o(t)$$

$$\text{равномерно по } x, \text{ так что } f \in D_A, \text{ и } Af(x) = \sum_{i=1}^r b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

в) Задача 2. Найдите инфинитезимальный оператор (матрицу) для полугруппы задачи 1 § 8.1.

г) Для марковского семейства со счетным множеством состояний с траекториями, непрерывными справа, существуют $\lambda(i) \in [0, \infty)$, π_{ij} такие, что $P_i\{\tau(i) \leq t, \xi_{\tau(i)} = j\} = [1 - e^{-\lambda(i)t}] \pi_{ij}$ (см. задачи 4, 6* § 9.2). По ним можно построить (бесконечную в случае бесконечного счетного фазового пространства) матрицу (a_{ij}) : $a_{ij} = \lambda(i)\pi_{ij}$ при $j \neq i$, $a_{ii} = -\lambda(i)$. Если $\sup_i \lambda(i) < \infty$, то D_A совпадает со всем B (пространством ограниченных последовательностей), и инфинитезимальный оператор задается матрицей (a_{ij}) :

$$Af(i) = \sum_j a_{ij}f(j) \quad (2)$$

(докажите).

Если $\sup_i \lambda(i) = \infty$, то сумма (2) для некоторых $f \in B$ неограничена. В случае ограниченности $\lambda(i)$ (или, что то же, a_{ii}) можно доказать, что данной матрице соответствует единственное марковское семейство (единственное в смысле конечномерных распределений). В случае неограниченных a_{ij} и это может быть не так. Это будет для тех марковских семейств, которые могут за конечное время совершить бесконечное число перескоков из состояния в состояние, проходя через бесконечное число различных состояний (непрерывность справа этому не препятствует). Связано это с тем, что матрица (a_{ij}) определяет поведение цепи при перескоках из состояния в состояния ($\xi_{t-} = i$, $\xi_t = \xi_{t+} = j$), а информация о том, что с ней делается после «ухода на бесконечность» (когда ξ_{t-} не существует), в матрице (a_{ij}) не содержится.

Задача 3*. Приведите пример двух марковских семейств со счетным множеством состояний с разными конечномерными распределениями, с одной и той же матрицей (a_{ij}) : $a_{ii} = -i^2$, $a_{i,i+1} = i^2$ (остальные нули).

д) Задача 4*. Для полугруппы, связанной с r -мерным винеровским процессом, докажите, что множество $C_{\text{равн}}^{(2)}$ всех функций f , ограниченных и равномерно непрерывных вместе с производными первых двух порядков, содержится в D_A , и для таких функций $Af = \frac{1}{2} \Delta f$ (Δ — оператор Лапласа).

е) Задача 5*. Докажите, что для семейства процессов Коши, т. е. для марковского семейства с переходными плотностями $p(t, x, y) = \pi^{-1}t/(t^2 + (y-x)^2)$, инфинитезимальный оператор определен на всех функциях из $C_{\text{равн}}^{(2)}$ (но не только на них), и для $f \in C_{\text{равн}}^{(2)}$

$$Af(x) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [f(y) - f(x) - f'(x) \operatorname{arctg}(y-x)]/(y-x)^2 dy.$$

(Вместо функции $\operatorname{arctg} z$ можно взять любую другую нечетную ограниченную функцию, равную $z + O(z^2)$ при $z \rightarrow 0$.)

ж) Обратимся к примеру п. 3 г) § 8.1 (процесс, связанный с системой массового обслуживания). Предположим, что появ-

ляющаяся там функция $f(x)/(1 - F(x))$ равномерно непрерывна и ограничена. Возьмем функцию φ , принимающую произвольное значение в точке S и принадлежащую $C_{\text{равн}}^{(1)}$ на $[0, \infty)$. Полученные нами формулы для переходных вероятностей за бесконечно малый промежуток времени Δt превращаются в

$$P^{\Delta t} \varphi(S) = \varphi(S) [1 - a \Delta t] + \varphi(0) a \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\begin{aligned} P^{\Delta t} \varphi(x) &= \varphi(x + \Delta t) \left[1 - \frac{f(x)}{1 - F(x)} \Delta t \right] + \\ &\quad + \varphi(S) \frac{f(x)}{1 - F(x)} \Delta t + o(\Delta t), \quad x \in [0, \infty), \end{aligned}$$

откуда

$$A\varphi(S) = a [\varphi(0) - \varphi(S)],$$

$$A\varphi(x) = \varphi'(x) + \frac{f(x)}{1 - F(x)} [\varphi(S) - \varphi(x)].$$

3) До сих пор мы не имели случая подчеркнуть чрезвычайную важность *области определения* D_A . Оказывается, инфинитезимальные операторы, отвечающие совершенно отличным друг от друга марковским процессам, могут задаваться одной и той же формулой и различаться только областями определения.

Задача 6. Инфинитезимальный оператор \tilde{A} семейства винеровских процессов с отражением $\tilde{\omega}_t$ (задача 6 § 8.1) на $[0, \infty)$ определен на функциях $f \in C_{\text{равн}}^{(2)}$ таких, что $f'(0+) = 0$, и для них $\tilde{A}f \equiv \frac{1}{2} f''$; инфинитезимальный оператор A^0 семейства винеровских процессов на $[0, \infty)$ с остановкой в нуле ω_t^0 (задача 1 § 8.5) — на функциях $f \in C_{\text{равн}}^{(2)}$, для которых $f''(0+) = 0$, и $A^0 f \equiv \frac{1}{2} f''$.

Конечно, эти марковские семейства близки друг к другу, но различны (в смысле конечномерных распределений).

и) В примере п. 7 § 8.3 можно доказать, что решение уравнения (10) с граничными условиями (11), дважды непрерывно дифференцируемое по x и один раз по t вплоть до границы полуополосы, существует для любых конечных условий $f \in C^{(2)}[0, 1]$, $f'(0+) = f'(1-) = 0$. Отсюда вытекает, что все такие функции принадлежат области определения инфинитезимального оператора A соответствующей полугруппы, и для них $Af = \frac{1}{2} f''$. Мы увидим (§ 10.2, задача 7), что D_A не только содержит $C^{(2)}[0, 1] \cap \{f: f'(0+) = f'(1-) = 0\}$, но и совпадает с этим множеством.

3. Рассмотрим важное понятие, связанное с полугруппами и инфинитезимальными операторами; ограничимся случаем сжимающей полугруппы на пространстве B ограниченных измеримых функций.

Введем в \mathbf{B} подпространство \mathbf{B}_0 , состоящее из функций, для которых

$$\|P^t f - f\| \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0);$$

это — функции, на которых полугруппа P^t сильна непрерывна справа в нуле. То, что \mathbf{B}_0 — линейное подпространство, очевидно; но, кроме того, оно еще и замкнуто, а значит, является банаховым пространством. Действительно, если $f_n \rightarrow f$, $f_n \in \mathbf{B}_0$, то

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - f\| &\leq \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - P^t f_n\| + \\ &\quad + \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f_n - f_n\| + \|f_n - f\|. \end{aligned} \quad (3)$$

второй член в правой части равен нулю, а

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t f - P^t f_n\| = \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \|P^t (f - f_n)\| \leq \|f - f_n\|.$$

Так как эта норма мала, левая часть (3) равна нулю, и $f \in \mathbf{B}_0$.

Оказывается, если $f \in \mathbf{B}_0$, то функция $P^t f$ со значениями в нашем банаховом пространстве равномерно непрерывна по t на всем луче $[0, \infty)$: для $s \leq t$

$$\begin{aligned} \|P^t f - P^s f\| &= \\ &= \|P^s (P^{t-s} f - f)\| \leq \|P^{t-s} f - f\| \rightarrow 0 \quad (t - s \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что пространство \mathbf{B}_0 будет инвариантно относительно операторов P^t : для $f \in \mathbf{B}_0$ будет также $P^t f \in \mathbf{B}_0$, так как $P^h P^t f = P^{t+h} f \rightarrow P^t f$ при $h \downarrow 0$.

С инфинитезимальным оператором пространство \mathbf{B}_0 связано так: $D_A \subseteq \mathbf{B}_0$ (из существования предела $t^{-1}(P^t f - f)$ следует $\|t^{-1}(P^t f - f)\| = O(1)$, $\|P^t f - f\| = O(t) \rightarrow 0$ при $t \downarrow 0$); значит, для $f \in D_A$ имеем $P^t f \in \mathbf{B}_0$, $t^{-1}(P^t f - f) \in \mathbf{B}_0$, а значит, $Af = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(P^t f - f) \in \mathbf{B}_0$. То есть и область значений AD_A инфинитезимального оператора также входит в \mathbf{B}_0 .

4. Мы знаем, что Af — правая производная $P^t f$ в нуле в смысле сильной сходимости. Докажем, что если $f \in D_A$, то и $P^t f \in D_A$, и

$$AP^t f = P^t Af = \frac{d}{dt} P^t f \quad (4)$$

в смысле той же сходимости. По определению $AP^t f = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (P^h P^t f - P^t f)$; пользуясь полугрупповым свойством, получаем, что это выражение — не что иное, как $\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} (P^{t+h} f - P^t f)$, т. е. правая производная от $P^t f$ (существование $AP^t f$ равносильно существованию $\frac{d^+}{dt} P^t f$, и если они существуют, то равны). Еще раз воспользуемся полугрупповым свойством: $P^h P^t f - P^t f = P^{t+h} f - P^t f = P^t (P^h f - f)$ — и докажем, что $\lim_{h \downarrow 0} P^t h^{-1} (P^h f - f) = P^t A f$. Имеем

$$\begin{aligned} \|P^t h^{-1} (P^h f - f) - P^t A f\| &= \\ &= \|P^t [h^{-1} (P^h f - f) - A f]\| \leqslant \\ &\leqslant \|h^{-1} (P^h f - f) - A f\| \rightarrow 0 \quad (h \downarrow 0). \end{aligned}$$

Чтобы доказать (4), нам остается проверить, что и левая производная от $P^t f$ равна тому же выражению. Имеем

$$\begin{aligned} \|(-h)^{-1} (P^{t-h} f - P^t f) - P^t A f\| &\leqslant \\ &\leqslant \|P^{t-h} (-h)^{-1} (f - P^h f) - P^{t-h} A f\| + \|P^{t-h} A f - P^t A f\|. \end{aligned}$$

Первая норма не превосходит $\|h^{-1} (P^h f - f) - A f\| \rightarrow 0$ ($h \downarrow 0$), вторая стремится к нулю потому, что $A f \in \mathbf{B}_0$.

Если $P^t f$ обозначить через u_t , то для u_t получаем дифференциальное уравнение $\frac{du_t}{dt} = A u_t$ с начальным условием $u_0 = f$.

Частный случай этого, при надлежащем изменении обозначений, — уравнение (10) с граничными условиями (11) из примера п. 7 § 8.3.

Переводя (4) в интегральную форму, получаем

$$P^t f = f + \int_0^t AP^s f \, ds = f + \int_0^t P^s A f \, ds. \quad (5)$$

5. Для полугрупп на \mathbf{B} , связанных с марковскими семействами, имеет место очень важный

Принцип максимума. Если функция f имеет абсолютный максимум в точке x (т. е. $f(x) \geqslant f(y)$ для всех $y \in X$) и $f \in D_A$, то $A f(x) \leqslant 0$.

Доказательство. Имеем $\mathbf{M}_x f(\xi_t) \leq f(x)$,

$$Af(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\mathbf{M}_x f(\xi_t) - f(x)) \leq 0.$$

Задача 7. Для того чтобы полугруппа сжимающих линейных операторов P^t на \mathbf{B} удовлетворяла условию $P^t 1 \equiv 1$, необходимо и достаточно, чтобы $1 \in D_A$, $A1 \equiv 0$.

6. Важный класс примеров полугрупп на произвольном банаевом пространстве \mathbf{E} задается формулой

$$P^t = e^{tA} = E + tA + t^2 A^2 / 2 + \dots + t^n A^n / n! + \dots, \quad (6)$$

где A — определенный всюду на \mathbf{E} ограниченный линейный оператор. Сходимость в (6) можно понимать не только как сильную сходимость — сходимость в применении к любому $f \in \mathbf{E}$, но и как сходимость в смысле операторной нормы; она обеспечивается тем, что члены ряда мажорируются по норме членами сходящегося числового ряда $\sum (t \|A\|)^n / n!$. Полугрупповое свойство сводится к тому, что $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$, и легко проверяется (вообще $e^{A+B} = e^A e^B$, если операторы A и B коммутируют). То, что у полугруппы (в действительности даже группы) e^{tA} инфинитезимальным оператором будет именно A , проверяется так:

$$\begin{aligned} \|t^{-1}(e^{tA}f - f) - Af\| &= \\ &= \|tA^2f/2 + \dots + t^{n-1}A^n f/n! + \dots\| \leq \\ &\leq t\|A\|^2\|f\|/2 + \dots + t^{n-1}\|A\|^n\|f\|/n! + \dots \leq \\ &\leq t\|A\|^2\|f\|[1 + t\|A\| + (t\|A\|)^2 + \dots] = \\ &= t\|A\|^2\|f\|[1 - t\|A\|] \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0). \end{aligned}$$

При помощи формулы e^{tA} была получена матрица задачи 1 § 8.1; матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ была подобрана так, чтобы выполнялся принцип максимума и $A1 = 0$.

7. Для полугруппы P^t , действующей на меры (точнее, счетно-аддитивные функции множества), мы также можем рассматривать инфинитезимальный оператор (его можно обозначать той же буквой A , но писать ее справа от обозначения меры):

$$\mu A = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\mu P^t - \mu)$$

в смысле сходимости по вариации; его область определения будем обозначать ${}_A D$. Из $\langle \mu, P^t f \rangle = \langle \mu P^t, f \rangle$ следует, что для $f \in D_A$, $\mu \in {}_A D$

$$\langle \mu, Af \rangle = \langle \mu A, f \rangle.$$

Это еще не вполне значит, что оператор A , действующий на меры, — сопряженный к оператору A , действующему на функции.

Задача 8*. Пусть из того, что $\langle \mu_1, f \rangle = \langle \mu_2, f \rangle$ для всех $f \in \mathbf{B}_0$, вытекает $\mu_1 = \mu_2$. Докажите, что $\mu \in {}_A D$ тогда и только тогда, когда существует v , принадлежащее пространству V_0 сильной непрерывности полугруппы, действующей на меры, такое, что $\langle \mu, Af \rangle = \langle v, f \rangle$ для всех $f \in D_A$; при этом $\mu A = v$.

(То есть оператор A , действующий на меры, — оператор, сопряженный к оператору, действующему на функции, суженный до оператора в пространстве V_0 .)

§ 10.2. Резольвента. Теорема Хилле — Йосида

1. Резольвентой полугруппы операторов P^t называется семейство операторов R_λ , определяемых формулой

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt. \quad (1)$$

Это — преобразование Лапласа полугруппы. Уточним это определение. Интеграл (1) можно определить для полугруппы в произвольном банаховом пространстве, но мы для простоты ограничимся случаем пространства \mathbf{B} .

Пусть $(\xi_t, 0 \leq t < \infty; \mathbf{P}_x)$ — марковское семейство, причем процесс ξ_t прогрессивно измерим относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$. Тогда функция $P^t f(x)$ измерима по (t, x) для любой функции $f \in \mathbf{B}$ (см. § 8.5, п. 2). Полагаем для $f \in \mathbf{B}$, $x \in X$

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f(x) dt. \quad (2)$$

Здесь интеграл сходится, во всяком случае, при $\lambda > 0$ (в этой книге мы не будем рассматривать резольвенту при комплексных λ); сходимость вытекает из $|P^t f(x)| \leq \|f\|$. Функция $R_\lambda f$ измерима (теорема Фубини) и ограничена: $\|R_\lambda f\| \leq \lambda^{-1} \|f\|$, т. е. $R_\lambda f \in \mathbf{B}$. Ясно, что R_λ , $\lambda > 0$, — линейные операторы, они ограничены: $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$. Семейство операторов R_λ называется *резольвентой* полугруппы P^t (или соответствующего марковского семейства).

При любом x функция $R_\lambda f(x)$ является преобразованием Лапласа от числовой функции $P^t f(x)$, $t \in [0, \infty)$. Знание $R_\lambda f(x)$ при всех $\lambda > 0$ позволяет восстановить функцию $P^t f(x)$, $t \geq 0$, с точностью до функции, отличной от нуля лишь на множестве значений t лебеговой меры 0 (см. Колмогоров и Фомин, 1968 (гл. VIII, § 6, также § 3, 4)). Если $f \in \mathbf{B}_0$, то функция $P^t f(x)$ непрерывна по t , и она восстанавливается по $R_\lambda f(x)$, $\lambda > 0$, в точности однозначно.

Это означает, что *по резольвенте R_λ однозначно восстанавливается полугруппа P^t на пространстве \mathbf{B}_0 ее сильной непрерывности*. Пусть пространство \mathbf{B}_0 содержит достаточно много функций — настолько много, что из $\langle v, f \rangle = 0$ для всех $f \in \mathbf{B}_0$ вытекает $v = 0$; например, в случае, когда фазовое пространство (X, \mathcal{X}) — σ -компактное метрическое пространство с σ -алгеброй \mathcal{B}_X его борелевских подмножеств в качестве \mathcal{X} , достаточно, чтобы $\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{C}$ или даже $\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{C}_{\text{равн}}$. Тогда *по резольвенте однозначно восстанавливается переходная функция*, а значит, и все конечномерные распределения марковского семейства.

Задача 1. Докажите, что из равномерной стохастической непрерывности марковского семейства (см. § 9.1, п. 2) вытекает $\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{C}_{\text{равн}}$.

2. Найдем резольвенту для семейства одномерных винеровских процессов:

$$\begin{aligned} R_\lambda f(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\int_{-\infty}^\infty p(t, x, y) f(y) dy \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt \right] f(y) dy, \end{aligned}$$

где плотность $p(t, x, y) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(y-x)^2/(2t)}$. Воспользовавшись справочником интегралов (например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений» (М.: Физматгиз, 1962)), найдем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} (2\pi t)^{-1/2} e^{-(y-x)^2/2t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda} |y-x|}.$$

Итак,

$$R_\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{2\lambda} |y-x|} f(y) dy. \quad (3)$$

3. Пользуясь теоремой Фубини и полугрупповым свойством, доказываем:

$$P^h R_\lambda f(x) = R_\lambda P^h f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^{t+h} f(x) dt = \\ = e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f(x) ds, \quad (4)$$

$$R_\mu R_\lambda f = (\mu - \lambda)^{-1} [R_\lambda f - R_\mu f], \quad \lambda, \mu > 0, \mu \neq \lambda. \quad (5)$$

В частности, операторы P^h , R_λ , R_μ перестановочны. Формула (5) называется резольвентным уравнением; ее можно переписать в виде $R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)^{-1} (R_\lambda - R_\mu)$.

Резольвентное уравнение дает возможность установить, что область значений оператора R_λ одна и та же при всех $\lambda > 0$: $R_\lambda \mathbf{B} = R_\mu \mathbf{B}$. Вообще говоря, не любую функцию из \mathbf{B} можно представить в виде $R_\lambda f$; но если мы ее представили в таком виде, то она также представляется в виде $R_\mu [f + (\mu - \lambda) R_\lambda f]$.

Задача 2. Докажите, что $R_\lambda \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}_0$.

Задача 3. Докажите, что для любого $f \in \mathbf{B}_0$

$$f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda f. \quad (6)$$

Раз преобразование Лапласа однозначно задает $P^t f$, все свойства P^t должны найти отражение в свойствах R_λ . Тому, что $\|P^t\| \leq 1$, отвечает $\|R_\lambda\| \leq \lambda^{-1}$; из того, что P^t сохраняет положительность, вытекает, что и операторы R_λ сохраняют положительность: $R_\lambda f \geq 0$ для $f \geq 0$. Полугрупповому свойству $P^{t+s} = P^t P^s$ соответствует резольвентное уравнение; (6) отвечает свойству $P^0 = E$ (точнее, тому, что $\lim_{t \downarrow 0} P^t f = Ef = f$).

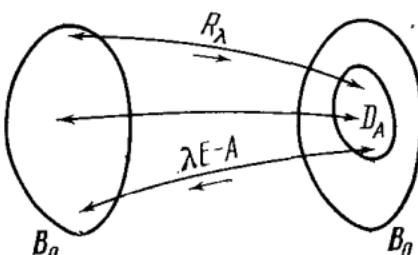


Рис. 29

4. Оказывается, оператор R_λ , если его рассматривать только на \mathbf{B}_0 , является обратным к оператору $\lambda E - A$, определенному на D_A . Иначе говоря, эти операторы осуществляют обратные друг к другу взаимно однозначные отображения \mathbf{B}_0 на D_A и обратно (рис. 29).

Нужно доказать, что для $f \in \mathbf{B}_0$ функция $R_\lambda f \in D_A$ и $(\lambda E - A)R_\lambda f = f$ и что для $f \in D_A$ будет $R_\lambda(\lambda f - Af) = f$. Достаточно, конечно, рассмотреть $AR_\lambda f$ и $R_\lambda Af$.

Для $f \in \mathbf{B}_0$ в силу формулы (4)

$$AR_\lambda f = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} [P^h R_\lambda f - R_\lambda f] =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left[e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt \right];$$

вычитая и прибавляя $\int_h^\infty e^{-\lambda t} P^t f dt$, получаем, что

$$AR_\lambda f = -f + \lambda R_\lambda f.$$

Для $f \in D_A$ в силу формулы (4) § 10.1

$$\begin{aligned} R_\lambda Af &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} P^t Af dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} P^t f dt = \\ &= e^{-\lambda t} P^t f \Big|_0^\infty - \int_0^\infty P^t f \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} dt = -f + \lambda R_\lambda f. \end{aligned}$$

Следствие. Во-первых, оператор A однозначно задает полугруппу на \mathbf{B}_0 . Действительно, по оператору A находятся операторы $\lambda E - A$, $\lambda > 0$, по ним — резольвента (кстати, теперь понятно, почему употребляется такое название), а по резольвенте однозначно восстанавливается полугруппа.

В частности, получаем, что для равномерно стохастически непрерывного марковского семейства на σ -компактном фазовом пространстве конечномерные распределения однозначно определяются инфинитезимальным оператором.

Во-вторых, область определения D_A всюду плотна в \mathbf{B}_0 . Это вытекает из $D_A = R_\lambda \mathbf{B}_0$ и (6): для любой функции $f \in \mathbf{B}_0$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность функций из $R_\lambda \mathbf{B}_0$.

В-третьих, оператор A замкнут, потому что представляется в виде $\lambda E - R_\lambda^{-1}$, а замкнутость оператора R_λ вытекает из того, что он ограничен и рассматривается на замкнутом множестве (а именно \mathbf{B}_0). Напомним, что оператор A (вообще говоря, неограниченный) называется замкнутым, если его график — множество пар (f, Af) — замкнуто, иначе говоря, если из $f_n \rightarrow f$, $Af_n \rightarrow g$ вытекает $f \in D_A$, $Af = g$. Все операторы, получившиеся в приме-

рах п. 2 § 10.1, где мы в точности нашли инфинитезимальный оператор, естественно, замкнуты; в тех случаях, когда мы нашли инфинитезимальный оператор лишь на функциях из $\mathbf{C}_{\text{фин}}^{(1)}$ или $\mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}$, найденные операторы, вообще говоря, не замкнуты, но имеют замкнутое расширение (а именно, инфинитезимальный оператор). Для любого оператора, имеющего замкнутые расширения, всегда есть наименьшее замкнутое расширение, или *замыкание* оператора. Можно доказать, что в примерах д) ($r > 1$) и е) п. 2 § 10.1 инфинитезимальные операторы суть замыкания найденных операторов на $\mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}$. Существуют операторы, вообще не имеющие замкнутых расширений (придумайте пример), но у нас они встретиться не могли.

Задача 4. Докажите, что B_0 есть замыкание множества $R_\lambda \mathbf{B}$.

Задача 5. Пользуясь формулой (3), докажите, что для семейства одномерных винеровских процессов $D_A = \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}$.

Для семейства r -мерных винеровских процессов, $r > 1$, это будет уже не так, ибо оператор Лапласа не замкнут (см. Н. М. Гюнтер «Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики» (М.: Гостехиздат, 1953, § 14)).

В-четвертых, не может быть двух полугрупп с одним и тем же пространством B_0 таких, что инфинитезимальный оператор A одной из них является расширением инфинитезимального оператора B другой: $D_B \subset D_A$, и $Bf = Af$ для $f \in D_B$. Действительно, тогда мы получили бы, что оператор $\lambda E - A$ взаимно однозначно отображает множество D_A , и его часть (D_B) на одно и то же множество B_0 .

5. Приведем без доказательства теорему, дающую необходимые и достаточные условия для того, чтобы данный оператор был инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы сжимающих операторов (доказательство можно прочесть у Дынкина (1963, гл. I, § 4) или Ито (1963, § 38)).

Теорема Хилле—Йосида. Для того чтобы линейный оператор A с областью определения D_A в банаевом пространстве E был инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы сжимающих операторов P^t (сильно непрерывной, т. е. $P^t f \rightarrow f$ при $t \downarrow 0$ для любого $f \in E$), необходимы и достаточны следующие условия:

- D_A всюду плотно в E ;
- при любом $\lambda > 0$ существует определенный всюду на E оператор $(\lambda E - A)^{-1}$;
- $\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$.

В случае полугруппы на подпространстве пространства \mathbf{B} ограниченных измеримых функций условие

г) операторы $(\lambda E - A)^{-1}$ сохраняют положительность необходимо и достаточно для того, чтобы полу-группа сохраняла положительность; условие

д) $1 \in D_A$, $A1 = 0$ — для того, чтобы $P^t 1 \equiv 1$.

Часть, касающаяся необходимости, фактически уже нами доказана.

Для сильно непрерывных полугрупп в про-странстве \mathbf{C} непрерывных функций на компакте условия б) — г) превращаются в следующие два усло-вия:

б') уравнение $\lambda F - AF = f$ имеет хотя бы одно ре-шение для любого $f \in \mathbf{C}$, $\lambda > 0$;

в') выполнен принцип максимума (см. § 10.1, п. 5).

Задача 6. Докажите, что из условия в') вытекают усло-вия в), г), а также единственность решения в условии б'), т. е. что из условий б'), в') вытекает условие б.

Задача 7. Оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in \mathbf{C}^{(2)}[0, 1] \cap \{f: f'(0+) = f'(1-) = 0\}$ функцию $\frac{1}{2} f''$, является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы сжимающих и сохраняющих положительность операторов P^t в $\mathbf{C}[0, 1]$, $P^t 1 \equiv 1$. Докажите.

Это — инфинитезимальный оператор полугруппы, возникающей в примере п. 7 § 8.3. (Мы уже нашли, что $D_A \equiv \mathbf{C}^{(2)}[0, 1] \cap \{f: f'(0+) = f'(1-) = 0\}$, и для таких функций $Af = \frac{1}{2} f''$; стро-гое включение отпадает в силу одного из следствий результатов п. 4.)

§ 10.3. Инфинитезимальные операторы и марковские процессы

Раз инфинитезимальный оператор однозначно за-дает конечномерные распределения марковского семейства, то в терминах инфинитезимальных опера-торов в принципе можно формулировать любые усло-вия, касающиеся конечномерных распределений, ре-шать любые задачи, связанные с марковскими процес-сами. Многие задачи, оказывается, можно решать не только в принципе.

1. Сначала займемся сугубо теоретическими воп-росами.

Как связаны свойства инфинитезимального опера-тора со свойствами непрерывности траекторий? У нас

есть условия существования марковского семейства с данными свойствами траекторий в терминах функций $\alpha_\epsilon(h) = \sup_{t \leq h, x \in X} P(t, x, V_\epsilon(x))$ (см. § 9.1). Оказывается, условие $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\epsilon(h) = 0$ выполняется при очень слабых предположениях, а это условие обеспечивает непрерывность справа и наличие пределов слева у траекторий.

Микротеорема 1. Пусть для марковского семейства на компактном фазовом пространстве X пространство $B_0 \supseteq C = C(X)$. Тогда выполнено условие равномерной стохастической непрерывности.

Доказательство. Пространство X покрыто окрестностями $U_{\epsilon/3}(x)$, $x \in X$; выделим конечное покрытие $U_{\epsilon/3}(x_1), \dots, U_{\epsilon/3}(x_n)$. Для каждой точки x_i возьмем неотрицательную непрерывную функцию $f_i(x)$, равную нулю в $U_{\epsilon/3}(x_i)$ и единице в $V_{2\epsilon/3}(x_i)$. Эти функции принадлежат B_0 , так что для любого $\delta > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что для любого $t \leq h_0$ и для всех i от 1 до n , $|P^t f_i(x) - f_i(x)| < \delta$ при всех $x \in U_{\epsilon/3}(x_i)$. Для $x \in U_{\epsilon/3}(x_i)$ получаем

$$\delta > P^t f_i(x) \geq P(t, x, V_{2\epsilon/3}(x_i)) \geq P(t, x, V_\epsilon(x))$$

(используется выбор функции f_i и то, что $V_\epsilon(x) \subseteq V_{2\epsilon/3}(x_i)$). Отсюда $\alpha_\epsilon(h) \leq \delta$ при $h \leq h_0$; так как δ произвольно мало, то $\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\epsilon(h) = 0$.

В терминах инфинитезимального оператора условие $B_0 \supseteq C$ формулируется так: D_A всюду плотно в C .

Теперь займемся *непрерывностью* траекторий, точнее, вопросом о выполнении условия Дынкина — Кинни: $\alpha_\epsilon(h) = o(h)$ при $h \downarrow 0$ для любого $\epsilon > 0$. Этому условию, грубо говоря, соответствует *локальность* оператора A .

Оператор A будем называть *локальным*, если из того, что $f, g \in D_A$ и эти функции совпадают в некоторой окрестности $U_\epsilon(x)$ точки x , вытекает $Af(x) = Ag(x)$. Примеры — всевозможные дифференциальные операторы; нелокальными являются интегральные операторы.

Легко видеть, что из условия Дынкина — Кинни вытекает локальность инфинитезимального оператора.

Действительно, если f совпадает с g в $U_\epsilon(x)$, то

$$\begin{aligned} |Af(x) - Ag(x)| &= \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} |P^t f(x) - f(x) - P^t g(x) + g(x)| = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} |P^t(f-g)(x)| = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \left| \int_{V_\epsilon(x)} P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] \right| \leqslant \\ &\leqslant \|f-g\| \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} P(t, x, V_\epsilon(x)) = 0. \end{aligned}$$

Однако обратное утверждение в точности не верно. Верно более сложное утверждение:

Микротеорема 2. Пусть X — компакт, A — инфинитезимальный оператор марковского семейства на нем. Пусть оператор A локален, и для любого $\epsilon > 0$ и любой точки x существует неотрицательная функция $f \in D_A$, равная нулю в $U_{\epsilon/3}(x)$ и положительная вне $U_{2\epsilon/3}(x)$. Тогда выполнено условие Дынкина — Кинни.

Задача 1. Докажите микротеорему 2.

Задача 2. Докажите, что полугруппе задачи 7 § 10.2 отвечает марковское семейство с непрерывными траекториями.

2. Мы использовали теоремы 1, 3 § 9.1; теперь посмотрим, когда выполнены условия теоремы 4 § 9.1.

Задача 3. Если инфинитезимальный оператор A — определенный на всем пространстве B ограниченный оператор, то $\sup_x [1 - P(t, x, \{x\})] \leqslant t \|A\| \rightarrow 0$ ($t \downarrow 0$).

Это обеспечивает возможность выбора траекторий непрерывными справа ступенчатыми функциями с конечным числом ступенек на любом конечном промежутке времени.

Задача 4*. Может ли быть, чтобы $\sup_x [1 - P(t, x, \{x\})] \rightarrow 0$ ($t \downarrow 0$), но оператор A был неограничен или определен не всюду на B ?

Рассмотрим подробнее процессы с ограниченным инфинитезимальным оператором, т. е. с полугруппой $P^t = e^{tA}$. Легко доказать, что оператор A — предел операторов $t^{-1}(P^t - E)$ в смысле сходимости по операторной норме. Операторы P^t — интегральные, значит, и $t^{-1}(P^t - E)$ — интегральный оператор:

$$t^{-1}(P^t - E)f(x) = \int_X t^{-1}[P(t, x, dy) - \delta_x(dy)]f(y),$$

где $\delta_x(\Gamma)$ — единичная мера, сосредоточенная в точке x . Предел интегральных операторов в смысле сходимости по норме — опять интегральный оператор. Действительно, норма интегрального опе-

ратора $Qf(x) = \int\limits_X Q(x, dy)f(y)$, где $Q(x, \cdot)$ — мера со знаком, равна $\sup_x |Q(x, \cdot)| (X^*)$; поэтому сходимость таких операторов по норме означает равномерную по x сходимость соответствующих мер по вариации. Из полноты пространства V вытекает существование $A(x, \cdot) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} [P(t, x, \cdot) - \delta_x(\cdot)]$ в смысле сходимости по вариации равномерно по x . Итак,

$$Af(x) = \int\limits_X A(x, dy)f(y). \quad (1)$$

Задача 5. Докажите, что мера $A(x, \cdot)$ неотрицательна на подмножествах $X \setminus \{x\}$, неположительна на $\{x\}$, $A(x, X) = 0$; функция $A(x, \Gamma)$ измерима по x , и $0 \geq A(x, \{x\}) \geq -C > -\infty$ при всех x . Обратно, каждой такой функции соответствует марковское семейство с ограниченным инфинитезимальным оператором, задаваемым формулой (1).

Теперь пусть траектории процесса — непрерывные справа ступенчатые функции. Процесс будет строго марковским (потому что его траектории непрерывны справа относительно дискретной топологии в фазовом пространстве, а переходная функция является феллеровской относительно этой топологии). Процесс будет происходить следующим образом: начинаясь в точке x , он будет находиться в ней случайное время $\tau(x)$ с показательным распределением с параметром $\lambda(x)$, после чего перескочит в другую точку $y = \xi_{\tau(x)}$, независимую от $\tau(x)$ с каким-то распределением $\pi(x, \Gamma)$, $\Gamma \subseteq X \setminus \{x\}$ (задачи 4, 6* § 9.2); затем движение — в силу строго марковского свойства — будет происходить так, как если бы частица начинала его в точке y : она будет в ней находиться в течение показательного случайного времени с параметром $\lambda(y)$, и т. д.

Задача 6. Докажите, что $\lambda(x) = -A(x, \{x\})$; $\pi(x, \Gamma) = P_x \{\xi_{\tau(x)} \in \Gamma\} = A(x, \Gamma)/\lambda(x)$ при $\Gamma \subseteq X \setminus \{x\}$, $\lambda(x) > 0$.

Задача 7. Пусть $Af(x) = a[f(x+1) - f(x)]$. Найдите e^{tA} . Какое марковское семейство соответствует этой полугруппе?

Задача 8*. Возьмем $(X, \mathcal{B}) = ([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$, $Af(x) = \int\limits_0^x [f(y) - f(x)] dy$; здесь показатель времени пребывания $\lambda(x)$

равен x , а распределение $\pi(x, \cdot)$ в момент перескока — равномерное на отрезке $[0, x]$. Докажите, что вероятности перехода будут задаваться формулой (соответствующей формуле $P^t = E + tA + t^2A^2/2! + \dots$)

$$P(t, x, \Gamma) = e^{-xt} \delta_x(\Gamma) + \int\limits_{\Gamma \cap [0, x]} te^{-zt} dz.$$

*) Для меры со знаком v через $|v|$ обозначается ее полная вариация; см. Колмогоров и Фомин (1968, гл. VI, § 5).

3. Рассмотрим вопрос, важный, в частности, для приложений.

Как находить по инфинитезимальному оператору стационарное распределение для данного марковского семейства? Из $\mu P^t = \mu$ вытекает, что $\mu \in {}_A D$ и $\mu A = 0$. Итак, дело сводится к тому, чтобы найти ненулевое неотрицательное решение уравнения $\mu A = 0$ и про- нормировать его, разделив на $\mu(X)$ (чтобы мера от всего пространства равнялась единице).

Найдем стационарное распределение для процесса из примера п. 3г) § 8.1. Мы нашли (§ 10.1, п. 2ж)) инфинитезимальный оператор, действующий на функции (гладкие):

$$A\varphi(S) = a[\varphi(0) - \varphi(S)],$$

$$A\varphi(x) = \varphi'(x) + \frac{f(x)}{1 - F(x)} [\varphi(S) - \varphi(x)].$$

Нужно найти такую меру μ , чтобы $\langle \mu, A\varphi \rangle = 0$ при всех $\varphi \in C_{\text{равн}}^{(1)}$, т. е.

$$\mu\{S\} a[\varphi(0) - \varphi(S)] +$$

$$+ \int_0^\infty \mu(dx) \left\{ \varphi'(x) + \frac{f(x)}{1 - F(x)} [\varphi(S) - \varphi(x)] \right\} = 0.$$

Выберем $\varphi(S) = 1$, $\varphi(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$; получим

$$\mu\{S\} a = \int_0^\infty \frac{f(x)}{1 - F(x)} \mu(dx).$$

Теперь возьмем $\varphi(S) = 0$, $\varphi(x) = \int_0^x \psi(y) dy$, где ψ — произ-

вольная непрерывная функция, отличная от нуля лишь на конечном отрезке; получим

$$\int_0^\infty \psi(x) \mu(dx) = \int_0^\infty \left[\frac{f(x)}{1 - F(x)} \int_0^x \psi(y) dy \right] \mu(dx).$$

Изменим порядок интегрирования в правой части:

$$\int_0^\infty \psi(y) \mu(dy) = \int_0^\infty \psi(y) \left[\int_y^\infty \frac{f(x)}{1 - F(x)} \mu(dx) \right] dy.$$

Так как функция ψ — произвольная из $C_{\text{фин}}$, то меры совпадают и

$$\frac{\mu(dy)}{dy} = g(y) = \int_y^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(x)} \mu(dx).$$

Плотность g меры μ по мере Лебега удовлетворяет уравнению

$$g(y) = \int_y^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(x)} g(x) dx,$$

или

$$g'(y) = -\frac{f(y)}{1 - F(y)} g(y).$$

Решаем это уравнение: $\frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{(1 - F(y))'}{1 - F(y)}$, откуда $g(y) = c(1 - F(y))$.

Итак, $\mu(\Gamma) = c \int_{\Gamma} [1 - F(x)] dx$ для $\Gamma \subseteq [0, \infty)$. Находим $\mu\{S\}$:

$$\mu\{S\} = a^{-1} \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(x)} c [1 - F(x)] dx = a^{-1}c.$$

Найдем меру от всего $X = \{S\} \cup [0, \infty)$:

$$\mu\{S\} + \mu[0, \infty) = c \left(a^{-1} + \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx \right).$$

Но $\int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx$ — не что иное, как математическое ожидание m времени обслуживания. Вывод: если $m = \infty$, стационарного распределения нет; если $m < \infty$, то $\mu\{S\} = a^{-1}/(a^{-1} + m)$, а на $[0, \infty)$ стационарное распределение задается плотностью $(a^{-1} + m)^{-1}[1 - F(x)]$.

Задача 9. Найдите стационарное распределение для марковского семейства задачи 7 § 10.2.

Задача 10*. Пусть имеется система массового обслуживания с одним каналом обслуживания, с очередью. Поток поступающих заявок — простейший, с плотностью a ; время обслуживания — показательное, со средним m (т. е. с параметром m^{-1}). Тогда число ξ_t заявок, находящихся в системе (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди) в момент t , — марковское семейство со счетным числом состояний с такой инфинитезимальной матрицей: $a_{i,i+1} = a$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $a_{i,i-1} = m^{-1}$, $a_{ii} = -(a + m^{-1})$, $i = 1, 2, \dots$; $a_{00} = -a$ (остальные — нули). Докажите, что при $t \rightarrow \infty$ существует предельное распределение

$\{q_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$, $q_j > 0$, $\sum q_j = 1$: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, i, \{\beta\}) = q_j$;
 при $am \geq 1$ распределение числа заявок в очереди уходит при
 $t \rightarrow \infty$ на бесконечность: $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, i, [N, \infty)) = 1$ для любых
 натуральных N, i .

4. Представляет интерес нахождение математических ожиданий и распределений различных функционалов от траекторий процесса, таких, как $f(\xi_t)$,
 $\int_0^t g(\xi_s) ds$, $f(\xi_\tau)$, $\int_0^\tau g(\xi_s) ds$, где τ — момент первого до-
 стижения какого-нибудь множества Γ , и т. п. В виде математических ожиданий такого рода функционалов могут быть представлены и вероятности разных событий, связанных с процессом, например, вероятность того, что ξ_t достигнет множества Γ_1 раньше, чем Γ_2 , — это математическое ожидание $\chi_{\Gamma_1 \setminus \Gamma_2}(\xi)$, где τ — момент первого достижения множества $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Здесь мы рассмотрим более простой случай функционалов, связанных с неслучайным моментом t ; задачи, связанные с моментами первого достижения множества (выхода из области), мы рассмотрим для диффузионных процессов в гл. 13.

Математическое ожидание $u(t, x) = M_x f(\xi_t) = P^t f(x)$ можно найти как единственное (ограниченное) решение уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Au(t, x), \quad t > 0, \quad x \in X, \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x) \quad (3)$$

(во всяком случае, когда начальное условие $f \in D_A$, см. § 10.1; единственность ограниченного решения $u(t, x) = P^t f(x)$ вытекает из того, что преобразование Лапласа $v_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, x) dt$ удовлетворяет уравнению $\lambda v_\lambda - Av_\lambda = f$, а его решение единствено: $v_\lambda = R_\lambda f$). Эта задача, в сущности, — не что иное, как задача о нахождении распределения значения ξ_t для процесса, начинающегося в произвольной точке x , т. е. о нахождении переходной функции по инфинитезимальному оператору.

Далее, рассмотрим функцию $v(t, x) = \mathbf{M}_x \int_0^t g(\xi_s) ds = \int_0^t \mathbf{M}_x g(\xi_s) ds = \int_0^t P^s g(x) ds$ (ξ_t предполагается прогрессивно измеримым относительно $\mathcal{F}_{\leq t}$).

Задача 11. Докажите, что для $g \in \mathbf{B}_0$ функция v — единственное растущее не быстрее, чем линейная функция от t , решение задачи

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = Av(t, x) + g(x), \quad (4)$$

$$v(0, x) = 0. \quad (5)$$

Задачи (2) — (3) или (4) — (5), может быть, трудно решить, но это — задачи привычного для нас типа; например, если A — дифференциальный оператор, это задача Коши для уравнения в частных производных. Но как подойти к вопросу о нахождении распределения $\int_0^t g(\xi_s) ds$? Задача будет решена, если удастся найти характеристическую функцию $\mathbf{M}_x \exp \left\{ iz \int_0^t g(\xi_s) ds \right\}$. Совместное распределение $\int_0^t g(\xi_s) ds$ и ξ_t будет найдено, если мы научимся находить $\mathbf{M}_x \exp \left\{ iz_1 \int_0^t g(\xi_s) ds \right\} e^{iz_2 \xi_t}$.

Мы возьмемся за более общую задачу нахождения функции

$$w(t, x) = \mathbf{M}_x \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} f(\xi_t) \quad (6)$$

для комплексных или действительных функций c и f — безразлично (предыдущая задача получается из этой при $c(x) = iz_1 g(x)$, $f(x) = e^{iz_2 x}$).

Теорема. Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — равномерно стохастически непрерывное марковское семейство на метрическом фазовом пространстве X , функция $f \in D_A$,

c — ограниченная равномерно непрерывная функция ($c \in C_{\text{равн}}$). Тогда функция w , определяемая формулой (6), — единственное растущее не быстрее e^{at} решение задачи

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = Aw(t, x) + c(x)w(t, x), \quad (7)$$

$$w(0, x) = f(x). \quad (8)$$

Доказательство будем проводить с использованием известных уже нам сведений из теории полугрупп. Определим линейные операторы \tilde{P}^t , $t \geq 0$, формулой

$$\tilde{P}^t f(x) = M_x \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} f(\xi_t).$$

Это будут линейные ограниченные операторы: $\|\tilde{P}^t\| \leq e^{at}$, где $a = \sup_x \operatorname{Re} c(x)$. Они образуют полугруппу. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{t+s} f(x) &= M_x \exp \left\{ \int_0^{t+s} c(\xi_u) du \right\} f(\xi_{t+s}) = \\ &= M_x M_x \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_u) du + \int_t^{t+s} c(\xi_u) du \right\} f(\xi_{t+s}) \mid \mathcal{F}_{\leq t} \right] = \\ &= M_x \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_u) du \right\} \times \\ &\quad \times M_x \left[\theta_t \left(\exp \left\{ \int_0^s c(\xi_u) du \right\} f(\xi_s) \right) \mid \mathcal{F}_{\leq t} \right]. \end{aligned}$$

Условное математическое ожидание, по марковскому свойству, равно $w(s, \xi_t) = \tilde{P}^s f(\xi_t)$. Отсюда $\tilde{P}^{t+s} f(x) = M_x \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_u) du \right\} \tilde{P}^s f(\xi_t) = \tilde{P}^t \tilde{P}^s f(x)$.

Обозначим инфинитезимальный оператор полугруппы \tilde{P}^t через \tilde{A} . Докажем, что $D_{\tilde{A}} = D_A$ и на этом множестве $\tilde{A}f = Af + cf$. Имеем

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\tilde{P}^t f - f) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\tilde{P}^t f - P^t f) + \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t f - f). \quad (9)$$

Прежде чем продолжать доказательство, предложим читателю получить более простой результат самостоятельно.

Задача 12. Докажите, что $\|\tilde{P}^t f - P^t f\| \leq (e^{t\|c\|} - 1)\|f\|$. Пользуясь тем, что $\tilde{P}^t f - f = (\tilde{P}^t f - P^t f) + (P^t f - f)$, выведите отсюда, что полугруппа \tilde{P}^t сильно непрерывна на том же самом пространстве B_0 , что P^t , и только на нем.

Теперь докажем, что $t^{-1}(\tilde{P}^t f(x) - P^t f(x))$ равномерно по x сходится к $c(x)f(x)$ для всех $f \in B_0$; это покажет, что крайний левый и крайний правый пределы в (9) существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то различаются на cf . Имеем

$$\tilde{P}^t f(x) - P^t f(x) = M_x \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} - 1 \right] f(\xi_t) \quad (10)$$

(кстати, эта формула решает задачу 12). Далее, интеграл $\int_0^t c(\xi_s) ds$ не превосходит $t\|c\|$, так что $\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} - 1 = \int_0^t c(\xi_s) ds + O(t^2)$ при $t \downarrow 0$, где $O(t^2)$ равномерно по всем траекториям. Отсюда разность (10) равна $M_x \int_0^t c(\xi_s) ds \cdot f(\xi_t) + O(t^2)$ равномерно по x . Так как $f \in B_0$, то $M_x f(\xi_t) \rightarrow f(x)$ ($t \downarrow 0$) равномерно по x , и

$$M_x t^{-1} \int_0^t c(x) ds \cdot f(\xi_t) = c(x) M_x f(\xi_t) \rightarrow c(x) f(x)$$

тоже равномерно. Значит, остается доказать, что

$$M_x t^{-1} \int_0^t [c(\xi_s) - c(x)] ds \cdot f(\xi_t) \rightarrow 0 \quad (11)$$

равномерно по $x \in X$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$; выберем $\delta > 0$ так, чтобы $|c(x) - c(y)| < \varepsilon/(2\|f\|)$ при $\rho(x, y) < \delta$. Разобьем математическое ожидание в (11) на два слагаемых: интегралы по событию $\{\sup_{0 \leq s \leq t} \rho(x, \xi_s) \leq \delta\}$ и по событию $\{\sup_{0 \leq s \leq t} \rho(x, \xi_s) > \delta\}$. Первый не превосходит $\varepsilon/2$,

второй оценивается сверху выражением

$$2\|c\|\|f\|\mathbf{P}_x\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} \rho(x, \xi_s) > \delta\right\}.$$

Но из леммы § 9.1 следует, что

$$\mathbf{P}_x\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} \rho(x, \xi_s) > \delta\right\} \leq 2\alpha_{\delta/2}(t) \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0).$$

Отсюда вытекает, что математическое ожидание в (11) меньше ϵ при достаточно малых t сразу при всех $x \in X$.

Это доказывает $D_{\tilde{A}} = D_A$, $\tilde{A}f = Af + cf$.

Теперь, если $\sup_x \operatorname{Re} c(x) \leq 0$, то полугруппа \tilde{P}^t

состоит из сжимающих операторов, и $w(t, x) = \tilde{P}^t f(x)$ — единственное ограниченное решение уравнения $\frac{dw}{dt} = \tilde{A}w (= Aw + cw)$ с начальным условием $w|_{t=0} = f$.

Если же $\sup_x \operatorname{Re} c(x) > 0$ или мы интересуемся решениями, растущими, но не быстрее экспоненты, то берем достаточно большое положительное α и рассматриваем

$$w_\alpha(t, x) = e^{-\alpha t} w(t, x) = M_x \exp \left\{ \int_0^t [c(\xi_s) - \alpha] ds \right\} f(\xi_t).$$

Это — единственное ограниченное решение задачи $\frac{dw_\alpha}{dt} = Aw_\alpha + cw_\alpha - \alpha w_\alpha$, $w_\alpha|_{t=0} = f$, т. е. $-ae^{-\alpha t}w + + e^{-\alpha t} \frac{dw}{dt} = e^{-\alpha t}Aw + ce^{-\alpha t}w - ae^{-\alpha t}w$, или $\frac{dw}{dt} = Aw + cw$, $w|_{t=0} = f$.

Теорема доказана.

Задача 13*. Для марковского семейства на $X = \{1, 2\}$ с инфинитезимальной матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (т. е. марковского семейства задачи 1 § 8.1) найдите характеристическую функцию времени, проведенного в состоянии 1 до момента t .

Заметим, что для нахождения распределения $\int_0^t g(\xi_s) ds$ можно обойтись только действительными функциями, вычисляя $M_x \exp \left\{ \lambda \int_0^t g(\xi_s) ds \right\}$ при действительных λ .

Уравнение (7) (с начальными условиями (8) позволяет явно найти распределение различных функционалов, например, от *винеровского процесса*, в частности, $\mu_t = \text{mes} (\{0, t] \cap \{s: w_s > 0\}) =$

$$= \int_0^t \chi_{(0, \infty)} (w_s) ds.$$

Не будем приводить соответствующих

сложных выкладок; вывод распределения μ_t можно прочесть в книге Гихмана и Скорохода (1965, гл. VIII, § 5).

Задача 14*. Напишите выражение в виде математического ожидания функционала от траекторий, решающее задачу

$$\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} = Aw(t, x) + c(x)w(t, x) + g(x), \quad w(0, x) = f(x).$$

5. Задача 15. Пусть ξ_t , $t \in T$, прогрессивно измеримо, $f \in D_A$. Докажите, что компенсатор случайной функции $f(\xi_t)$ относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leqslant t}$ и каждой из вероятностных

мер P_x равен $\int_0^t Af(\xi_s) ds$.

Г л а в а 11

ДИФФУЗИИ

§ 11.1. Что такое диффузия?

1. Диффузии (диффузионные процессы) — это, грубо говоря, те марковские семейства, инфинитезимальные операторы которых суть дифференциальные операторы, строго марковские семейства, траектории которых непрерывны. Примером диффузии может служить семейство винеровских процессов, выходящих из всевозможных начальных точек.

Почему «грубо говоря»? Дело в том, что даже для такого случая, как семейство винеровских процессов в R^r ($r > 1$), инфинитезимальный оператор в точности не совпадает с $\frac{1}{2}\Delta$ (Δ — оператор Лапласа), так что соотношение инфинитезимального оператора и дифференциального оператора нужно уточнить. Можно по-разному уточнять, ослаблять, усиливать требование непрерывности траекторий. Кроме того, в уточнении нуждается и то, требуем ли мы в определении чего-то одного — свойств инфинитезимального оператора или непрерывности траекторий — или и того и другого. Эти свойства, как мы видели, близки друг к другу, но все же не совпадают; поэтому мы можем, варьируя их сочетания, получать близкие друг к другу, но все же разные определения.

Уточнения определения диффузии могут производиться в разных направлениях, так что нет единого стандартного определения диффузии, а есть различные *рабочие* определения, или, можно сказать, имеются определения разных *классов* диффузий.

Марковские семейства рассматриваемого класса являются математическими моделями движения отдельной частицы в процессе диффузии — проникновения одного вещества в другое за счет беспорядочного движения молекул — и в ряде других, сходных с диффузией физических процессов. Известно, что количественная сторона таких процессов хорошо описывается с помощью дифференциальных уравнений с частными производными;

с другой стороны, траектории реальных физических частиц, естественно, непрерывны.

Диффузии оказываются полезными также при изучении совершенно других явлений действительности; в частности, они возникают как предельные для дискретных моделей, описывающих различные биологические явления, такие, как изменение с течением времени численности особей определенного биологического вида или концентрации гена в популяции.

Теория диффузий, естественно, тесно связана с теорией дифференциальных уравнений в частных производных, причем эта связь — двусторонняя. С одной стороны, результаты из теории дифференциальных уравнений можно применять к диффузиям (см. гл. 13), с другой — рассмотрение диффузий позволяет получить некоторые результаты, касающиеся дифференциальных уравнений.

Одно из применений диффузий к дифференциальным уравнениям — приближенное решение уравнения *методом Монте-Карло*: процесс моделируется при помощи той или иной стохастической процедуры, и математические ожидания функционалов от реализации процесса находятся приближенно как средние арифметические по большому числу независимых реализаций.

2. С диффузиями могут быть связаны дифференциальные операторы не выше второго порядка. Легко установить, что если дифференциальный оператор содержит с ненулевым коэффициентом, скажем, третью производную f''' , то он не удовлетворяет *принципу максимума*: можно найти функцию, имеющую в некоторой точке x_0 абсолютный максимум, в то время как значение оператора в этой точке положительно. Значит, оператор может содержать лишь производные первого и второго порядков (члена $c(x)f(x)$ не должно быть, потому что инфинитезимальный оператор должен удовлетворять условию $A1 \equiv 0$), т. е. иметь вид

$$\frac{1}{2} a(x) f''(x) + b(x) f'(x) \quad \text{или, в многомерном случае,} \\ \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (\text{К чему здесь множитель } 1/2,$$

мы скажем в следующем параграфе.) Принцип максимума не позволяет также коэффициентам быть произвольными, а именно, матрица $(a^{ij}(x))$ должна быть неотрицательно определенной при любом x (в одномерном случае просто $a \geq 0$). Таким образом, дифференциальный оператор, связанный с диффузией, должен быть эллиптическим оператором второго порядка или «вырождающимся эллиптическим», т. е. обращающимся в каких-то точках или даже всюду в параболический (или гиперпараболический, или даже вообще в оператор первого порядка).

В этой книге мы ограничимся рассмотрением диффузий во всем пространстве R^r . Дадим точное определение.

Марковское семейство (ξ_t, P_x) на фазовом пространстве (R^r, \mathcal{B}') мы будем называть *диффузией* в R^r , если

а) его инфинитезимальный оператор определен на всех финитных дважды непрерывно дифференцируе-

мых функциях (разумеется, не только на них: например, D_A всегда содержит тождественную единицу), и существуют непрерывные векторная функция ($b^i(x)$) и матричная ($a^{ij}(x)$) (матрица ($a^{ij}(x)$) при любом x симметрична и неотрицательно определена) такие, что для $f \in C_{\text{фин}}^{(2)}$

$$Af(x) = Lf(x) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r a^{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^r b^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i};$$

б) все его траектории непрерывны.

Дифференциальный оператор L будем называть *производящим оператором диффузии*.

Возможность удовлетворить условию б) *почти* следует из условия а). Действительно, компактифицировав R' добавлением одной точки ∞ , получим марковское семейство, удовлетворяющее условиям микротеоремы 2 § 10.3; его траектории могут быть выбраны непрерывными. Но непрерывность траекторий в компакте $R' \cup \{\infty\}$ не означает непрерывности траекторий первоначального процесса в R' ; траектория может уйти на бесконечность и прийти из бесконечности. Таким образом, сущность строгого требования непрерывности б) состоит в запрещении ухода на бесконечность — выхода на границу области, в которой задан процесс.

§ 11.2. Результаты Колмогорова. Обратное и прямое уравнения

В этом параграфе излагаются в переработанном виде результаты, содержащиеся в § 13, 14 работы А. Н. Колмогорова «Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung» (Mathemat. Ann.—1931.—Bd. 104.—S. 415—438; русский перевод: УМН.—1938.—Т. 5.—С. 5—14).

1. Пусть на R' заданы непрерывные функции $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $i, j = 1, \dots, r$; пусть L — соответствующий им дифференциальный оператор: $Lf = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 1. Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — марковское семейство на (R', \mathcal{B}') такое, что при любом $\varepsilon > 0$ равно-

мерно по x выполняются следующие соотношения:

$$P(t, x, V_\varepsilon(x)) = o(t), \quad (1)$$

$$\int_{U_\varepsilon(x)} (y^i - x^i) P(t, x, dy) = b^i(x)t + o(t), \quad (2)$$

$$\int_{U_\varepsilon(x)} (y^i - x^i)(y^j - x^j) P(t, x, dy) = a^{ij}(x)t + o(t) \quad (3)$$

при $t \downarrow 0$ (здесь $U_\varepsilon(x)$ — ε -окрестность точки x , $V_\varepsilon(x)$ — ее дополнение). Тогда инфинитезимальный оператор этого марковского семейства определен на всех функциях f из $C_{\text{равн}}^{(2)}$ (т. е. ограниченных и равномерно непрерывных вместе со своими частными производными первого и второго порядка), и на них он равен Lf .

Прежде чем доказывать теорему, поговорим о смысле условий (1)–(3). Первое из них — достаточное условие для существования марковского семейства с данными переходными вероятностями, с непрерывными траекториями. Легко доказать, что при условии (1), если (2) и (3) выполнены при каком-то одном положительном ε , то они выполнены и при всех $\varepsilon > 0$. Выражения в левых частях (2), (3) — не что иное, как «урезанные» математические ожидания и ковариации $M_x(\xi_t^i - x^i)$, $M_x(\xi_t^i - x^i)(\xi_t^j - x^j)$ (собственно, для получения ковариации нужно еще вычесть произведение математических ожиданий, но оно имеет порядок $O(t^2) = o(t)$). Условия (2), (3) означают, что эти величины имеют первый порядок относительно t при малых t . Коэффициенты пропорциональности $b^i(x)$ и $a^{ij}(x)$ поэтому называют соответственно локальными математическими ожиданиями (локальными средними) и локальными ковариациями (в одномерном случае, а также при $i = j$ — локальными дисперсиями). Другие названия: для коэффициентов $b^i(x)$ — коэффициенты переноса (или сноса, или дрейфа; или вектор $b(x)$ называют вектором переноса); для матрицы $a^{ij}(x)$ — матрица диффузии (в одномерном случае $a(x)$ — коэффициент диффузии). Эти названия связаны с физической интерпретацией диффузионных процессов. Для броуновского движения в однородной и изотропной среде, когда на частицу не действуют никакие посторонние силы, кроме ударов молекул, естественно считать коэффициенты диффузии и переноса не зависящими от x и инвариантными относительно вращений, т. е. $b(x) \equiv 0$, $(a^{ij}(x)) \equiv aE$; это означает, что такое однородное симметричное броуновское движение с точностью до множителя — винеровский процесс.

Доказательство теоремы. Пусть $f \in C_{\text{равн}}^{(2)}$, δ — произвольно малое положительное число. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы приращения всех вторых частных производных f на отрезках длины меньше ε были меньше δ ; поэтому ε выберем $h > 0$ так, чтобы при

$t \leq h$ все $o(t)$ в (1) — (3) было по абсолютной величине меньше $\delta \cdot t$ для всех x . Воспользуемся разложением Тейлора:

$$f(y) = f(x) + \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} (y^i - x^i) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} (y^i - x^i)(y^j - x^j) + o(|y - x|^2),$$

где $|o| = |o(x, y)| < \frac{r^2}{2} \delta$ при $|y - x| < \varepsilon$. Подставим это выражение в формулу

$$P^t f(x) - f(x) = \int_{R^r} P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] = \\ = \int_{U_\varepsilon(x)} [f(y) - f(x)] P(t, x, dy) + \\ + \int_{V_\varepsilon(x)} [f(y) - f(x)] P(t, x, dy),$$

вернее, в первый интеграл в правой части; получим

$$P^t f(x) - f(x) = \\ = \int_{U_\varepsilon(x)} \left[\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) (y^i - x^i) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) (y^i - x^i) \times \right. \\ \times (y^j - x^j) + o(|y - x|^2) \left. \right] P(t, x, dy) + \\ + \int_{V_\varepsilon(x)} [f(y) - f(x)] P(t, x, dy).$$

В силу (2), (3) первый интеграл будет равен

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) b^i(x) t + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) a^{ij}(x) t + o(t)$$

плюс слагаемое, не превосходящее

$$\frac{r^2}{2} \delta \left[\sum_i a^{ii}(x) t + o(t) \right];$$

и в силу выбора h этот интеграл будет отличаться от $tLf(x)$ менее чем на

$$t\delta \left[r \max_i \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\| + \frac{r^2}{2} \max_{i,j} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right\| + \frac{r^2}{2} \left\| \sum_i a^{ii} \right\| + \frac{r^2}{2} \delta \right].$$

Второй интеграл в силу (1) оценивается по модулю величиной $2\|f\|o(t)$, и при $t \leq h$ он не превосходит $2\|f\|t\delta$. Значит, $|t^{-1}(P^t f(x) - f(x)) - Lf(x)|$ не превосходит при малых t скольких-то δ ; так как δ произвольно мало, то получаем, что эта разность равномерно стремится к нулю при $t \downarrow 0$, т. е. $f \in D_A$ и $Af = Lf$.

Пример — вычисление инфинитезимального оператора винеровского процесса (задача 4 § 10.1).

В условиях теоремы 1 (ξ_t, P_x) оказывается диффузионным процессом с производящим оператором L (если сделать траектории непрерывными).

2. Условия теоремы 1 слишком ограничительны *); из них, в частности, вытекает, что коэффициенты b^i , a^{ij} ограничены во всем пространстве (иначе для некоторых $f \in C_{\text{равн}}^{(2)}$ оператор L будет давать неограниченную функцию Lf). Эти условия можно ослабить, если ограничиться финитными функциями f .

Теорема 1'. Пусть (ξ_t, P_x) — марковское семейство на (R^r, \mathcal{B}^r) такое, что условия (1) — (3) выполняются при $t \downarrow 0$ равномерно по x в пределах каждого ограниченного множества, и для каждого ограниченного K существует ограниченное множество $K' \supset K$ такое, что

$$P(t, x, K) = o(t) \quad (4)$$

при $t \downarrow 0$ равномерно по $x \in R^r \setminus K'$. Тогда инфинитезимальный оператор определен на всех функциях $f \in \mathbf{C}_{\text{фин}}^{(2)}$ (дважды непрерывно дифференцируемых финитных), и на них он равен Lf .

Доказательство. Пусть f — гладкая финитная функция, обращающаяся в нуль вне компакта K ; выбираем $K' \supset K$ по условию теоремы. Нужно доказать,

*) Настолько ограничительны, что мы не смогли привести ни одного красивого или интересного с точки зрения приложений примера, кроме винеровского процесса.

что $t^{-1}(P^t f(x) - f(x)) \rightarrow Lf(x)$ при $t \downarrow 0$ равномерно по $x \in R'$. В случае $x \in K'$ действует доказательство теоремы 1; в случае $x \notin K'$ — условие (4).

Примеры.

а) Для однородного по времени гауссовского марковского семейства (задача 2 § 8.1 в однородном варианте) переходная плотность задается формулой

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-(y-m(t)x)^2/[2\sigma^2(t)]},$$

где $m(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению $m(t+s) = m(t)m(s)$, а $\sigma^2(t)$ связано с этой функцией уравнением $\sigma^2(t+s) = m^2(t)\sigma^2(s) + \sigma^2(t)$. Можно доказать, что общее непрерывное решение системы этих уравнений имеет вид $m(t) = e^{bt/2}$, $\sigma^2(t) = ab^{-1}(e^{bt} - 1)$ при $b \neq 0$, $\sigma^2(t) = at$ при $b = 0$.

Легко проверяется выполнение условий (1)–(3) (равномерно в пределах каждого компакта) и (4). Локальное среднее и локальная дисперсия оказываются равными

$$\begin{aligned} b(x) &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} M_x(\xi_t - x) \chi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\xi_t - x) = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} M_x(\xi_t - x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (m(t)x - x) = \frac{b}{2}x, \end{aligned}$$

$$a(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} M_x(\xi_t - x)^2 \chi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\xi_t - x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \sigma^2(t) = a,$$

производящий оператор $Lf(x) = \frac{a}{2}f''(x) + \frac{b}{2}xf'(x)$.

б) Еще один гауссовский пример (на этот раз двумерный): (w_t, ξ_t) , где w_t — винеровский процесс, $\xi_t = \xi_0 + \int_0^t w_s ds$. Рас-

пределение в момент t при начальной точке $w_0 = x$, $\xi_0 = y$ — нормальное с математическими ожиданиями $(x, y + tx)$ и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}$ (см. задачу 19 § 2.1). Локальные математические ожидания и локальные ковариации равны производным этих функций в нуле (интегралы по $U_\varepsilon(x, y)$ отличаются от интегралов по всей плоскости лишь на $o(t)$). Отсюда $b^1(x, y) = 0$, $b^2(x, y) = x$, $a^{11}(x, y) \equiv 1$, $a^{12} = a^{21} = a^{22} = 0$. Производящий оператор есть $Lf(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial y}$. Оператор оказывается не эллиптическим, а вырождающимся в параболический; и соответствующий процесс, как мы видим, — тоже в каком-то смысле вырожденный: случайность не отпущена ему полной мерой — вторая координата полностью определяется первой (и начальной точкой).

в) Положим $\xi_t = \varphi(w_t)$, где $\varphi(x)$ — гладкая возрастающая функция ($\varphi'(x) > 0$), растущая на $\pm\infty$ быстрее, чем e^{cx^2} при любом c ; w_t — винеровский процесс. Математическое ожидание $M_x \xi_t$ при $t > 0$ не существует, но локальное среднее и локаль-

ная дисперсия существуют и равны $b(x) = \frac{1}{2} \varphi''(\varphi^{-1}(x))$, $a(x) = (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2$, $Lf(x) = \frac{1}{2} (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2 f''(x) + \frac{1}{2} \varphi''(\varphi^{-1}(x)) f'(x)$. Этот оператор можно представить в виде $\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{du^2}$, где $u(x) = \varphi^{-1}(x)$. (Докажите.)

г) Посмотрим, каким диффузионным процессом можно приблизить процесс изменения численности особей какого-то вида (см. § 11.1). Пусть коэффициенты рождаемости и смертности (среднее число рождающихся и погибающих в единицу времени особей в расчете на одну особь) зависят от общего числа n особей (потому что от него зависит, хватит ли всем пищи) и равны соответственно $r(n)$, $l(n)$. На малом отрезке времени можно считать $n(t) \approx n$, а значит, r и l — тоже приближенно постоянны. При этом естественное приближение к реальности состоит в том, чтобы считать числа рождений и смертей за малое время независимыми пуассоновскими процессами с параметрами $n \cdot r(n)$, $n \cdot l(n)$. Отсюда $M_n[n(t) - n] \approx n(r(n) - l(n)) \cdot t$, а дисперсия $\approx n(r(n) + l(n)) \cdot t$. Получаем $b(n) = n(r(n) - l(n))$, $a(n) = n(r(n) + l(n))$; процесс связан с дифференциальным оператором $Lf(n) = \frac{1}{2} n(r(n) + l(n)) \frac{d^2 f}{dn^2} + n(r(n) - l(n)) \frac{df}{dn}$. Функцию $u_N(t, n)$, выражающую вероятность того, что в момент t (не малый) число особей будет $\leq N$, если все началось с n особей, можно найти как решение задачи Коши: $\frac{\partial u_N}{\partial t} = Lu_N$; $u_N(0, n) = 1$ при $n \leq 0$, $u_N(0, n) = 0$ при $n > N$.

Разумеется, хорошим диффузионное приближение может быть только при больших n .

3. Теорема 2. Пусть инфинитезимальный оператор диффузионного процесса определен и совпадает с производящим оператором L на всех дважды непрерывно дифференцируемых функциях f , убывающих вместе с производными $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ на бесконечности не медленнее, чем некоторая функция $\varphi(x)$ ($\rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$). Предположим, что переходные вероятности диффузионного процесса задаются плотностью: $P(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(t, x, y) dy$, где функция $p(t, x, y)$,

определенная на $(0, \infty) \times R^r \times R^r$, непрерывна по всем трем переменным вместе с первой частной производной по t и частными производными первых двух порядков по x^i , x^j . Пусть, наконец, имеют место оценки

$$|p|, \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial p}{\partial x^i} \right|, \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j} \right| \leq C(t, y) \varphi(x), \quad (5)$$

где $C(t, y)$ — непрерывная положительная функция на $(0, \infty) \times R^r$. Тогда переходная плотность удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x^i}, \quad (6)$$

или, короче, $\frac{\partial p}{\partial t} = L_x p$. (Индекс x означает, что оператор применяется к плотности при фиксированных t, y как к функции от x .)

Условия теоремы довольно громоздки, например, требуется, чтобы плотность и ее производные оценивались функцией $C(t, y)\varphi(x)$, а не просто $C(y)\varphi(x)$; но здесь ничего не поделаешь, потому что соответствующее распределение при $t \downarrow 0$ сходится к распределению, целиком сосредоточенному в одной точке (на языке обобщенных функций: $p(t, x, y) \rightarrow \delta(y - x)$ при $t \downarrow 0$ для любого $x \in R^r$), и плотность не может не расти, когда t приближается к нулю.

Доказательство. Прежде всего, оценки (5) обеспечивают возможность производить дифференцирование под знаком интеграла в формуле

$$P^t f(x) = \int_{R^r} p(t, x, y) f(y) dy,$$

где f — произвольная ограниченная измеримая функция, обращающаяся в нуль вне некоторого компакта:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^t f(x)}{\partial t} &= \int_{R^r} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} f(y) dy, \\ \frac{\partial P^t f(x)}{\partial x^i} &= \int_{R^r} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x^i} f(y) dy, \\ \frac{\partial^2 P^t f(x)}{\partial x^i \partial x^j} &= \int_{R^r} \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^i \partial x^j} f(y) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом в силу требований, наложенных на плотность, полученные функции при любом фиксированном $t > 0$ будут убывать на бесконечности не медленнее, чем $\text{const} \cdot \varphi(x)$, а значит, $P^t f$ будет принадлежать D_A .

Теперь возьмем в качестве f функцию из $C_{\text{фин}}^{(2)}$; она будет принадлежать D_A , а для таких функций $\frac{\partial P^t f(x)}{\partial t} = AP^t f(x)$ (формула (4) § 10.1). По условию теоремы применить оператор A к функции $P^t f$, убывающей вместе с производными с указанной скоростью на бесконечности, — это все равно, что применить оператор L ; пользуясь формулами (7), переписываем это уравнение в таком виде:

$$\int_{R^r} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} f(y) dy = \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij}(x) \int_{R^r} \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^i \partial x^j} f(y) dy + \\ + \sum_i b^i(x) \int_{R^r} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x^i} f(y) dy,$$

или

$$\int_{R^r} \left[\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij}(x) \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x^i \partial x^j} - \right. \\ \left. - \sum_i b^i(x) \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x^i} \right] f(y) dy = 0.$$

Функция в квадратных скобках непрерывна по y ; раз интеграл от ее произведения на любую финитную гладкую функцию равен нулю, то сама функция тождественно равна нулю.

Теорема доказана.

Условия теоремы 2 можно привести к более естественному виду, если решить следующую задачу.

Задача 1. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям $b^i(x)\varphi(x)$, $a^{ij}(x)\varphi(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда из того, что все финитные дважды непрерывно дифференцируемые функции принадлежат области определения инфинитезимального оператора, причем для них $Af = Lf$, вытекает, что то же выполняется для дважды непрерывно дифференцируемых функций f , удовлетворяющих такому условию: $f, \partial f / \partial x^i, \partial^2 f / \partial x^i \partial x^j = O(\varphi(x))$ при $|x| \rightarrow \infty$.

4. Теорема 2 — перевод на язык дифференциальных уравнений общего соотношения из теории полугрупп $dP^t f / dt = AP^t f$; следующая теорема выводится из соотношения $dP^t f / dt = AP^t f$.

Введем ограничения на коэффициенты a^{ij} , b^i : пусть функции $a^{ij}(x)$ дважды, а $b^i(x)$ один раз непрерывно дифференцируемы (ограниченность производных не

предполагается). Тогда для дифференциального оператора определен (на гладких функциях) формально сопряженный оператор

$$L^*g(x) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} (a^{ij}(x) g(x)) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (b^i(x) g(x)).$$

Теорема 3. Пусть (ξ_t, P_x) — диффузионный процесс с производящим оператором L . Предположим, что плотность вероятностей перехода обладает непрерывными частными производными первого порядка по t и первых двух порядков по y^i, y^j . Тогда переходная плотность удовлетворяет такому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (a^{ij}(y) p(t, x, y)) - \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} (b^i(y) p(t, x, y)), \end{aligned} \quad (8)$$

или $\frac{\partial p}{\partial t} = L_y^* p$.

Доказательство. Пусть $f \in C_{\text{финн}}^{(2)}$. Тогда $f \in D_A$, и $\frac{\partial P^t f(x)}{\partial t} = P^t A f(x) = P^t L f(x)$. Записывая это через плотность и ее частную производную по t , получаем

$$\begin{aligned} \int_{R^r} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} f(y) dy &= \\ &= \int_{R^r} \left[p(t, x, y) \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij}(y) \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^i \partial y^j} + \right. \\ &\quad \left. + p(t, x, y) \sum_i b^i(y) \frac{\partial f(y)}{\partial y^i} \right] dy. \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в правой части на r^2 интегралов со вторыми частными произвольными и r интегралов с первыми и в каждом из этих интегралов произведем интегрирование по частям. Для финитной функции f внеинтегральные члены пропадут, и получим

$$\begin{aligned} \int_{R^r} \left[\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} - \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (a^{ij}(y) p(t, x, y)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} (b^i(y) p(t, x, y)) \right) \right] f(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что функция в квадратных скобках тождественно равна нулю.

Пример. Для процесса п. 2а) $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[a \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - b y \frac{\partial p}{\partial y} - b p \right]$.

Полагая $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, из (8) получаем уравнение для плотности инвариантной меры относительно меры Лебега: $L_y^* p = 0$.

Задача 2. Найдите инвариантную меру для процесса п. 2а) при $b < 0$.

5. Уравнение (6) называется *обратным уравнением Колмогорова*, (8) — *прямым уравнением Колмогорова*, или *уравнением Фоккера — Планка*. Поясним, с чем связаны названия *обратное* и *прямое* уравнения.

Для неоднородного по времени процесса (ξ_t, P_s, x) можно доказать аналоги теорем этого параграфа, в которых будут участвовать локальные средние $b^i(s, x)$ и локальные ковариации $a^{ij}(s, x)$, зависящие от времени. (При доказательстве можно использовать сведение неоднородных марковских семейств к однородным — см. конец § 8.4.) Уравнение (6) в этом случае принимает вид

$$-\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 p(s, x, t, y)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(s, x) \frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial x^i} \quad (9)$$

и уравнение (8) — вид

$$\frac{\partial p(s, x, t, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (a^{ij}(t, y) p(s, x, t, y)) - \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i} (b^i(t, y) p(s, x, t, y)). \quad (10)$$

Первое из этих уравнений связано с дифференцированием по левому концу временного промежутка, второе — по правому.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений уравнение (9) означает, что плотность вероятностей перехода есть *фундаментальное решение* парабо-

лического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0.$$

Действительно, фундаментальным решением называется как раз функция $p(s, x, t, y)$, $s < t$, $x, y \in R^r$, удовлетворяющая при каждом фиксированном y уравнению (9) и требованию регулярности того типа, что наложили мы (условия (5) и пр.), и стремящаяся к $\delta(y - x)$ при $s \uparrow t$ (что можно сформулировать так: $\int p(s, x, t, y) f(y) dy \rightarrow f(x)$ при $s \uparrow t$ для любой f из $C_{\text{фин}}$). Иначе говоря, при помощи этой функции представляется в виде $u(s, x) = \int p(s, x, t, y) f(y) dy$, $s < t$, единственное ограниченное решение задачи Коши для рассматриваемого параболического уравнения с «конечным» условием $u(t-, x) = f(x)$ (мы говорим не о *начальном* условии, потому что уравнение вида $\frac{\partial u}{\partial s} + Lu = 0$ решается «вниз», в отличие от уравнения вида $\frac{\partial u}{\partial s} = Lu$; см. § 8.3, п. 7).

Уравнение (10) означает, что переходная плотность является также фундаментальным решением уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} = L^* v$. В теории дифференциальных уравнений тот факт, что одна и та же функция $p(s, x, t, y)$ при изменении роли ее аргументов служит фундаментальным решением двух сопряженных друг другу параболических уравнений, хорошо известен.

Задача 3*. Для гауссовского процесса $Z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, с нулевым средним и корреляционной функцией $s \wedge t - st$ докажите, что он марковский; найдите соответствующую переходную функцию; найдите локальные среднее и дисперсию $b(s, x)$, $a(s, x)$; выпишите дифференциальный оператор L , связанный с процессом (переходная плотность будет удовлетворять обратному и прямому уравнениям с оператором L и сопряженным ему).

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 12.1. Стохастические интегралы от случайных функций

1. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задано неубывающее семейство σ -алгебр $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $t \geq t_0$, и винеровский процесс w_t , $t \geq t_0$, согласованный с семейством \mathcal{F}_t и такой, что приращения $w_u - w_t$ после момента t независимы от σ -алгебры \mathcal{F}_t . (Иначе говоря, w_t — винеровский процесс, для которого выполняется марковское свойство относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t ; см. § 8.5, п. 1.)

В качестве σ -алгебр \mathcal{F}_t можно взять σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{w_s, s \leq t}$ или $\mathcal{F}_{\leq t+}$, порожденные самим винеровским процессом; но для некоторых целей можно использовать другой выбор этих σ -алгебр. Например, σ -алгебра \mathcal{F}_t может порождаться произвольной случайной величиной η и не зависящим от нее винеровским процессом: $\mathcal{F}_t = \sigma(\eta; w_s, s \leq t)$. Другой пример: w_t — одна из компонент многомерного винеровского процесса, а σ -алгебра \mathcal{F}_t порождается всеми его компонентами вплоть до момента t .

Пусть $t_{\max} \geq t_0$; допускается $t_{\max} = +\infty$. Мы определим стохастический интеграл

$$I(f) = \int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) dw_t \quad (1)$$

для случайных функций $f(t, \omega)$, $t_0 < t \leq t_{\max}$, предсказуемых относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t и таких, что $\mathbf{M} \int_{t_0}^{t_{\max}} |f(t, \omega)|^2 dt < \infty$; иначе говоря, для функций $f \in L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, mes \times \mathbf{P})$ (при $t_{\max} = \infty$ принимаем, что $(t_0, \infty]$ — то же самое, что (t_0, ∞)).

Для этого мы воспользуемся уже готовой конструкцией стохастического интеграла $\int_X f(x) \xi(dx)$ относительно случайной меры с некоррелированными значениями вместе с продолжением ξ с полукольца — см. теоремы 1, 1' § 2.2; но сделаем это не так, как мы определяли интеграл относительно винеровского процесса от неслучайной функции (см. § 2.2), а хитрее.

В качестве X возьмем $(t_0, t_{\max}] \times \Omega$; в качестве σ -алгебры \mathcal{X} на этом пространстве — σ -алгебру \mathcal{Pred} ; мера m — прямое произведение $\text{mes} \times \mathbf{P}$ меры Лебега и вероятности \mathbf{P} . Рассмотрим систему \mathcal{A} подмножеств пространства $(t_0, t_{\max}] \times \Omega$, состоящую из всех множеств вида $(t, t'] \times B$, где $t_0 \leq t \leq t' \leq t_{\max}$, $t' < \infty$, а $B \in \mathcal{F}_t$. Легко доказать, что \mathcal{A} — полукольцо. Действительно, пересечение множеств из \mathcal{A} имеет вид

$$((t, t'] \times B) \cap ((s, s'] \times C) = (t \vee s, t' \wedge s'] \times (B \cap C),$$

причем из того, что $B \in \mathcal{F}_t$, $C \in \mathcal{F}_s$, вытекает $B, C \in \mathcal{F}_{t \vee s}$ и $B \cap C \in \mathcal{F}_{t \vee s}$. Теперь пусть имеется два непустых множества из \mathcal{A} , одно из которых является частью другого: $(t, t'] \times B \supseteq (s, s'] \times C$; отсюда вытекает, что $t \leq s \leq s' \leq t'$, $B \supseteq C$. Разность этих множеств имеет вид

$$\begin{aligned} ((t, t'] \times B) \setminus ((s, s'] \times C) = \\ = (t, s] \times B \cup ((s, s'] \times (B \setminus C)) \cup ((s', t'] \times B), \end{aligned}$$

где все три слагаемых не пересекаются и принадлежат \mathcal{A} (потому что $B \in \mathcal{F}_t$, откуда также $B \in \mathcal{F}_s$, $C \in \mathcal{F}_s$ и $B \setminus C \in \mathcal{F}_s$).

Определим на полукольце \mathcal{A} такую случайную функцию множества $\xi(A) = \xi(A, \omega)$:

$$\xi((t, t'] \times B) = \chi_B(\omega)(w_{t'} - w_t).$$

Теорема 1. Случайная функция $\xi(A)$ конечно-аддитивна на \mathcal{A} и удовлетворяет условиям $\mathbf{M}\xi(A) = 0$, некоррелированности для непересекающихся множеств и $\mathbf{M}|\xi(A)|^2 = m(A)$ (напомним, что $m = \text{mes} \times \mathbf{P}$).

Доказательство. Конечная аддитивность: пусть $(t, t'] \times B = \bigcup_{i=1}^n (t_i, t'_i] \times B_i$, причем отдельные

слагаемые не пересекаются. Требуется проверить, что

$$\chi_B(\omega)(w_{t'} - w_t) = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(\omega) (w_{t'_i} - w_{t_i}). \quad (2)$$

То, что «прямоугольники» $(t_i, t'_i] \times B_i$ не пересекаются, разумеется, не означает, что не пересекаются друг с другом полуинтервалы $(t_i, t'_i]$ или события B_i . Пере-нумеруем все точки t, t', t_i, t'_i в порядке возрастания: $s_0 (=t) < s_1 < \dots < s_m (=t')$, и представим каждый полуинтервал $(t_i, t'_i]$ в виде объединения входящих в него непересекающихся полуинтервальчиков $(s_j, s_{j+1}]$:

$$(t_i, t'_i] = \bigcup_{j=j_i}^{j'_i-1} (s_j, s_{j+1}]. \text{ Имеем:}$$

$$(t, t'] \times B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=j_i}^{j'_i-1} (s_j, s_{j+1}] \times B_i, \quad (3)$$

причем все слагаемые в (3) не пересекаются; аналогично правая часть (2) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=j_i}^{j'_i-1} \chi_{B_i}(\omega) (w_{s_{j+1}} - w_{s_j}) \quad (4)$$

(приращение функции w от t_i до t'_i равно сумме приращений от s_j до s_{j+1}).

Перепишем суммы (3) и (4), сгруппировав слагаемые с одним и тем же j :

$$(t, t'] \times B = \bigcup_{j=0}^{m-1} \left((s_j, s_{j+1}] \times \bigcup_{i: i_i \leqslant j < i'_i} B_i \right); \quad (5)$$

а (4) превратится в

$$\sum_{j=0}^{m-1} (w_{s_{j+1}} - w_{s_j}) \sum_{i: i_i \leqslant j < i'_i} \chi_{B_i}(\omega). \quad (6)$$

Равенство (5) может быть выполнено, только если для любого j сумма $\bigcup_{i: i_i \leqslant j < i'_i} B_i = B$; причем отдель-

ные слагаемые в этой сумме не пересекаются. Отсюда вытекает, что при любом j и всех ω имеем:

$$\sum_{i: J_i \leq j < J'_i} \chi_{B_i}(\omega) = \chi_B(\omega)$$
, и выражение (6) равно левой части (2).

Теперь найдем $\mathbf{M}\xi(A)$, $A = (t, t'] \times B$, $B \in \mathcal{F}_t$. Имеем:

$$\mathbf{M}\xi((t, t'] \times B) = \mathbf{M}\chi_B(w_{t'} - w_t) = \mathbf{M}\chi_B \mathbf{M}(w_{t'} - w_t) = 0,$$

потому что случайное событие B принадлежит σ -алгебре \mathcal{F}_t , а приращение $w_{t'} - w_t$ не зависит от этой σ -алгебры.

Если $A_1 = (t_1, t'_1] \times B_1$, $A_2 = (t_2, t'_2] \times B_2$, $B_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то непременно $(t_1, t'_1] \cap (t_2, t'_2] = \emptyset$ или $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. В первом случае мы можем считать, что первый полуинтервал лежит левее второго: $t'_1 \leq t_2$. Тогда имеем:

$$\mathbf{M}\xi(A_1)\overline{\xi(A_2)} = \mathbf{M}\chi_{B_1}(w_{t'_1} - w_{t_1})\chi_{B_2}(w_{t'_2} - w_{t_2})$$

(разумеется, черту над $\xi(A_2)$ можно и не ставить, раз наша случайная мера вещественна). Здесь первые три сомножителя измеримы относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{t_2} , а последний независим от этой σ -алгебры, поэтому

$$\mathbf{M}\xi(A_1)\overline{\xi(A_2)} = \mathbf{M}\chi_{B_1}(w_{t'_1} - w_{t_1})\chi_{B_2}\mathbf{M}(w_{t'_2} - w_{t_2}) = 0.$$

Если же $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, то эта ковариация равна нулю из-за того, что $\chi_{B_1}\chi_{B_2} \equiv 0$.

Наконец, для $A = (t, t'] \times B$, $B \in \mathcal{F}_t$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|\xi(A)|^2 &= \mathbf{M}\chi_B(\omega)^2(w_{t'} - w_t)^2 = \mathbf{M}\chi_B(\omega)^2 \mathbf{M}(w_{t'} - w_t)^2 = \\ &= \mathbf{M}\chi_B(\omega)(t' - t) = \text{mes}(t, t'] \mathbf{P}(B) = m(A). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Мы видим, что выполнены условия теоремы 1 или 1' § 2.2 (в случае $t_{\max} = \infty$ в качестве множеств A_i берутся $A_i = (t_0, t_i] \times \Omega$, где $t_i \rightarrow \infty$). Полукольцо множеств вида $(t, t'] \times B$, $B \in \mathcal{F}_t$, порождает в $(t_0, t_{\max}] \times \Omega$ σ -алгебру $\mathcal{P}red$. Поэтому для $f \in L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega)$,

$\mathcal{P}red$, mes $\times \mathbf{P}$) определен стохастический интеграл

$$I(f) = \int_{(t_0, t_{\max}] \times \Omega} f(t, \omega) \xi(dt d\omega). \quad (7)$$

Это и принимается за определение стохастического интеграла (1). Отображение I — единственное линейное изометрическое отображение $L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, \text{mes} \times \mathbf{P})$ в пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ интегрируемых в квадрате случайных величин такое, что $I(\chi_{(t, t']} \chi_g) = \chi_B(w_{t'} - w_t)$ для любой предсказуемой случайной функции $f(t, \omega)$.

То, что ω одновременно является и переменным, от которого зависит стохастический интеграл, и одной из координат переменного интегрирования (t, ω) в (7), несомненно, несколько запутывает дело, затрудняя понимание; но в формулировках теорем 1, 1' § 2.2 не было ничего, запрещающего такое их использование.

2. Рассмотрим некоторые примеры вычисления стохастических интегралов.

а) Пусть $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m \in (t_0, t_{\max}]$, а случайные величины $f_0(\omega), f_1(\omega), \dots, f_{m-1}(\omega)$ интегрируемы в квадрате и измеримы относительно σ -алгебр $\mathcal{F}_{t_0}, \mathcal{F}_{t_1}, \dots, \mathcal{F}_{t_{m-1}}$ соответственно. Положим

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i(\omega) \chi_{(t_i, t_{i+1})}(t). \quad (8)$$

Эта случайная функция предсказуема и интегрируема в квадрате:

$$\mathbf{M} \int_{t_0}^{t_{\max}} |f(t, \omega)|^2 dt = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{M} |f_i(\omega)|^2 (t_{i+1} - t_i) < \infty.$$

Найдем стохастический интеграл от нее.

Для каждой случайной величины $f_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbf{P})$ существует последовательность \mathcal{F}_{t_i} -измеримых простых случайных величин, сходящихся к ней в среднем квадратическом:

$$f_i(\omega) = \text{l. i. m. } \sum_{n=1}^{\infty} c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega), \quad B_{ij}^n \in \mathcal{F}_{t_i}. \quad (9)$$

Отсюда вытекает, что

$$f(t, \omega) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega) \chi_{(t_i, t_{i+1})}(t) \quad (10)$$

(здесь уже речь идет о сходимости в среднем квадратическом не относительно меры \mathbf{P} , а относительно меры $\text{mes} \times \mathbf{P}$ в произведении $(t_0, t_{\max}] \times \Omega$). По определению стохастического интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) dw_t &= \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \end{aligned} \quad (11)$$

(речь идет опять о сходимости в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$). Предел в i -м слагаемом в (11) равен $f_i(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) - f_i(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \right|^2 &= \\ &= \mathbf{M} \left| \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n}(\omega) - f_i(\omega) \right|^2 \mathbf{M} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \end{aligned} \quad (12)$$

(используем измеримость $\left| \sum_{j=1}^n c_{ij}^n \chi_{B_{ij}^n} \right|$ относительно \mathcal{F}_{t_i} и независимость $w_{t_{i+1}} - w_{t_i}$ от этой σ -алгебры); из (9) вытекает, что математическое ожидание (12) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Итак, для случайной функции $f(t, \omega)$ вида (8) почти наверное

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) dw_t = \sum_{i=0}^{m-1} f_i(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}). \quad (13)$$

б) Пусть $T = [0, \infty)$, $w_0 = 0$, τ — марковский момент относительно данного семейства σ -алгебр, причем $\mathbf{M}\tau < \infty$. Случайная функция $\chi_{\leqslant \tau}(t)$, равная 1 при $0 < t \leqslant \tau$ и 0 при $t > \tau$, предсказуема, потому что ее реализаций непрерывны слева, и она согласо-

вана с данным семейством σ -алгебр: при $t > 0$, $n_0 \geq 1/t$

$$\{\chi_{\leq \tau}(t) = 1\} = \Omega \setminus \{\tau < t\} = \Omega \setminus \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \{\tau \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t.$$

Докажем, что

$$\int_0^\infty \chi_{\leq \tau}(t) dw_t = w_\tau \text{ (п. н.).} \quad (14)$$

Задача 1. Проверьте, что (14) выполняется для марковских моментов, принимающих конечное число значений t_1, \dots, t_n .

Теперь для произвольного марковского момента τ возьмем марковские моменты $\tau_n = n \wedge ([2^n \tau] + 1)/2^n$ (см. § 6.1, п. 2). Они сходятся к τ при $n \rightarrow \infty$, причем все τ_n мажорируются случайной величиной $\tau + 1$, имеющей конечное среднее. Отсюда вытекает, что $\chi_{\leq \tau(\omega)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{\leq \tau_n(\omega)}(t)$; из непрерывности отображения I , задающего стохастический интеграл, получаем

$$\int_0^\infty \chi_{\leq \tau}(t) dw_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \chi_{\leq \tau_n}(t) dw_t = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\tau_n}. \quad (15)$$

С другой стороны,

$$w_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\tau_n} \quad (16)$$

в смысле сходимости при всех ω . Если одна и та же последовательность случайных величин сходится в одном и том же смысле к двум случайным величинам, то пределы почти наверное совпадают. В формулах (15) и (16) речь идет о разных видах сходимости, причем из сходимости одного вида не вытекает сходимость другого. Однако из обеих сходимостей вытекает *сходимость по вероятности*, так что w_τ и

$\int_0^\infty \chi_{\leq \tau}(t) dw_t$ — пределы w_{τ_n} по вероятности. Значит, они совпадают.

Приемом приведения сходимости в среднем квадратическом и сходимости при всех (или почти всех) ω к «общему знаменателю»

телю» сходимости по вероятности мы будем пользоваться в § 12.3, чтобы установить совпадение с вероятностью 1 разных выражений со стохастическими интегралами.

Из (14) получается интересное следствие: для любого марковского момента τ с конечным математическим ожиданием

$$\mathbf{M}w_\tau = 0, \quad \mathbf{M}(w_\tau)^2 = \mathbf{M}\tau. \quad (17)$$

Задача 2. Может ли быть, чтобы для марковского момента τ было $\mathbf{M}\tau = \infty$, но $\mathbf{M}w_\tau, \mathbf{M}(w_\tau)^2$ конечны? Может ли при этом $\mathbf{M}w_\tau \neq 0$?

Задача 3. Пусть A, b — положительные константы, τ — первый момент, когда $|w_t| = b\sqrt{A+t}$ (в силу закона повторного логарифма (задача 8* § 7.3)) такое τ с вероятностью 1 конечно). Докажите, что $\mathbf{M}\tau = \infty$ при $b \geq 1$. При $b < 1$, предполагая, что $\mathbf{M}\tau < \infty$, выразите $\mathbf{M}\tau$ через A и b .

Задача 4*. Докажите, что $\mathbf{M}\tau < \infty$ при $b < 1$.

3. Определение интеграла — хорошая вещь; однако пользуемся мы обычно не определением, а выведенными из него свойствами. Пользуясь примером а) предыдущего пункта, мы можем переформулировать определение стохастического интеграла. Сделаем это в виде теоремы.

Теорема 2. Стохастический интеграл (1) — это единственное линейное изометрическое отображение $L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, \text{mes} \times \mathbf{P})$ в $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ такое, что для случайных функций f вида (8) $I(f)$ имеет вид (13).

Это позволяет находить стохастический интеграл от случайной функции $f \in L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, \text{mes} \times \mathbf{P})$, приближая ее не простыми функциями, а случайными функциями вида (8). Приведем еще некоторые примеры.

в) Сама случайная функция w_t предсказуема и интегрируема в квадрате на $(t_0, t_{\max}] \times \Omega, t_{\max} < \infty$.

Посмотрим, что такое будет $\int_{t_0}^{t_{\max}} w_t d\omega_t$. Возьмем разбиение $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_{\max}$ отрезка от t_0 до t_{\max} и ступенчатую случайную функцию $f(t, \omega)$, равную w_{t_i} при $t_i < t \leq t_{i+1}$. Эта функция сходится в $L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega)$ к w_t при измельчении разбиения,

так как

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_{\max}} \mathbf{M}(f(t, \omega) - w_t)^2 dt &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{M}(w_t - w_{t_i})^2 dt = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} (t_{\max} - t_0) \max_i (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} w_t dw_t = \text{l. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} w_{t_i} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$$

(предел при $\max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$). Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} (w_{t_{\max}} - w_{t_0})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j < i} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(w_{t_{j+1}} - w_{t_j}) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) w_{t_i} - \\ &- 2w_{t_{\max}} w_{t_0} + 2w_{t_0}^2. \end{aligned}$$

Левая часть не зависит от разбиения; первая сумма в правой части сходится в среднем квадратическом к $t_{\max} - t_0$ (см. § 1.2). Отсюда

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} w_t dw_t = (w_{t_{\max}}^2 - w_{t_0}^2)/2 - (t_{\max} - t_0)/2.$$

4. Задача 5. Пусть предсказуемая случайная функция $f(t, \omega)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{\max} < \infty$, непрерывна по t в среднем квадратическом. Докажите, что тогда

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) dw_t = \text{l. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \quad (18)$$

при измельчении разбиения $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_{\max}$.

В интегральной сумме (18) $f(t_i, \omega)$ нельзя заменить на $f(s_i, \omega)$, где s_i — произвольная точка из отрезка $[t_i, t_{i+1}]$; например,

$$\text{l.i.m. } \sum w_{t_{i+1}} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) = (w_{t_{\max}}^2 - w_{t_0}^2)/2 + (t_{\max} - t_0)/2 \neq \text{l.i.m. } \sum w_{t_i} (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}).$$

Один из способов построения ступенчатых предсказуемых приближений к интегрируемой предсказуемой случайной функции дает следующая задача.

Задача 6. Пусть $f(t, \omega)$, $t \in (0, \infty)$, — предсказуемая случайная функция, при почти всех ω принадлежащая $L^p(0, \infty)$, $p \geq 1$. Для $h > 0$ определим случайную функцию $f^h(t, \omega)$ равен-

$$\text{ством } f^h(t, \omega) = h^{-1} \int_{(i-1)h}^{ih} f(s, \omega) ds \quad \text{при } ih < t \leq (i+1)h,$$

$i \geq 1$ (если интеграл расходится, берем $f^h(t, \omega) = 0$); при $0 < t \leq h$ положим $f^h(t, \omega) = 0$.

Докажите, что $f^h(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ при $h \downarrow 0$ в $L^p(0, \infty)$ при почти всех ω . Если $f \in L^p((0, \infty) \times \Omega)$, то $f^h \rightarrow f$ при $h \downarrow 0$ в смысле сходимости в этом пространстве.

5. Мы определили стохастический интеграл, совер-шенно не пользуясь тем, что ω — одна из координат пары (t, ω) ; так что могло бы оказаться, что значение стохастического интеграла (1) при данном ω зависит от значений случайной функции $f(t, \omega)$ при совершен-но других ω . Однако это всё же не так. Правда, мы не можем утверждать, что из совпадения $f_1(t, \omega) \equiv \equiv f_2(t, \omega)$ при данном ω вытекает $I(f_1) = I(f_2)$ при том же ω , или, что то же: из $f(t, \omega) \equiv 0$ при данном ω вытекает $I(f)(\omega) = 0$ (в нашей L^2 -теории вообще от-дельные ω не могут приниматься в расчет); но имеет место следующий результат:

Теорема 3. Если функция $f \in L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, \text{mes} \times \mathbf{P})$ при почти всех ω , принадлежащих событию A , равняется нулю, то $\int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) d\omega_t = 0$

при почти всех $\omega \in A$.

Доказательство. Пусть имеется последова-тельность измельчающих разбиений $t_0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{n-1}^n < t_n^n = t_{\max}$ и последовательность ступенча-тых предсказуемых функций $f^n(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i^n(\omega) \times$

$\times \chi_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$, сходящаяся в среднем квадратическом к $f(t, \omega)$ (случайные величины $f_i^n(\omega)$ измеримы относительно $\mathcal{F}_{t_i^n}$); тогда $I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_i^n)$. Идея состоит

в том, чтобы изменить случайные функции $f^n(t, \omega)$ так, чтобы при обращении $f(t, \omega)$ в нуль при почти всех $t \in (t_0, t_{\max}]$ и приближающие функции тоже обращались в нуль. Однако нужно сделать так, чтобы приближающие функции остались предсказуемыми.

Положим $\tilde{f}^n(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_i^n(\omega) \chi_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$, где

$$\tilde{f}_i^n(\omega) = \begin{cases} f_i^n(\omega), & \text{если } \int_{t_0}^{t_i^n} |f(t, \omega)|^2 dt \neq 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эта случайная величина измерима относительно $\mathcal{F}_{t_i^n}$,

потому что измерима случайная величина \tilde{f}_i^n и интеграл от t_0 до t_i^n , раз случайная функция $|f(t, \omega)|^2$ прогрессивно измерима. Докажем, что случайные функции $\tilde{f}^n(t, \omega)$, как и $f^n(t, \omega)$, сходятся к $f(t, \omega)$ в среднем квадратическом. Для этого оценим $M \int_{t_0}^{t_{\max}} |\tilde{f}^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt$.

При произвольном ω обозначим через $i_0 = i_0(\omega)$

первое такое i , при котором $\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |f(t, \omega)|^2 dt \neq 0$; если

таких i нет, положим $i_0 = n - 1$. Разобьем интеграл от t_0 до t_{\max} на три: от t_0 до $t_{i_0}^n$, от $t_{i_0}^n$ до $t_{i_0+1}^n$ и от

$t_{i_0+1}^n$ до t_{\max} . Первый интеграл $\int_{t_0}^{t_{i_0}^n} |\tilde{f}^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt$

равен нулю, потому что обе функции \tilde{f}^n и f равны нулю почти всюду в области интегрирования;

третий интеграл равен

$$\int_{t_{i_0+1}^n}^{t_{\max}} |f^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_{\max}} |f^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt.$$

Второй интеграл равен $\int_{t_{i_0}^n}^{t_{i_0+1}^n} |f(t, \omega)|^2 dt$, потому что

$\tilde{f}^n(t, \omega) = 0$ при $t_{i_0}^n < t \leq t_{i_0+1}^n$. При почти всех ω интеграл $\int_{t_0}^{t_{\max}} |f(t, \omega)|^2 dt < \infty$, и, значит, интеграл по отрезку $(t_{i_0}^n, t_{i_0+1}^n]$ стремящейся к 0 длины стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Итак,

$$\begin{aligned} M \int_{t_0}^{t_{\max}} |\tilde{f}^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt &\leq \\ &\leq M \int_{t_0}^{t_{\max}} |f^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt + M \int_{t_{i_0}^n}^{t_{i_0+1}^n} |f(t, \omega)|^2 dt. \quad (19) \end{aligned}$$

Первое математическое ожидание стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ по предположению. Случайная величина под знаком второго математического ожидания стремится к нулю при почти всех ω , причем она мажори-

руется случайной величиной $\int_{t_0}^{t_{\max}} |f(t, \omega)|^2 dt$, имеющей

конечное математическое ожидание; по теореме Лебега второе математическое ожидание в правой части (19) также стремится к 0.

Теорема доказана.

6. Если $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^r)$ — многомерный винеровский процесс, то для функции $f(t, \omega) = (f_1(t, \omega), \dots, f_r(t, \omega))$, $f_i \in L^2((t_0, t_{\max}) \times \Omega, \mathcal{P}red, mes \times \mathbf{P})$, стохастический интеграл

$$\int_{t_0}^{t_{\max}} f(t, \omega) dw_t = \int_{t_0}^{t_{\max}} \sum_{i=1}^r f_i(t, \omega) dw_t^i$$

определяется просто как сумма интегралов относительно отдельных компонент:

$$\sum_{i=1}^r \int_{t_0}^{t_{\max}} f_i(t, \omega) d\omega_t^i.$$

Он обладает всеми теми же свойствами, в частности,

$$M \left| \int_{t_0}^{t_{\max}} \sum_{i=1}^r f_i(t, \omega) d\omega_t^i \right|^2 = M \int_{t_0}^{t_{\max}} \sum_{i=1}^r |f_i(t, \omega)|^2 dt.$$

7. Можно определить стохастический интеграл от предсказуемой случайной функции, для которой $M \int_{t_0}^{t_{\max}} |f|^2 dt = \infty$, но $\int_{t_0}^{t_{\max}} |f|^2 dt$ сходится с вероятностью 1; такие стохастические интегралы уже не будут, вообще говоря, иметь нулевого математического ожидания, но ряд хороших свойств для них все же останется (см., например, Гихман и Скороход, 1965). Определяются также стохастические интегралы не относительно винеровского процесса, а относительно квадратично интегрируемых мартингалов. Мы не будем вводить таких интегралов в этой книге.

§ 12.2. Стохастический интеграл как функция верхнего предела

1. Стохастический интеграл определяется не однозначно, а лишь почти однозначно; если рассматривать стохастический интеграл от t_0 до t как функцию верхнего предела, встает вопрос о согласованном выборе его вариантов при разных t .

Теорема 1. Пусть $f \in L^2((t_0, t_{\max}] \times \Omega, \mathcal{P}red, mes \times \mathbf{P})$. Существует вариант стохастического интеграла

$$\eta_t = \int_{t_0}^t f(s, \omega) d\omega_s, \quad t_0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (1)$$

обладающий следующими свойствами:

а) η_t — мартингал относительно семейства σ -алгебр \mathcal{F}_t (при $t_{\max} = \infty$ в качестве \mathcal{F}_{∞} берется $\sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$);

- б) случайная функция η_t предсказуема;
 в) для почти всех ω реализации η_t непрерывны по t на отрезке $[t_0, t_{\max}]$ (в том числе и слева в точке ∞ , если $t_{\max} = \infty$);
 г) бикомпенсатор стохастических интегралов

$$\int_{t_0}^t f(s, \omega) dw_s, \quad \int_{t_0}^t g(s, \omega) dw_s \text{ равен } \int_{t_0}^t f(s, \omega) g(s, \omega) ds.$$

Доказательство проводится следующим образом: сначала для ступенчатых случайных функций

$$f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega) \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad (2)$$

где $t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t_{\max}$, f_i измеримо относительно \mathcal{F}_{t_i} ; а потом предельным переходом для всех $f \in L^2((t_0, t_{\max}) \times \Omega, \mathcal{P}red, mes \times \mathbf{P})$. Для ступенчатых f в качестве варианта стохастического интеграла выбираем тот, который задается формулой (13) предыдущего параграфа. Это приводит к $\eta_t(\omega) = f_0(\omega) \times \times (w_{t_1} - w_{t_0}) + f_1(\omega) (w_{t_2} - w_{t_1}) + \dots + f_{i-1}(\omega) (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) + f_i(\omega) (w_t - w_{t_i})$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, а при $t \in [t_n, t_{\max}]$ — к $\eta_t(\omega) = f_0(\omega) (w_{t_1} - w_{t_0}) + \dots + f_{n-1}(\omega) (w_{t_n} - w_{t_{n-1}})$ (при $t = t_i$ действуют обе формулы — и относящаяся к предыдущему отрезку, и к следующему). Мы видим, что случайная функция η_t согласована с семейством σ -алгебр \mathcal{F}_t , и $\eta_t(\omega)$ непрерывно по t ; это дает предсказуемость η_t .

Чтобы проверить, что η_t — мартингал, надо еще установить, что для $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_{\max}$ почти наверное

$$\mathbf{M}(\eta_{t''} - \eta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}) = 0. \quad (3)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что t' и t'' принадлежат к точкам t_0, t_1, \dots, t_n : $t' = t_i$, $t'' = t_j$; имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\eta_{t''} - \eta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}) &= \mathbf{M}\left(\sum_{k=i}^{j-1} f_k(\omega) (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_i}\right) = \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \mathbf{M}(\mathbf{M}(f_k(\omega) (w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_i}). \end{aligned}$$

Измеримая относительно \mathcal{F}_{t_k} случайная величина $f_k(\omega)$ выносится за знак внутреннего условного математического ожидания, остается $M(w_{t_{k+1}} - w_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}) = M(w_{t_{k+1}} - w_{t_k}) = 0$.

Задача 1. Докажите, что для проверки утверждения г) достаточно установить, что для $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_{\max}$

$$M[(\eta_{t''} - \eta_{t'}) (\zeta_{t''} - \zeta_{t'}) | \mathcal{F}_{t'}] = M \left[\int_{t'}^{t''} f(s, \omega) g(s, \omega) ds | \mathcal{F}_{t'} \right], \quad (4)$$

где η_t задается формулой (1), а $\zeta_t = \int_{t_0}^t g(s, \omega) dw_s$.

Задача 2. Проверьте г) для ступенчатых случайных функций вида (2) и

$$g(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(\omega) \chi_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad (5)$$

где g_i измеримы относительно \mathcal{F}_{t_i} .

Теперь выберем последовательность ступенчатых функций $f^n(t, \omega)$ указанного вида, сходящихся к $f(t, \omega)$ в $L^2((t_0, t_{\max}) \times \Omega)$. Выберем эту последовательность

так, чтобы $M \int_{t_0}^{t_{\max}} |f^n(t, \omega) - f(t, \omega)|^2 dt < 1/10^n$. Тогда

$M \int_{t_0}^{t_{\max}} |f^n(t, \omega) - f^{n+1}(t, \omega)|^2 dt < 2/10^n$, и так как

$$\int_{t_0}^t [f^{n+1}(s, \omega) - f^n(s, \omega)] dw_s$$
 — мартингал с непрерывными реализациями, то в силу неравенства Колмогорова

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq t_{\max}} \left| \int_{t_0}^t f^{n+1}(s, \omega) dw_s - \int_{t_0}^t f^n(s, \omega) dw_s \right| \geq 1/2^n \right\} &\leq \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^{t_{\max}} [f^{n+1}(s, \omega) - f^n(s, \omega)] dw_s \right|^2 / (1/2^n)^2 \leq 1/2^{n-1}. \end{aligned}$$

Так как ряд из этих вероятностей сходится, то по лемме Бореля — Кантелли получаем, что с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий в фигурных скобках. Это означает, что с вероятностью 1 ряд

$$\int_{t_0}^t f^1(s, \omega) d\omega_s + \left(\int_{t_0}^t f^2(s, \omega) d\omega_s - \int_{t_0}^t f^1(s, \omega) d\omega_s \right) + \dots \\ \dots + \left(\int_{t_0}^t f^n(s, \omega) d\omega_s - \int_{t_0}^t f^{n-1}(s, \omega) d\omega_s \right) + \dots$$

равномерно сходится на отрезке $[t_0, t_{\max}]$. Теперь остается выбрать в качестве нужного нам варианта η_t такой:

$$\eta_t = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f^n(s, \omega) d\omega_s, & \text{если последовательность интегралов сходится;} \\ 0, & \text{если она расходится.} \end{cases} \quad (6)$$

Этот предел измерим относительно $\mathcal{P}red$ и с вероятностью 1 непрерывен по t как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. При фиксированном t случайная величина η_t является

вариантом стохастического интеграла $\int_{t_0}^t f(s, \omega) d\omega_s$.

Осталось проверить для произвольных функций $f, g \in L^2(\mathcal{P}red)$ утверждения а), г). Покажем, как доказывается последнее.

Берем сходящиеся к f и g функции f^n и g^n вида (2) и (4); $\eta_t^n = \int_{t_0}^t f^n(s) d\omega_s$, $\zeta_t^n = \int_{t_0}^t g^n(s) d\omega_s$.

Ясно, что $\int_{t_0}^{t''} - \int_{t_0}^{t'} = \int_{t'}^{t''}$; обозначим сейчас через I

отображение, ставящее в соответствие функции f ее интеграл от t' до t'' . Согласно задаче 1, достаточно

доказать, что

$$\mathbf{M}(I(f)I(g)|\mathcal{F}_{t'}) = \mathbf{M}\left(\int_{t'}^{t''} f(t, \omega)g(t, \omega)dt|\mathcal{F}_{t'}\right).$$

Нам известно, что эта формула выполнена для f^n, g^n :

$$\mathbf{M}(I(f^n)I(g^n)|\mathcal{F}_{t'}) = \mathbf{M}\left(\int_{t'}^{t''} f^n(t, \omega)g^n(t, \omega)dt|\mathcal{F}_{t'}\right).$$

Чтобы осуществить предельный переход, сведем утверждение, касающееся условных математических ожиданий, к безусловным: дано, что для любого $A \in \mathcal{F}_{t'}$

$$\int_A I(f^n)I(g^n)\mathbf{P}(d\omega) = \int_A \left[\int_{t'}^{t''} f^n(t, \omega)g^n(t, \omega)dt \right] \mathbf{P}(d\omega), \quad (7)$$

требуется показать, что

$$\int_A I(f)I(g)\mathbf{P}(d\omega) = \int_A \left[\int_{t'}^{t''} f(t, \omega)g(t, \omega)dt \right] \mathbf{P}(d\omega). \quad (8)$$

Правая часть (8) отличается от правой части (7) не более чем на

$$\begin{aligned} & \int_A \int_{t'}^{t''} |f||g^n - g| d\mathbf{P} dt + \int_A \int_{t'}^{t''} |g||f^n - f| d\mathbf{P} dt + \\ & + \int_A \int_{t'}^{t''} |f^n - f||g^n - g| d\mathbf{P} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Интегралы по A не превосходят интегралов по Ω , и выражение (9) не превосходит

$$\|f\|\|g^n - g\| + \|g\|\|f^n - f\| + \|f^n - f\|\|g^n - g\|, \quad (10)$$

что стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L^2((t', t''] \times \Omega)$; используется неравенство Коши — Буняковского). Левые части (7) и (8) различаются не более, чем на

$$\begin{aligned} & \int_A [|I(f)||I(g^n - g)| + |I(g)||I(f^n - f)| + \\ & + |I(f^n - f)||I(g^n - g)|] d\mathbf{P} \leqslant \\ & \leqslant \|I(f)\|\|I(g^n - g)\| + \|I(g)\|\|I(f^n - f)\| + \\ & + \|I(f^n - f)\|\|I(g^n - g)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу изометричности отображения выражение (11) равно (10) и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Итак, предельный переход в (7) дает (8). Теорема доказана.

Для многомерных стохастических интегралов выполняется то же, бикомпенсатор $\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^r f_i(s, \omega) d\omega_s^i$ и $\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^r g_i(s, \omega) d\omega_s^i$ равен $\int_{t_0}^t \sum_{i=1}^r f_i(s, \omega) g_i(s, \omega) d\omega_s^i$.

Утверждение п. 2б) предыдущего параграфа, касающееся значения w_t в марковский момент t , переносится на непрерывный вариант стохастического интеграла: если $M \int_0^\tau |f(s, \omega)|^2 ds < \infty$, то $\eta_\tau = \int_0^\infty \chi_{\leq \tau}(s) f(s, \omega) d\omega_s$, где η_τ — результат подстановки $\tau = \tau(\omega)$ в непрерывный вариант стохастического интеграла $\eta_t = \int_0^t f(s, \omega) d\omega_s$: $\eta_\tau = \eta_{\tau(\omega)}(\omega)$. В частности, так как стохастический интеграл имеет нулевое среднее, то $M\eta_\tau = 0$. (Более выразительно, но менее точно: $M \int_0^\tau f(s, \omega) d\omega_s = 0$.)

2. При построении диффузий с помощью стохастических интегральных уравнений (§ 12.5) нам понадобится выпускать траектории из разных точек фазового пространства и рассматривать стохастические интегралы от функций вида $f(x; s, \omega)$. При этом необходимо заботиться о техническом требовании измеримости по x . Измеримость по (t, ω) мы обеспечили применением измеримой операции перехода к пределу (6), выбрав быстро сходящуюся последовательность $f^n(\cdot, \cdot)$. Но для $f(x; s, \omega)$ в общем случае применить этот прием не удается, потому что мы не знаем, как выбрать последовательность $f^n(x; s, \omega)$, сходящуюся быстро сразу при всех x . Эту техническую трудность мы преодолеваем для класса функций $f(\cdot; \cdot, \cdot)$, удовлетворяющих некоторым ограничениям.

Теорема 2. Пусть $f(x; t, \omega)$ — функция на множестве $X \times (0, \infty) \times \Omega$, измеримая относительно $\mathcal{X} \times \text{Fred}$ и такая, что

$\mathbf{M} \int_0^T |f(x; t, \omega)|^2 dt < \infty$ при любых $x \in X$, $T < \infty$. Пусть существует функция $K(x, T) < \infty$, $x \in X$, $T < \infty$, такая, что $\mathbf{M} |f(x; t, \omega) - f(x; s, \omega)|^2 \leq K(x, T) |t - s|$ при всех $x \in X$; $s, t \leq T$. Тогда существует вариант стохастического интеграла

$$\eta(x; t, \omega) = \int_0^t f(x; s, \omega) dw_s,$$

также измеримый относительно $\mathcal{X} \times \mathcal{P}red$ и непрерывный по t при почти всех ω .

Доказательство. Для ступенчатых функций $f^n : \mathcal{X} \times \mathcal{P}red$ -измеримость и непрерывность по t функции

$$\begin{aligned} \int_0^t f^n(x; s, \omega) dw_s &= f^n(x; t_0, \omega) \cdot (w_{t_1} - w_{t_0}) + \dots \\ &\quad \dots + f^n(x; t_k, \omega) \cdot (w_t - w_{t_k}), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \end{aligned}$$

очевидны. Полагаем $f^n(x; t, \omega) = f(x; [10^n t]/10^n, \omega)$, $\eta(x; t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f^n(x; s, \omega) dw_s$, если этот предел существует, и $\eta(x; t, \omega) = 0$ в противном случае. При любом x с вероятностью 1 имеет место равномерная сходимость на любом конечном отрезке изменения t .

§ 12.3. Стохастические дифференциалы. Формула Ито

1. Пусть w_t — одномерный винеровский процесс, \mathcal{F}_t — σ -алгебры, связанные с ним так, как было сказано в предыдущем параграфе. Пусть ξ_t , $t \geq 0$, — предсказуемый при $t > 0$ случайный процесс, принимающий значения в (R^1, \mathcal{B}^1) . Мы говорим, что этот процесс имеет *стохастический дифференциал*

$$d\xi_t = f(t, \omega) dw_t + g(t, \omega) dt,$$

если

почти все траектории $\xi_t(\omega)$ непрерывны;

$f(t, \omega)$, $g(t, \omega)$, $t > 0$, — предсказуемые случайные функции, f — принадлежащая $L^2((0, T] \times \Omega)$ при любом конечном T , g — интегрируемая в первой степени по любому конечному отрезку при почти всех ω ;

почти наверное при всех t

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t f(s, \omega) dw_s + \int_0^t g(s, \omega) ds.$$

Теперь пусть даны r -мерный винеровский процесс $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^r)$ и семейство σ -алгебр \mathcal{F}_t ; определим, что значит, что l -мерный случайный процесс $\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^l)$ (почти все реализации которого непрерывны) имеет стохастический дифференциал

$$d\xi_t = f(t, \omega) dw_t + g(t, \omega) dt, \quad (1)$$

где $f(t, \omega)$, $t > 0$, — предсказуемая матричная функция $(f_j^i(t, \omega))$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, r$; g — векторная: $g(t, \omega) = (g^1(t, \omega), \dots, g^l(t, \omega))$. Запись (1) в координатной форме:

$$d\xi_t^i = \sum_{j=1}^r f_j^i(t, \omega) dw_s^j + g^i(t, \omega) dt, \quad i = 1, \dots, l \quad (2)$$

(обозначения, принятые при обращении с тензорами: индекс, встретившийся один раз внизу, один раз вверху, напоминает, что по нему надо провести суммирование). По определению (1) или (2) означают, что

$$\xi_t^i = \xi_0^i + \int_0^t \sum_{j=1}^r f_j^i(s, \omega) dw_s^j + \int_0^t g^i(s, \omega) ds, \quad i = 1, \dots, l.$$

Формулировка примера 3в) § 12.1 на языке стохастических дифференциалов: $d(w_t)^2 = 2w_t dw_t + dt$.

2. Теорема 1. Пусть l -мерный процесс ξ_t имеет стохастический дифференциал (1) (в другой форме — (2)); $F(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in R^l$, — числовая функция, непрерывно дифференцируемая один раз по t , два раза по x^i , x^j , причем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ ограничены. Тогда случайный процесс $F(t, \xi_t)$ также имеет стохастический дифференциал

$$\begin{aligned} dF(t, \xi_t) = & \sum_{j=1}^r \left[\sum_{i=1}^l \frac{\partial F}{\partial x^i}(t, \xi_t) f_j^i(t, \omega) \right] dw_t^j + \\ & + \left[\frac{\partial F}{\partial t}(t, \xi_t) + \sum_{i=1}^l \frac{\partial F}{\partial x^i}(t, \xi_t) g^i(t, \omega) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^l \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(t, \xi_t) \sum_{k=1}^r f_k^i(t, \omega) f_k^j(t, \omega) \right] dt. \quad (3) \end{aligned}$$

Вероятно, читатели несколько подавлены этой формулой.

Покажем, из каких соображений можно прийти к ней. Это, помимо всего прочего, поможет читателю научиться самостоятельно выписывать эту формулу — и в общем виде, и в конкретных частных случаях, а также наметит путь доказательства.

В стохастическом дифференциале есть члены $f_j^i d\omega_t^j$ порядка $(dt)^{1/2}$ ($\omega_{t+dt}^i - \omega_t^i$ нормально со средним 0 и стандартным отклонением $\sigma = \sqrt{dt}$) и члены $g^i dt$ порядка dt ; вводить члены более высоких порядков, например $(dt)^{3/2}$, бессмысленно: они все равно пропадут при интегрировании (интегральная сумма из слагаемых порядка $(\Delta t)^{3/2}$ с числом слагаемых порядка $(\Delta t)^{-1}$ стремится к нулю). Выпишем разложение Тейлора для $F(t + dt, \xi_{t+dt})$, причем будем брать члены разложения до тех пор, пока не пойдут члены порядка выше dt . Дифференциал гладкой функции $h(t)$ имеет порядок dt , так что для нахождения $dF(t, h(t))$ нужно брать разложение Тейлора только до членов первого порядка: следующие будут уже порядка $(dt)^2$. Для нахождения дифференциала $dF(t, \xi_t)$ нужно будет взять, кроме членов первого порядка, еще члены вида $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} d\xi_t^i d\xi_t^j$, а членов $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x^i} dt d\xi_t^i$ и членов разложения третьего порядка брать уже не нужно — они порядка $(dt)^{3/2}$ или выше. Записываем разложение:

$$F(t + dt, \xi_t + d\xi_t) - F(t, \xi_t) = \\ = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i} d\xi_t^i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} d\xi_t^i d\xi_t^j. \quad (4)$$

В слагаемых $\frac{\partial F}{\partial x^i} d\xi_t^i$ приводим подобные члены с $d\omega_t^i$ и с dt . Далее преобразуем $d\xi_t^i d\xi_t^j$:

$$d\xi_t^i d\xi_t^j = \left(\sum_k f_k^i d\omega_t^k + g^i dt \right) \left(\sum_m f_m^j d\omega_t^m + g^j dt \right) = \\ = \sum_{km} f_k^i f_m^j d\omega_t^k d\omega_t^m$$

(члены с $d\omega_t^k dt$, $(dt)^2$ отбрасываем как бесконечно малые по сравнению с dt). Произведение дифференциалов $d\omega_t^k d\omega_t^m$ имеет порядок dt ; но что с ним

делать дальше? Вспомним, что дифференциалы нас интересуют только как то, что мы будем интегрировать. Какие значения следует приписать интегралам

$$\int_s^t (d\omega_u^1)^2, \quad \int_s^t d\omega_u^1 d\omega_u^2?$$

Результаты пп. 2, 3 § 1.2 показывают, что первый интеграл следует положить равным $t - s$, а второй — нулю (это всего лишь наводящие соображения, но уже ясно, что при доказательстве нужно будет опираться на результаты пп. 2, 3 § 1.2). Итак, $(d\omega_t^k)^2$ нужно заменить на dt , а $d\omega_t^k d\omega_t^m$ при $m \neq l$ — на нуль. Получаем $d\xi_t^i d\xi_t^j = \sum_k f_k^i f_k^j dt$; подставляя выражения для $d\xi_t^i$ и $d\xi_t^i d\xi_t^j$ в (4), получаем (3).

Формулируем правило оперирования со стохастическими дифференциалами: чтобы найти $dF(t, \xi_t)$, записываем разложение Тейлора для $F(t + dt, \xi_t + d\xi_t)$ вблизи точки (t, ξ_t) до членов со вторыми производными; само собой, вычитаем из него $F(t, \xi_t)$. Затем $(dt)^2$, $dt d\omega_t^k$, $d\omega_t^k d\omega_t^m$ с $k \neq m$ выбрасываем, а $(d\omega_t^k)^2$ заменяем на dt . Ну, еще стоит привести подобные члены.

Формула (3) была получена К. Ито и называется его именем; она носит также название формулы замены переменных в стохастическом интеграле (потому что стохастические дифференциалы, по определению, — сокращенное выражение некоторых интегральных соотношений).

Примеры рассмотрим после доказательства теоремы.

3. Доказательство теоремы 1 проведем в случае $r = l = 1$ просто из-за удобства обозначений. Дело в том, что мы будем рассматривать последовательности функций, сходящиеся к $f(u, \omega)$, $g(u, \omega)$, и в многомерном случае нам пришлось бы пользоваться громоздкими обозначениями вроде $f_j^{i(n)}(u, \omega)$, $g^{i(n)}(u, \omega)$ *).

*) Впрочем, доказательство со всеми формулами годится и в многомерном случае, если понимать под g , $g^{(n)}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ векторы, а под f , $f^{(n)}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ матрицы и множить их в нужном порядке, транспонируя то, что следует.

Итак, требуется доказать, что

$$F(t, \xi_t) - F(s, \xi_s) = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial u}(u, \xi_u) f(u, \omega) d\omega_u + \\ + \int_s^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) g(u, \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, \xi_u) f(u, \omega)^2 \right] du \quad (5)$$

(из предположений теоремы вытекает, что стохастический интеграл имеет смысл).

Возьмем последовательность ступенчатых функций $f^{(n)} \in L^2(\mathcal{P}red)$, сходящихся к f в этом пространстве, и последовательность ступенчатых предсказуемых $g^{(n)}(u, \omega)$, сходящихся при почти каждом ω к $g(u, \omega)$ в среднем в первой степени на отрезке $(0, t]$ (как это можно сделать, показано в задаче 6 § 12.1). Положим

$$\xi_t^{(n)} = \xi_0 + \int_0^t f^{(n)}(u, \omega) d\omega_u + \int_0^t g^{(n)}(u, \omega) du.$$

Задача 1. Докажите, что $\xi_s^{(n)}, 0 \leq s \leq t$, равномерно сходится к ξ_s по вероятности в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s \leq t} |\xi_s^{(n)} - \xi_s| \geq \epsilon \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда вытекает, что достаточно доказать (5) лишь для ступенчатых функций. Действительно, пусть доказано, что

$$F(t, \xi_t^{(n)}) - F(s, \xi_s^{(n)}) = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) f^{(n)}(u, \omega) d\omega_u + \\ + \int_s^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u^{(n)}) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) g^{(n)}(u, \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, \xi_u^{(n)}) f^{(n)}(u, \omega)^2 \right] du. \quad (6)$$

При $n \rightarrow \infty$ левая часть (6) сходится по вероятности к левой части (5). Стохастический интеграл в правой

части — тоже, и даже в среднем квадратическом.
Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) f^{(n)}(u, \omega) dw_u - \right. \\ \left. - \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) f(u, \omega) dw_u \right|^2 = \\ = \int_s^t \mathbf{M} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) f^{(n)}(u, \omega) - \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) f(u, \omega) \right|^2 du. \quad (7) \end{aligned}$$

Среднее под знаком интеграла здесь не превосходит

$$2\mathbf{M} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) \right|^2 |f^{(n)}(u, \omega) - f(u, \omega)|^2 +$$

$$+ 2\mathbf{M} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u^{(n)}) - \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \right|^2 |f(u, \omega)|^2.$$

Первое математическое ожидание не превосходит

$$\text{const} \cdot \mathbf{M} |f^{(n)}(u, \omega) - f(u, \omega)|^2, \text{ и интеграл } \int_s^t \text{ от него}$$

стремится к нулю. Во втором математическом ожидании первый сомножитель сходится к нулю по вероятности, и оно стремится к нулю для всех u , для которых случайная величина $\text{const} \cdot |f(u, \omega)|^2$, мажорирующая всю последовательность, имеет конечное среднее, т. е. для почти всех u . Интеграл от s до t также стремится к нулю по теореме о мажорируемом предельном переходе. Итак, выражение (7) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Что касается обычного, не стохастического интеграла в правой части (6), то он сходится к соответствующему интегралу в (5) по вероятности; но мы не будем доказывать в точности это, а покажем, что некоторая подпоследовательность этих интегралов с номерами $n_k \rightarrow \infty$ будет сходиться с вероятностью 1. Последовательность n_k мы выберем так, чтобы

$$\int_0^t |f^{(n_k)}(u, \omega) - f(u, \omega)|^2 du \rightarrow 0$$

не только в среднем, но и с вероятностью 1 и чтобы $\xi_u^{(n_k)} \rightarrow \xi_u$ равномерно по $u \leq t$ также с вероятностью 1 (для этого достаточно

выбрать n_k так, чтобы $\sum_k \mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq u \leq t} |\xi_u^{(n_k)} - \xi_u| \geq 1/2^k \right\} < \infty$. Функции $g^{(n_k)}(u, \omega)$ с вероятностью 1 сходятся в среднем в первой степени к $g(u, \omega)$ уже по нашему первоначальному предположению. При этом с вероятностью 1 функция под знаком не стохастического интеграла в (6) с номером n_k сходится в среднем при $k \rightarrow \infty$ к такой же функции в (5), а из этого вытекает сходимость интегралов.

Раз левые и правые части (6) с номерами n_k сходятся по вероятности к левой и правой частям (5), то из (6) получаем, что почти наверное выполнено (5).

Итак, будем доказывать (5) для ступенчатых f, g . Достаточно доказать эту формулу для одной ступеньки, т. е. для случая, когда $f(u, \omega) \equiv \eta(\omega)$, $g(u, \omega) \equiv \zeta(\omega)$ при $s < u \leq t$, η и ζ измеримы относительно \mathcal{F}_s , $\mathbf{M}|\eta|^2 < \infty$. Требуется доказать, что почти наверное

$$F(t, \xi_t) - F(s, \xi_s) = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \eta dw_u + \\ + \int_s^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u) + \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, \xi_u) \eta^2 \right] du. \quad (8)$$

Функция под знаком стохастического интеграла с вероятностью 1 непрерывна по u , а значит, и непрерывна в среднем квадратическом (так как она мажорируется случайной величиной $\text{const} \cdot |\eta| \in L^2(\Omega)$); поэтому

$$\int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \eta dw_u = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x}(t_i, \xi_{t_i}) \eta (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \quad (9)$$

при измельчении разбиения $s = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$. Из сходимости в среднем в (9) вытекает сходимость по вероятности (мы заранее переходим к «общему знаменателю», потому что из лебеговского интеграла появится сходимость с вероятностью 1). Представляем $F(t, \xi_t) - F(s, \xi_s)$ в виде $\sum_{i=0}^{n-1} [F(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}}) - F(t_i, \xi_{t_i})]$.

$\xi_{t_{i+1}}) - F(t_i, \xi_{t_i})]$; требуется доказать, что хотя бы для какой-то последовательности измельчающихся разбиений

$$\lim(\mathbf{P}) \sum_{i=0}^{n-1} [F(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}}) - F(t_i, \xi_{t_i}) - \frac{\partial F}{\partial x}(t_i, \xi_{t_i}) \eta(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})] = \int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u) du + \int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \zeta du + \int_s^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, \xi_u) \eta^2 du; \quad (10)$$

тогда (8) будет доказано. (Мы могли бы вынести ζ , η^2 из-под знаков интеграла, но нам это не нужно.)

Воспользуемся, как мы наметили, разложением Тейлора

$$F(t_{i+1}, \xi_{t_{i+1}}) = F(t_i, \xi_{t_i}) + \frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{t}_i, \xi_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i) + \frac{\partial F}{\partial x}(t_i, \xi_{t_i})(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_i, \tilde{\xi}_{t_i})(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})^2.$$

Здесь \tilde{t}_i — точка между t_i и t_{i+1} , $\tilde{\xi}_{t_i}$ — между ξ_t и $\xi_{t_{i+1}}$. Вспоминая, что $\xi_u = \xi_s + \eta(w_u - w_s) + \zeta(u - s)$, $\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i} = \eta(w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) + \zeta(t_{i+1} - t_i)$, приводим левую часть (10) к виду

$$\lim(\mathbf{P}) \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{t}_i, \xi_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i) + \frac{\partial F}{\partial x}(t_i, \xi_{t_i}) \zeta(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_i, \tilde{\xi}_{t_i})(\eta^2(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 + 2\eta\zeta(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \zeta^2(t_{i+1} - t_i)^2)].$$

Здесь суммы $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{t}_i, \xi_{t_{i+1}})(t_{i+1} - t_i)$, $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x}(t_i, \xi_{t_i}) \times$

$\times \xi(t_{i+1} - t_i)$ с вероятностью 1 сходятся к $\int_s^t \frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u) du$,
 $\int_s^t \frac{\partial F}{\partial x}(u, \xi_u) \xi du$, хотя первая из них — не интеграль-
 ная сумма (используем то, что ступенчатые функции
 со значением $\frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{t}_i, \xi_{t_{i+1}})$ при $u \in (t_i, t_{i+1}]$ сходятся
 к $\frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u)$ равномерно по u от s до t). Суммы, со-
 держащие $(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(t_{i+1} - t_i)$, $(t_{i+1} - t_i)^2$, стремятся
 к нулю при измельчении разбиения; например, первая из них:

$$\left| \eta \zeta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_i, \tilde{\xi}_{t_i}) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \right| \leqslant \\ \leqslant |\eta \zeta| \max_{\substack{s \leqslant u \leqslant t \\ |x| \leqslant \max |\xi_u|}} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, x) \right| \max_{\substack{s \leqslant u \leqslant v \leqslant t \\ v-u \leqslant h}} |w_v - w_u|(t-s),$$

если $\max(t_{i+1} - t_i) \leqslant h$; и это выражение стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ в силу равномерной непрерывности w_u , $s \leqslant u \leqslant t$.

Остается доказать, что для какой-то последова-
 тельности разбиений

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_i, \tilde{\xi}_{t_i}) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i})^2 \rightarrow \int_s^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(u, \xi_u) du. \quad (11)$$

Возьмем разбиения, осуществляемые точками вида $i/2^m$ (i — целые), где $m = 1$ для первого разбиения, $m = 2$ для второго и т. д. Для простоты предположим, что s и t двоично-рациональные (ясно, что достаточно доказать все только для отрезков с двоично рациональными концами). Согласно задаче 2 § 1.2, ломаные

$\alpha_m(u, \omega)$ с вершинами в точках $\left(k/2^m, \sum_{i=0}^{k-1} (w_{(i+1)/2^m} - w_{i/2^m})^2 \right)$ с вероятностью 1 сходятся к u равномерно по $u \in [s, t]$. Сумма в (11) — не что иное, как

$$\int_s^t G_m(u, \omega) d\alpha_m(u, \omega), \quad \text{где } G_m(u, \omega) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(i/2^m, \xi_{i/2^m})$$

при $i/2^m < u \leq (i+1)/2^m$. Сходимость (11) с вероятностью 1 получается из задачи 2 § 1.2 и следующей задачи.

Задача 2. Пусть $\alpha_m(u)$ — последовательность монотонных функций, сходящаяся к u равномерно по $u \in [s, t]$, $G_m(u)$ — последовательность функций, сходящаяся равномерно к непрерывной функции $G(u)$.

Тогда $\int_s^t G_m(u) d\alpha_m(u) \rightarrow \int_s^t G(u) du$ при $m \rightarrow \infty$.

Теорема доказана (в одномерном случае).

Единственное, чем нужно дополнить доказательство в многомерном случае, — это проверить, что при $k \neq m$

$$\int_s^t G_n(u, \omega) d\alpha_n^{km}(u, \omega) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $\alpha_n^{km}(u, \omega)$ — ломаная с вершинами в точках

$$\left(j/2^n, \sum_{i=0}^{j-1} (w_{(i+1)/2^n}^k - w_{i/2^n}^k) (w_{(i+1)/2^n}^m - w_{i/2^n}^m) \right).$$

Мы можем не приводить отдельного доказательства, а применить тот же прием, что при решении задачи 5 § 1.2: представить α_n^{km} в виде $\alpha_n^{km}(u, \omega) = \tilde{\alpha}_n(u, \omega) - \frac{1}{2} \alpha_n^{kk}(u, \omega) - \frac{1}{2} \alpha_n^{mm}(u, \omega)$, где $\alpha_n^{kk}, \alpha_n^{mm}$, $\tilde{\alpha}_n$ — ломаные, построенные по суммам квадратов приращений винеровских процессов w_u^k, w_u^m и $\tilde{w}_u = (w_u^k + w_u^m)/\sqrt{2}$.

4. Теорема 1'. Результат теоремы 1 сохраняется, если даже частные производные $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ не ограничены, но

$$M \int_0^t \sum_{j=1}^r \left| \sum_{i=1}^l \frac{\partial F}{\partial x^i}(u, \xi_u) f_j^i(u, \omega) \right|^2 du < \infty.$$

Доказательство. Нужно доказать, что почти наверное

$$F(t, \xi_t) = F(0, \xi_0) + \int_0^t \sum_{j=1}^r \left[\sum_{i=1}^l \frac{\partial F}{\partial x^i}(u, \xi_u) f_j^i(u, \omega) \right] d\omega_u^j + \\ + \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(u, \xi_u) + \sum_{i=1}^l \frac{\partial F}{\partial x^i}(u, \xi_u) g^i(u, \omega) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^r \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(u, \xi_u) \sum_{k=1}^r f_k^i(u, \omega) f_k^j(u, \omega) \right] du. \quad (12)$$

Условие теоремы обеспечивает существование стохастического интеграла.

Для доказательства возьмем последовательность гладких функций $F_N(t, x)$ с ограниченными частными производными, таких, что $F_N(t, x)$ совпадает с $F(t, x)$ при $|x| \leq N$. Для них формула (12) выполнена. Для элементарных событий $\omega \in A_N = \{ \max_{0 \leq s \leq t} |\xi_s| \leq N \}$ имеем $F_N(t, \xi_t) = F(t, \xi_t)$, точно так же производные $\frac{\partial F_N}{\partial t}, \frac{\partial F_N}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 F_N}{\partial x^i \partial x^j}$ в точках (u, ξ_u) , $u \leq t$, совпадают с соответствующими производными функции F ; поэтому оба интеграла в (12) для функции F_N и для функции F совпадают (лебеговские — потому, что совпадают функции под знаком интеграла, стохастические интегралы совпадают почти всюду на A_N по той же причине в силу теоремы 3 § 12.1). Итак, формула (12) выполнена для функции F почти наверное на множестве A_N . Значит, она выполнена почти наверное и на множестве $\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$, а это множество содержит все элементарные события, для которых ξ_s непрерывно, т. е. оно заполняет *почти всё* Ω : $P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} A_N\right) = 1$.

Это доказывает теорему.

5. Примеры.

а) Для одномерного винеровского процесса $d(w_t)^n = n w_t^{n-1} dw_t + C_n^2 w_t^{n-2} dt$, т. е.

$$w_t^n - w_0^n = \int_0^t n w_s^{n-1} dw_s + \int_0^t C_n^2 w_s^{n-2} ds.$$

6) Задача 3. Докажите, что если $f \in L^2((0, T] \times \Omega, \mathcal{P}red, \text{mes} \times \mathbb{P})$, то

$$\mathbf{M} \exp \left\{ \int_0^T f(s, \omega) d\omega_s - \frac{1}{2} \int_0^T f(s, \omega)^2 ds \right\} \leq 1.$$

Задача 4. Докажите, что если при этом $|f(t, \omega)| \leq C < \infty$, то $\exp \left\{ \int_0^t f(s, \omega) d\omega_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s, \omega)^2 ds \right\}$ — мартингал.

6. Мы рассматривали стохастические дифференциалы для $t \in [0, \infty)$. Совершенно так же мы можем рассматривать случайные функции, обладающие стохастическим дифференциалом лишь при $t \in [s, \infty)$ или при $t \in [t_1, t_2]$.

§ 12.4. Решение стохастических уравнений методом последовательных приближений

1. Пусть в пространстве R^r заданы две (измеримые) функции: $\sigma(x)$, значения которой — квадратные матрицы порядка r : $\sigma(x) = (\sigma_j^i(x))$, и r -мерная векторная функция $b(x) = (b^1(x), \dots, b^r(x))$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) d\omega_t + b(\xi_t) dt, \quad t \geq s, \quad (1)$$

или, в координатах, — систему уравнений

$$d\xi_t^i = \sum_j \sigma_j^i(\xi_t) d\omega_t^j + b^i(\xi_t) dt, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (2)$$

Напомним, что уравнение (1) по определению означает, что функция ξ_t , $t > s$, предсказуема и почти наверное

$$\xi_t = \xi_s + \int_s^t \sigma(\xi_u) d\omega_u + \int_s^t b(\xi_u) du. \quad (3)$$

Ясно, что правильная постановка задачи решения стохастических уравнений должна включать еще задание *начальных условий*.

Мы применим к решению стохастических уравнений метод последовательных приближений. От коэффициентов мы потребуем, чтобы они удовлетворяли *условию Липшица*.

Естественно, если не накладывать на коэффициенты $\sigma(x)$, $b(x)$ никаких ограничений, нельзя утверждать ни существования, ни единственности решения. Здесь та же ситуация, что для обыкновенных дифференциальных уравнений, и ясно почему: ведь при $\sigma \equiv 0$ (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Пусть существует константа L такая, что при любых $x, y \in R^r$

$$|b^i(x) - b^i(y)|, |\sigma_j^i(x) - \sigma_j^i(y)| \leq L|x - y|, \quad (4)$$

$$i, j = 1, \dots, r.$$

Из (4) вытекает, что b^i , σ_j^i растут на бесконечности не быстрее, чем $|x|$: для какого-то $K > 0$

$$|b^i(x)|, |\sigma_j^i(x)| \leq K(1 + |x|^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (4). Пусть случайная величина η со значениями в (R^r, \mathcal{B}^r) измерима относительно \mathcal{F}_s и интегрируема в квадрате: $M|\eta|^2 < \infty$. Тогда существует решение стохастического уравнения (1) при $t \geq s$ с начальным условием $\xi_s = \eta$. При этом $M|\xi_t|^2$ конечно и ограничено на любом конечном участке изменения t .

Доказательство. Определим последовательные приближения формулой

$$\xi_t^{(n)} = \eta + \int_s^t \sigma(\xi_u^{(n-1)}) dw_u + \int_s^t b(\xi_u^{(n-1)}) du. \quad (6)$$

В качестве нулевого приближения возьмем $\xi_t^{(0)} = \eta$, $t \geq s$.

Докажем прежде всего, что все $\xi_t^{(n)}$, $t \geq s$, $n = 1, 2, \dots$, действительно определены.

Задача 1. Пользуясь оценками (5), докажите, что если $\xi_t^{(n-1)}$, $t > s$, — предсказуемая функция и $M|\xi_t^{(n-1)}|^2$ ограничено на любом конечном участке изменения t , то $\xi_t^{(n)}$ определено, предсказуемо, и $M|\xi_t^{(n)}|^2$ ограничено на любом конечном отрезке.

Теперь оценим $\mathbf{M}|\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}|^2$. При $n=0$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}|\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}|^2 &= \mathbf{M}|\xi_t^{(1)} - \eta|^2 = \\ &= \mathbf{M} \left| \int_s^t \sigma(\eta) d\omega_u + \int_s^t b(\eta) du \right|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\mathbf{M} \sum_i \left[\int_s^t \sum_j \sigma_j^i(\eta) d\omega_u^j \right]^2 + 2\mathbf{M} \sum_i \left[\int_s^t b^i(\eta) du \right]^2.\end{aligned}$$

Первое математическое ожидание равно

$$\sum_{ij} \mathbf{M}(\sigma_j^i(\eta))^2(t-s) \leqslant r^2 K^2 \mathbf{M}(1+|\eta|^2)(t-s);$$

второе —

$$\sum_i \mathbf{M}(b^i(\eta))^2(t-s)^2 \leqslant r K^2 \mathbf{M}(1+|\eta|^2)(t-s)^2.$$

Итак,

$$\mathbf{M}|\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}|^2 \leqslant 2K^2 \mathbf{M}(1+|\eta|^2)(r^2(t-s) + r(t-s)^2). \quad (7)$$

Теперь при $n > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}|\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}|^2 &= \mathbf{M} \left| \int_s^t [\sigma(\xi_u^{(n)}) - \sigma(\xi_u^{(n-1)})] d\omega_u + \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t [b(\xi_u^{(n)}) - b(\xi_u^{(n-1)})] du \right|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_{ij} \int_s^t \mathbf{M}[\sigma_j^i(\xi_u^{(n)}) - \sigma_j^i(\xi_u^{(n-1)})]^2 du + \\ &\quad + 2 \sum_i \mathbf{M} \left(\int_s^t [b^i(\xi_u^{(n)}) - b^i(\xi_u^{(n-1)})] du \right)^2. \quad (8)\end{aligned}$$

Используем условие Липшица:

$$\begin{aligned}|b^i(\xi_u^{(n)}) - b^i(\xi_u^{(n-1)})|, |\sigma_j^i(\xi_u^{(n)}) - \sigma_j^i(\xi_u^{(n-1)})| &\leqslant \\ &\leqslant L |\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|.\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части (8) не превосходит $L^2 \int_s^t \mathbf{M}|\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|^2 du$; для оценки второго интеграла

пользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left(\int_s^t [b^i(\xi_u^{(n)}) - b^i(\xi_u^{(n-1)})] du \right)^2 &\leq \\ \leq \mathbf{M} \int_s^t [b^i(\xi_u^{(n)}) - b^i(\xi_u^{(n-1)})]^2 du \cdot (t-s) &\leq \\ \leq L^2(t-s) \int_s^t \mathbf{M} |\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|^2 du. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}|^2 &\leq \\ \leq 2L^2(r^2 + r(t-s)) \int_s^t \mathbf{M} |\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|^2 du. \quad (9) \end{aligned}$$

Из (7) и (9) находим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\xi_t^{(2)} - \xi_t^{(1)}|^2 &\leq \\ \leq 2L^2(r^2 + r(t-s)) 2K^2 \mathbf{M} (1 + |\eta|^2) \times \\ \times \int_s^t [r^2(u-s) + r(u-s)^2] du. \end{aligned}$$

Здесь $(r^2 + r(t-s)) \int_s^t [r^2(u-s) + r(u-s)^2] du = (r^2 + r(t-s)) [r^2(t-s)^2/2 + r(t-s)^3/3] \leq [r^2(t-s) + r(t-s)^2]^2/2$. Ясно, что при интегрировании здесь каждый раз будет появляться множитель $1/(n+1)$. По индукции получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}|^2 &\leq \\ \leq 2K^2 \mathbf{M} (1 + |\eta|^2) (2L^2)^n [r^2(t-s) + r(t-s)^2]^{n+1} / (n+1)! \end{aligned}$$

Расстояние в пространстве $L^2(\Omega)$ между $\xi_t^{(n+1)}$ и $\xi_t^{(n)}$ не превосходит

$$\text{const} \cdot (L \sqrt{2} \sqrt{r^2(t-s) + r(t-s)^2})^{n+1} / \sqrt{(n+1)!};$$

ряд из этих расстояний сходится. Отсюда немедленно получаем сходимость последовательности $\xi_t^{(n)}$ в среднем квадратическом, причем равномерную в любом

конечном отрезке изменения t . Более того, $\xi_t^{(n)}(\omega)$ при почти всех ω сходится равномерно на любом отрезке $[s, T]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \max_{s \leq t \leq T} |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}| \geq 1/2^n \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \max_{s \leq t \leq T} \left| \int_s^t [\sigma(\xi_u^{(n)}) - \sigma(\xi_u^{(n-1)})] d\omega_u \right| \geq 1/2^{n+1} \right\} + \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \max_{s \leq t \leq T} \left| \int_s^t [b(\xi_u^{(n)}) - b(\xi_u^{(n-1)})] du \right| \geq 1/2^{n+1} \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Первая вероятность оценивается с помощью неравенства Колмогорова (ведь стохастический интеграл — маркингаль); она не превосходит

$$r^2 L^2 \int_s^T \mathbf{M} |\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|^2 du \cdot (2^{n+1})^2.$$

Вторая вероятность оценивается с помощью неравенства Чебышёва: она не больше

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \int_s^T |b(\xi_u^{(n)}) - b(\xi_u^{(n-1)})| du \geq 1/2^{n+1} \right\} &\leq \\ &\leq \mathbf{M} \left(\int_s^T |b(\xi_u^{(n)}) - b(\xi_u^{(n-1)})| du \right)^2 (2^{n+1})^2 \leq \\ &\leq rL^2 \int_s^T \mathbf{M} |\xi_u^{(n)} - \xi_u^{(n-1)}|^2 du (T-s) \cdot 4^{n+1}. \end{aligned}$$

Так как факториалы стремятся к бесконечности чрезвычайно быстро, то ряд из вероятностей (10) сходится: по лемме Бореля — Кантелли $\max_{s \leq t \leq T} |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}| < 1/2^n$, начиная с некоторого n , и с вероятностью 1 существует равномерный по любому конечному отрезку предел

$$\xi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_t^{(n)}.$$

(Для порядка, если предел не существует, положим ξ_t равным, скажем, η .) Этот предел имеет место также

и в среднем квадратическом равномерно по любому конечному отрезку.

Реализации случайной функции ξ_t с вероятностью 1 непрерывны; она предсказуема при $t > s$ как предел предсказуемых случайных функций; $\xi_s = \eta$, так как $\xi_s^{(n)} = \eta$ при всех n . Докажем, что ξ_t — решение уравнения (1) (оно же (3)). Для этого перейдем к пределу в формуле (6). Левая часть сходится к ξ_t ; интегралы в правой части сходятся в среднем квадратическом к соответствующим интегралам с ξ_t вместо $\xi_t^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \int_s^t \sigma(\xi_u^{(n)}) dw_u - \int_s^t \sigma(\xi_u) dw_u \right|^2 &= \\ &= \sum_{ij} \int_s^t \mathbf{M} [\sigma_j^i(\xi_u^{(n)}) - \sigma_j^i(\xi_u)]^2 du \leqslant \\ &\leqslant r^2 L^2 \int_s^t \mathbf{M} |\xi_u^{(n)} - \xi_u|^2 du \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left| \int_s^t b(\xi_u^{(n)}) du - \int_s^t b(\xi_u) du \right|^2 &\leqslant \\ &\leqslant \sum_i \int_s^t \mathbf{M} [b^i(\xi_u^{(n)}) - b^i(\xi_u)]^2 du (t-s) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Получаем

$$\xi_t = \eta + \int_s^t \sigma(\xi_u) dw_u + \int_s^t b(\xi_u) du.$$

Теорема доказана.

Задача 2. Докажите оценку:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |\xi_t|^2 &\leqslant 2\mathbf{M} [1 + |\eta|^2] \times \\ &\quad \times [1 + (K/L)^2 \exp \{4L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2]\}]. \end{aligned}$$

2. Теорема 2. Если выполнено условие (4), то решение уравнения (1) с начальным условием $\xi_s = \eta$ единственно с точностью до эквивалентности.

Доказательство. Сначала докажем, что если ξ_t и ξ'_t — решения (1), $\xi_s = \xi'_s = \eta$, и $\mathbf{M} |\xi_t|^2$, $\mathbf{M} |\xi'_t|^2$ ограничены на любом конечном отрезке, то при $t \geqslant s$

почти наверное $\xi'_t = \xi_t$. Имеем

$$\xi'_t - \xi_t = \int_s^t [\sigma(\xi'_u) - \sigma(\xi_u)] dw_u + \int_s^t [b(\xi'_u) - b(\xi_u)] du,$$

$$\mathbf{M} |\xi'_t - \xi_t|^2 \leq 2L^2 (r^2 + r(t-s)) \int_s^t \mathbf{M} |\xi'_u - \xi_u|^2 du,$$

$$\mathbf{M} |\xi'_t - \xi_t|^2 \leq \max_{s \leq u \leq t} \mathbf{M} |\xi'_u - \xi_u|^2 \times \\ \times (2L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2])^n / n!.$$

Так как n произвольно, получаем $\mathbf{M} |\xi'_t - \xi_t|^2 = 0$.

Теперь пусть $\xi_t, \xi'_t, t \geq s$, — произвольные решения (1), $\xi_s = \xi'_s = \eta$. Введем марковские моменты $\tau_N = \min\{t \in [s, \infty) : |\xi_t| + |\xi'_t| = N\}$; из непрерывности реализаций ξ_t, ξ'_t вытекает, что почти наверное $\tau_N \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Имеем почти наверное

$$\xi_t \wedge \tau_N = \eta + \int_s^t \sigma(\xi_u) \chi_{\leq \tau_N}(u) dw_u + \int_s^t b(\xi_u) \chi_{\leq \tau_N}(u) du,$$

$$\xi'_t \wedge \tau_N = \eta + \int_s^t \sigma(\xi'_u) \chi_{\leq \tau_N}(u) dw_u + \int_s^t b(\xi'_u) \chi_{\leq \tau_N}(u) du.$$

Задача 3. Докажите, что при всех N, n

$$\mathbf{M} |\xi'_{t \wedge \tau_N} - \xi_{t \wedge \tau_N}|^2 \leq N^2 (2L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2])^n / n!;$$

выведите отсюда, что $\xi'_t = \xi_t$ почти наверное.

Задача 4. Пусть ξ_t — решение (1) с начальным условием $\xi_s = \eta$, ξ'_t — с начальным условием $\xi'_s = \eta'$. Докажите, что

$$\mathbf{M} |\xi'_t - \xi_t|^2 \leq 3\mathbf{M} |\eta' - \eta|^2 \exp \{3L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2]\}.$$

3. Теорема 3. Пусть выполнено условие (4). Тогда существует функция $\xi_t(x; \omega)$ от $t \in [0, \infty)$, $x \in R^r$, $\omega \in \Omega$ со значениями в R^r такая, что

а) функция $\xi_t(x; \omega)$ на множестве $R^r \times [0, \infty) \times \Omega$ измерима по (x, t, ω) относительно σ -алгебры $\mathcal{B}^r \times \mathcal{P}red$;

б) при фиксированном x $\xi_t(x; \omega)$, $t \geq 0$, является решением уравнения (1) с начальным условием $\xi_0(x; \omega) = x$.

Доказательство. То, что решение уравнения (1) с начальным условием $\xi_0 = x$ существует, нам уже известно; нужно только доказать, что решение можно выбрать определенным регулярным, измеримым образом. Для этого достаточно проследить, чтобы все предельные переходы, осуществляемые при доказательстве, проделывались каким-то одним, регулярным способом.

Часть этой работы мы уже проделали в § 12.2 (теорема 2). Применим эту теорему к нашим последовательным приближениям.

Нулевое приближение $\xi_t^{(0)}(x; \omega) \equiv x$ обладает нужными свойствами измеримости. Если $\xi_t^{(n)}(x; \omega)$ обладает этими свойствами, то они переходят к $\sigma_j^i(\xi_t^{(n)}(x; \omega))$ и $b^i(\xi_t^{(n)}(x; \omega))$. Условие

$$\mathbf{M} |\sigma_j^i(\xi_t^{(n)}(x; \omega)) - \sigma_j^i(\xi_s^{(n)}(x; \omega))|^2 \leq K(x, T) |t - s|$$

при $x \in R^r$, $s, t \leq T$ вытекает из условия Липшица: это математическое ожидание не превосходит

$$\begin{aligned} L^2 \mathbf{M} |\xi_t^{(n)}(x; \omega) - \xi_s^{(n)}(x; \omega)|^2 &\leq \\ &\leq 2L^2 \sum_{ij} \int_s^t \mathbf{M} [\sigma_j^i(\xi_u^{(n-1)}(x; \omega))]^2 du + \\ &+ 2L^2 \sum_i \int_s^t \mathbf{M} [b^i(\xi_u^{(n-1)}(x; \omega))]^2 du (t - s) \leq \\ &\leq 2L^2 [r^2 + rT] K^2 [1 + \max_{0 \leq u \leq T} \mathbf{M} |\xi_u^{(n-1)}(x; \omega)|^2] (t - s) \end{aligned}$$

(считаем $s \leq t$; при $n = 0$ эта выкладка не нужна). Из теоремы 2 § 12.2 вытекает, что существует вариант стохастического интеграла

$$\int_0^t \sigma(\xi_u^{(n)}(x; \omega)) d\omega_u,$$

обладающий нужными свойствами измеримости. Измеримость относительно $\mathcal{B}^r \times \mathcal{P}red$ лебегова интеграла

$$\int_0^t b(\xi_u^{(n)}(x; \omega)) du$$

вытекает из его непрерывности по верхнему пределу и измеримости функции под знаком интеграла. Итак,

$$\xi_t^{(n+1)}(x; \omega) = x + \int_0^t \sigma(\xi_u^{(n)}(x; \omega)) d\omega_u + \int_0^t b(\xi_u^{(n)}(x; \omega)) du$$

обладает нужными свойствами измеримости.

Полагая $\xi_t(x; \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_t^{(n)}(x; \omega)$, если этот предел существует, и, скажем, $\xi_t(x; \omega) = x$ в противном случае, получаем искомый вариант решения стохастического уравнения.

4. Замечания. Метод последовательных приближений — не единственный метод, применимый к стохастическим уравнениям; результаты, касающиеся существования, единственности, оценок решений, можно получать другими методами, при других предположениях относительно коэффициентов.

Полученные результаты без изменений переносятся на случай, когда размерности винеровского процесса w_t и решения ξ_t не совпадают (матрица σ_j^i в этом случае не квадратная).

§ 12.5. Диффузии, задаваемые стохастическими уравнениями

1. Пусть $w_t = (w_t^1, \dots, w_t^r)$ — r -мерный винеровский процесс, выходящий из нуля. Основное вероятностное пространство будем обозначать (Ω, \mathcal{F}, P) ;

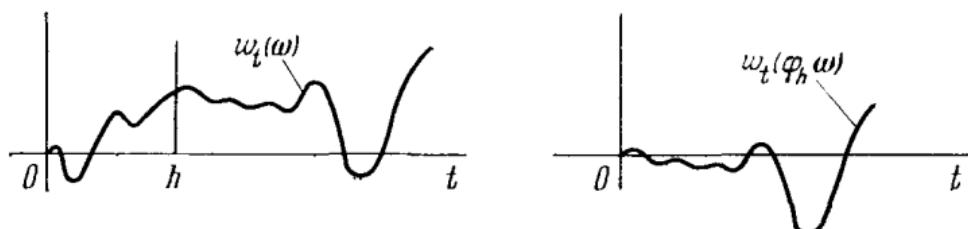


Рис. 30

пусть σ -алгебра \mathcal{F} порождается винеровским процессом: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{w_t}, t \geq 0$. Положим $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{w_s}, s \leq t$; обозначения $\mathcal{F}_{\geq 0}$, $\mathcal{F}_{\leq t}$ зарезервируем для σ -алгебр того процесса, который мы построим при помощи стохастических уравнений.

Предположим, что каждому $\omega \in \Omega$ и $h \geq 0$ соответствует $\varphi_h \omega \in \Omega$ такое, что $w_t(\varphi_h \omega) \equiv w_{t+h}(\omega) — w_h(\omega)$ при $t \geq 0$ (рис. 30); это выполнено, например, если в качестве Ω рассматривается пространство

всех непрерывных функций, выходящих из нуля. Так же, как для операторов θ_h , определяются операторы Φ_h^{-1} , действующие на события, и для случайной величины η определяется $\Phi_h\eta(\omega) = \eta(\Phi_h\omega)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\Phi_h^{-1} \{w_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, w_{t_n} \in \Gamma_n\} &= \\ &= \{w_{t_1+h} - w_h \in \Gamma_1, \dots, w_{t_n+h} - w_h \in \Gamma_n\};\end{aligned}$$

поэтому операторы Φ_h^{-1}, Φ_h сохраняют измеримость относительно σ -алгебры \mathcal{F} , а события и случайные величины, измеримые относительно \mathcal{F}_t , переходят в \mathcal{F}_{t+h} -измеримые. Так как винеровский процесс имеет независимые приращения, получаем, что $\Phi_t^{-1}A, A \in \mathcal{F}$, независимо от любого события из σ -алгебры \mathcal{F}_t ; соответственно для любой случайной величины η , измеримой относительно \mathcal{F} , $\Phi_t\eta$ независимо от σ -алгебры \mathcal{F}_t .

Задача 1. Пусть $f(x, \omega)$ — неотрицательная функция на $R^r \times \Omega$, измеримая относительно $\mathcal{B}^r \times \mathcal{F}$; положим $F(x) = Mf(x, \omega)$. Тогда для любой \mathcal{F}_t -измеримой случайной величины η со значениями в (R^r, \mathcal{B}^r) почти наверное

$$M[f(\eta(\omega), \Phi_t\omega) | \mathcal{F}_t] = F(\eta). \quad (1)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$Mf(\eta, \Phi_t\omega) = MF(\eta). \quad (2)$$

2. Теперь рассмотрим r -мерное стохастическое уравнение

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t) d\omega_t + b(\xi_t) dt \quad (3)$$

с коэффициентами $\sigma(x) = (\sigma_j^i(x)), b(x) = (b^i(x), \dots, b^r(x))$, удовлетворяющими условию Липшица.

Построение диффузионного процесса при помощи стохастических уравнений мы разобьем на несколько теорем.

Теорема 1. Пусть $\xi_t(x; \omega)$ — решение уравнения (3) с начальным условием x , построенное в теореме З § 12.4. Тогда при любых $s, h \geq 0, x \in R^r$ почти наверное $\xi_{s+h}(x; \omega) = \xi_h(\xi_s(x; \omega); \Phi_s\omega)$.

Доказательство. В силу единственности решения стохастического уравнения (теорема 2 § 12.4) достаточно показать, что случайная функция $\eta_t(\omega) = \xi_{t-s}(\xi_s(x; \omega); \Phi_s\omega)$ удовлетворяет при $t \geq s$ уравне-

нию (3); тому же уравнению и с тем же начальным условием $\eta_s(\omega) = \xi_s(x; \omega)$ удовлетворяет $\xi_t(x; \omega)$, $t \geq s$.

Требуется доказать, что почти наверное

$$\eta_{s+h}(\omega) = \xi_s(x; \omega) + \int_s^{s+h} \sigma(\eta_u) dw_u + \int_s^{s+h} b(\eta_u) du. \quad (4)$$

Прежде всего нужно доказать, что стохастический интеграл здесь определен. Предсказуемость случайной функции η_u , $u > s$, а значит, и $\sigma(\eta_u)$, $b(\eta_u)$ обеспечивается свойствами измеримости $\xi_t(x; \omega)$ и оператора φ_s . Далее нужно доказать, что $\sigma_j^i(\eta_u)$, $s \leq u \leq s+h$, принадлежит $L^2((s, s+h] \times \Omega)$. Для этого достаточно доказать интегрируемость в квадрате по $(s, s+h] \times \Omega$ векторной функции η_u . Мы докажем больше: что η_u непрерывно в среднем квадратическом.

Для $u, v \in [s, s+h]$, $u \leq v$ положим $f(x, \omega) = |\xi_{v-s}(x; \omega) - \xi_{u-s}(x; \omega)|^2$, $F(x) = Mf(x, \omega)$. Это математическое ожидание не превосходит

$$\begin{aligned} 2 \sum_{ij} \int_{u-s}^{v-s} M[\sigma_j^i(\xi_t(x; \omega))]^2 dt + \\ + 2 \sum_i \int_{u-s}^{v-s} M[b^i(\xi_t(x; \omega))]^2 dt (v-u) \leq \\ \leq (v-u) \cdot 2(r^2 + rh) K^2 [1 + \max_{0 \leq t \leq h} M|\xi_t(x; \omega)|^2] \leq \\ \leq (v-u) \cdot 4(r^2 + rh) K^2 [1 + |x|^2] \times \\ \times [1 + (K/L)^2 \exp\{4L^2[r^2h + rh^2]\}] \end{aligned}$$

(последнее неравенство в силу задачи 4 § 12.4). Согласно (2),

$$\begin{aligned} M|\eta_v - \eta_u|^2 = \\ = M|\xi_{v-s}(\xi_s(x; \omega); \varphi_s \omega) - \xi_{u-s}(\xi_s(x; \omega); \varphi_s \omega)|^2 = \\ = Mf(\xi_s(x; \omega), \varphi_s \omega) = MF(\xi_s(x; \omega)) \leq \\ \leq (v-u) \cdot \text{const} \cdot M[1 + |\xi_s(x; \omega)|^2] \leq \\ \leq (v-u) \cdot \text{const}' \cdot [1 + |x|^2]. \end{aligned}$$

Итак, η_u , а в силу условия Липшица и $\sigma_j^i(\eta_u)$, $b^i(\eta_u)$ непрерывны в среднем квадратическом; стохастиче-

ский интеграл в (4) имеет смысл. Согласно задаче 5 § 12.1 стохастический интеграл в этом случае будет пределом в среднем квадратическом интегральных сумм. Для не стохастического интеграла это еще проще:

Задача 2. Докажите, что

$$\int_s^{s+h} b(\eta_u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} b(\eta_{s+kh/n}) \cdot \frac{h}{n}.$$

Таким образом, (4) сводится к тому, что

$$\begin{aligned} M|\eta_{s+h}(\omega) - \xi_s(x; \omega) - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\eta_{s+kh/n}) [w_{(k+1)h/n} - w_{kh/n}] - \\ - \sum_{k=0}^{n-1} b(\eta_{s+kh/n}) \cdot \frac{h}{n}|^2 \rightarrow 0 \quad (5) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Чтобы доказать (5), введем следующую функцию:

$$\delta_n(h, x) =$$

$$= M \left| \xi_h(x; \omega) - x - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\xi_{kh/n}(x; \omega)) [w_{(k+1)h/n} - w_{kh/n}] - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{n-1} b(\xi_{kh/n}(x; \omega)) \cdot \frac{h}{n} \right|^2. \quad (6)$$

Эта функция измерима по x ; при $n \rightarrow \infty$ она стремится к нулю (потому что $\xi_t(x; \omega)$ — решение (3)). Функция под знаком математического ожидания в (5) получается из такой же функции в (6) заменой ω на $\varphi_s \omega$ и x на $\xi_s(x; \omega)$ (потому что в обе формулы входят только *приращения* винеровского процесса). В силу формулы (2) математическое ожидание в левой части (5) равно $M\delta_n(h, \xi_s(x; \omega))$. Чтобы вывести из сходимости к нулю δ_n сходимость к нулю $M\delta_n$, достаточно установить, что $\delta_n(h, \xi_s(x; \omega))$ мажорируются интегрируемой случайной величиной.

Задача 3. Докажите, что $\delta_n(h, x) \leq C(h)[1 + |x|^2]$ при всех n , где $C(h) < \infty$.

Значит, $\delta_n(h, \xi_s(x; \omega)) \leq C(h) [1 + |\xi_s(x; \omega)|^2]$, $M|\xi_s(x; \omega)|^2 < \infty$, поэтому $M\delta_n(h, \xi_s(x; \omega)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Формула (5) доказана, а с ней и вся теорема.

Теперь определим функцию $P(t, x, \Gamma) = P\{\xi_t(x; \omega) \in \Gamma\}$. Эта функция измерима по x и является вероятностной мерой как функция $\Gamma \in \mathcal{B}'$; при $t = 0$ эта мера сосредоточена в точке x .

Теорема 2. При любых t, h, x и $\Gamma \in \mathcal{B}'$ почти наверное

$$P\{\xi_{t+h}(x; \omega) \in \Gamma | \mathcal{F}_t\} = P(h, \xi_t(x; \omega), \Gamma). \quad (7)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 в левой части мы можем заменить $\xi_{t+h}(x; \omega)$ на $\xi_h(\xi_t(x; \omega); \Phi_t \omega)$, а всю условную вероятность — на условное математическое ожидание индикатора χ_Γ от этой случайной величины. Применяя формулу (1), получаем (7).

Мы уже получили семейство марковских процессов с общей переходной функцией, причем мы можем выпустить наши случайные процессы из любой точки x . Чтобы придать построенному нами математическому объекту форму марковского семейства, поступим следующим образом. Возьмем в качестве нового пространства элементарных событий пространство $\Omega' = R' \times \Omega$ с элементами $\omega' = (x; \omega)$; траектории $\xi_t(\omega') = \xi_t(x; \omega)$, $t \geq 0$, у нас уже есть. Определим стандартным образом σ -алгебры $\mathcal{F}_{\geq 0} = \mathcal{F}_{\xi_t, t \geq 0}$ и $\mathcal{F}_{\leq t} = \mathcal{F}_{\xi_s, s \leq t}$ в Ω' . Для подмножества $A \subseteq R' \times \Omega$, измеримого относительно $\mathcal{F}_{\geq 0}$, положим

$$P_x(A) = P\{\omega: (x; \omega) \in A\}. \quad (8)$$

Вероятность (8) определена для любого $A \in \mathcal{F}_{\geq 0}$, так как $A_x = \{\omega: (x; \omega) \in A\} \in \mathcal{F}$. Действительно, это выполнено для $A = \{\omega': \xi_t(\omega') \in \Gamma\}$: ведь $\{\omega: (x; \omega) \in A\} = \{\omega: \xi_t(x; \omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Отсюда вытекает также, что $A_x \in \mathcal{F}_t$ для $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$.

В пространстве Ω' можно определить операторы сдвига θ_s , $s \geq 0$; для этого достаточно положить $\theta_s \omega' = \theta_s(x; \omega) = (\xi_s(x; \omega); \Phi_s \omega) \in \Omega'$. Действительно, $\xi_t(\theta_s \omega') = \xi_t(\xi_s(x; \omega); \Phi_s \omega) = \xi_{s+t}(x; \omega) = \xi_{s+t}(\omega')$. Правда, это выполняется при каждом x лишь с вероятностью 1 при всех $t \geq 0$. Чтобы справиться с этим, дополним пространство Ω' достаточно большим множеством элементов ω' произвольной природы и определим для них

траектории $\xi_t(\omega')$ так, чтобы траекторией могла быть любая непрерывная функция; множеству всех добавленных элементарных событий припишем P_x -вероятность 0 при всех x .

Теорема 3. *Пара (ξ_t, P_x) — марковское семейство с переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$.*

Доказательство. Нужно проверить, что

$$P_x \{ \xi_{t+h} \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq t} \} = P(h, \xi_t(\omega'), \Gamma)$$

почти наверное для $t, h \geq 0$, $x \in R^r$, $\Gamma \in \mathcal{B}^r$; иначе говоря, что для любого $A \in \mathcal{F}_{\leq t}$

$$P_x(A \cap \{ \xi_{t+h} \in \Gamma \}) = M_x \chi_A(\omega') P(h, \xi_t(\omega'), \Gamma). \quad (9)$$

С учетом определения (8) можно переписать (9) в виде

$$P(A_x \cap \{ \xi_{t+h}(x; \omega) \in \Gamma \}) = M \chi_{A_x}(\omega) P(h, \xi_t(x; \omega), \Gamma).$$

Это равенство вытекает из $A_x \in \mathcal{F}_t$ и формулы (7).

3. Теперь установим, что построенное марковское семейство — диффузия, и найдем ее производящий оператор. Траектории непрерывны, потому что это решение стохастического уравнения. Обозначим полугруппу операторов, связанную с ξ_t , через P^t , а инфинитезимальный оператор — через A .

Теорема 4. *Любая функция $f \in C_{\text{фин}}^{(2)}$ принадлежит области определения D_A инфинитезимального оператора, и для таких функций*

$$Af(x) = Lf(x) = \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_i b^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x),$$

где $a^{ij}(x) = \sum_k \sigma_k^i(x) \sigma_k^j(x)$ (в матричной форме: $(a^{ij}(x)) = \sigma(x) \sigma^*(x)$).

Доказательство. Применим формулу Ито к $f(\xi_t(x; \omega))$:

$$\begin{aligned} df(\xi_t) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi_t) \sum_j \sigma_j^i(\xi_t) d\omega_t^j + \\ &+ \left[\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\xi_t) b^i(\xi_t) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\xi_t) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_k \sigma_k^i(\xi_t) \sigma_k^j(\xi_t) \right] dt. \end{aligned}$$

Обозначим для краткости множитель перед $d\omega_t^j$ через $\mathfrak{S}_j(\xi_t(x; \omega))$; введем вектор $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_r)$ (\mathfrak{S} —

буква «эс» готическое прописное). Что касается множителя при dt , то он равен $Lf(\xi_t(x; \omega))$, где L — введенный нами дифференциальный оператор. Соотношение для стохастических дифференциалов означает по определению, что

$$f(\xi_t(x; \omega)) = f(\xi_0(x; \omega)) + \int_0^t \mathfrak{S}(\xi_s(x; \omega)) dw_s + \int_0^t Lf(\xi_s(x; \omega)) ds. \quad (10)$$

Здесь $\xi_0(x; \omega) = x$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей; математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, поэтому

$$\mathbf{M}f(\xi_t(x; \omega)) = f(x) + \mathbf{M} \int_0^t Lf(\xi_s(x; \omega)) ds.$$

Перепишем эту формулу, пользуясь математическими ожиданиями \mathbf{M}_x и изменяя порядок интегрирования:

$$\mathbf{M}_x f(\xi_t) = f(x) + \int_0^t \mathbf{M}_x Lf(\xi_s) ds,$$

или

$$P^t f(x) = f(x) + \int_0^t P^s Lf(x) ds. \quad (11)$$

Задача 4. Докажите, что любая функция $f \in \mathbf{C}_{\text{фин}}^{(2)}$ принадлежит пространству \mathbf{B}_0 сильной непрерывности полугруппы.

Так как пространство \mathbf{B}_0 замкнуто, то \mathbf{B}_0 содержит замыкание $\mathbf{C}_{\text{фин}}^{(2)}$; в частности, $\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{C}_{\text{фин}}$.

Задача 5. Докажите, что любая функция $f \in \mathbf{C}_{\text{фин}}^{(2)}$ принадлежит D_A и $Af = Lf$.

Задача 6. В § 11.2, п. 26) мы нашли производящий оператор двумерного диффузионного процесса $(w_t, \xi_t = \xi_0 +$

$+ \int_0^t w_s ds)$. Найдите его по-другому, пользуясь теоремой 4.

Задача 7. Пользуясь результатом задачи 4 предыдущего параграфа, докажите, что построенный в п. 2 диффузионный процесс — фелеровский (а значит, и строго марковский).

4. Доказательства теорем 1—4 можно перенести на случай, когда коэффициенты не удовлетворяют условию Липшица, лишь бы имела место теорема существования и единственности решения стохастического уравнения и существовал измеримый вариант $\xi_t(x; \omega)$ такого решения.

Можно доказать (см. Дуб (1956, гл. VI, теорема 3.3)), что любой диффузионный процесс можно задать с помощью стохастических уравнений. Определяются стохастические интегралы отно-

сительно мартингалов; полагаем $\hat{\xi}_t = \xi_t - \int_0^t b(\xi_s) ds$ и строим

процесс $w_t = \int_0^t \sigma(\xi_s)^{-1} d\hat{\xi}_s$. То, что это винеровский процесс, доказывается с помощью следующего результата: если w_t — процесс с непрерывными траекториями, w_t и $w_t^2 - t$ — мартингалы, то w_t — винеровский процесс.

Задача 8*. При помощи какого стохастического уравнения можно задать гауссовский процесс $Z(t)$, $0 \leq t < 1$, с нулевым средним и корреляционной функцией $t \wedge s - ts$?

Приведенные результаты непосредственно здесь не применимы, потому что процесс неоднороден по времени.

5. Мы видели (задача 15 § 5.3), что при помощи стохастических интегралов выражается плотность распределения $w_t + \varphi(t)$ относительно распределения винеровского процесса. Аналогичная формула имеет место для плотности распределения одного диффузионного процесса на конечном отрезке времени относительно распределения другого диффузионного процесса, отличающегося от него только сносом.

Для простоты ограничимся одномерным случаем. Пусть ξ_t — решение стохастического уравнения $d\xi_t = \sigma(\xi_t)dw_t + b(\xi_t)dt$ с начальным условием $\xi_0 = x$; ξ'_t — решение уравнения $d\xi'_t = \sigma(\xi'_t)dw_t + b'(\xi'_t)dt$, $\xi'_0 = x$. Пусть $\sigma(x) \neq 0$. Обозначим через μ распределение в пространстве $(R^{[0, T]}, \mathcal{B}^{[0, T]})$, соответствующее случайному процессу ξ_t , $0 \leq t \leq T$, через μ' — распределение случайногопроцесса ξ'_t , $0 \leq t \leq T$. Тогда плотность распределения μ' относительно μ задается формулой

$$\frac{d\mu'}{d\mu}(\xi_{\cdot}) = \exp \left\{ \int_0^T \sigma(\xi_t)^{-1} (b'(\xi_t) - b(\xi_t)) dw_t - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma(\xi_t)^{-2} (b'(\xi_t) - b(\xi_t))^2 dt \right\}.$$

(См. И. В. Гирсанов. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры, Теория вероятностей и ее применения. — 1960. — Т. 5, № 3. — С. 314—330. Существенный пункт доказательства — проверка того, что математическое ожидание выписанного выражения равно единице; ср. с задачей 4* § 3.)

СВЯЗЬ ДИФФУЗИЙ С УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Мы уже знаем, что диффузии связаны с задачей Коши для уравнений в частных производных *параболического* типа: решением этой задачи являются, например, функции вида

$$v(t, x) = M_x \int_0^t g(\xi_s) ds,$$

$$w(t, x) = M_x \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} f(\xi_t)$$

(см. § 10.3, а также § 11.2). В этой главе мы будем говорить о связи диффузий с задачей Дирихле для уравнений эллиптического типа: решением этой задачи оказываются функции типа $u(x) = M_x \Phi(\xi_\tau)$ или $m(x) = M_x \tau$, где τ — первый момент выхода процесса из области. В одномерном случае эллиптические уравнения превращаются в *обыкновенные* уравнения второго порядка, но для них рассматриваются не задачи с начальными условиями, а краевые задачи. В случае вырождения диффузии, т. е. не строго положительно определенной матрицы диффузии ($a^{ij}(x)$), вместо эллиптических уравнений получаются параболические; часть результатов может быть отнесена к ним.

Сначала мы рассмотрим уравнения для функций, связанных с моментом выхода из области, в случае дискретных цепей Маркова; это нам поможет ознакомиться с возникающими проблемами на более простом материале.

§ 13.1. Уравнения, связанные с дискретными цепями Маркова

1. Пусть (ξ_t, P_x) — цепь Маркова на конечном или счетном пространстве X ; через P будем обозначать оператор P^1 , связанный с вероятностями перехода за

один шаг: $Pf(x) = \mathbf{M}_x f(\xi_1) = \sum_y p(1, x, y) f(y)$. Пусть D — подмножество X ; τ — первый момент выхода из D : $\tau = \min\{n: \xi_n \notin D\}$.

Задача 1. Пусть $\varphi(x)$ — числовая функция на $X \setminus D$; положим $u(x) = \mathbf{M}_x \varphi(\xi_\tau)$ (предполагается, что математическое ожидание существует; для тех элементарных событий, для которых $\tau = \infty$, т. е. ξ_n не выходит из D , вместо $\varphi(\xi_\tau)$ берем 0). Докажите, что функция u удовлетворяет уравнению

$$(P - E)u(x) = 0, \quad x \in D, \quad (1)$$

и «границным условиям»

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in X \setminus D. \quad (2)$$

Если X , например, — решетка на плоскости, причем переходы в цепи возможны только в ближайшие соседние точки, то функция $u(x)$ в D действительно зависит от значений $\varphi(x)$ в точках «границы» D , если в нее включать точки, не принадлежащие D , но соседние с какими-либо точками D (рис. 31).

Уравнению (1) удовлетворяет, в частности, вероятность того, что в момент выхода из D цепь попадает в определенное множество $\Gamma \subseteq X \setminus D$: ведь функция $u(x) = P_x \{\xi_\tau \in \Gamma\}$ представляется в виде $\mathbf{M}_x \chi_\Gamma(\xi_\tau)$.

В случае, когда множество D состоит из конечного числа элементов x_1, \dots, x_n , задача (1) — (2) сводится к системе n уравнений (1) с n неизвестными $u(x_1), \dots, u(x_n)$:

$$\begin{aligned} u(x_i) - \sum_{j=1}^n p(1, x_i, x_j) u(x_j) &= \\ &= \sum_{x \in X \setminus D} p(1, x_i, x) \varphi(x), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение задачи (1) — (2) (или системы (3)) существует для любой ограниченной функции φ , но может быть не единственным. Это будет в случае, когда ξ_n может навсегда остаться в множестве D .

Задача 2. Докажите, что функция $u(x) = P_x \{\tau = \infty\}$ удовлетворяет уравнению (1) в D и дополнительному условию $u(x) = 0$ при $x \in X \setminus D$.

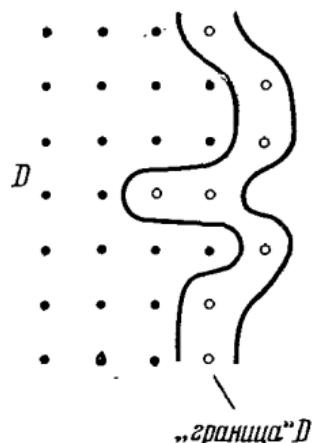


Рис. 31

В случае бесконечного D решение может быть не единствено и в случае $P_x\{\tau = \infty\} = 0$. Пример: симметричное случайное блуждание по целочисленным точкам прямой ($p(1, i, i+1) = p(1, i, i-1) = 1/2$, остальные $p(1, i, j) = 0$ — нули); $D = \{1, 2, \dots\}$; $u(i) = i$ при $i > 0$, $u(i) = 0$ при $i \leq 0$. Здесь $(P - E)u(i) = 0$ при $i \in D$; граничное условие — нулевое.

Задача 3. Пусть функция φ неотрицательна. Докажите, что $u_0(x) = M_x \varphi(\xi_\tau)$ — наименьшее неотрицательное решение задачи (1) — (2).

2. Теперь рассмотрим функцию $v(x) = M_x \sum_{i=0}^{\tau-1} g(\xi_i)$.

Задача 4. Докажите, что функция v — решение задачи

$$(P - E)v(x) = -g(x), \quad x \in D; \tag{4}$$

$$v(x) = 0, \quad x \in X \setminus D. \tag{5}$$

Частный случай $g \equiv 1$ дает нам уравнение для математического ожидания времени выхода $m(x) = M_x \tau$: $(P - E)m(x) = -1$, $x \in D$ (если $M_x \tau < \infty$).

Задача 5. Если D конечно и $P_x\{\tau < \infty\} = 1$ для всех $x \in D$, то $M_x \tau < \infty$. Докажите.

Задача 6. Найдите математическое ожидание времени выхода из $D = \{1, \dots, n-1\}$ для симметричного случайного блуждания на прямой.

Задача 7. Докажите, что $m(x) = M_x \tau$ — наименьшее неотрицательное решение уравнения $(P - E)v(x) = -1$, $x \in D$ (среди решений со всевозможными неотрицательными значениями вне D).

Задача 8. Найдите математическое ожидание времени выхода из $D = \{1, 2, \dots\}$ для несимметричного одномерного случайного блуждания ($p(1, i, i+1) = p$, $p(1, i, i-1) = q$, $p + q = 1$).

3. Для первоначального ознакомления с вопросом о связи между марковскими процессами и уравнениями данных задач достаточно; следующая задача не обязательная.

Задача 9*. Выполните уравнение для функции

$$z(x) = M_x \sum_{n=0}^{\tau-1} g(\xi_n) \prod_{i=0}^{n-1} q(\xi_i).$$

§ 13.2. Случай решений, допускающих гладкое продолжение

0. В случае непрерывного времени и непрерывного фазового пространства мы уже не можем брать множество D произвольным, а должны ограничиться каким-нибудь более или менее узким классом множеств.

Мы будем рассматривать замкнутые множества D , а затем еще далее сузим этот класс. *Моментом (первого) выхода* процесса ξ_t из D будем называть $\tau = \inf\{t: \xi_t \notin D\}$ *). В случае диффузионного процесса $\min\{t: \xi_t \notin D\}$ не достигается: в момент τ процесс находится еще в D , а именно на границе ∂D этого множества. Мы установили (§ 6.1, задача 4), что момент первого выхода из замкнутого множества будет марковским моментом относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$ для любого процесса ξ_t с непрерывными справа траекториями.

Сделаем общий чертеж для всего этого параграфа (рис. 32).

1. Мы уже понимаем, что стоит прежде всего заняться вопросом о конечности τ .

Задача 1. Пусть (ξ_t, P_x) — марковское семейство, и пусть существуют константы T и $\delta > 0$ такие, что $P_x\{\tau < T\} > \delta$ для всех $x \in D$. Тогда для всех x

$$P_x\{\tau \geq nT\} \leq (1 - \delta)^n, \quad (1)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, и $M_x \tau \leq T/\delta$.

Задача 2*. Пусть (ξ_t, P_x) — феллеровское марковское семейство с непрерывными справа траекториями. Если D — компакт и $P_x\{\tau < \infty\} > 0$ для всех $x \in D$, то выполняются условия задачи 1, и $M_x \tau$ конечно и ограничено.

Это — аналог задачи 5 § 13.1.

Пусть теперь в r -мерном пространстве задан дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами $L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$; (ξ_t, P_x) — диффузия с производящим оператором L .

Предположим, что это марковское семейство — феллеровское, т. е. соответствующая полугруппа переводит непрерывные ограниченные функции в непрерывные.

Микротеорема 1. Пусть D — компакт, τ — момент выхода из него. Пусть $v(x)$ — дважды непре-

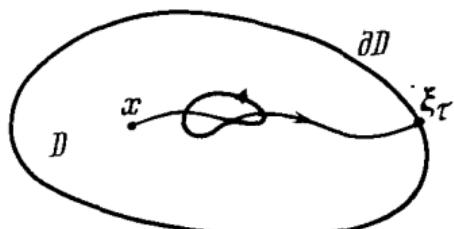


Рис. 32

*) Почти такие же результаты можно получить для открытых D и моментов $\min\{t: \xi_t \notin D\}$ (см. Ито и Маккин (1968, гл. 7)). Разница касается только более тонких результатов.

рывно дифференцируемая функция, определенная в R^r , обращающаяся в нуль вне некоторого компакта, содержащего D , и неотрицательная в D , и пусть $Lv(x) \leq -c < 0$ при $x \in D$. Тогда $\mathbf{M}_x \tau \leq c^{-1}v(x)$ для любого $x \in D$.

Доказательство. Функция v принадлежит области определения инфинитезимального оператора диффузии; поэтому, согласно задаче 15 § 10.3, случайная функция

$$\eta_t = v(\xi_t) - \int_0^t Lv(\xi_s) ds \quad (2)$$

будет мартингалом относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t}$ (и любой из мер \mathbf{P}_x). Это будет также мартингал относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$, потому что диффузия (ξ_t, \mathbf{P}_x) обладает марковским свойством относительно этого семейства σ -алгебр (в силу непрерывности траекторий и феллеровости; см. § 9.2). Из микротеоремы З § 7.3 вытекает, что для любого $T \geq 0$

$$\mathbf{M}_x \eta_{\tau \wedge T} = \mathbf{M}_x \eta_0 = \mathbf{M}_x v(\xi_0) = v(x), \quad (3)$$

потому что $\tau \wedge T$ — марковский момент относительно семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_{\leq t+}$.

Из (3) получаем

$$v(x) = \mathbf{M}_x \left[v(\xi_{\tau \wedge T}) - \int_0^{\tau \wedge T} Lv(\xi_s) ds \right]. \quad (4)$$

Учитывая, что здесь

$$\xi_s, \xi_{\tau \wedge T} \in D,$$

$$Lv(\xi_s) \leq -c,$$

$$v(\xi_{\tau \wedge T}) \geq 0,$$

находим

$$v(x) \geq c \mathbf{M}_x (\tau \wedge T).$$

Переходим к пределу при $T \rightarrow \infty$ (пользуясь монотонностью $\tau \wedge T$ как функции от T); получаем

$$v(x) \geq c \mathbf{M}_x \tau,$$

что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство можно обобщить на феллеровские марковские процессы с непрерывными *справа* траекториями.

Задача 3*. Пусть ξ_t — семейство пуассоновских процессов с параметром a , выходящих из всевозможных точек прямой; $\eta_t = \xi_t - at$; $D = [0, l]$; $\tau = \inf\{t: \eta_t \notin D\}$. Докажите, что $M_x \tau \leq a^{-1}x(l+1-x)$.

Доказательство микротеоремы 1 можно было бы провести, пользуясь не задачей 15. § 10.3 и свойствами мартингалов, а стохастическими интегралами. Если процесс ξ_t задается стохастическим уравнением $d\xi_t = \sigma(\xi_t)dw_t + b(\xi_t)dt$, где w_t — винеровский процесс, то случайная функция η_t , определяемая формулой (2),

есть почти наверное $v(\xi_0) + \int_0^t \mathfrak{S}(\xi_s) dw_s$, где \mathfrak{S} — непрерывная

ограниченная векторная функция (см. § 12.5). Так же, как в § 12.2, получаем, что почти наверное $\eta_{\tau \wedge T} = v(\xi_0) +$

$+ \int_0^T \mathfrak{S}(\xi_s) \chi_{\leq \tau}(s) dw_s$; беря математическое ожидание M_x от

обеих частей, получаем (3).

Микротеорема 1'. Пусть D — замкнутое множество, $v(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в некотором открытом множестве, содержащем D (не предполагается, что функция v или ее производные ограничены). Если $v(x) \geq 0$, $Lv(x) \leq -c < 0$ в D , то $M_x \tau \leq c^{-1}v(x)$.

Доказательство. Введем компакты $D_N = D \cap \{x: |x| \leq N\}$; τ_N — моменты выхода из D_N . Ясно, что $\tau_N \uparrow \tau$ при $N \rightarrow \infty$. Изменим функцию v вне D_N так, чтобы она осталась гладкой, но сделалась финитной. Оператор L — локальный, так что $Lv(x)$ в D_N останется прежним. По микротеореме 1 $M_x \tau_N \leq c^{-1}v(x)$ при $x \in D_N$; отсюда $M_x \tau = \lim_{N \rightarrow \infty} M_x \tau_N \leq c^{-1}v(x)$ для всех $x \in D$.

Приведем конкретные примеры применения доказанных микротеорем.

Микротеорема 2. Пусть множество D расположено в пределах полосы $\{x: |x^1| \leq R\}$; пусть коэффициент диффузии вдоль первой координаты $a^{11}(x)$ не меньше $a_0 > 0$ при $x \in D$, а коэффициент переноса $b^1(x)$ не превосходит по модулю константы B . Тогда $M_x \tau$ конечно и ограничено в D .

Доказательство. Положим $v(x) = \operatorname{ch} CR - \operatorname{ch} Cx^1$, где C — константа (а ch — гиперболический косинус). Функция $v(x)$ неотрицательна в D ; найдем

$Lv(x)$:

$$Lv(x) = -\frac{C^2}{2} a^{11}(x) \operatorname{ch} Cx^1 - Cb^1(x) \operatorname{sh} Cx^1.$$

Положим

$$C = 4B/a_0;$$

тогда будет

$$\begin{aligned} Lv(x) &\leq -\frac{C^2}{2} a_0 \operatorname{ch} Cx^1 + \frac{C^2}{4} a_0 \operatorname{sh} C|x^1| \leq \\ &\leq -\frac{C^2}{4} a_0 \operatorname{ch} Cx^1 \leq -\frac{C^2}{4} a_0. \end{aligned}$$

Отсюда по микротеореме 1'

$$M_x \tau \leq \frac{4}{a_0 C^2} [\operatorname{ch} CR - 1] \leq \frac{a_0}{8B} \exp\{4BR/a_0\}.$$

Второе применение — к задаче 4* § 12.1: рассматриваются двумерный диффузионный процесс с производящим оператором $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}$, $D = \{(x, y): |x| \leq b\sqrt{A+y}\}$, и функция $v(x, y) = b^2(A+y) - x^2$.

2. Перейдем теперь к задаче Дирихле.

Будем говорить, что D — замкнутая область, если множество D замкнуто, множество его внутренних точек связно и любая точка D — предельная для внутренних точек (Миронда, 1957, гл. I, § 1). Границу ∂D области будем называть гладкой, если в окрестности любой своей точки она представляется уравнением $x^1 = f(x^2, \dots, x^r)$, или $x^2 = f(x^1, x^3, \dots, x^r)$, ..., или $x^r = f(x^1, \dots, x^{r-1})$, где f — трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Имеет место следующая теорема существования и единственности (Миронда, 1957, гл. V, § 36, теорема 36.1):

если D — компактная область с гладкой границей; коэффициенты оператора L непрерывно дифференцируемы, причем матрица $(a^{ij}(x))$ строго положительно определена; функция g , заданная в D , непрерывно дифференцируема, а функция φ , заданная на ∂D , трижды непрерывно дифференцируема, то существует (причем единственное) решение задачи Дирихле

$$Lv(x) = -g(x), \quad x \in D; \tag{5}$$

$$v(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial D, \tag{6}$$

дважды непрерывно дифференцируемое в D вплоть до границы.

Теоремы, касающиеся возможности гладкого продолжения функции за пределы замкнутой области, где она определена (Миронда (1957, гл. II, § 16)), дают нам возможность утверждать, что решение $v(x)$ при выполнении указанных выше условий может быть продолжено до дважды непрерывно дифференцируемой функции в открытом множестве, содержащем D .

Микротеорема 3. Пусть коэффициенты диффузии и переноса диффузии (ξ_t, \mathbf{P}_x) непрерывно дифференцируемы, матрица диффузии невырождена; пусть D — компактная область с гладкой границей; и пусть в D задана непрерывно дифференцируемая функция g , а на границе ∂D этой области — трижды непрерывно дифференцируемая функция φ . Тогда

$$v(x) = \mathbf{M}_x \left[\varphi(\xi_\tau) + \int_0^\tau g(\xi_t) dt \right]$$

— единственное решение задачи (5) — (6).

Доказательство. Решение задачи Дирихле, как уже было сказано, существует; нужно доказать только, что оно есть среднее от указанного функционала от траектории ξ_t . Продолжим функцию v на все пространство дважды непрерывно дифференцируемым образом, сделав ее финитной. Определим случайную функцию η_t формулой (2); тогда имеет место формула (4). Переходим в этой формуле к пределу при $T \rightarrow \infty$, учитывая, что случайная величина под знаком \mathbf{M}_x мажорируется случайной величиной $\|v\| + \|Lv\|\tau$ (математическое ожидание которой конечно по микротеореме 2):

$$\begin{aligned} v(x) &= \mathbf{M}_x \left[v(\xi_\tau) - \int_0^\tau Lv(\xi_s) ds \right] = \\ &= \mathbf{M}_x \left[\varphi(\xi_\tau) + \int_0^\tau g(\xi_s) ds \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Микротеорема доказана. Частные случаи: $u(x) = \mathbf{M}_x \varphi(\xi_\tau)$ удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ с граничным условием $u|_{\partial D} = \varphi$; $v(x) = \mathbf{M}_x \int_0^\tau g(\xi_s) ds$ — уравнению $Lv = -g$ с нулевым условием на границе; $m(x) =$

$= M_x \tau$ — уравнению $Lm = -1$ с нулевым граничным условием.

Задача 4. Пусть (w_t, P_x) — семейство одномерных винеровских процессов, τ — момент первого выхода w_t из отрезка $[c, d]$. Докажите, что $P_x\{w_\tau = a\} = (x - c)/(d - c)$; $M_x \tau = (d - x)(x - c)$ для $x \in [c, d]$.

Задача 5. Для произвольной одномерной диффузии с коэффициентами диффузии $a(x) > 0$ и переноса $b(x)$ найдите вероятность того, что процесс выйдет из отрезка $[c, d]$ через правый конец.

Задача 6. Пусть (w_t, P_x) — семейство двумерных винеровских процессов, D — кольцо между двумя окружностями $\partial_1 = \{x: |x| = r\}$ и $\partial_2 = \{x: |x| = R\}$, τ — момент выхода из D . Докажите, что $P_x\{w_\tau \in \partial_1\} = (\ln R - \ln |x|)/(\ln R - \ln r)$. Предельным переходом при $R \rightarrow \infty$ получите отсюда вероятность когда-либо достичь ∂_1 ; предельным переходом при $r \downarrow 0$ — вероятность достижения точки 0.

Задача 7. Найдите те же вероятности для трехмерного винеровского процесса.

Из результата задачи 6 можно вывести, что траектория двумерного винеровского процесса с вероятностью 1 рано или поздно проходит сколь угодно близко к любой точке плоскости; это же будет справедливо для любого невырожденного диффузионного процесса, для которого существует функция u , удовлетворяющая уравнению $Lu = 0$ вне некоторого компакта и такая, что $u(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Из результата задачи 7 выводится, что $|w_t| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ (почти наверное); мы уже получили это с помощью супермартингалов (задача 2 § 7.4).

Задача 8. Найдите математическое ожидание времени выхода r -мерного винеровского процесса из шара $\{x: |x| \leq R\}$.

Задача 9*. Найдите математическое ожидание времени выхода двумерного винеровского процесса из угла $\{(x, y): |y| \leq \leq x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\}$.

Задача 10*. Конечно ли математическое ожидание времени выхода трехмерного винеровского процесса из октанта $\{(x^1, x^2, x^3): x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, x^3 \geq 0\}$?

4. Известно (Миранды, 1957, гл. I, § 10), что решение задачи Дирихле (5)–(6) может быть записано в виде

$$v(x) = \int_D G(x, y) g(y) dy + \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) \Phi(y) d\sigma_y,$$

где G — функция Грина для задачи Дирихле, $\frac{\partial G}{\partial n_y}$ — ее производная по внутренней нормали в точке y границы, $d\sigma_y$ означает интегрирование по поверхности мере на ∂D . Каков вероятностный смысл этой формулы?

Первый интеграл есть $M_x \int_0^\tau g(\xi_t) dt$; отсюда можно вывести,

что математическое ожидание времени, проведенного процессом

в множестве $\Gamma \subseteq D$ до момента τ , равно $\int_{\Gamma} G(x, y) dy$. Второй

интеграл равен $M_x \Phi(\xi_\tau)$; отсюда получаем, что случайная точка ξ_τ имеет плотность распределения относительно поверхностной меры на ∂D , равную $\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)$ (x — точка, из которой начинается процесс, y — точка, в которой берется плотность).

Задача 11*. Пусть w_t — двумерный винеровский процесс; $D = \{(x^1, x^2): x^2 \geq 0\}$. Докажите, что распределение значения w_τ^1 первой координаты в момент выхода из D задается плотностью $p_{x^1 x^2}(y) = \pi^{-1} x^2 / ((x^2)^2 + (y - x^1)^2)$ ((x^1, x^2) — точка, из которой начинается процесс).

5. Для замкнутой области с гладкой границей момент τ выхода из области совпадает с моментом τ_∂ первого достижения границы (он же — момент первого выхода из внутренности замкнутой области). Действительно, τ_∂ — марковский момент (задача 3 § 6.1). Продолжим решение $m(x)$ задачи $Lm = -1$, $m|_{\partial D} = 0$ на дополнение D и применим формулу (7) к функции m и марковскому моменту τ_∂ . Получим $m(x) = M_x \tau_\partial$. В то же время $m(x) = M_x \tau$, т. е. $M_x(\tau - \tau_\partial) = 0$. Но $\tau_\partial \leq \tau$ для всех ω , поэтому почти наверное $\tau_\partial = \tau$.

6. Аналоги задач 3, 7 § 13.1.

Задача 12. Пусть (ξ_t, P_x) — произвольная феллеровская диффузия, D — произвольное замкнутое множество. Если u — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в некотором открытом множестве, содержащем D , неотрицательная в D , $Lu = 0$ в D , $u(x) = \varphi(x)$ на ∂D , то $M_x \Phi(\xi_\tau) \leq u(x)$ (если $\tau = \infty$, вместо $\Phi(\xi_\tau)$ берем 0). Если v — дважды непрерывно дифференцируемое в открытом множестве, содержащем D , и неотрицательное в D решение уравнения $Lv = -g$ в D , $g \geq 0$,

то $M_x \int_0^\tau g(\xi_s) ds \leq v(x)$.

Задача 13*. Пусть $D = \{(x^1, x^2): x^2 \geq 0\}$. Найдите наименьшее неотрицательное решение задачи $\Delta u = 0$ в D , $u(x^1, 0) = 1/(1 + (x^1)^2)$ на ∂D . Укажите бесконечное число других неотрицательных решений.

7. Раз речь уже зашла о неограниченных областях, читателю предлагается решить необязательную задачу.

Задача 14*. Докажите следующую теорему типа Фрагмена — Линделефа для гармонических функций (о теоремах этого типа см. Е. М. Ландис. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971, гл. I, § 6): если $u(x, y)$ — непрерывная функция в угле $D = \{(x, y): |y| \leq x \operatorname{tg} \alpha/2\}$, гармоническая внутри угла и равная нулю на сторонах, и если $u(x, y) = o((\sqrt{x^2 + y^2})^{\pi/\beta})$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, где $\beta > \alpha$, то $u(x, y) \equiv 0$.

Указание. Положим $D_R = D \cap \{(x, y): \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}$; τ_R — первый момент выхода двумерного винеровского процесса

w_t из D_R . Функция $z^{\pi/\beta}$ — аналитическая в угле D ; $\operatorname{Re}(x + iy)^{\pi/\beta}$ — гармоническая функция в том же угле. Пользуясь этим, выведите оценку

$$\mathbf{P}_{x,y}\left\{ |w_{\tau_R}| = R \right\} \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^{\pi/\beta} / [R^{\pi/\beta} \cos(\pi a/(2\beta))].$$

Далее используйте формулу $u(x, y) = \mathbf{M}_{x,y} u(w_{\tau_R})$.

8. У нас есть три способа использования марковских моментов: равенства, связанные с мартингалами, стохастические интегралы и строго марковское свойство. В этом параграфе мы показали, как применяются два первых способа; интересные результаты можно получить и при помощи строго марковского свойства.

Задача 15*. Пусть (w_t, \mathbf{P}_x) — семейство винеровских процессов, D — произвольное замкнутое множество, Γ — борелевское подмножество его границы. Докажите, что $\rho(x) = \mathbf{P}_x\{w_\tau \in \Gamma\}$ — гармоническая функция внутри D .

9. Какой вид принимают результаты п. 2 для вырожденных диффузий и параболических уравнений? Рассмотрим только случай диффузии с производящим оператором $\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}$, т. е. двумерной диффузии ($w_t, \eta_t = \eta_0 + t$).

Пусть D — замкнутая область вида $\{(x, y): 0 \leq y \leq T, f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}$, где f_1 и f_2 — трижды непрерывно дифференцируемые функции (рис. 33).

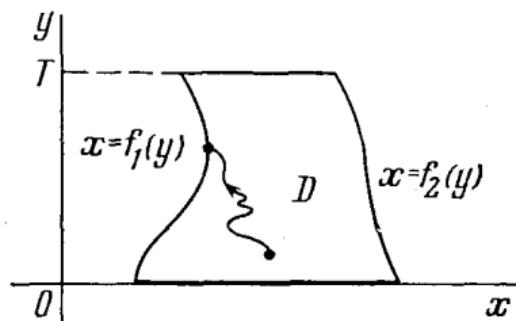


Рис. 33

Теорема существования и единственности (Фридман, 1968, гл. III, § 3). Пусть в криволинейном четырехугольнике D задана непрерывно дифференцируемая функция $g(x, y)$, на боковых сторонах — трижды непрерывно дифференцируемые функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$, на верхнем основании — трижды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, причем выполняются условия согласования: $\varphi'_i(T) + \frac{1}{2} \varphi''(f_i(T)) + g(f_i(T), T) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда существует

ствует единственное решение $v(x, y)$, $(x, y) \in D$, уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = -g(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (8)$$

удовлетворяющее на боковых сторонах и на верхнем основании условиям

$$v(f_i(y), y) = \varphi_i(y), \quad i = 1, 2; \quad (9)$$

$$v(x, T) = \varphi(x), \quad (10)$$

причем это решение дважды непрерывно дифференцируемо вплоть до границы.

На нижнем основании никаких условий задавать не нужно.

Микротеорема 4. Пусть τ — момент выхода процесса (w_t, η_t) из D . Тогда функция

$$v(x, y) = M_{x, y} \left[\int_0^\tau g(w_s, \eta_s) ds + \chi_{\{\eta_\tau = T\}} \Phi(w_\tau) + \right. \\ \left. + \chi_{\{\eta_\tau < T, w_\tau = f_1(\eta_\tau)\}} \Phi_1(\eta_\tau) + \chi_{\{\eta_\tau < T, w_\tau = f_2(\eta_\tau)\}} \Phi_2(\eta_\tau) \right]$$

— единственное решение задачи (8) — (10).

Доказательство состоит в том, что мы продолжаем решение с сохранением гладкости за пределы области D , применяем к $v(w_t, y + t)$ формулу Ито и пользуемся формулой (4) с нужным изменением обозначений.

Зная связь краевых задач со случайными процессами, мы можем лучше понять, почему не нужно задавать никаких условий на нижнем основании D : точка (w_τ, η_τ) просто не может оказаться принадлежащей нижнему основанию. Столь же понятен и факт из теории дифференциальных уравнений, состоящий в том, что $v(x_0, y_0)$ не зависит от значений $g(x, y)$, $\varphi_i(y)$ при $y < y_0$.

10. Результаты п. 2 касались уравнения $Lv = -g$ и математических ожиданий функционалов от траекторий диффузационного процесса $\Phi(\xi_\tau) + \int_0^\tau g(\xi_s) ds$. Чтобы найти распределение $\int_0^\tau g(\xi_s) ds$, нужно рассматривать математическое ожидание вида $M_x \exp \left\{ \int_0^\tau c(\xi_s) ds \right\}$ и т. п. Для них доказывается

Микротеорема 5. Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — диффузия в R^r с производящим оператором L ; $c(x)$ — непрерывная действительная функция на R^r . Пусть $w(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в открытом множестве, причем в компакте D она является решением задачи Дирихле

$$Lw(x) + c(x)w(x) = -g(x), \quad x \in D; \quad (11)$$

$$w(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial D. \quad (12)$$

Пусть

$$\mathbf{M}_x \int_0^\tau \exp \left\{ 2 \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} w(x) = \mathbf{M}_x \left[\exp \left\{ \int_0^\tau c(\xi_s) ds \right\} \varphi(\xi_\tau) + \right. \\ \left. + \int_0^\tau \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} g(\xi_t) dt \right], \quad x \in D. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство проведем для диффузии, задаваемой стохастическим уравнением $d\xi_t = \sigma(\xi_t) dw_t + b(\xi_t) dt$. Положим

$$\begin{aligned} \eta_t = w(\xi_t) \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} - \\ - \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s c(\xi_u) du \right\} [Lw(\xi_s) + c(\xi_s) w(\xi_s)] ds. \end{aligned}$$

Применим формулу Ито:

$$\begin{aligned} d\eta_t = \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} \left\{ \sum_{ij} \frac{\partial w}{\partial x^i}(\xi_t) \sigma_j^i(\xi_t) dw_t^i + \right. \\ \left. + Lw(\xi_t) dt + w(\xi_t) c(\xi_t) dt - [Lw(\xi_t) + c(\xi_t) w(\xi_t)] dt \right\}. \end{aligned}$$

Члены с dt сокращаются. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \eta_\tau = \eta_0 + \int_0^\infty \chi_{\leqslant \tau}(t) \exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} \times \\ \times \sum_{ij} \frac{\partial w}{\partial x^i}(\xi_t) \sigma_j^i(\xi_t) dw_t^i \end{aligned}$$

(используем конечность $M_x \int_0^\tau \exp \left\{ 2 \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} dt$).

Берем M_x от обеих частей, получаем

$$w(x) = M_x \eta_0 = M_x \eta_\tau,$$

откуда вытекает (13).

Условие конечности $M_x \int_0^\tau \exp \left\{ 2 \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} dt$ выполнено,

но, во всяком случае, когда $c(x) \leq 0$ и $M_x \tau < \infty$. Оно также выполняется для $c(x) \leq c_0$, где c_0 — достаточно малая положительная константа, если выполнены условия задачи 1 (потому что распределение τ мажорируется показательным).

Это хорошо согласуется со следующим результатом из теории дифференциальных уравнений (Миранд, 1957, теоремы 21. I, 21. II, 21. III, 36. II): для фиксированных непрерывно дифференцируемых $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ и области D с гладкой границей можно указать положительную константу c_0 такую, что решение задачи Дирихле (11)–(12) существует для всех непрерывно дифференцируемых $c(x) \leq c_0$. Константа c_0 может быть выбрана сколь угодно большой, если выбрать область D с достаточно малой мерой Лебега.

Задача 16. Найдите преобразование Лапласа распределения момента τ выхода одномерного винеровского процесса из полупрямой $D = [0, \infty)$, т. е. $w_\lambda(x) = M_x e^{-\lambda \tau}$, $\lambda > 0$.

Задача 17*. Докажите, что если $M_x \tau \leq K < \infty$ в D , то $M_x e^{c\tau} \leq 1 + c M_x \tau / (1 - cK)$ при $0 \leq c < K^{-1}$.

К выводу микротеоремы 5 можно было бы применить теорему п. 4 § 10.3 и результаты, касающиеся мартингалов.

Задача 18*. Сохраняется ли результат микротеоремы 5, если условие $M_x \int_0^\tau \exp \left\{ 2 \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} dt < \infty$ заменить условием

$$M_x \int_0^\tau e^{c_0 t} dt < \infty, c_0 \geq c(x)?$$

§ 13.3. Регулярные и сингулярные точки границы

1. В этом параграфе мы будем говорить для простоты о задаче Дирихле для однородного уравнения $Lu = 0$.

В случае невырожденных диффузий и областей с гладкой границей $u(x) = M_x \Phi(\xi_\tau)$ непрерывно во всей замкнутой области D . Оказывается, для областей с негладкой границей точки ∂D делятся, вообще

говоря, на два класса: регулярные точки, приближении к которым функция u приближается к $\varphi(x)$, и сингулярные, для которых это не так. Определение регулярности можно дать и на языке дифференциальных уравнений, и на языке случайных процессов. Возьмем за основу вероятностное определение.

Пусть (ξ_t, P_x) — феллеровское марковское семейство с непрерывными справа траекториями, D — замкнутое множество, τ — момент выхода ξ_t из него. Точка $x_0 \in \partial D$ называется *регулярной* точкой границы D , если $P_{x_0}\{\tau = 0\} = 1$. Точка $x_0 \in \partial D$ называется *сингулярной*, если эта вероятность равна нулю. Иначе говоря, сингулярная точка — это такая, что траектория ξ_t , начинающаяся в ней, непременно хотя бы маленький промежуток времени проведет в D (рис. 34). Согласно блюменталевскому закону 0—1 (§ 9.2, п. 4), $P_{x_0}\{\tau = 0\}$ не может быть строго между 0 и 1.

Рис. 34

Примером регулярной точки может служить любая точка гладкой границы в случае невырожденной диффузии: из результатов п. 2 предыдущего параграфа вытекает, что $M_{x_0, \tau} = 0$ для $x_0 \in \partial D$.

Пример сингулярной точки:

Задача 1. Пусть D — единичный круг $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$, из которого выброшены кружочки $\{(x, y): (x - 1/2^n)^2 + y^2 \leq (1/2^n)^2\}$, $n = 2, 3, 4, \dots$. Докажите, что $(0, 0)$ — сингулярная точка границы D (для двумерного винеровского процесса).

Для процесса $(w_t, \eta_t = \eta_0 + t)$, соответствующего уравнению теплопроводности, и криволинейного четырехугольника D (рис. 33, § 13.2) точки верхнего основания регулярны (тривиальным образом); точки боковых сторон тоже регулярны (это вытекает из закона повторного логарифма — см. задачу 9* § 7.3); точки нижнего основания, кроме уголков, сингулярны (ясно).

Теорема 1. Если x_0 — регулярная точка границы, то для любого $h > 0$ вероятность $P_x\{\tau < h\} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует $\delta > 0$ такое, что $P_x\{\tau < h\} > 1 - \varepsilon$ при $\rho(x, x_0) < \delta$.

Пусть $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ — рациональные точки интервала $(0, h)$. Из $P_{x_0}\{\tau < h\} = 1$ вытекает,

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{x_0}(\{\xi_{r_1} \notin D\} \cup \{\xi_{r_2} \notin D\} \cup \dots \cup \{\xi_{r_n} \notin D\}) = 1.$$

Выберем n так, чтобы эта вероятность была больше $1 - \varepsilon/3$ или, если перейти к противоположному событию,

$$P_{x_0}\{\xi_{r_1} \in D, \dots, \xi_{r_n} \in D\} < \varepsilon/3.$$

Перепишем вероятность в виде математического ожидания

$$M_{x_0}\chi_D(\xi_{r_1}) \dots \chi_D(\xi_{r_n}).$$

Существует неотрицательная непрерывная функция $f(x)$, равная 1 на D и такая, что $M_{x_0}f(\xi_{r_1}) \dots f(\xi_{r_n}) < 2\varepsilon/3$. Действительно, в качестве такой функции можно взять

$$f(x) = f_N(x) = \exp\{-N\rho(x, D)\}$$

с достаточно большим N , так как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_{x_0}f_N(\xi_{r_1}) \dots f_N(\xi_{r_n}) = M_{x_0}\chi_D(\xi_{r_1}) \dots \chi_D(\xi_{r_n}).$$

Далее, из феллеровости марковского семейства вытекает, что функция $F(x) = M_x f(\xi_{r_1}) \dots f(\xi_{r_n})$ непрерывна; следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что $M_x f(\xi_{r_1}) \dots f(\xi_{r_n}) < \varepsilon$ при $\rho(x, x_0) < \delta$. Отсюда

$$P_x\{\xi_{r_1} \in D, \dots, \xi_{r_n} \in D\} < \varepsilon$$

и

$$P_x\{\tau < h\} > 1 - \varepsilon.$$

Теорема 2. Пусть (ξ_t, P_x) — феллеровская диффузия; D — замкнутое множество, τ — момент выхода из D ; $u(x) = M_x \varphi(\xi_\tau)$, где φ — функция, заданная на границе. Если x_0 — регулярная точка границы D , то для любой ограниченной непрерывной функции φ имеем: $u(x) \rightarrow \varphi(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in D$ (u , само собой, $u(x_0) = \varphi(x_0)$).

Доказательство. Пусть δ — произвольное положительное число. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при

$$\rho(x, x_0) < \epsilon \text{ было } |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta/3. \text{ Имеем}$$

$$|u(x) - \varphi(x_0)| = |\mathbf{M}_x[\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)]| \leq$$

$$\leq \mathbf{M}_x \chi_{\{\tau < h\}} |\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| + 2 \|\varphi\| \mathbf{P}_x \{\tau \geq h\}. \quad (1)$$

Первое математическое ожидание разобьем на две части: по событию

$$A_h = \{\xi_t \in U_\epsilon(x_0) \text{ для всех } t \leq h\}$$

и по его дополнению.

Задача 2. Докажите, что $\mathbf{P}_x(A_h) \rightarrow 1$ при $h \downarrow 0$ равномерно по $x \in U_{\epsilon/2}(x_0)$.

Выберем h так, чтобы $\mathbf{P}_x(A_h) > 1 - \delta/6\|\varphi\|$ для $x \in U_{\epsilon/2}(x_0)$; тогда

$$\mathbf{M}_x \chi_{\{\tau < h\}} [1 - \chi_{A_h}] |\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| < \frac{\delta}{3},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x \chi_{\{\tau < h\}} \chi_{A_h} |\varphi(\xi_\tau) - \varphi(x_0)| &\leq \\ &\leq \sup \{|\varphi(y) - \varphi(x_0)| : y \in U_\epsilon(x)\} \leq \frac{\delta}{3}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в (1) стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$ в силу теоремы 1; получаем, что

$$|u(x) - \varphi(x_0)| < \delta$$

в достаточно малой окрестности точки x_0 .

Напротив, когда x_0 — сингулярная точка (например, $(0, 0)$ для области задачи 1), можно указать ограниченную непрерывную функцию φ на ∂D , для которой $u(x)$ будет разрывно в точке x_0 и даже $u(x_0) \neq \varphi(x_0)$. Достаточно положить $\varphi(x) = \exp\{-\rho(x, x_0)\}$.

2. Теорема 3. Пусть (ξ_t, \mathbf{P}_x) — феллеровская диффузия с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами сноса и дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами диффузии, образующими в каждой точке невырожденную матрицу; D — произвольное замкнутое множество; φ — ограниченная борлевская функция, заданная на ∂D . Тогда функция $u(x) = \mathbf{M}_x \varphi(\xi_\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема во всех внутренних точках D , и $Lu = 0$.

Доказательство. Гладкость коэффициентов обеспечивает существование функции Грина для всех ограниченных областей с гладкой границей (Мирanda, 1957, гл. III, § 21, теорема 21.VI). Произ-

вольную внутреннюю точку окружим ограниченной замкнутой областью $D_1 \subset D$ с гладкой границей ∂D_1 ; обозначим через τ_1 момент первого выхода процесса из D_1 (рис. 35). Воспользуемся строго марковским свойством относительно марковского момента τ_1 (учитываем, что $\tau_1 \leq \tau$, $\theta_{\tau_1} \tau = \tau - \tau_1$, $\theta_{\tau_1} \xi_\tau = \xi_{\tau_1}$):

$$u(x) = M_x \varphi(\xi_\tau) = M_x \theta_{\tau_1} \varphi(\xi_\tau) = M_x M_{\xi_{\tau_1}} \varphi(\xi_\tau) = M_x u(\xi_{\tau_1}).$$

Но

$$M_x u(\xi_{\tau_1}) = \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial n_y} G_1(x, y) u(y) d\sigma_y,$$

где $G_1(x, y)$ — функция Грина области D_1 (см. предыдущий параграф, п. 4). Такой интеграл является непрерывной функцией от x внутри D_1 для любой ограниченной измеримой функции $u(y)$ на ∂D_1 . Внутри D_1 выберем область D_2 с гладкой границей; имеем точно так же

$$u(x) = \int_{\partial D_2} \frac{\partial}{\partial n_y} G_2(x, y) u(y) d\sigma_y. \quad (2)$$

Функция u на ∂D_2 непрерывна; согласно теоремам 21. I, 21. IV книги Миранда (1957) решение уравнения $Lu = 0$ внутри D_2 с непрерывными граничными условиями $u(y)$ на ∂D_2 существует и задается формулой (2). Но это означает, что функция u дважды непрерывно дифференцируема внутри D_2 и $Lu = 0$.

Теоремы 2 и 3 дают следующее. Пусть (ξ_t, P_x) — феллеровская диффузия с гладкими коэффициентами, причем матрица диффузии невырождена. Тогда для любой замкнутой области D и любой непрерывной ограниченной функции φ на ∂D существует функция

$$u(x) (= M_x \varphi(\xi_\tau)),$$

определенная на D , являющаяся решением уравнения $Lu = 0$ во внутренних точках D , и $u(x) \rightarrow \varphi(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in D$, для всех регулярных точек x_0 границы D .

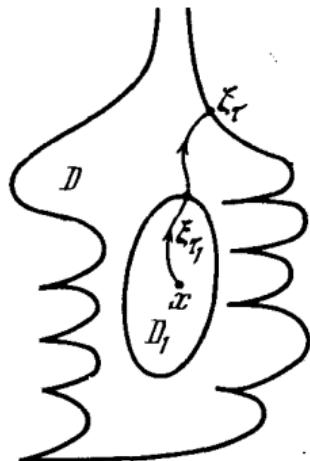


Рис. 35

Если решение задачи $\langle Lu = 0 \text{ внутри } D, u(x) \rightarrow \phi(x_0) \rangle$ при $x \rightarrow x_0$ для всех регулярных точек x_0 границы D » единственno, это значит, что мы нашли, как следует ставить задачу Дирихле для областей с плохими границами: в регулярных точках требовать определенных пределов, а в сингулярных ничего не требовать. Однако, вообще говоря, единственности здесь нет (пример — задача 13* § 13.2; можно построить пример и для ограниченной области, но с сингулярной точкой на границе). Для единственности нужно еще требовать по крайней мере ограниченности u . Не будем обсуждать этого вопроса здесь; отошлем читателя к книге Ито и Маккина (1968, § 7.12), где рассматривается случай многомерного винеровского процесса и открытой области.

С вопросом о правильной постановке задачи Дирихле в случае наличия сингулярных точек связан результат следующей задачи.

Задача 3. Обозначим через S множество сингулярных точек границы D . Докажите, что $P_x \{\xi_\tau \in S\} = 0$ для любого $x \in D$.

3. Мы увидели теперь важность понятия регулярности граничных точек. Рассмотрим некоторые примеры, связанные с этим понятием.

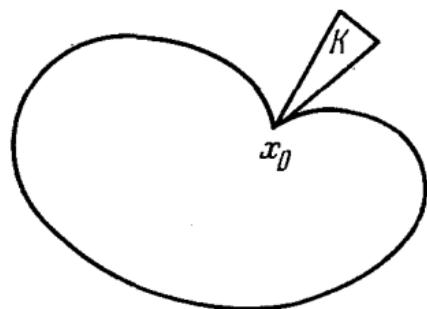


Рис. 36

Критерий Пуанкаре: для многомерного винеровского процесса, если точки $x_0 \in \partial D$ можно коснуться снаружи области маленьким конусом K (рис. 36), то эта точка регулярна.

Доказательство. Предположим, что точка x_0

сингулярна; тогда с P_{x_0} -вероятностью 1 момент τ_K первого достижения винеровской траекторией внутренности конуса K положителен (потому что $\tau_K \geq \tau$). Построим так много конусов K_1, \dots, K_n , конгруэнтных K , с вершиной x_0 , чтобы они закрыли целую окрестность точки x_0 . Из инвариантности винеровского процесса относительно вращений следует, что $P_{x_0} \{\tau_{K_i} > 0\} = 1$; иначе говоря, с вероятностью 1 процесс в течение положительного времени не достигает ни одной из точек внутри какого-либо из конусов, т. е. остается в точке x_0 . Но этого не может быть, хотя бы потому, что $P_{x_0} \{\omega_t = x_0\} = 0$ для любого $t > 0$.

Более тонкие критерии и примеры см. Ито и Маккин (1968, гл. 7).

Задача 4. Найдите регулярные и сингулярные точки границы квадрата $\{(x, y): |x|, |y| \leq 1\}$ относительно диффузии $(w_t, \eta_t = \eta_0 + \int_0^t w_s ds)$. Иначе говоря: на какой части границы этого квадрата нужно задавать граничные условия для уравнения $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$?

О. А. Олейник (О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа // Мат. сб. — 1949. — Т. 24. — С. 3—14) доказала, что регулярные (сингулярные) точки будут одни и те же для операторов

$$L = \frac{1}{2} \sum a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

и

$$L' = \frac{1}{2} \sum a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum b'^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(матрица (a^{ij}) предполагается невырожденной). Этот результат можно получить, воспользовавшись теорией случайных процессов. А именно, мы уже говорили (§ 12.5), что распределения соответствующих случайных процессов ξ_t, ξ'_t в $((R')^{[0, T]}, (\mathcal{B}')^{[0, T]})$ абсолютно непрерывны относительно друг друга; значит, из событий, определяемых по конечному промежутку времени, для них одни и те же имеют вероятность 0. В частности, это относится и к событиям $\{\tau = 0\}, \{\tau > 0\}$.

Локальный закон повторного логарифма (задача 9* § 7.3) — утверждение о регулярности или сингулярности точки $(0, 0)$ для определенных областей относительно диффузии $(w_t, \eta_t = \eta_0 + t)$ (рис. 37). Результат теоремы 3 переносится и на этот процесс, что дает возможность перевести закон повторного логарифма на язык дифференциальных уравнений:

для любой непрерывной функции ϕ на границе области

$$D = \{(x, y): 0 \leq y \leq y_0, |x| \leq (1 - \varepsilon) \sqrt{2y \ln |\ln y|}\},$$

$\varepsilon > 0$, существует решение уравнения $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ внутри D , принимающее на ∂D граничные значения ϕ ;

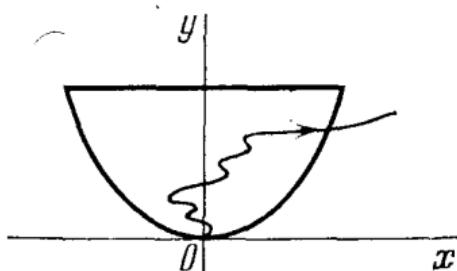


Рис. 37

для области

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq y_0, |x| \leq (1 + \epsilon) \sqrt{2y \ln |\ln y|}\}$$

существует непрерывная функция φ на ∂D такая, что решения задачи: $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ внутри D , $u = \varphi$ на ∂D не существует.

Результат статьи И. Г. Петровского (Zur ersten Randwert-aufgabe der Wärmeleitungsgleichung//Comp. Mach. — 1935. — Bd. 1. — S. 383—419), касающийся необходимых и достаточных условий существования непрерывного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях вида, изображенного на рис. 37, оказывается в то же время решением теоретико-вероятностной задачи: пусть w_t — одномерный винеровский процесс, выходящий из нуля; для каких функций $f(t)$ с вероятностью 1 $|w_t| \leq f(t)$ при достаточно малых t ?

Читателю, который хочет узнать больше о связи диффузий с уравнениями в частных производных и теорией потенциала, полезно прочесть гл. 7—8 книги Ито и Маккина (1968).

Задача 5*. Постарайтесь понять, каков теоретико-вероятностный смысл неравенства Харнака: для любой открытой области D и любых ее двух точек x, y существует константа C такая, что для любой неотрицательной гармонической в D функции $u(x)$ выполняется неравенство $C^{-1}u(x) \leq u(y) \leq Cu(x)$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§ 1.2

1. Нужно доказать, что для любого множества $C \in \mathcal{B}^n$ и любых действительных h, t_1, \dots, t_n

$$\mathbf{P}\{(A \cos [\eta(t_1 + h) + \varphi], \dots, A \cos [\eta(t_n + h) + \varphi]) \in C\} = \\ = \mathbf{P}\{(A \cos (\eta t_1 + \varphi), \dots, A \cos (\eta t_n + \varphi)) \in C\}. \quad (*)$$

Обозначим через B множество троек (x, y, z) , $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \in [0, 2\pi]$, таких, что $(x \cos(yt_1 + z), \dots, x \cos(yt_n + z)) \in C$; это множество — борелевское. Для любого действительного z положим $(z)_{2\pi} = z - 2\pi k$, где k — целая часть от $z/(2\pi)$. Тогда $(*)$ перепишется в виде

$$\mathbf{P}\{A, \eta, (\varphi + \eta h)_{2\pi} \in B\} = \mathbf{P}\{(A, \eta, \varphi) \in B\}.$$

Теперь учтем, что (A, η) и φ независимы, т. е. их совместное распределение представляется в виде произведения двумерного и одномерного: $\mu_{A\eta\varphi} = \mu_{A\eta} \times \mu_\varphi$, — и воспользуемся теоремой Фубини. Получим, что требуется доказать равенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mu_{A\eta}(dx dy) \mu_\varphi \{z: (x, y, (z + yh)_{2\pi}) \in B\} = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty \mu_{A\eta}(dx dy) \mu_\varphi \{z: (x, y, z) \in B\}.$$

Но множество под знаком μ_φ в левой части получается из множества в правой части сдвигом на yh и приведением по модулю 2π ; распределение μ_φ — равномерное, т. е. не меняющееся при сдвиге, обе части равны, и все доказано.

2. Функции $a_n(t)$ — неубывающие; из сходимости последовательности неубывающих функций к непрерывной неубывающей функции на всюду плотном подмножестве отрезка, включающем его концы, вытекает равномерная сходимость; значит, достаточно доказать, что $\mathbf{P}\{a_n(t) \rightarrow t\} = 1$ для всех $t = k/2^n$. Для

$$n \geq m \text{ имеем } \mathbf{M}(a_n(t) - t)^2 = 2t \cdot 2^{-n}, \quad \mathbf{M} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) - t)^2 = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}(a_n(t) - t)^2 < \infty. \text{ Раз у суммы ряда } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) - t)^2$$

конечное математическое ожидание, то с вероятностью 1 он сходится, и $\alpha_n(t) \rightarrow t$.

4. Достаточно проверить, что для любых $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ независимы случайные векторы $(w_{t_1}^1, w_{t_2}^1, \dots, w_{t_n}^1), \dots, (w_{t_1}^r, w_{t_2}^r, \dots, w_{t_n}^r)$. Их совместное распределение — гауссовское, и, чтобы установить независимость, достаточно проверить, что любая координата i -го вектора и любая координата j -го, $j \neq i$, некоррелированы.

5. Легко проверить, что $\tilde{w}_t = (w_t^1 + w_t^2)/\sqrt{2}$ — также винеровский процесс; поэтому

$$\begin{aligned} & \text{1. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}}^1 - w_{t_i}^1)(w_{t_{i+1}}^2 - w_{t_i}^2) = \\ & = \frac{1}{2} \left[\text{1. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} 2(\tilde{w}_{t_{i+1}} - \tilde{w}_{t_i})^2 - \text{1. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}}^1 - w_{t_i}^1)^2 - \right. \\ & \quad \left. - \text{1. i. m. } \sum_{i=0}^{n-1} (w_{t_{i+1}}^2 - w_{t_i}^2)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} [2(b-a) - (b-a) - (b-a)] = 0. \end{aligned}$$

6. Для $0 < t_1 < \dots < t_n$ находим плотность:

$$p_{\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\pi^{-1}(t_i - t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2},$$

где $x_0 = t_0 = 0$.

7. Рассмотрим случайные векторы $\eta_i = (\chi_{(-\infty, F^{-1}(t_1)]}(\xi_i), \dots, \chi_{(-\infty, F^{-1}(t_k)]}(\xi_i))$, $1 \leq i \leq n$. Легко видеть, что $(\sqrt{n} Y_n(t_1), \dots, \sqrt{n} Y_n(t_k)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\eta_i - M\eta_i)$; по многомер-

ной центральной предельной теореме для одинаково распределенных слагаемых распределение этого вектора сходится к нормальному с нулевым средним и такой же матрицей ковариаций, как у η_i . (Что касается последней, то $\text{cov}(\chi_{(-\infty, F^{-1}(t)]}(\xi_i)) = s \wedge t - st$.)

8. Берем разбиение $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$ множества X на непересекающиеся множества конечной меры; рассматриваем конечные меры $m_i(A) = m(A \cap X_i)$; с помощью счетного числа независимых величин $v_1, \xi_{11}, \xi_{12}, \dots, v_2, \xi_{21}, \xi_{22}, \dots, v_i, \xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots$ строим независимые пуассоновские меры π_i со средними m_i . Полагаем $\pi(A) = \pi(A_1) + \pi(A_2) + \dots$

9. Рассмотрим построение пуассоновской меры π со средним m при помощи независимых случайных величин v, ξ_1, ξ_2, \dots . Чтобы π -мера какого-то одноточечного множества была больше 1, необходимо, чтобы совпали какие-нибудь две величины $\xi_i = \xi_j, i, j \leq v$. Но $P\{\xi_i = \xi_j\} = (m \times m) \{(x, x)\} = \int_{\Omega} m\{x\} m(dx)$.

Для случайной меры, по которой строится пуассоновский процесс, $m = a \cdot \text{mes}$, и утверждение вытекает из того, что мера Лебега от одноточечного множества равна нулю.

10. Найдем, скажем (для $t_1 < t_2 < t_3$), $P\{\eta_{t_1} = -1, \eta_{t_2} = 1, \eta_{t_3} = 1\} = P\{\text{выпал герб}, \xi_{t_1} \text{ нечетно}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \text{ нечетно}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2} \text{ четно}\} + P\{\text{выпала решка}, \xi_{t_1} \text{ четно}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1} \text{ нечетно}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2} \text{ четно}\} = [P\{\text{выпал герб}\} P\{\xi_{t_1} \text{ нечетно}\} + P\{\text{выпала решка}\} \times \times P\{\xi_{t_1} \text{ четно}\}] P\{\xi_{t_2} - \xi_{t_1} \text{ нечетно}\} P\{\xi_{t_3} - \xi_{t_2} \text{ четно}\}$. Вероятность в квадратных скобках равна $1/2$; $P\{\xi_{t_2} - \xi_{t_1} \text{ нечетно}\} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a(t_2 - t_1))^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-a(t_2 - t_1)} = (1 - e^{-2a(t_2 - t_1)})/2, \text{ а третья}$$

вероятность есть $(1 + e^{-2a(t_3 - t_2)})/2$. Ясно, как находится вероятность любых значений $\eta_{t_1}, \dots, \eta_{t_n}$.

11. Интеграл сходится почти наверное, если сходится $\int_{(0, t]} \int_{R^1} \min(|f(s, u)|, 1) m(ds du)$. Характеристическая функция $\xi_{t'} - \xi_t$ равна $\exp \left\{ \int_{(t, t']} \int_{R^1} (e^{izf(s, u)} - 1) m(ds du) \right\}$. Сначала

рассматриваются функции f , принимающие конечное число значений; для произвольных f , согласно определению интеграла, используется предельный переход.

12. Согласно определению достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число K такое, что

$$\int_{\{\omega: |\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| > K\}} |\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| P(d\omega) < \varepsilon$$

для всех $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$. Почти наверное $|\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| \leq M(|\xi||\mathcal{A}|)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\{|\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| > K\}} |\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| dP &\leq \int_{\{|\mathbf{M}(\xi|\mathcal{A})| > K\}} M(|\xi||\mathcal{A}|) dP \leq \\ &\leq \int_{\{M(|\xi||\mathcal{A}|) > K\}} M(|\xi||\mathcal{A}|) dP = \int_{\{M(|\xi||\mathcal{A}|) > K\}} |\xi| dP \end{aligned}$$

(последнее — по определению условного математического ожидания: ведь область интегрирования \mathcal{A} -измерима). Но известно, что если ξ — интегрируемая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\int_A |\xi| dP < \varepsilon$, как только $P(A) < \delta$.

Значит, достаточно указать такое K , что $P\{M(|\xi| | \mathcal{A}) > K\} < \delta$ для всех \mathcal{A} . Неравенство Чебышёва дает нам

$$P\{M(|\xi| | \mathcal{A}) > K\} \leq K^{-1} M M(|\xi| | \mathcal{A}) = K^{-1} M |\xi|;$$

итак, достаточно взять $K = \delta^{-1} M |\xi|$.

§ 1.3

1. $\sum_{j, k} c_j \bar{c}_k K(t_j, t_k) = \text{cov} \left(\sum_j c_j \xi_{t_j}, \sum_k c_k \xi_{t_k} \right) \geq 0$ (это — дисперсия).

2. 1. $M\xi_t = 0$; $K(t, s) = \int_0^\infty \cos \lambda (t-s) \mu(d\lambda)$, где мера μ на $[0, \infty)$ определяется так: $\mu(B) = \frac{1}{2} M A \chi_B(\eta)$. Вывод см. в § 4.1.

2. $Mw_t = x_0$; для $s \leq t$ имеем $K(t, s) = \text{cov}(w_t, w_s) = \text{cov}(w_s, w_s) + \text{cov}(w_t - w_s, w_s - w_0) = D w_s + 0 = s$. Учитывая и случай $s > t$, получаем $K(t, s) = t \wedge s$.

4. $M\xi_t$ и $K(t, s)$ не существуют.

5. $M\sqrt{n} Y_n(t) = 0$, $K_{\sqrt{n} Y_n}(t, s) = t \wedge s - ts$ (см. решение задачи 7 § 1.2).

7. $M\xi_t = at$; $K(t, s) = a \cdot (t \wedge s)$ (аналогично примеру 2).

8. Пользуясь результатом задачи 10 § 1.2, находим $M\eta_t = 0$; $K(t, s) = M\eta_t \eta_s = 1 \cdot P\{\eta_t = \eta_s\} + (-1) \cdot P\{\eta_t = -\eta_s\} = (1 + e^{-2a|t-s|})/2 - (1 - e^{-2a|t-s|})/2 = e^{-2a|t-s|}$.

3. $K(t, s) = d_1 f_1(t) \overline{f_1(s)} + \dots + d_n f_n(t) \overline{f_n(s)}$.

4. Пусть сначала $\xi(t, \omega)$ — ступенчатая случайная функция на T с точками скачков $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, т. е. имеются случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такие, что $\xi(t, \omega) = \xi_0(\omega)$ при $t < t_1$, $\xi(t, \omega) = \xi_1(\omega)$ при $t_1 \leq t < t_2, \dots, \xi(t, \omega) = \xi_{n-1}(\omega)$ при $t_{n-1} \leq t < t_n$, $\xi(t, \omega) = \xi_n(\omega)$ при $t \geq t_n$. Тогда функция $\xi(\cdot, \cdot)$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$; действительно, для любого измеримого подмножества A пространства X , в котором лежат значения $\xi(t, \omega)$,

$$\begin{aligned} &\{(t, \omega): \xi(t, \omega) \in A\} = \\ &= (T \cap (-\infty, t_1)) \times \{\omega: \xi_0(\omega) \in A\} \cup [t_1, t_2) \times \{\omega: \xi_1(\omega) \in A\} \cup \dots \\ &\dots \cup [t_{n-1}, t_n) \times \{\omega: \xi_{n-1}(\omega) \in A\} \cup (T \cap [t_n, \infty)) \times \{\omega: \xi_n(\omega) \in A\}. \end{aligned}$$

Все слагаемые здесь по определению принадлежат $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, значит, и сумма принадлежит этой σ -алгебре.

Теперь пусть $\xi(t, \omega)$ — произвольная случайная функция с реализациями, непрерывными справа. Определим случайную функцию $\xi_n(t, \omega)$, положив ее равной $\xi([2^n t] + 1)/2^n, \omega)$ для всех $t \in T$, за исключением тех, для которых $([2^n t] + 1)/2^n \notin T$; для этих оставшихся t определим $\xi_n(t, \omega)$ как $\xi(b, \omega)$, если b — правый конец отрезка T , и как произвольный элемент $x_0 \in X$, если у отрезка T нет правого конца. Так как $([2^n t] + 1)/2^n \downarrow t$ при $n \rightarrow \infty$, то $\xi_n(t, \omega) \rightarrow \xi(t, \omega)$ при всех (t, ω) . По доказанному

функции $\xi_n(\cdot, \cdot)$ измеримы относительно $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}$, значит, измерим и их предел $\xi(\cdot, \cdot)$. (Напомним, что X — метрическое пространство, а в качестве σ -алгебры \mathcal{X} взята σ -алгебра \mathcal{B}_X борелевских подмножеств X .)

Если реализации непрерывны слева, доказательство остается тем же, только вместо $[2^n t] + 1$ берется $[2^n t]$.

5. Отображение $\omega \rightarrow \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ измеримого пространства (Ω, \mathcal{F}) в измеримое пространство (X, \mathcal{X}) измеримо как произведение измеримых отображений $\omega \rightarrow (\tau(\omega), \omega)$ пространства (Ω, \mathcal{F}) в $(T \times \Omega, \mathcal{T} \times \mathcal{F})$ и $(t, \omega) \rightarrow \xi_t(\omega)$ пространства $(T \times \Omega, \mathcal{T} \times \mathcal{F})$ в (X, \mathcal{X}) .

§ 1.4

1*. Необходимое и достаточное условие: существует y_0 такое, что $P\{\eta = y_0\} = 1$; распределение A — показательное (т. е. $P\{A = 0\} = 1$ или A имеет плотность ae^{-ax} при $x > 0$).

$$2. M\xi_t = 0; K_\xi(t, s) = e^{-t}e^{-s}(e^{2t} \wedge e^{2s}) = e^{t-s} \wedge e^{s-t} = e^{-|t-s|}.$$

§ 2.1

1. Полагаем $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$; находим $K_{\eta\eta}(n, m) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n \wedge_m$; применяем микротеорему 1 § 2.1.

2. Совместное распределение (ζ_n, ζ_{2n}) сходится к нормальному с параметрами $((0, 0); \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix})$, а распределение (ζ_n, ζ_n) — кциальному $((0, 0); \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$. Значит, предел $\mu_{\zeta_n \zeta_m}$ при $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ не существует, и не существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (P) \zeta_n$.

3. Указание. Воспользоваться микротеоремой 2 § 2.1. Другой способ решения: положить $\eta_t = \operatorname{arctg} \xi_t$ и применить микротеорему 1 § 2.1.

4. Имеем при $t \neq t_0$

$$P\{|\xi_t - \xi_{t_0}| \geq \varepsilon\} = \iint_{|x-y| \geq \varepsilon} p(x)p(y) dx dy.$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ это выражение стремится к

$$\iint_{x \neq y} p(x)p(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y) dx dy = 1;$$

значит, при каком-то положительном ε оно $> 1/2$. При этом ε имеем

$$P\{|\xi_t - \xi_{t_0}| \geq \varepsilon\} \not\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0),$$

т. е. сходимость по вероятности не имеет места.

5—7. Доказательства, известные нам для числовых функций, переносятся на случайные функции.

8, 9. Следуют из микротеорем 1, 2 § 2.1.

10. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $t_0 \in [a, b]$ существует такая окрестность U точки t_0 , что для $t \in U$ имеет место неравенство $\|f_t - f_{t_0}\| \leq \varepsilon \cdot |t - t_0|$. Предположим, что $f_t \neq f_a$ для какого-то $t \in [a, b]$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\|f_t - f_a\| > \varepsilon \cdot (t - a)$. Обозначим через t_0 нижнюю грань всех таких t . Ясно, что в этой точке должно быть $\|f_{t_0} - f_a\| = \varepsilon \times (t_0 - a)$: ведь для $t \in [a, t_0]$ выполняется неравенство $\|f_t - f_a\| \leq \varepsilon \cdot (t - a)$; для t , сколь угодно близких к t_0 справа, — выполняется противоположное неравенство, а функция f непрерывна (потому что дифференцируема). Получаем, что для t , близких к t_0 справа, имеет место неравенство $\|f_t - f_a\| = \|f_t - f_{t_0} + (f_{t_0} - f_a)\| \leq \|f_t - f_{t_0}\| + \|f_{t_0} - f_a\| \leq \varepsilon \cdot |t - t_0| + \varepsilon(t_0 - a) = \varepsilon(t - a)$, что противоречит определению t_0 .

11. Доказательство не приводится. Используются непрерывность скалярного произведения и микротеорема I § 2.1.

12. Имеем $M_{\xi_t} \equiv m$, $K_{\xi_t}(t, s) = K(t - s)$. Математическое ожидание дифференцируемо (с нулевой производной), так что все дело в том, сколько раз можно взять смешанную вторую производную от корреляционной функции. Частное дифференцирование по t функции от $t - s$ сводится к взятию производной от функции одного переменного, а дифференцирование по s — к взятию производной с обратным знаком. Функция K дифференцируема четыре раза, а $K^V(0)$ не существует; значит, процесс дифференцируем в среднем квадратическом два раза, а три — уже нет.

14*. $p_{\xi_t}(z) = (2\pi)^{-1} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{1 - \sqrt{1 - z^2}}$ при $|z| < 1$, $p_{\xi_t}(z) = 0$ при $|z| \geq 1$.

15. Распределение (ξ_0, ξ'_0) — гауссовское как предел совместных распределений $\xi_0, (\xi_h - \xi_0)/h$. Это гауссовское распределение имеет нулевое среднее и матрицу ковариаций

$$\begin{pmatrix} K & \partial K / \partial s \\ \partial K / \partial t & \partial^2 K / \partial t \partial s \end{pmatrix}_{t=s=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это означает, если сказать по-другому, что ξ_0 и ξ'_0 независимы и имеют нормальные распределения со средними 0 и дисперсиями соответственно 1 и 4.

18. Достаточно провести доказательство при $p = 1$ (потому что из сходимости в среднем в степени $p > 1$ следует сходимость в среднем в первой степени). Интеграл в правой части существует в силу теоремы Фубини, потому что

$$\int_a^b \int_{\Omega} |\xi_t(\omega)| dt P(d\omega) \leq (b-a) \max_{a \leq t \leq b} M|\xi_t| < \infty.$$

Интеграл слева в (1) — предел в среднем интегральных сумм $\sum_{i=1}^n \xi_{s_i} \cdot (t_i - t_{i-1})$ при измельчении разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots$

$\dots < t_n = b$, $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$, а интеграл справа можно представить в виде суммы $\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi_t dt$. Оценим математическое ожидание модуля разности i -х слагаемых:

$$\begin{aligned} M \left| \xi_{s_i} (t_i - t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \xi_t dt \right| &= M \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi_t - \xi_{s_i}) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} M |\xi_t - \xi_{s_i}| dt \leq (t_i - t_{i-1}) \cdot \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} M |\xi_t - \xi_{s_i}|. \end{aligned}$$

Так как процесс, непрерывный в среднем, равномерно непрерывен в среднем, то, выбирая $\delta > 0$ так, чтобы при $|t - s| < \delta$, выполнялось неравенство $M |\xi_t - \xi_s| < \varepsilon$, получаем, что для разбиений с отрезками длины меньше δ математическое ожидание модуля разности интегральной суммы и интеграла вдоль траектории не превосходит $\varepsilon \cdot (b - a)$. Значит, интегралы в обоих смыслах являются пределами в среднем интегральных сумм, а значит, они с вероятностью 1 совпадают.

19. Это распределение — гауссовское (доказательство для данного частного случая не приводим, чтобы не дублировать решения задачи 3 § 3.1); средние равны 0, а матрица ковариаций имеет вид

$$\begin{Bmatrix} K_{ww}(t, t) & \int_0^t K_{ww}(t, s) ds \\ \int_0^t K_{ww}(u, t) du & \int_0^t \int_0^t K_{ww}(u, s) du ds \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{pmatrix}$$

(мы помним, что $K_{ww}(t, s) = t \wedge s$). Плотность распределения равна

$$(2\pi t^2/\sqrt{12})^{-1} \exp \{-(6t^{-3}x^2 - 6t^{-2}xy + 2t^{-1}y^2)\}.$$

20. $M\xi_t = 0$, $K_{\xi\xi}(t, s) = e^{-|t-s|}/6 - e^{-2|t-s|}/12$. Это — стационарный процесс.

$$21. M \left| \int_0^T e^{i\lambda t} \xi_t dt \right|^2 = \int_0^T \int_0^T M e^{i\lambda t} \xi_t \overline{e^{i\lambda s} \xi_s} dt ds = \int_0^T \int_0^T e^{i\lambda t} e^{-i\lambda s} \times$$

$\times K(t - s) dt ds$. Сделаем замену переменных $t - s = u$, $(t + s)/2 = v$; получим $\int_{-T}^T (T - |u|) e^{i\lambda u} K(u) du$. При $T \rightarrow \infty$ это

выражение есть $T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} K(u) du + o(T)$.

22*. Естественно, коэффициенты Фурье должны получаться по формуле

$$X_n = 4\pi^{-1} \int_0^{\pi/2} \sin((2n-1)t) w_t dt.$$

Совместное распределение любого числа X_n — гауссовское. Ясно, что $\mathbf{M}X_n = 0$, а чтобы найти дисперсии и ковариации этих случайных величин, перейдем к стохастическим интегралам:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{-4\pi^{-1}}{2n-1} \int_0^{\pi/2} w_t d \cos((2n-1)t) = \\ &= \frac{4\pi^{-1}}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \cos((2n-1)t) dw_t \end{aligned}$$

(вненинтегральный член обращается в нуль). Отсюда

$$\mathbf{M}X_n X_m = \frac{16\pi^{-2}}{(2n-1)(2m-1)} \int_0^{\pi/2} \cos((2n-1)t) \cos((2m-1)t) dt.$$

При $m \neq n$ этот интеграл обращается в 0, а при $m = n$ дает $4\pi^{-1}/(2n-1)^2$.

Сходимость ряда Фурье вытекает из сходимости ряда из $\mathbf{D}X_n$, а то, что его сумма равна w_t (почти наверное), выводится из полноты системы $\{\sin((2n-1)t), n = 1, 2, \dots\}$ на отрезке от 0 до $\pi/2$.

§ 2.2

1. Имеем: $A'_2 = A_1 \cap A_2$, $A'_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$; почти наверное $\xi(A_1) + \xi(A_2) = \xi(A_1 \setminus A_2) + \xi(A_1 \cap A_2) + \xi(A_2 \setminus A_1) + \xi(A_1 \cap A_2) = \xi((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)) + 2\xi(A_1 \cap A_2)$.

2. Достаточно доказать существование конечного

$$\lim_{\substack{s \rightarrow t^- \\ u \rightarrow t^-}} \mathbf{M}(\xi_s - \xi_{t_0})(\overline{\xi_u - \xi_{t_0}}).$$

3. Задачу во много раз проще решить самому, чем смотреть в ответ. Равенство (с вероятностью 1) стохастических интегралов докажите сначала для простых g .

4. Прежде всего нужно проверить, что оба интеграла имеют смысл. Для стохастического интеграла в левой части:

$$\int_X \left| \int_a^b f(x, y) dy \right|^2 m(dx) \leq (b-a)^2 \int_X \max_{a \leq y \leq b} |f(x, y)|^2 m(dx) < \infty.$$

Для интеграла в правой части достаточно проверить, что $\int_X f(x, y) \xi(dx)$ — непрерывная в среднем квадратическом слу-
чайная функция от y . Имеем:

$$\mathbf{M} \left| \int_X f(x, y') \xi(dx) - \int_X f(x, y) \xi(dx) \right|^2 = \\ = \int_X |f(x, y') - f(x, y)|^2 m(dx).$$

При $y' \rightarrow y$ функция под знаком интеграла стремится к 0, при-
чем она мажорируется интегрируемой по мере m функцией
 $4 \max_{a \leq y \leq b} |f(x, y)|^2$; поэтому предел интеграла равен 0, и

$$\text{l. i. m. } \int_X f(x, y') \xi(dx) = \int_X f(x, y) \xi(dx).$$

Для разбиения $a = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = b$ отрезка
от a до b положим $\tilde{f}(x, y) = f(x, y_i)$ при $y_i \leq y < y_{i+1}$. Ясно,
что

$$\int_a^b \left[\int_X f(x, y) \xi(dx) \right] dy = \text{l. i. m.} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \int_X f(x, y_i) \xi(dx) = \\ = \text{l. i. m.} \int_X \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) f(x, y_i) \xi(dx) = \\ = \text{l. i. m.} \int_X \left[\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy \right] \xi(dx)$$

при измельчении разбиения; докажем, что этому же пределу
равен и $\int_X \left[\int_a^b f(x, y) dy \right] \xi(dx)$, — тогда все будет доказано.

Снова пользуемся формулой для дисперсии стохастического ин-
теграла:

$$\mathbf{M} \left| \int_X \left[\int_a^b \tilde{f}(x, y) dy \right] \xi(dx) - \int_X \left[\int_a^b f(x, y) dy \right] \xi(dx) \right|^2 = \\ = \int_X \left| \int_a^b [\tilde{f}(x, y) - f(x, y)] dy \right|^2 m(dx).$$

Функция под знаком интеграла здесь также стремится к нулю
(при измельчении разбиения), и она мажорируется функцией

4 $(b-a)^2 \max_{a \leq y \leq b} |f(x, y)|^2$. Нужное нам предельное соотношение доказано, а с ним доказана и вся микротеорема о возможности перемены порядка интегрирования.

5. Положим $f^*(t) = f(s_i)$ при $t_i < t \leq t_{i+1}$ ($f(s_0)$ в точке a); тогда рассматриваемая интегральная сумма есть

$$\int_a^b f^*(t) d\xi_t. \text{ Имеем}$$

$$\begin{aligned} M \left| \int_a^b f(t) d\xi_t - \int_a^b f^*(t) d\xi_t \right|^2 &= \\ &= M \left| \int_a^b [f(t) - f^*(t)] d\xi_t \right|^2 = \int_a^b |f(t) - f^*(t)|^2 dF(t) \leqslant \\ &\leqslant [F(b) - F(a)] \max_{0 \leq i \leq n} \max_{t, s \in [t_i, t_{i+1}]} |f(t) - f(s)|^2, \end{aligned}$$

что стремится к нулю при измельчении разбиения.

Вывод правила интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) d\xi_t &= \text{l. i. m.} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) = \\ &= \text{l. i. m.} \left[f(b) \xi_b - f(a) \xi_a - \sum_{i=0}^{n-1} \xi_{t_{i+1}} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) \right] = \\ &= f(b) \xi_b - f(a) \xi_a - \int_a^b \xi_t f'(t) dt. \end{aligned}$$

§ 3.1

1. Для любого пространства с конечной мерой (X, \mathcal{X}, μ) в пространстве $L^2(X, \mathcal{X}, \mu)$ всюду плотно множество функций вида $f(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{A_k}(x)$, $A_k \in \mathcal{X}$. Если σ -алгебра \mathcal{X} порождается алгеброй \mathcal{A} ($\mathcal{X} = \sigma(\mathcal{A})$), то всюду плотно и множество линейных комбинаций индикаторов множеств $A_k \in \mathcal{A}$. В данном случае в качестве \mathcal{A} можно взять систему множеств вида $\{(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) \in B\}$.

2. Легко видеть, что всюду плотно множество случайных величин вида $f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$, $t_1, \dots, t_n \in T$, где f — функция не только измеримая, а непрерывная и ограниченная. Выбирая $t_i^{(k)} \in T_0$, $t_i^{(k)} \rightarrow t_i$ при $k \rightarrow \infty$, получаем $f(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{P}) f(\xi_{t_1^{(k)}}, \dots, \xi_{t_n^{(k)}})$. Но для последовательности огра-

нических в совокупности случайных величин из сходимости по вероятности вытекает сходимость в среднем. Это доказывает нашу микротеорему.

Сепарабельность L_T^2 теперь выводится из сепарабельности пространств $L^2(d\mu_{t_1} \dots t_n)$.

3. Это будет так для величин вида $c_0 + c_1 \xi_{t_1} + \dots + c_n \xi_{t_n}$ (потому что любые линейные комбинации случайных величин, имеющих совместное гауссовское распределение, тоже будут иметь гауссовское распределение: проще всего это доказывается, по-видимому, с помощью характеристических функций). Если $\eta_i = 1, i. t. \eta_i^{(k)}$, где $\eta_i^{(k)}$ — величины указанного вида, то сходимость имеет место также и по вероятности, и «по распределению», т. е. совместные распределения $\eta_1^{(k)}, \dots, \eta_n^{(k)}$ сходятся к распределению (η_1, \dots, η_n) . Остается заметить, что слабый предел последовательности гауссовых распределений — тоже гауссовское распределение.

4*. Из непрерывности в среднем $\xi_t, t \in T$, вытекает сепарабельность пространства H_T^0 . Если H_T^0 конечномерно, то выбираем в нем ортогональный базис η_1, \dots, η_n и получаем, что имеет место представление первого рода. Если же это пространство бесконечномерно, то оно изоморфно $L^2[0, 1]$; зафиксируем некоторое изоморфное соответствие. Обозначим через w_t случайную величину из H_T^0 , соответствующую при этом изоморфизме функции $\chi_{[0, t]}$. Величины $w_t, 0 \leq t \leq 1$, образуют гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляцион-

ной функцией $Mw_t w_s = \int_0^1 \chi_{[0, t]}(u) \chi_{[0, s]}(u) du = s \wedge t$, т. е.

винеровский процесс. Если определить $f(t, \cdot)$ как функцию в $L^2[0, 1]$, соответствующую случайной величине ξ_t , получаем искомое представление.

5. $\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=k}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{ |\xi_n - a| < 1/m \}$ при любом натуральном k . Здесь все события $\{ |\xi_n - a| < 1/m \} \in \mathcal{F}_{\geq k}$, так что $\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \} \in \mathcal{F}_{\geq k}$ при любом k , т. е. $\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \} \in \mathcal{F}_{\geq +\infty}$.

Для второго события пользуемся представлением

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=k}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{s=n_0}^{\infty} \{ |\xi_n - \xi_s| < 1/m \}.$$

6. $A \in \mathcal{F}_{\geq +\infty}$, а значит, $A \in \mathcal{F}_{\{1, 2, \dots\}}$. Эта σ -алгебра порождается алгеброй $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{[1, n]}$; значит, для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное $n = n_{\varepsilon}$ и событие $A^{\varepsilon} \in \mathcal{F}_{[1, n]}$ такое,

что $P(A \Delta A^\varepsilon) < \varepsilon$. Ради A принадлежит $\mathcal{F}_{\geq n+1}$ — σ -алгебре, независимой от $\mathcal{F}_{[1, n]}$, то A и A^ε независимы: $P(AA^\varepsilon) = P(A)P(A^\varepsilon)$.

Левая часть отличается меньше чем на ε от $P(A)$; правая — от $P(A)^2$. Отсюда $|P(A) - P(A)^2| < 2\varepsilon$, а так как ε произвольно, то $P(A) = P(A)^2$ (A не зависит само от себя). У этого квадратного уравнения два корня: $P(A) = 0$ и $P(A) = 1$.

7. Для любого x имеем

$$F(x) = P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leqslant x\right\} = 0 \text{ или } 1;$$

a определится как точка, где F делает скачок.

8. Для стохастически непрерывного процесса $\mathcal{F}_{(t, t+)}$ содержит, во всяком случае, события, отличающиеся лишь на множества вероятности 0 от событий σ -алгебры $\mathcal{F}_{=t}$; так что в случае винеровского процесса для $\mathcal{F}_{(1, 1+)}$ закон 0—1 не будет выполняться. Для того же винеровского процесса и σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq 0+} = \mathcal{F}_{(0, 0+]}$ в § 9.2 доказывается закон 0—1 Блюменталя. Для пуассоновского процесса тривиальность σ -алгебры $\mathcal{F}_{\leq 0+}$ доказать совсем легко.

Еще пример. Процесс с двумя траекториями: $P\{\eta_t \equiv t\} = P\{\eta_t \equiv -t\} = 1/2$, $\mathcal{F}_{(0, 0+]} = \mathcal{F}_{(t, t+]} = \mathcal{F}_T$, и в каждой из этих σ -алгебр есть события вероятности $1/2 \neq 0, 1$.

9. $H_{\{1, 2, \dots\}}$ порождается ортогональными векторами $1, \xi_1, \xi_2, \dots$; произвольная случайная величина $\eta \in H_{\geq +\infty}$ ортогональна ξ_1, ξ_2, \dots , а значит, пропорциональна 1.

§ 3.2

1. Самому так самому.

§ 3.3

1. Последовательность $\eta_n = \text{пр}_{H_n} \eta$ имеет ортогональные приращения: она ограничена по норме: $\|\eta_n\| \leqslant \|\eta\|$. Значит, существует предел η_n ; обозначим его η_∞ . Из $\eta_n \in H_n \subseteq H_\infty$ вытекает, что $\eta_\infty \in H_\infty$. Чтобы доказать, что $\eta_\infty = \text{пр}_{H_\infty} \eta$, остается проверить, что $(\eta - \eta_\infty, \tilde{\eta}) = 0$ для $\tilde{\eta} \in H_\infty$. При $m \geq n$ имеем $(\eta - \eta_m, \tilde{\eta}) = 0$ для $\tilde{\eta} \in H_m$; устремляя m к ∞ , получаем, что $(\eta - \eta_\infty, \tilde{\eta}) = 0$ для $\tilde{\eta} \in H_\infty$. Это означает, что $(\eta - \eta_\infty, \tilde{\eta}) = 0$

для всех $\tilde{\eta} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, и доказательство заканчивается переходом к замыканию.

2. Расстояние от вектора до его проекции непрерывно зависит от вектора.

4. Наилучшая оценка: $\hat{\eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\eta | \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n})$ при некотором выборе последовательности $t_1, \dots, t_n, \dots \in T$. Но в случае совместно нормально распределенных случайных величин условное математическое ожидание одной из них относительно других есть линейная функция от них. Иначе говоря,

проекция η на $L^2_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ совпадает с проекцией η на $H_{\{t_1, \dots, t_n\}}$ и принадлежит H_r . Значит, также и $\hat{\eta} \in H_r$.

§ 4.1

1. Производная стационарного в широком смысле процесса, если существует, всегда имеет нулевое математическое ожидание.

2. В случае непрерывного времени

$$\begin{aligned} M \left| \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \xi_t dt - m \right|^2 &= \\ &= 2(t_2 - t_1)^{-1} \operatorname{Re} \int_0^{t_2 - t_1} [(t_2 - t_1) - u] K(u) du \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если только $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t K(u) du = 0$.

3*. Смешанный момент находим как

$$\frac{\partial^4}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_3 \partial z_4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 b_{ij} z_i z_j \right\}.$$

Далее, $K_\eta(s) = M\eta_{s+u}\eta_u - M\eta_{s+u}M\eta_u = K(t)^2 + K(s)^2 + K(s+t)K(s-t) - K(t)^2 = K(s)^2 - K(s+t)K(s-t) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$; рассматриваемая оценка состоятельна.

§ 4.2

1. Спектральная мера складывается из дискретной меры со значениями $m^2/4$ в точках $\pm\Lambda$ и из абсолютно непрерывной с плотностью $\frac{1}{4}f(\lambda + \Lambda) + \frac{1}{4}f(\lambda - \Lambda)$.

2. $\eta_n = \int_{-\pi, \pi} (1 - e^{-i\lambda})^{-1} e^{in\lambda} \zeta(d\lambda)$, $f_\eta(\lambda) = (2 - 2 \cos \lambda)^{-1} \times$

$\times f_\xi(\lambda)$, причем для существования η_n нужно $\int_{-\pi}^\pi (2 - 2 \cos \lambda)^{-1} \times$

$\times f_\xi(\lambda) d\lambda < \infty$.

3. Уравнение, описывающее схему: $C\eta'_t + R^{-1}\eta_t = \xi_t$. Ясно, что для стационарного решения $M\eta_t = RM\xi_t = RI_0$. Из $\xi_t = I_0 + \int_{-\infty}^t e^{i\lambda t} \zeta(d\lambda)$ получаем

$$\eta_t = RI_0 + \int_{-\infty}^t P(i\lambda)^{-1} e^{i\lambda t} \zeta(d\lambda),$$

где $P(i\lambda) = R^{-1} + Ci\lambda$. Спектральная плотность

$$f_\eta(\lambda) = |P(i\lambda)|^{-2} f_\xi(\lambda) = \frac{a\pi^{-1}(\Delta I)^2}{(a^2 + \lambda^2)(R^{-2} + C^2\lambda^2)};$$

вычисляем дисперсию (например, пользуясь вычетами):

$$D\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(\lambda) d\lambda = (R\Delta I)^2 / (1 + RCa).$$

§ 4.3

2. Докажем второе. Пусть $g_{1n} \rightarrow g_1$ в среднем квадратическом, $g_{2n} \rightarrow g_2$ равномерно, где

$$\begin{aligned} g_{1n}(\lambda) &= c_{1n1}e^{i\lambda} + c_{1n2}e^{2i\lambda} + c_{1n3}e^{3i\lambda} + \dots, \\ g_{2n}(\lambda) &= c_{2n0} + c_{2n1}e^{i\lambda} + c_{2n2}e^{2i\lambda} + c_{2n3}e^{3i\lambda} + \dots \end{aligned}$$

(суммы — конечные). Легко видеть, что

$$g_{1n}(\lambda)g_{2n}(\lambda) = c_{1n1}c_{2n0}e^{i\lambda} + (c_{1n1}c_{2n1} + c_{1n2}c_{2n0})e^{2i\lambda} + \dots \in h_{>0}.$$

При этом $g_{1n}g_{2n} \rightarrow g_1g_2$ в среднем квадратическом:

$$\begin{aligned} \|g_{1n}g_{2n} - g_1g_2\|_{L^2} &\leq \|g_{1n} - g_1\|_{L^2} \|g_{2n}\|_{L^2} + \|g_1 - g_2\|_{L^2} \|g_{2n}\|_{L^2} \leq \\ &\leq \|g_{1n} - g_1\|_{L^2} \|g_{2n}\|_C + \|g_1\|_{L^2} \|g_{2n} - g_2\|_C \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. $f(\lambda) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\lambda)}$, где $f_1(\lambda) = (4 + 3e^{-i\lambda})^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}e^{-i\lambda} + \frac{9}{64}e^{-2i\lambda} - \dots$ Имеем

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \left[\frac{(-3)^m}{4^{m+1}} + \frac{(-3)^{m+1}}{4^{m+2}}e^{-i\lambda} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-3)^{m+2}}{4^{m+3}}e^{-2i\lambda} + \dots \right] f_1(\lambda)^{-1} = \left(-\frac{3}{4} \right)^m. \end{aligned}$$

Теория непосредственно применима лишь в случае $M\xi_n = 0$; поэтому положим $\xi_n^0 = \xi_n - M\xi_n = \xi_n - 2$. Наилучший прогноз есть

$$\widehat{(\xi_m)}_{\leqslant 0} = 2 + \widehat{(\xi_m^0)}_{\leqslant 0} = 2 + \left(-\frac{3}{4} \right)^m \xi_0^0 = 2 + \left(-\frac{3}{4} \right)^m (\xi_0 - 2).$$

Вычислите сами средний квадрат ошибки прогноза.

4*. $f(\lambda) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\lambda)}$, $f_1(\lambda) = 1 + e^{-i\lambda}$; формула (5) дает $g(\lambda) = (1 + e^{-i\lambda})^{-1}$. Применение этой формулы не обосновано, но оказывается, что действительно g — проекция $e^{i\lambda}$ на замкнутую оболочку $\{e^{in\lambda}, n \leqslant 0\}$, т. е. имеет место формула (1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} [e^{i\lambda} - (1 + e^{-i\lambda})^{-1}] (1 + e^{-i\lambda}) (1 + e^{i\lambda}) e^{-in\lambda} d\lambda = 0, \quad n \leqslant 0.$$

Остается найти элемент пространства $H_{\leq 0}^0$, соответствующий $g(\lambda)$ (мы предполагаем $M\xi_n = 0$). Функция $g(\lambda)$ не разлагается в ряд Фурье, так что формула (6) неприменима. Однако можно воспользоваться, например, тем, что $(1 + qe^{-i\lambda})^{-1} \rightarrow (1 + e^{-i\lambda})^{-1}$ при $q \uparrow 1$ в смысле сходимости в $L^2(d\mu)$; получаем такое выражение для наилучшего линейного прогноза:

$$\widehat{(\xi_1)}_{\leq 0} = \lim_{q \uparrow 1} (\xi_0 - q\xi_{-1} + q^2\xi_{-2} - \dots).$$

Средний квадрат ошибки прогноза равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda} - g(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda = 2\pi,$$

т. е. половине дисперсии оцениваемой величины.

6*. Из сказанного очевидно, что искомая последовательность не должна иметь спектральной плотности, и мы находим пример: $K(0) = 1$, $K(n) = 1/2$ при $n \neq 0$. Случайная последовательность с такой корреляционной функцией получается из последовательности некоррелированных случайных величин прибавлением одной и той же для них всех случайной величины.

7*. Вычисления аналогичны приведенным: $f(\lambda) = 2a^3\pi^{-1}/(a^2 + \lambda^2)^2$;

$$f_1(\lambda) = \sqrt{2a^3\pi^{-1}} (a + i\lambda)^{-2} = -\sqrt{2a^3\pi^{-1}} \int_{-\infty}^0 te^{at} e^{i\lambda t} dt;$$

$$g(\lambda) = e^{-as} [1 + as + s \cdot i\lambda];$$

$$\widehat{(\xi_s)}_{\leq 0} = e^{-as} (1 + as) \xi_0 + se^{-as} \xi'_0.$$

§ 5.1

1. Пусть $C = \{x_*: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\} =$
 $= \{x_*: (x_{t'_1}, \dots, x_{t'_{n'}}) \in A'\}$;

требуется доказать, что

$$\mu_{t_1 \dots t_n}(A) = \mu_{t'_1 \dots t'_{n'}}(A'). \quad (*)$$

Прежде всего при данных t_1, \dots, t_n множество A восстанавливается однозначно по C , а именно, A состоит из всех наборов значений $(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$, возможных для функции $x_* \in C$.

Рассмотрим сначала случай, когда $t'_1, \dots, t'_{n'}$ — это переставленные в другом порядке t_1, \dots, t_n (а стало быть, $n' = n$). Множество A' в этом случае состоит из точек множества A с переставленными определенным образом координатами. Обе части равенства $(*)$ — меры, и, чтобы доказать $(*)$ для всех $A \in \mathcal{B}_{[0, 1]}^n$, достаточно проверить это равенство для порождаю-

шего $\mathcal{B}_{[0, 1]}^n$ полукольца множеств A вида $A_1 \times \dots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{B}_{[0, 1]}$. Но для таких множеств $(*)$ — не что иное, как первое из условий согласованности.

Далее рассмотрим случай, когда набор $t'_1, \dots, t'_{n'}$ включает в себя t_1, \dots, t_n , причем будем считать, что $t'_1, \dots, t'_{n'}$ занумерованы так, что первые n из этих элементов — это t_1, \dots, t_n (независимость от порядка нумерации мы уже проверили). Тогда легко видеть, что $A' = A \times [0, 1]^{n'-n}$, и выполнение $(*)$ для всех $A \in \mathcal{B}_{[0, 1]}^n$ доказывается так же, как в предыдущем случае, с использованием второго условия согласованности.

Наконец, в общем случае рассматриваем множество $\{t''_1, \dots, t''_{n''}\} = \{t_1, \dots, t_n\} \cup \{t'_1, \dots, t'_{n'}\}$; имеет место представление $C = \left\{ x_* : (x_{t''_1}, \dots, x_{t''_{n''}}) \in A'' \right\}$, и мы видим, что обе части $(*)$ равны $\mu_{t''_1 \dots t''_{n''}}(A'')$.

2*. Условия существования процесса с независимыми приращениями с данными распределениями приращений и соответствующее доказательство можно найти в книге Ито (1960, § 6). Можно также воспользоваться результатами § 8.2 настоящей книги.

§ 5.2

1. Это можно доказать, пользуясь тем, что любая функция без разрывов второго рода со значениями в метрическом пространстве имеет самое большое счетное число разрывов (а сходимость по вероятности задается метрикой). Другой способ доказательства: функция $F(t) = M \operatorname{arctg} \xi_t$ монотонна, а значит, имеет не более счетного числа разрывов; в точках непрерывности $F(t)$ из $\xi_{t_-} \leq \xi_t \leq \xi_{t+}$ и $M[\operatorname{arctg} \xi_{t+} - \operatorname{arctg} \xi_{t_-}] = F(t+) - F(t-) = 0$ получаем $\xi_{t_-} = \xi_t = \xi_{t+}$ (почти наверное).

2. $M(Z(t) - Z(s))^4 = 3[M(Z(t) - Z(s))^2]^2 = 3[K(t, t) + K(s, s) - 2K(t, s)]^2 = 3[t - t^2 + s - s^2 - 2(t \wedge s) + 2ts]^2 = 3[|t - s| - (t - s)^2]^2 \leq 3(t - s)^2$.

3*. Ответ: при $\beta < 1/2$ и только при них.

4. Множество частичных пределов замкнуто; так что, если выполняется событие в левой части, существует интервал (α, β) с рациональными концами, содержащий точку $\xi_t(\omega)$ и такой, что ни один из частичных пределов не только не принадлежит этому интервалу, но и не совпадает с его концами. Отсюда вытекает, что для достаточно близких к t точек $s \in T_0$ будет $\xi_s \notin (\alpha, \beta)$, т. е. выполняется событие в правой части. Обратно, если правая часть выполняется, то ни один из частичных пределов не лежит в (α, β) , а ξ_t как раз лежит в этом интервале, так что совпасть им никак невозможно.

§ 5.3

1. Сингулярность распределения ξ_t относительно распределений w_t , η_t проверяется при помощи функционала $f(x_*) = x_0$: для ξ_* он с вероятностью 1 принимает значение 1, а для w_* и η_* — значение 0. Чтобы проверить сингулярность μ_{w_*} и μ_{η_*} ,

воспользуемся тем, что предел по вероятности $\sum_{k=1}^n (w_{t_k} - w_{t_{k-1}})^2$ при измельчении разбиения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ равен 1 (см. § 1.2, п. 2); для μ_t соответствующий предел равен, естественно, 4. Правда, этот предел по вероятности — еще не $\mathcal{B}^{[0,1]}$ -измеримый функционал; однако решение задачи дает, например, такой функционал: $g(x_\bullet) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} (x_{k/2^n} - x_{(k-1)/2^n})^2$.

2. Левая часть есть $\mu' \{x_\bullet : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$, а правая

$$\int_C h(x_\bullet) \mu(dx_\bullet), \text{ так что равенство, о котором}$$

$\{x_\bullet : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$
идет речь, эквивалентно

$$\mu'(C) = \int_C h(x_\bullet) \mu(dx_\bullet), \quad (*)$$

где C — произвольное цилиндрическое множество.

Необходимость ясна; достаточность получается распространением равенства (*) с алгебры цилиндрических множеств на порожденную ею σ -алгебру \mathcal{X}^T .

4. Положим $C_\varepsilon = \{x_\bullet : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\}$, где A — то множество, о котором говорится в условии задачи. Имеем $C_\varepsilon \in \mathcal{X}^T$, $\mu(C_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, $\mu'(X^T \setminus C_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Положим $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} C_{1/2^k}$,

$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} [X^T \setminus C_{1/2^k}]$; это — непересекающиеся подмножества X^T . Лемма Бореля — Кантелли дает нам $\mu(C) = 1$, $\mu'(D) = 1$, а это означает сингулярность мер μ , μ' .

5. Воспользоваться результатом задачи 2. Это — частный случай задачи 15.

7. Выберем t_1, \dots, t_n так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{X^n} \dots \int_{X^n} [h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)]^a \mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n) < \varepsilon^2.$$

Воспользуемся задачей 4. В качестве множества A возьмем $\{(x_1, \dots, x_n) : h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) \leq 1/\varepsilon\}$; в силу чебышёвского неравенства

$$1 - \mu_{t_1 \dots t_n}(A) = \mu_{t_1 \dots t_n} \{(x_1, \dots, x_n) : h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) > 1/\varepsilon\} \leqslant \varepsilon \int_{X^n} \dots \int_{X^n} h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) \mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n) = \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mu'_{t_1 \dots t_n}(A) &= \\ &= \int \dots \int_{\{h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) \leqslant 1/\varepsilon\}} h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) \mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n) \leqslant \\ &\leqslant (1/\varepsilon)^{1-\alpha} \int \dots \int_A [h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n)]^\alpha \times \\ &\quad \times \mu_{t_1 \dots t_n}(dx_1 \dots dx_n) < (1/\varepsilon)^{1-\alpha} \varepsilon^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось.

8. Пользуемся результатом задачи 7 при $\alpha = 1/2$.

9. $M\pi_S = 1$; далее применяется лемма Фату.

10. Доказывается, что $\pi_S = M(\pi | \mathcal{F}_S)$, где \mathcal{F}_S — σ -алгебра, порожденная конечным числом случайных величин ξ_t , $t \in S$. Согласно задаче 12 § 1.2 π_S равномерно интегрируемы; отсюда вытекает, что возможен предельный переход под знаком математического ожидания: $M\pi = \lim_{S \uparrow} M\pi_S = 1$.

11. Достаточно доказать для любого конечного $S_0 \subseteq T$, что $P' \{\eta_* \in C\} = M\chi_{\{\xi_* \in C\}} \pi^*$ для произвольного $C \in \mathcal{X}^{S_0}(X^T)$ (см. задачу 3). Выберем последовательность конечных подмножеств $S_n \subseteq T$, $S_n \supseteq S_0$, для которых $\pi_{S_n} \rightarrow \pi^*$ ($n \rightarrow \infty$). Пусть $S_n = \{t_1^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}\}$; обозначим через A_n то множество, через принадлежность которому координат x_t , $t \in S_n$, определяется множество C :

$$C = \left\{ x_* : \left(x_{t_1^{(n)}}, \dots, x_{t_{m_n}^{(n)}} \right) \in A_n \right\}, \quad A_n \in \mathcal{X}^{m_n}$$

(такое A_n существует, потому что $S_0 \subseteq S_n$).

В силу леммы Фату

$$M\chi_{\{\xi_* \in C\}} \pi^* \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} M\chi_{\{\xi_* \in C\}} \pi_{S_n}.$$

Выражение под знаком предела записывается через конечномерное распределение так:

$$\int \dots \int_{A_n} h_{t_1^{(n)} \dots t_{m_n}^{(n)}}(x_1, \dots, x_{m_n}) \mu_{t_1^{(n)} \dots t_{m_n}^{(n)}}(dx_1 \dots dx_n).$$

Но это — не что иное, как $\mu'_{t_1^{(n)} \dots t_{m_n}^{(n)}}(A_n) = P' \{\eta_* \in C\}$. Итак,

$$M\chi_{\{\xi_* \in C\}} \pi^* \leqslant P' \{\eta_* \in C\}. \tag{*}$$

Совершенно так же — с заменой множества $C \in \mathcal{X}^{S_0}(X^T)$ на множество $X^T \setminus C \in \mathcal{X}^{S_0}(X^T)$ — доказывается, что

$$M(1 - \chi_{\{\xi_* \in C\}}) \pi^* \leqslant 1 - P' \{\eta_* \in C\}.$$

Так как по условию $M\pi^* = 1$, то отсюда получаем

$$M\chi_{\{\xi_* \in C\}} \pi^* \geq P' \{ \eta_* \in C \},$$

и в (*) имеет место равенство.

Микротеорема доказана.

12*. Задача решается с использованием условия сингулярности, данного в задаче 7, которое оказывается не только достаточным, но и необходимым (в случае абсолютной непрерывности конечномерных распределений).

13. Разумеется, абсолютной непрерывности нет при $c = 1$, потому что при этом $P\{\eta_1 = 0\} = 1$, а $P\{w_1 = 0\} = 0$, и μ_{η_*} и μ_{w_*} сингулярны. Пусть $c \neq 1$. Возьмем $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$. Совместная плотность распределения

$$\begin{aligned} p_{\eta_{t_1} \dots \eta_{t_{n-1}} \eta_{t_n}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \\ = \frac{1}{|1-c|} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \times \\ \times \exp \left\{ - \left[x_i - x_{i-1} + \frac{c}{1-c} (t_i - t_{i-1}) x_n \right]^2 / [2(t_i - t_{i-1})] \right\}. \quad (*) \end{aligned}$$

(Полагаем $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. Формулу (*) можно получить, например, пользуясь тем, что η_t — гауссовский процесс со средним 0 и корреляционной функцией $K_{\eta}(t, s) = t \wedge s - (2c - c^2)ts$.) Деля эту плотность на $p_{w_{t_1} \dots w_{t_{n-1}} w_{t_n}}(x_1, \dots, x_n)$, получаем

$\frac{1}{|1-c|} \exp \left\{ \left[1 - \frac{1}{(1-c)^2} \frac{x_n^2}{2} \right] \right\}$. Это означает, что имеет место абсолютная непрерывность бесконечномерных распределений с плотностью

$$\frac{\mu_{\eta_*}(dx_*)}{\mu_{w_*}(dx_*)} = \frac{1}{|1-c|} \exp \left\{ \left[1 - \frac{1}{(1-c)^2} \right] \frac{x_1^2}{2} \right\}$$

(здесь, в отличие от формулы (*), x_1 — не независимое переменное, а значение функции x_* в точке 1).

15. В случае $\varphi_0 \neq 0$, естественно, имеет место сингулярность; будем рассматривать случай $\varphi_0 = 0$. Для $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$, $t_n < \infty$ находим ($x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} h_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \\ = p_{\xi_{t_1} \dots \xi_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) : p_{w_{t_1} \dots w_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \\ = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда для $S = \{t_1, \dots, t_n\}$ или $S = \{0, t_1, \dots, t_n\}$ получаем:

$$\pi_S = h_S(w_*) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}.$$

Если Φ_t не является абсолютно непрерывной функцией с интегрируемой в квадрате производной, то вторая сумма может быть сделана сколь угодно большой за счет выбора t_1, \dots, t_n (см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. «Лекции по функциональному анализу» (М.: ИЛ, 1954, лемма из § 36)); в этом случае задача 7 позволяет установить сингулярность:

$$M\pi_S^{1/2} = \exp \left\{ -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \frac{(\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\},$$

что сколь угодно мало.

Если $\Phi_t = \int_0^t \dot{\Phi}_s ds$, $\dot{\Phi}_s \in L^2(0, T)$, то

$$\lim_{S \uparrow} \sum_{i=1}^n \frac{(\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}})^2}{t_i - t_{i-1}} = \int_0^T \dot{\Phi}_t dt$$

(это вытекает из леммы, на которую мы уже ссылались; см. цитируемую в предыдущем абзаце работу). Докажем, что

$$\lim_{S \uparrow} (\mathbf{P}) \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) = \int_0^T \dot{\Phi}_t dw_t.$$

Для этого, как мы знаем, достаточно проверить, что ступенчатые функции

$$\psi_t(S) = \begin{cases} \frac{\Phi_{t_i} - \Phi_{t_{i-1}}}{t_i - t_{i-1}} & \text{при } t_{i-1} < t \leq t_i, \\ 0 & \text{при } t > t_n \end{cases}$$

сходятся при $S \uparrow$ к $\dot{\Phi}_t$ в среднем квадратическом на отрезке от 0 до T . Представляем читателю проделать это самостоятельно.

Если это доказано, получаем

$$\lim_{S \uparrow} (\mathbf{P}) \pi_S = \pi^* = \exp \left\{ \int_0^T \dot{\Phi}_t dw_t - \frac{1}{2} \int_0^T \dot{\Phi}_t^2 dt \right\}.$$

Согласно задаче 11, остается проверить, что $M\pi^* = 1$. Но это вытекает из того, что $\eta = \int_0^T \dot{\phi}_t dw_t$ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = \int_0^T \dot{\phi}_t^2 dt$:

$$M e^{\eta - \sigma^2/2} = e^{-\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy = 1.$$

16*. То, что P' — вероятностная мера, устанавливается легко. Абсолютная непрерывность распределений: из $P\{\xi_* \in C\} = \mu(C) = 0$, $C \in \mathcal{X}^T$, вытекает $P'\{\xi_* \in C\} = M\chi_{\{\xi_* \in C\}}\pi = 0$. Однако, вообще говоря, $\pi \neq \frac{d\mu'}{d\mu}(\xi_*) (= M(\pi | \mathcal{F}_T))$.

Такая конструкция дает возможность из одного случайного процесса получить различные другие (см., например, Дынкин (1963, введение, § 6, гл. 10, § 4)).

17*. Положим $\zeta = \max_{0 \leq t \leq T} w_t$, $\eta_t = w_t + bt$, $\tau = \max_{0 \leq t \leq T} \eta_t$, $\frac{\mu_\tau(dx)}{\mu_\zeta(dx)} = g(x)$, $\frac{\mu_{\eta_*}(dx_*)}{\mu_{w_*}(dx_*)} = h(x_*)$, $\pi = h(w_*)$. В силу задачи 15 имеем $\pi = \exp\{bw_T - b^2T/2\}$. Упомянутая формула (9) дает

$$\begin{aligned} g(x) &= M\left\{e^{bw_T - b^2T/2} \mid \zeta = x\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{by - b^2T/2} p_{w_T, \zeta}(y, x) dy; \quad p_\zeta(x), \end{aligned}$$

а $p_\tau(x) = p_\zeta(x)g(x)$. Итак, считаем: при $x > 0$

$$\begin{aligned} p_\tau(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{by - b^2T/2} p_{w_T, \zeta}(y, x) dy = \\ &= \int_{-\infty}^x e^{by - b^2T/2} \sqrt{\frac{2}{\pi T^3}} (2x - y) e^{-(2x-y)^2/(2T)} dy = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi T^3}} e^{-(x+bT)^2/(2T)} - 2be^{2bx} \Phi\left(\frac{-x-bT}{\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

При $x \leq 0$ плотность, естественно, равна нулю.

Теперь выясним, что будет с этим распределением при $T \rightarrow \infty$. Если $b = 0$, плотность равномерно в каждом конечном промежутке стремится к нулю, т. е. распределение уходит на

$+\infty$. Это означает, что с вероятностью 1 $\sup_{0 \leq t < \infty} w_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} w_t = \infty$. То же будет и в случае $v > 0$, хотя бы потому, что в этом случае $\eta_t > w_t$. Напротив, при $b < 0$ первый член в выражении для плотности стремится к нулю, а второй — к $2|b|e^{-2|b|x}$ (помимо того что $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{-x - bT}{\sqrt{T}}\right) = \Phi(+\infty) = 1$). Таким образом, распределение $\max_{0 \leq t < \infty} \eta_t$ в этом случае — показательное с параметром $2|b|$.

18*. Аналогично предыдущей задаче, если мы обозначим рассматриваемый максимум через τ , имеем (плотность бесконечномерных распределений вычислена в задаче 13):

$$\begin{aligned} p_\tau(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1-c|} \exp \left\{ \left[1 - \frac{1}{(1-c)^2} \right] \frac{y^2}{2} \right\} p_{w_1, \zeta}(y, x) dy = \\ &= \frac{1}{|1-c|} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ \left[1 - \frac{1}{(1-c)^2} \right] \frac{y^2}{2} \right\} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x-y) e^{-(2x-y)^2/2} dy = \\ &= 2e^{2x^2(1-c)^2-2x^2} \left[\frac{|1-c|}{\sqrt{2\pi}} e^{-[x-2x(1-c)^2]^2/[2(1-c)^2]} + \right. \\ &\quad \left. + (4cx-2c^2x) \Phi\left(\frac{x-2x(1-c)^2}{|1-c|}\right) \right]. \end{aligned}$$

Конечно, эта формула действует при $x > 0$, а при $x \leq 0$ плотность равна нулю.

Устремив c к единице, получим предельную плотность: $p(x) = 4xe^{-2x^2}\Phi(+\infty) = 4xe^{-2x^2}$ при $x > 0$; $p(x) = 0$ при $x \leq 0$. Так как это выражение имеет интеграл 1, то это — плотность предельного распределения, т. е. плотность распределения случайной величины $\max_{0 \leq t \leq 1} (w_t - tw_1)$.

§ 5.4

3. Использовать характеристические функции.
4. Для произвольной ограниченной непрерывной функции f на R^1 функционал $F(x_*) = f(\max_{0 \leq t \leq T} x_t)$ ограничен и непрерывен, поэтому $MF(S_*^h) \rightarrow MF(w_*)$ ($h \downarrow 0$), или $\int f d\mu_{\max S_t^h} \rightarrow \int f d\mu_{\max w_t}$.

5. К распределению тождественного нуля.

6*. Произвольная последовательность неслучайных функций, сходящаяся в каждой точке к нулю, тогда как их максимумы не сходятся к нулю.

§ 6.1

$$1. \{ \tau_{\Gamma} \leq n \} = \bigcup_{k=0}^n \{ \xi_k \in \Gamma \} \in \mathcal{F}_{\leq n}.$$

$$2. \{ \tau_k \leq n \} = \bigcup_{0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n} \bigcap_{i=0}^{n_{k-1}} \{ \xi_i \notin \Gamma_i \} \cap \\ \cap \{ \xi_{n_1} \in \Gamma_1 \} \cap \bigcap_{i=n_1+1}^{n_2-1} \{ \xi_i \notin \Gamma_2 \} \cap \{ \xi_{n_2} \in \Gamma_2 \} \cap \dots \\ \dots \cap \bigcap_{i=n_{k-1}+1}^{n_k-1} \{ \xi_i \notin \Gamma_k \} \cap \{ \xi_{n_k} \in \Gamma_k \} \in \mathcal{F}_{\leq n}.$$

3. Замечание. Задачу 3 мы решим на основании задач 4, 5, решения которых мы сейчас приведем.

5. Пусть τ — марковский момент относительно $\mathcal{F}_{\leq t+}$.

Имеем $\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq t - 1/n\}$; каждое слагаемое здесь принадлежит $\mathcal{F}_{\leq(t-1/n)+} \subseteq \mathcal{F}_{\leq t}$, а значит, и сумма принадлежит $\mathcal{F}_{\leq t}$.

Обратно, пусть $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_{\leq t}$ при всех t . Пользуемся тем, что $\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \{\tau < t + 1/n\}$, где k — любое натуральное число; получаем, что $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{\leq t+1/k}$ для $k = 1, 2, \dots$, откуда $\{\tau \leq t\} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\leq t+1/k} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_{\leq s} = \mathcal{F}_{\leq t+}$.

4. Если $\xi_t(\omega)$ непрерывно справа, то для открытого множества Γ

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{\text{рац. } r < t} \{ \xi_r \in \Gamma \}.$$

То, что любое элементарное событие, принадлежащее правой части, принадлежит также и левой, ясно, причем даже и не для открытых множеств. Обратно, если $\tau < t$, то существует $s < t$ такое, что $\xi_s \in \Gamma$. Раз множество открыто, а траектория непрерывна справа, то она не может сразу же после s выйти из Γ , т. е. для u , достаточно близких к s справа, $\xi_u \in \Gamma$ (рис. 38). Среди этих u есть и рациональные, причем меньшие t .

Итак, мы представили $\{\tau < t\}$ в виде суммы счетного числа событий, принадлежащих $\mathcal{F}_{\leq t}$; значит, $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_{\leq t}$, и в силу задачи 5 τ — марковский момент относительно семейства $\mathcal{F}_{\leq t+}$.

3. Через Γ_n обозначим $1/n$ -окрестность Γ : $\Gamma_n = \{x: \rho(x, \Gamma) < 1/n\}$; это — открытые множества, дающие в пересечении Γ . Если траектория непрерывна, то моменты τ_n первого достижения Γ_n ($\tau_n = \inf \{t: \xi_t \in \Gamma_n\}$) сходятся к τ , причем если $\tau > 0$, то $\tau_n < \tau$ (рис. 39; если $\tau = 0$, то все τ_n тоже равны

нулю). Докажем сходимость: раз τ_n — неубывающая последовательность, то существует $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \in [0, \infty]$. Ясно, что

$\tau_\infty \leq \tau$. Поэтому при $\tau_\infty = \infty$ имеем $\tau = \infty$; если же $\tau_\infty < \infty$, то в силу непрерывности траектории имеем $\xi_{\tau_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tau_n}$. Но — тоже в силу непрерывности траектории — ξ_{τ_n} принадлежит границе Γ_n , и для любого $n \geq k$ точка ξ_{τ_n} содержится в множестве

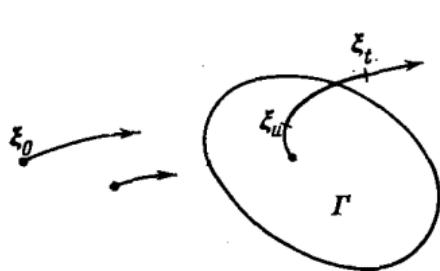


Рис. 38

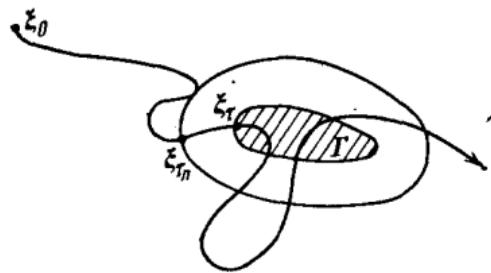


Рис. 39

$\{x: \rho(x, \Gamma) \leq 1/k\}$. Предел, ξ_{τ_∞} , также содержится в этом множестве, а значит, $\xi_{\tau_\infty} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x: \rho(x, \Gamma) \leq 1/k\} = \Gamma$. Но это означает, что в момент τ_∞ мы уже достигли множества Γ , т. е. $\tau \leq \tau_\infty$. Окончательно имеем $\tau = \tau_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$.

Отсюда выводится, что при $t > 0$

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau_n < t\},$$

и из результата задачи 4 получаем, что $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{\leq t}$ при $t > 0$. Что же касается $t = 0$, то $\{\tau \leq 0\} = \{\tau = 0\} = \{\xi_0 \in \Gamma\}$, и это множество принадлежит $\mathcal{F}_{\leq 0} = \mathcal{F}_0$ по совсем другой, более простой причине.

6. Очевидно.

7. Докажите, что $\{\tau \leq c\} \in \mathcal{F}_\tau$. Измеримость этого множества относительно \mathcal{F}_∞ — результат задачи 6; далее, для $t \in T$

$$\{\tau \leq c\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq c \wedge t\} \in \mathcal{F}_{c \wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

8. Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau$; докажем, что $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Во-первых, по условию $A \in \mathcal{F}_\infty$; во-вторых, $A \cap \{\sigma \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ как пересечение принадлежащих этой σ -алгебре событий $A \cap \{\tau \leq t\}$ и $\{\sigma \leq t\}$.

9. $\{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

10. В силу задачи 8 наименьшая из этих σ -алгебр — $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$, так что достаточно показать, что $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$. Во-первых, $\{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\infty$, потому что $\{\tau < \sigma\} = \bigcup_{r \in \text{рац. } r} \{\tau \leq r\} \cap \{\sigma > r\} =$

$= \bigcup_{\text{рац. } r} [\{\tau \leq r\} \setminus \{\sigma \leq r\}]$. Далее, $\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau < \sigma\} \cap \bigcap_{\text{рац. } r < t} \{\tau \leq r\} \cap \{\sigma > r\} \cup \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma > t\}$. Здесь каждое слагаемое суммы по рациональным r принадлежит $\mathcal{F}_r \subseteq \mathcal{F}_t$, последнее слагаемое тоже принадлежит \mathcal{F}_t , значит, этой σ -алгебре принадлежит и сумма.

§ 6.2

1. Нужно доказать для $C \in \mathcal{X}$ измеримость множества $\{\eta_\tau \in C\}$ относительно \mathcal{F}_∞ и измеримость $\{\eta_\tau \in C\} \cap \{\tau \leq t\}$ относительно \mathcal{F}_t . Эти измеримости следуют из результата задачи 5 § 1.3 в применении к $(T, \mathcal{F}) = (T, \mathcal{B}_T)$ (соответственно $(T \cap (-\infty, t], \mathcal{B}_{\leq t})$).

2. Так как $\zeta_t(\omega)$ непрерывно по t , достаточно доказать, что случайная функция ζ_t согласована с семейством \mathcal{F}_t . Но \mathcal{F}_t -измеримость случайной величины ζ_t вытекает из теоремы Фубини.

3. Функция ξ_s на $[0, t] \times \Omega$ измерима относительно $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$ в силу микротеоремы 3 § 6.2, значит, отображение $(s, \omega) \rightarrow (s, \xi_s(\omega))$ пространства $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t)$ в $([0, t] \times X, \mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{X})$ измеримо, а значит, и числовая функция $f(s, \xi_s(\omega))$ измерима относительно $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$. Далее применяется предыдущая задача.

4. Результат почти вытекает из задач 1 и 3 — остается неясной только измеримость $\psi = \zeta_\tau$ на множестве $\{\tau = \infty\}$ (где, в частности, интеграл может расходиться). Другой возможный путь решения — представить ψ как $\int_0^\infty f(s, \xi_s) \chi_{\tau < s} (s) ds$.

Этот же результат сохраняется и для неограниченной функции f .

§ 7.1

$$\begin{aligned} 1. \mathbf{M}(\xi_t - \xi_s) \overline{(\xi_u - \xi_t)} &= \mathbf{MM}((\xi_t - \xi_s)(\xi_u - \xi_t) | \mathcal{F}_t) = \\ &= \mathbf{M}((\xi_t - \xi_s) \overline{\mathbf{M}(\xi_u - \xi_t | \mathcal{F}_t)}) = 0 \end{aligned}$$

$$2. \mathbf{M}(\xi_{n+2} | \mathcal{F}_n) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\xi_{n+2} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbf{M}(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \xi_n,$$

и т. д.

§ 7.3

1. ξ_τ измеримо относительно \mathcal{F}_τ ; достаточно доказать, что $\int_A \xi_\tau dP \leq \int_A \xi_N dP$ для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$. Разобьем интегралы по A на интегралы по $A \cap \{\tau = n\}$ и докажем для каждого из них неравенство отдельно. Имеем $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, и

$$\int_{A \cap \{\tau = n\}} \xi_\tau dP = \int_{A \cap \{\tau = n\}} \xi_n dP \leq \int_{A \cap \{\tau = n\}} \xi_N dP$$

в силу формулы (5) § 7.1.

2. Докажем, что $\int_A \xi_\tau dP \leq \int_A \xi_\sigma dP$ для любого $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Повторяем доказательство микротеоремы 1:

$$\begin{aligned} \int_A \xi_\sigma dP &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma=k\}} \xi_k dP = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[\int_{A \cap \{\tau=n\}} \xi_n dP - \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma>n\}} \xi_n dP + \right. \\ &+ \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma>n\}} \xi_{n+1} dP - \dots + \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma>k-1\}} \xi_k dP - \\ &- \left. \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma>k\}} \xi_k dP + \dots + \int_{A \cap \{\tau=n, \sigma>N-1\}} \xi_N dP \right] \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \int_{A \cap \{\tau=n\}} \xi_n dP = \int_A \xi_\tau dP. \end{aligned}$$

3. Имеется тысяча различных способов доказательства; в частности, утверждение вытекает из результата п. 4б) § 8.5.

4. Положим $\tau_n = ([2^n \tau] + 1)/2^n \wedge n$; $\tau_n \rightarrow \tau$ при $n \rightarrow \infty$, причем, начиная с некоторого n , $\tau_n > \tau$. Поэтому $\xi_\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tau_n}$, и $M\xi_\tau = M \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tau_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_{\tau_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_0 = M\xi_0$ (используем то, что τ_n — марковский момент с не более чем $n \cdot 2^n$ значениями).

5. Положим $\tau = \min \{t: w_t = a \text{ или } b\}$; $\tau_N = \tau \wedge N$. В силу микротеоремы 3, $Mw_{\tau_N} = Mw_0 = 0$. Величины w_{τ_N} ограничены по модулю константой $|a| \vee |b|$, и $Mw_\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} Mw_{\tau_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} Mw_0 = 0$. Но $Mw_\tau = a \cdot P\{w_\tau = a\} + b \cdot (1 - P\{w_\tau = a\})$, откуда $P\{w_\tau = a\} = b/(b - a)$.

6. $P\{\max_{0 \leq s \leq t} |w_s| \geq \delta\} \leq M e^{c w_t^2 / 2} : e^{c \delta^2 / 2}$; математическое

ожидание равно $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx^2/2} e^{-x^2/2t} dx = (1 - ct)^{-1/2}$ при $c < 1/t$.

Минимум $(1 - ct)^{-1/2} e^{-c \delta^2 / 2}$ по c достигается при $c = 1/t - 1/\delta^2$ (если $t < \delta^2$; при $t \geq \delta^2$ это выражение тем меньше, чем меньше $c > 0$). Получаем $P\{\max_{0 \leq s \leq t} |w_s| \geq \delta\} \leq \sqrt{et/\delta^2} e^{-\delta^2/(2t)}$ при $t < \delta^2$ (при $t \geq \delta^2$ получается только тривиальная оценка: вероятность ≤ 1).

7*, 8*. В задаче 7* Q берется очень близким к 1, в задаче 8*, наоборот, — очень большим.

9*. Можно повторить решение задач 7*, 8*, а можно воспользоваться тем, что $\tilde{w}_t = tw_{1/t}$ — другой винеровский процесс.

10*. Вытекает из задачи 9* и абсолютной непрерывности распределения ξ_t на конечном отрезке относительно распределения w_t (задача 15 § 5.3).

§ 7.4

1. Полагаем $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{-k}$, где k пробегает все целые отрицательные значения; $\mathbf{M}(\xi | \mathcal{G}_k)$ — мартингал относительно этого неубывающего семейства σ -алгебр. Существование предела вытекает из теоремы 1 так же, как при доказательстве теоремы 2. Доказательство равенства интегралов еще проще, чем в этой теореме.

2*. $|w_t - x_0|^{-1}$ — супермартингал с непрерывными реализациями; $\sup_{t \geq 0} \mathbf{M}(|w_t - x_0|^{-1}) = \mathbf{M}(|w_0 - x_0|^{-1}) = |x_0|^{-1} < \infty$ при $x_0 \neq 0$. Поэтому с вероятностью 1 существуют $\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t - x_0|^{-1}$ и конечные пределы $|w_t - x_0|^{-1}$ справа и слева в каждой точке $t \geq 0$. Отсюда вытекает, что с вероятностью 1 $|w_t - x_0|^{-1} < \infty$ при всех $t \geq 0$, т. е. $w_t \neq x_0$ ни при каком $t \geq 0$. Для $x_0 = 0$ можно взять супермартингал $|w_t|^{-1}, t \geq \delta > 0$; так как $\sup_{t \geq \delta} \mathbf{M}|w_t|^{-1} = \mathbf{M}|w_\delta|^{-1} = \frac{1}{(2\pi\delta)^{3/2}} \int_{R^1} \frac{1}{|x|} e^{-|x|^2/(2\delta)} dx < \infty$, то к этому супермартингалу применима теорема о сходимости, и с вероятностью 1 $w_t \neq 0$ ни при каком $t \geq \delta > 0$, т. е., в конце концов, ни при каком положительном t .

Далее, $\lim_{t \rightarrow \infty} |w_t - x_0|^{-1} = 0$ почти наверное, потому что соответствующий предел по вероятности $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}) |w_t - x_0|^{-1}$ равен 0. Это означает, что почти наверное $|w_t| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

§ 8.1

1. Решение — просто выкладка. Матрица P^{st} была построена как $e^{(t-s)A} = E + (t-s) A/1! + (t-s)^2 A^2/2! + \dots$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $m_{su} = m_{tu}m_{st}; \sigma_{su}^2 = m_{tu}^2\sigma_{st}^2 + \sigma_{tu}^2$.

3. Переходная функция имеет вид

$$P(s, x, t, \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\Gamma} e^{-(y-x)^2/[2(t-s)]} dy$$

при $t > s$ (естественно, $P(s, x, s, \Gamma) = \delta_x(\Gamma)$, как для каждой переходной функции). Доказать, что это марковский процесс, легче всего, пользуясь конечномерными распределениями (см. результаты § 8.2).

4. Нужно найти $P\{\xi_t \in \Gamma | \mathcal{F}_{\leq s}\} \stackrel{\text{п. н.}}{=} P\{\xi_t \in \Gamma | \xi_s\}, s < t \leq 0$

(для $s = t$ искать переходную функцию, конечно, не надо, так как это мера, сосредоточенная в одной точке — точке выхода). При $t = 0$ рассматриваемая условная вероятность, естественно, равна $\delta_0(\Gamma)$. При $s < t < 0$ пользуемся двумерной плотностью винеровского процесса:

$$p_{\xi_s, \xi_t}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(-t)} \sqrt{2\pi(-s+t)}} e^{-y^2/(2(-t)) - (x-y)^2/(2(-s+t))}$$

Получаем,

$$\begin{aligned} p_{\xi_t}(y | \xi_s = x) &= p_{\xi_s, \xi_t}(x, y) : p_{\xi_s}(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(-t)} \sqrt{2\pi(-s+t)}} e^{-y^2/(2(-t)) - (x-y)^2/(2(-s+t))} : \\ &\quad : \frac{1}{\sqrt{2\pi(-s)}} e^{-x^2/(2(-s))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t(t-s)/s}} \exp\{- (y - (t/s)x)^2/(2(t/s)(t-s))\}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, условное распределение ξ_t при условии, что $\xi_s = x$, — нормальное со средним $(t/s)x$ и дисперсией $(t/s)(t-s)$.

5. а) Да, $P(n, x, n+1, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(y) dy$.

б) Да, $P(n, x, n+1, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(y-x) dy$.

в) Нет. Действительно, при $x > 0$ условная вероятность $P\{S_3^+ > 0 | S_2^+ = 0, S_1^+ = x\}$ равна интегралу $\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty p(y-x) \times p(z-y) dy dz$ и, естественно, зависит от x .

г) Нет, потому что для $x > 0$ условная вероятность $P\{\eta_3 > x | \eta_2 = x, \eta_1 = 0\}$ будет другая, чем $P\{\eta_3 > x | \eta_2 = x, \eta_1 = x\}$: первая равна $\int_0^\infty p(z) dz$, а вторая $\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty p(y) p(z-y) dy dz$,

т. е. меньше.

д) Да, $P(n; x, y; n+1; \Gamma) = \int_{\Gamma' \cap (-\infty, x]} p(z-y) dz$, если

Γ — подмножество прямой $\{(u, v) : u = x\}$, задаваемое условием на вторую координату $v \in \Gamma'$; $P(n; x, y; n+1; \Gamma) = \int_{\Gamma' \cap [x, \infty)} p(z-y) dz$, если Γ — подмножество прямой $\{(u, v) : u = v\}$, задаваемое условием $u = v \in \Gamma'$; и $P(n; x, y; n+1; \Gamma) =$

Γ для Γ , не пересекающегося с указанными двумя прямыми (точнее, лучами). См. рис. 40, где изображены два луча, на которые можно попасть из точки (x, y) фазового пространства (имеет смысл рассматривать только точки с $y \leq x$).

Доказательства не приводим.

6. Изобразим траекторию случайного процесса на чертеже (рис. 41). Этот случайный процесс — не марковский, так как, например, условное распределение $S_{4,7}$ при условии, что $S_{4,6} = u$, а $S_{4,5} = v$, сосредоточено в точке $2u - v$, а эта точка зависит от v , чего не могло бы быть для марковского процесса.

7. Приводим только переходные функции.

2, 3, 4. Переходные плотности $p(s, x, t, y)$ соответственно $1/\sqrt{2\pi(t-s)} e^{-(y-x)^2/(2(t-s))}$, $1/(2\pi(t-s))^{1/2} e^{-|y-x|^2/2(t-s)}$, $\pi^{-1}(t-s)/((t-s)^2 + (y-x)^2)$.

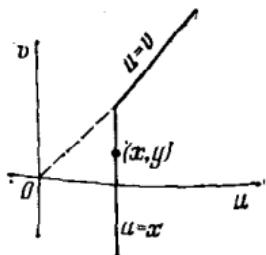


Рис. 40

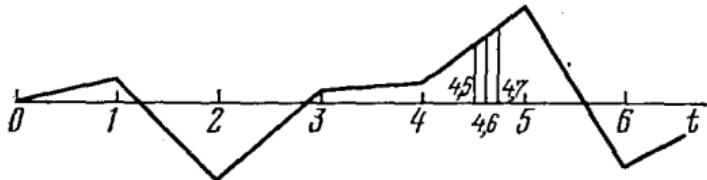


Рис. 41

5. Для процесса $F_n^*(F^{-1}(t))$ переходная функция

$$P(s, k/n, t, \Gamma) = \sum_{j=k}^n C_{n-k}^{n-j} \left(\frac{t-s}{1-s} \right)^{j-k} \left(\frac{1-t}{1-s} \right)^{n-j} \delta_{j/n}(\Gamma).$$

7. $P(s, x, t, \Gamma) = e^{-a(t-s)} \delta_x(\Gamma) + a(t-s) e^{-a(t-s)} \delta_{x+1}(\Gamma) + (a(t-s))^2 e^{-a(t-s)} / (2! \delta_{x+2}(\Gamma) + \dots)$.

8. Матрица вероятностей перехода:

$$\begin{pmatrix} ((1 + e^{-2a(t-s)})/2 & (1 - e^{-2a(t-s)})/2 \\ (1 - e^{-2a(t-s)})/2 & (1 + e^{-2a(t-s)})/2 \end{pmatrix}.$$

9. Переходную функцию можно задать характеристической функцией приращения $\xi_{t'} - \xi_t$, т. е. $\int P(t, x, t', dy) e^{iz(y-x)}$, найденной в задаче 11 § 1.2.

8. Переходная плотность

$$p(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} [e^{-(y-x)^2/(2(t-s))} + e^{-(y+x)^2/(2(t-s))}].$$

§ 8.3.

1. $\|P^{st}\| \leq 1$; норма операторов в B не меньше 1, так как $P^{st}1 \equiv 1$; норма сопряженных операторов та же.

§ 8.4

- Система всех A , представимых в таком виде, — σ -алгебра; она содержит все события вида $\{\xi_t \in \Gamma\}$, $t \geq s$, $\Gamma \in \mathcal{X}$.
- Левая часть в силу формулы (17) § 8.2 есть почти наверное $P_{t, \xi_t}(\theta_t^{-1}B)$; в силу (1) это то же самое, что $P_{\xi_t}(B)$.

§ 8.5

1. Переходная функция $P^0(t, x, \cdot)$ процесса с остановкой в нуле состоит из части, сосредоточенной в точке 0, и абсолютно непрерывной части; пользуясь принципом отражения, находим ее плотность: $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-(y-x)^2/(2t)} - e^{-(y+x)^2/(2t)})$. Для доказательства того, что (w_t^0, P_x) — марковское семейство, пользуемся *простым* марковским свойством.

2. По индукции доказывается, что τ_n — марковские моменты, причем на множестве $\{\tau_n < \infty\}$ выполняются соотношения $\tau_{n+k} = \tau_n + \theta_{\tau_n} \tau_k$, $\xi_{\tau_{n+k}} = \theta_{\tau_n} \xi_{\tau_n}$.

Далее, переходной функцией цепи η_n должна быть функция $Q(k, x, \Gamma) = P_x\{\xi_{\tau_k} \in \Gamma\}$, $x \in Y$, $\Gamma \subseteq Y$; $Q(k, x, \{\ast\}) = P_x\{\tau_k = \infty\}$, $x \in Y$; $Q(k, \ast, \Gamma) = \delta_\ast(\Gamma)$. Марковское свойство для этой цепи состоит в том, что почти наверное должно быть

$$P_x\{\eta_{n+k} \in \Gamma | \eta_1, \dots, \eta_n\} = Q(k, \eta_n, \Gamma).$$

На множестве $\{\eta_n = \ast\}$ это очевидно, на $\{\eta_n \neq \ast\} = \{\tau_n < \infty\}$ это следствие строго марковского свойства для цепи ξ_t относительно марковского момента τ_n .

Конечно, сам факт гораздо очевиднее до доказательства, чем после него.

3*. Характеристическая функция $\tau_b - \tau_a$, $0 \leq a \leq b$, задается формулой $\exp\{- (b-a) \sqrt{|z|} (1 - i \operatorname{sgn} z)\}$.

§ 8.6

1. Если Γ — компакт, то переходная вероятность $P(t, x, \Gamma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; для любой конечной меры μ интеграл $\int \mu(dx) P(t, x, \Gamma) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому если μ — конечная инвариантная мера, то $\mu(\Gamma) = 0$ для любого компакта, и $\mu \equiv 0$. Для меры Лебега в R^r :

$$\begin{aligned} \int_{R^r} dx P(t, x, \Gamma) &= \int_{R^r} dx \left[\int_{\Gamma} p(t, x, y) dy \right] = \\ &= \int_{\Gamma} \left[\int_{R^r} p(t, x, y) dx \right] dy = \int_{\Gamma} dy = \operatorname{mes}(\Gamma). \end{aligned}$$

2. $\mu\{1\} = 2c$, $\mu\{2\} = c$, $c \geq 0$.

3. Любая конечная цепь Маркова более чем с одним классом существенных изменений.

4. Ограничимся случаем нулевого среднего. В силу задачи 2 § 8.1 дело сводится к тому, чтобы найти все непрерывные чис-

ловые функции m_t , σ_t^2 , $t \geq 0$, $\sigma_t^2 \geq 0$, такие, что $m_{t+s} = m_t m_s$, $\sigma_{t+s}^2 = m_t^2 \sigma_s^2 + \sigma_t^2$. Кроме того, требование существования гауссовой инвариантной меры — скажем, с параметрами $(0, \sigma^2)$ — дает еще условие $\sigma^2 = m_t^2 \sigma^2 + \sigma_t^2$. Отсюда получаем $m_t = e^{-at}$, $a \geq 0$; $\sigma_t^2 = \sigma^2(1 - e^{-2at})$. (Случай $a = 0$ — это процесс, тождественно по t равный одной и той же гауссовой случайной величине.) Корреляционная функция $K(\tau) = \sigma^2 e^{-2a|\tau|}$; спектр также легко вычисляется.

§ 9.1

1. Во-первых, $C \subseteq A_0$; любая непрерывная на $[0, \infty)$ функция равномерно непрерывна на любом множестве вида $T_0 \cap [0, N]$. Далее, если $A \supseteq C$, $A \in \mathcal{X}^{T_0}(X^{[0, \infty)})$, то $A_0 \subseteq A$. Действительно, предположим, что $x_* \in A_0$; это означает, что для любого N функция x_t , $t \in T_0 \cap [0, N]$, равномерно непрерывна. Продолжим эту функцию непрерывным образом на всю полупрямую $[0, \infty)$; обозначим полученную функцию через x'_* . Так как принадлежность функции множеству A определяется лишь ее значениями на T_0 , а $x'_* \in C \subseteq A$, то функция x_* , совпадающая с x'_* на T_0 , также принадлежит A . Но нам и нужно было доказать, что из $x_* \in A_0$ вытекает $x_* \in A$.

2. Равенство между множествами доказывается всегда одинаково: из того, что функция x_* принадлежит одной части, выводится, что она принадлежит и другой.

3*. Доказательство этой оценки и всей теоремы 2 (а также следующих за ней теорем 3, 4) можно прочесть в книге Дынкина (1959, гл. 6). См. также Гихман и Скороход (1965, т. IV, § 4).

§ 9.2

1. Достаточно проверить, что для любого $A \in \mathcal{F}_{\leq t+}$ (в частности, для $A = \Omega$) $A \cap \{\tau_n \leq t\} \in \mathcal{F}_{\leq t}$. Но для $0 \leq t < 1/2^n$ это событие вообще невозможно; для больших t , так как τ_n принимает только значения, кратные 2^{-n} , имеем $\{\tau_n \leq t\} = \{\tau_n \leq k/2^n\} = \{\tau < k/2^n\}$, где $k/2^n \leq t < (k+1)/2^n$. Поэтому $A \cap \{\tau_n \leq t\} = A \cap \{\tau < k/2^n\} \in \mathcal{F}_{\leq k/2^n}$ (здесь используется результат задачи 5 § 6.1), а эта σ -алгебра является частью $\mathcal{F}_{\leq t}$.

2. Если $t_n \downarrow t$, то $\xi_{t_n} \rightarrow \xi_t$ для всех ω ; в силу непрерывности f имеем $f(\xi_{t_n}) \rightarrow f(\xi_t)$, и, пользуясь ограниченностью f , осуществляя предельный переход: $P^{t_n}f(x) = M_x f(\xi_{t_n}) \rightarrow M_x f(\xi_t) = P^t f(x)$.

3. $P_x \{\tau(x) = n, \xi_{\tau(x)} \in \Gamma\} = P_x \{\xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = x, \xi_n \in \Gamma \setminus \{x\}\} = P(1, x, \{x\})^{n-1} P(1, x, \Gamma \setminus \{x\})$.

4. Положим $\tau^n = \min \{k/2^n : \xi_{k/2^n} \neq x\}$; легко доказать, что $\tau^n \downarrow \tau(x)$ при всех ω (используется непрерывность справа). При

$t \geq 0$ имеем $\{\tau(x) \geq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau^n \geq t\}$; поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x \{\tau(x) \geq t\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x \{\tau^n \geq t\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x \{\tau^n \geq [2^n t]/2^n\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x \{\xi_{1/2^n} = \xi_{2/2^n} = \dots = \xi_{[2^n t]/2^n} = x\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x (1/2^n, x, \{x\})^{[2^n t]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x (1/2^n, x, \{x\})^{2^n t} = \\ &= [\mathbf{P}_x \{\tau(x) \geq 1\}]^t.\end{aligned}$$

Получаем показательное распределение с параметром

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |\ln P(1/2^n, x, \{x\})|.$$

5. Имеем $\lambda(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left| \ln \frac{2 + e^{-3/2^n}}{3} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |\ln [1 - 1/2^n + o(1/2^n)]| = 1$; аналогично $\lambda(2) = 2$.

6*. Воспользоваться тем, что $\mathbf{M}_x \chi_{\{\tau(x) \geq t\}} f(\xi_{\tau(x)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}_x \chi_{\{\tau^n \geq t\}} f(\xi_{\tau^n})$, где $f \in \mathbf{C}$, а обозначение τ^n — то же, что при решении задачи 4.

§ 10.1

1. Элементарно.

$$2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3*, 4*, 5*. Решения не приводятся; что касается задачи 4, см. доказательство теоремы 1 § 11.2.

6. Продолжим произвольную функцию f , заданную на $[0, \infty)$, четным образом на левую полупрямую, положив $\tilde{f}(x) = f(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что полугруппа \tilde{P}^t , связанная с винеровскими процессами с отражением, задается формулой $\tilde{P}^t f(x) = P^t \tilde{f}(x)$, где P^t — полугруппа, связанная с семейством обычных винеровских процессов на $(-\infty, \infty)$. Если $f \in \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}[0, \infty)$, $f'(0+) = 0$, то $\tilde{f} \in \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}(-\infty, \infty)$, откуда вытекает, что определено $\tilde{A}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (\tilde{P}^t f(x) - f(x)) =$

$$= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (P^t \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)) = \frac{1}{2} \tilde{f}''(x) = \frac{1}{2} f''(x) \quad \text{при } x \in [0, \infty).$$

Аналогично для процесса с остановкой в нуле: полагаем $f^0(x) = f(x)$ при $x \geq 0$, $f^0(x) = 2f(0) - f(-x)$ при $x < 0$; полугруппа, связанная с w_t^0 , задается формулой $P^{0t} f(x) = P^t f^0(x)$; для $f \in \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}[0, \infty)$, $f''(0+) = 0$ функция $f^0 \in \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}(-\infty, \infty)$, откуда все следует.

7. Необходимость ясна; достаточность: $P^t f = P^0 f + \int_0^t P^s A f ds = 1$.

§ 10.2

2. Для $f \in \mathbf{B}$ требуется доказать, что $P^h R_\lambda f \rightarrow R_\lambda f$ при $h \downarrow 0$. Имеем

$$P^h R_\lambda f - R_\lambda f = e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds.$$

Добавим и вычтем $\int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds$; получим

$$\begin{aligned} \|P^h R_\lambda f - f\| &\leq (e^{\lambda h} - 1) \left\| \int_h^\infty e^{-\lambda s} P^s f ds \right\| + \left\| \int_0^h e^{-\lambda s} P^s f ds \right\| \leq \\ &\leq (e^{\lambda h} - 1) \lambda^{-1} \|f\| + h \|f\| \rightarrow 0 \quad (h \downarrow 0). \end{aligned}$$

3. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\|P^t f - f\| < \varepsilon/2$ при $t \leq \delta$; тогда

$$\begin{aligned} \|\lambda R_\lambda f - f\| &= \left\| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} [P^t f - f] dt \right\| \leq \lambda \int_0^\delta e^{-\lambda t} \|P^t f - f\| dt + \\ &+ \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} \|P^t f - f\| dt \leq \varepsilon/2 + e^{-\lambda \delta} \cdot 2 \|f\|. \end{aligned}$$

При достаточно больших λ это будет меньше ε .

4. $\mathbf{B}_0 \supseteq R_\lambda \mathbf{B} \supseteq R_\lambda \mathbf{B}_0$; $R_\lambda \mathbf{B}_0$ всюду плотно в \mathbf{B}_0 , а $R_\lambda \mathbf{B}$ — и подавно.

5. Что $D_A \supseteq \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}$, мы уже выяснили (задача 4 § 10.1); нужно доказать, что $D_A \subseteq \mathbf{C}_{\text{равн}}^{(2)}$. Прежде всего любая функция, задаваемая формулой (3), равномерно непрерывна, потому что

$$\frac{d}{dx} R_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} \operatorname{sgn}(y-x) f(y) dy,$$

и эта производная ограничена по норме константой $\sqrt{2/\lambda} \|f\|$. Отсюда $\mathbf{B}_0 \supseteq \mathbf{C}_{\text{равн}}$ (см. предыдущую задачу). Для непрерывной

ограниченной f получаем далее

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} R_\lambda f(x) &= \\ &= \frac{d}{dx} \left[- \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{2\lambda}(x-y)} f(y) dy + \int_x^\infty e^{\sqrt{2\lambda}(x-y)} f(y) dy \right] = \\ &= -2f(x) + \sqrt{2\lambda} \int_{-\infty}^\infty e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} f(y) dy. \end{aligned}$$

Любая функция $F \in D_A$ представляется в виде $R_\lambda f$, $f \in B_0 \subseteq C_{\text{равн}}$, откуда $\frac{1}{2} F'' = \lambda F - f \in C_{\text{равн}}$, $F \in C_{\text{равн}}^{(2)}$.

7. Ясно, что $1 \in D_A$, $A1 = 0$. Далее, в пространстве $C[0, 1]$ всюду плотно множество $C^{(2)}[0, 1]$; докажем, что в этом множестве всюду плотна область определения $D_A = C^{(2)}[0, 1] \cap \{f:$

$f'(0+) = f'(1-) = 0\}$. Существует функция $h \in C^{(2)}[0, \infty)$, лежащая между точками 0 и 1, равная единице в какой-то окрестности точки 0 и нулю вне некоторой большей окрестности точки 0. Пусть $f \in C^{(2)}[0, 1]$; «исправим» эту функцию, положив $f_\varepsilon(x) = f(x) - [f(x) - f(0)]h(x/\varepsilon) - [f(x) - f(1)]h((1-x)/\varepsilon)$. Эта дважды непрерывно дифференцируемая функция близка к f , а в некоторых окрестностях точек 0 и 1 обращается в константу (рис. 42).

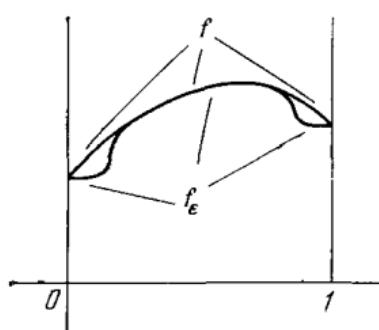


Рис. 42

Выведем принцип максимума. Если $f(x)$ максимально во внутренней точке отрезка, то в точке максимума $f' = 0$, $f'' \leq 0$, $Af = \frac{1}{2} f'' \leq 0$. Произвольная функция из $C^{(2)}[0, 1]$ может принимать максимум в граничной точке и при этом иметь положительную вторую производную; например, $f(x) = x + x^2$. Но от функций из D_A требуется $f'(0) = f'(1) = 0$; поэтому, скажем, вблизи точки 1 имеем $f(x) = f(1) + (x-1)^2 f''(1)/2 + o((x-1)^2)$, и если бы $f''(1) > 0$, то в окрестности точки 1 было бы $f(x) > f(1)$.

Докажем, наконец, существование решения уравнения $\lambda F - AF = f$, т. е. уравнения $\lambda F - \frac{1}{2} F'' = f$ с граничными условиями $F'(0) = F'(1) = 0$, для любого $f \in C$. Какое-то решение уравнения $\lambda F - \frac{1}{2} F'' = f$, конечно, существует, но сно не удовлетворяет граничным условиям. Обозначим произвольное решение этого уравнения через F и будем искать F в виде F плюс решение соответствующего однородного уравнения $\lambda g - \frac{1}{2} g'' = 0$. Обозначим через g_1 , g_2 любые два линейно независимых решения однородного уравнения. Мы хотим найти функцию

$F(x) = F(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ такую, что $F'(0) = F'(1) = 0$. Отсюда для c_1, c_2 получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} c_1 g'_1(0) + c_2 g'_2(0) &= -\tilde{F}'(0), \\ c_1 g'_1(1) + c_2 g'_2(1) &= -\tilde{F}'(1). \end{aligned}$$

Мы могли бы выписать g_1, g_2 в явном виде и проверить, что определитель этой системы не обращается в нуль при $\lambda > 0$; но это вытекает из более общих соображений, а именно из того, что в силу принципа максимума решение единственно. Значит, решение существует при любой правой части.

§ 10.3

1. Выделим конечное покрытие пространства X окрестностями $U_{\varepsilon/3}(x_1), \dots, U_{\varepsilon/3}(x_n)$. Для каждой точки x_i возьмем неотрицательную функцию $f_i \in D_A$, равную нулю в $U_{\varepsilon/3}(x_i)$ и положительную вне $U_{2\varepsilon/3}(x_i)$. Для любого $\delta > 0$ существует $h_0 > 0$ такое, что

$$\left| t^{-1} (P^t f_i(x) - f_i(x)) - A f_i(x) \right| < \delta \min \{f_i(y) : y \in V_{2\varepsilon/3}(x_i)\}$$

при $1 \leq i \leq n$, $x \in X$, $t \leq h_0$. Если $x \in U_{\varepsilon/3}(x_i)$, то $f_i(x) = 0$, $A f_i(x) = 0$, и $P^t f_i(x) < t \delta \min \{f_i(y) : y \in V_{2\varepsilon/3}(x_i)\}$; отсюда $P(t, x, V_\varepsilon(x)) \leq P(t, x, V_{2\varepsilon/3}(x_i)) < \delta t$.

2. Проверяется условие микротеоремы 2 (рис. 43).



• Рис. 43

$$3. \text{ Вытекает из } \|\hat{P}^t f - f\| = \left\| \int_0^t P^s A f ds \right\| \leq t \|A\| \cdot \|f\|.$$

6. При $t \downarrow 0$ имеем $P(t, x, \Gamma) = P^t \chi_\Gamma(x) = [E + tA + o(t)] \times \chi_\Gamma(x) = \chi_\Gamma(x) + tA(x, \Gamma) + o(t)$. Согласно задаче 4 § 9.2, $\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |\ln P(1/2^n, x, \{x\})| = |A(x, \{x\})| = -A(x, \{x\})$. Далее доказывается, что $P_x \{\xi_{\tau(x)} \in \Gamma\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(1/2^n, x, \Gamma) / [1 - P(1/2^n, x, \{x\})]$, где Γ — измеримое множество, не содержащее x . Числитель здесь равен $(1/2^n) A(x, \Gamma) + o(1/2^n)$, а знаменатель эквивалентен $(1/2^n) \lambda(x)$. Отсюда $\pi(x, \Gamma) = A(x, \Gamma) / \lambda(x)$.

7. Представляем A в виде $B - aE$, где $Bf(x) = af(x+1)$. Имеем $e^{tA} = e^{tB - atE} = e^{-atE} e^{tB} = e^{-at} [E + tB + t^2 B^2 / 2! + \dots]$; отсюда $e^{tA} f(x) = e^{-at} [f(x) + atf(x+1) + a^2 t^2 f(x+2)/2! + \dots] = = \sum_{k=0}^{\infty} (at)^k e^{-at} / (k!) \cdot f(x+k)$.

Этой полугруппе соответствует семейство пуассоновских процессов с независимыми приращениями.

9. Нужно найти меру μ такую, что $\int_0^1 \mu(dx) \frac{1}{2} f''(x) = 0$ при всех $f \in D_A$.

Возьмем $g \in C[0, 1]$ и положим $g^0(x) = g(x) - \int_0^1 g(y) dy$,

$h(x) = \int_0^x g^0(y) dy$, $f(x) = 2 \int_0^x h(y) dy$. Легко видеть, что $f \in D_A$,

потому что $h(1) = h(0) = 0$. Поэтому $0 = \int_0^1 \mu(dx) g^0(x) = \int_0^1 \mu(dx) g(x) - \mu[0, 1] \int_0^1 g(y) dy$, или, иначе, $\int_0^1 g(x) [\mu(dx) - \mu[0, 1] dx] = 0$. Так как g — произвольная функция из C , то мера со знаком $\mu(\cdot) - \mu[0, 1] \text{mes}(\cdot)$ равна нулю, т. е. инвариантная мера с точностью до множителя есть мера Лебега.

11. $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t P^s g ds = P^t g$; с другой стороны, $A \int_0^t P^s g ds =$

$= \lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left[P^h \int_0^t P^s g ds - \int_0^t P^s g ds \right]$. Разность в квадратных скоб-

ках здесь равна $\int_h^{t+h} P^s g ds - \int_0^t P^s g ds = \int_t^{t+h} P^s g ds - \int_0^h P^s g ds$,

откуда $A \int_0^t P^s g ds = P^t g - g$.

Единственность решения. Положим $v_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} v(t, x) dt$; интеграл сходится при $\lambda > 0$. При пре-

образовании Лапласа задача (4)–(5) превращается в уравнение $\lambda v_\lambda - Av_\lambda = \lambda^{-1} g$, решение которого единственno.

12. $|\tilde{P}^t f(x) - P^t f(x)| = \left| M_x \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} - 1 \right] f(\xi_t) \right| \leqslant (e^{t \|c\|} - 1) \|f\|. \text{ Отсюда } \lim_{t \downarrow 0} \|\tilde{P}^t f - f\| = \lim_{t \downarrow 0} \|P^t f - f\|, \text{ и мно-}$

жества функций f , для которых эти пределы равны нулю, одни и те же для \tilde{P}^t и P^t .

$$14*. w(t, x) = M_x \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} f(\xi_t) + \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s c(\xi_u) du \right\} g(\xi_s) ds \right].$$

15. Ясно, что интеграл предсказуем и имеет ограниченную вариацию на каждом отрезке $[0, t]$. Докажем, что $f(\xi_t) - \int_0^t Af(\xi_s) ds$ — мартингал. Во-первых, эта случайная функция измерима относительно $\mathcal{F}_{\leqslant t}$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} M_x \left[f(\xi_t) - \int_0^t Af(\xi_u) du \mid \mathcal{F}_{\leqslant s} \right] &= \\ &= - \int_0^s Af(\xi_u) du + M_x [f(\xi_t) \mid \mathcal{F}_{\leqslant s}] - M_x \left[\int_s^t Af(\xi_u) du \mid \mathcal{F}_{\leqslant s} \right] (*) \end{aligned}$$

почти наверное; в силу марковского свойства второе и третье слагаемые равны соответственно $P^{t-s}f(\xi_s)$ и

$$-M_{\xi_s} \left[\int_0^{t-s} Af(\xi_u) du \right] = - \int_0^{t-s} P^u Af(\xi_s) ds. Пользуясь тем, что$$

$$P^{t-s}f(y) - f(y) = \int_0^{t-s} P^u Af(y) du, получаем, что выражение (*)$$

почти наверное равно $f(\xi_s) - \int_0^s Af(\xi_u) du$.

Если выполнено марковское свойство относительно какого-нибудь неубывающего семейства σ -алгебр $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F}_{\leqslant t}$ (см. п. 0 § 8.5), то $\int_0^t Af(\xi_s) ds$ оказывается компенсатором $f(\xi_t)$ относительно \mathcal{F}_t .

§ 11.2

2. Уравнение для плотности инвариантной меры имеет такой вид: $\frac{1}{2} \frac{d}{dy} \left[a \frac{dp}{dy} - b y p \right] = 0$, откуда $a \frac{dp}{dy} - b y p = \text{const}$, $p(y) = e^{by^2/(2a)} \left[C \int e^{-by^2/(2a)} dy + D \right]$. Неопределенный интеграл

при $a > 0, b < 0$ не ограничен ни сверху, ни снизу, поэтому из положительности меры вытекает $C = 0$. Отсюда $p(y) = De^{by^2/(2a)}$, т. е. с точностью до множителя это — нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $a/|b|$.

При $b \geq 0$ конечных инвариантных мер нет.

3*. При фиксированных s, x, t переходная функция $p(s, x, t, \cdot)$ — нормальное распределение со средним $x(1-t)$: $(1-s)$ и дисперсией $(1-t)(t-s)/(1-s)$; $b(s, x) = -x/(1-s)$, $a(s, x) \equiv 1$; с процессом связан дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{x}{1-s} \frac{\partial}{\partial x}$. Уравнения для переходной плотности $p(s, x, t, y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{x}{1-s} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y p}{1-t} \right).\end{aligned}$$

Результаты § 11.2 не применимы непосредственно, потому что процесс не определен при $t > 1$ (с этим легко справиться) и потому что коэффициент сноса имеет особенность при $s = 1$. Однако достаточно легко проверить, что уравнения все же выполнены (возможный путь: заменой переменных превратить полуинтервал $[0, 1]$ в $[0, \infty)$).

Контрольный вопрос: какому уравнению удовлетворяет функция

$$u(s, x) = M\{f(Z(1/2)) \mid Z(s) = x\}$$

при $s \leq 1/2$?

§ 12.1

1. Пусть $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$; функция $\chi_{\leq \tau}(t)$ принимает на каждом из полуинтервалов $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$ постоянное (случайное) значение, а при $t > t_n$ тождественно равна нулю. Имеем (считая $t_0 = 0$): $\int_0^\infty \chi_{\leq \tau}(t) d\omega_t = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\{\tau \geq t_i\}} \times \chi(w_{t_{i+1}} - w_{t_i})$. Когда τ принимает значение t_i , стохастический интеграл оказывается равным $(w_{t_1} - w_{t_0}) + (w_{t_2} - w_{t_1}) + \dots + (w_{t_i} - w_{t_{i-1}}) = w_{t_i} - w_{t_0} = w_\tau$.

2. Пример: τ — первый момент достижения точки 1; $Mw_\tau = 1$, $Mw_\tau^2 = 1$.

3. Если $M\tau < \infty$, то

$$M\tau = Mw_\tau^2 = Mb^2(A + \tau) = b^2A + b^2M\tau.$$

При $b < 1$ получаем $M\tau = b^2A/(1 - b^2)$, при $b \geq 1$ — противоречие.

4*. Сначала доказать, что $M(\tau \wedge N) \leq b^2A/(1 - b^2)$.

5. Повторяется с очевидными изменениями решение задачи 5 § 2.2.

§ 12.2

1. Требуется проверить, что

$$M[\eta_{t''}\zeta_{t''} | \mathcal{F}_{t'}] = \eta_{t'}\zeta_{t'} + M\left[\int_{t'}^{t''} f(s, \omega) g(s, \omega) ds | \mathcal{F}_{t'}\right].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} M[\eta_{t''}\zeta_{t''} | \mathcal{F}_{t'}] &= M[\eta_{t'}\zeta_{t'} + (\eta_{t''} - \eta_{t'})\zeta_{t'} + \\ &\quad + \eta_{t'}(\zeta_{t''} - \zeta_{t'}) + (\eta_{t''} - \eta_{t'})(\zeta_{t''} - \zeta_{t'}) | \mathcal{F}_{t'}] = \\ &= \eta_{t'}\zeta_{t'} + \zeta_{t'}M[\eta_{t''} - \eta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}] + \eta_{t'}M[\zeta_{t''} - \zeta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}] + \\ &\quad + M[(\eta_{t''} - \eta_{t'})(\zeta_{t''} - \zeta_{t'}) | \mathcal{F}_{t'}]; \end{aligned}$$

далее пользуемся тем, что

$$M[\eta_{t''} - \eta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}] = M[\zeta_{t''} - \zeta_{t'} | \mathcal{F}_{t'}] = 0.$$

2. Без ограничения общности мы можем считать, что $t' = t_{i'}, t'' = t_{i''}$. Проверяем (4): рассматриваем

$$M\left[\sum_{i=i'}^{i''-1} f_i(\omega) (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \sum_{j=i'}^{i''-1} g_j(\omega) (w_{t_{j+1}} - w_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_{i'}}\right].$$

Представляем это условное среднее в виде суммы по i, j условных средних отдельных слагаемых. Слагаемые с $i < j$ представляем в виде условного среднего от условного среднего относительно σ -алгебры \mathcal{F}_{t_j} , и они обращаются в нуль; точно так же слагаемые с $i > j$. Слагаемые с $i = j$ дают

$$M\left[\int_{t'}^{t''} f(s, \omega) g(s, \omega) ds | \mathcal{F}_{t'}\right].$$

§ 12.3

1. Для стохастических интегралов используем неравенство Колмогорова:

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s f^{(n)}(u, \omega) dw_u - \int_0^s f(u, \omega) dw_u \right| \geq \varepsilon/2\right\} &\leq \\ &\leq M \int_0^t |f^{(n)}(u, \omega) - f(u, \omega)|^2 du / (\varepsilon/2)^2 \rightarrow 0; \end{aligned}$$

для лебеговских:

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s g^{(n)}(u, \omega) du - \int_0^s g(u, \omega) du \right| \geq \varepsilon/2 \right\} \leq \\ \leq \mathbf{P} \left\{ \int_0^t |g^{(n)}(u, \omega) - g(u, \omega)| du \geq \varepsilon/2 \right\} \rightarrow 0.$$

$$2. \left| \int_s^t G_m(u) d\alpha_m(u) - \int_s^t G(u) du \right| \leq \\ \leq \int_s^t |G_m(u) - G(u)| d\alpha_m(u) + \left| \int_s^t G(u) d\alpha_m(u) - \int_s^t G(u) du \right|.$$

Первый интеграл не превосходит $\sup_u |G_m(u) - G(u)| [\alpha_m(t) - \alpha_m(s)] \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$; разность интегралов по α_m и по u стремится к нулю, потому что функция G непрерывна, а из равномерной сходимости функций распределения вытекает слабая сходимость.

$$3. \text{ Применить формулу Ито к } \exp \left\{ \int_0^t f \chi_{\leq \tau_N}(s) dw_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^t f^2 \chi_{\leq \tau_N}(s) ds \right\}, \quad \text{где } \tau_N = \min \left\{ t \leq T: \int_0^t f dw_s - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^t f^2 ds = N \right\}.$$

§ 12.4

1. Предсказуемость стохастического интеграла как функции верхнего предела — см. § 2; обычного — задача 3 § 6.2. Оценка $\mathbf{M} |\xi_t^{(n)}|^2$:

$$\mathbf{M} |\xi_t^{(n)}|^2 \leq \\ \leq 3\mathbf{M} |\eta|^2 + 3\mathbf{M} \left| \int_s^t \sigma(\xi_u^{(n-1)}) dw_u \right|^2 + 3\mathbf{M} \left| \int_s^t b(\xi_u^{(n-1)}) du \right|^2 \leq \\ \leq 3\mathbf{M} |\eta|^2 + 3(r^2 + r(t-s)) K^2 \int_s^t [1 + \mathbf{M} |\xi_u^{(n-1)}|^2] du$$

(аналогичные оценки проведены подробно при доказательстве теоремы 1).

2. По неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} M |\xi_t|^2 &= M |\eta + (\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}) + (\xi_t^{(2)} - \xi_t^{(1)}) + \dots \\ &\dots + (\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}) + \dots|^2 \leq M [|\eta|^2 + 2 |\xi_t^{(1)} - \xi_t^{(0)}|^2 + \\ &+ 4 |\xi_t^{(2)} - \xi_t^{(1)}|^2 + \dots + 2^{n+1} |\xi_t^{(n+1)} - \xi_t^{(n)}|^2 + \dots] \times \\ &\times [1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^{n+1} + \dots] \leq 2M [1 + |\eta|^2] \times \\ &\times \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (K/L)^2 (4L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2])^{n+1} / (n+1)! \right]. \end{aligned}$$

3. Имеем:

$$\begin{aligned} M |\xi'_{t \wedge \tau_N} - \xi_{t \wedge \tau_N}|^2 &\leq 2M \left| \int_s^t [\sigma(\xi'_u) - \sigma(\xi_u)] \chi_{\leq \tau_N}(u) dw_u \right|^2 + \\ &+ 2M \left| \int_s^t [b(\xi'_u) - b(\xi_u)] \chi_{\leq \tau_N}(u) du \right|^2 \leq \\ &\leq 2L^2 (r^2 + r(t-s)) M \int_s^{t \wedge \tau_N} |\xi'_u - \xi_u|^2 du \leq \\ &\leq 2L^2 (r^2 + r(t-s)) \int_s^t M |\xi'_{u \wedge \tau_N} - \xi_{u \wedge \tau_N}|^2 du. \end{aligned}$$

Начиная с неравенства

$$M |\xi'_{t \wedge \tau_N} - \xi_{t \wedge \tau_N}|^2 \leq N^2$$

по индукции получаем нужное неравенство. Из него получаем

$$M |\xi'_{t \wedge \tau_N} - \xi_{t \wedge \tau_N}|^2 = 0$$

(так как n можно взять сколь угодно большим). Значит, почти наверное $\xi'_t = \xi_t$ при $t \leq \tau_N$, а так как N тоже можно взять сколь угодно большим, то и при всех t .

4. Пусть $\xi_t^{(n)}, \xi_t'^{(n)}$ — последовательные приближения, сходящиеся к ξ_t, ξ_t' соответственно ($\xi_t^{(0)} \equiv \eta, \xi_t'^{(0)} \equiv \eta'$). Имеем

$$\begin{aligned} M |\xi_t'^{(n+1)} - \xi_t^{(n+1)}|^2 &\leq \\ &\leq 3M |\eta' - \eta|^2 + 3L^2 (r^2 + r(t-s)) \int_s^t M |\xi_u'^{(n)} - \xi_u^{(n)}|^2 du, \end{aligned}$$

откуда по индукции получаем

$$\mathbf{M} \left| \xi_t^{(n)} - \xi_t^{(n)} \right|^2 \leq 3\mathbf{M} |\eta' - \eta|^2 [1 + 3L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2] + + (3L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2])^2/2! + (3L^2 [r^2(t-s) + r(t-s)^2])^n/n!].$$

Пределочный переход приводит к нужной оценке.

§ 12.5

1. Сначала докажем формулу (1) для функций f , являющихся индикаторами множеств из $\mathcal{B}' \times \mathcal{F}$: требуется доказать, что почти наверное

$$\mathbf{P} \{ \omega: (\eta(\omega), \Phi_t(\omega)) \in A | \mathcal{F}_t \} = F_A(\eta), \quad (*)$$

где

$$F_A(x) = \mathbf{P} \{ \omega: (x, \omega) \in A \}, \quad A \in \mathcal{B}' \times \mathcal{F}.$$

Правая часть измерима относительно \mathcal{F}_t ; по определению условного среднего (*) означает, что для любого $C \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbf{P}(C \cap \{ \omega: (\eta(\omega), \Phi_t(\omega)) \in A \}) = \int_C F_A(\eta) \mathbf{P}(d\omega). \quad (**)$$

Обе части здесь — меры как функции от A , так что достаточно доказать эту формулу для множеств A из некоторого полукольца, порождающего σ -алгебру $\mathcal{B}' \times \mathcal{F}$. В качестве такого полукольца возьмем систему множеств вида

$$\{(x, \omega): x \in \Gamma; w_{t_1}(\omega) \in \Gamma_1, \dots, w_{t_n}(\omega) \in \Gamma_n\},$$

где $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ — борелевские множества. Для множеств из этого полукольца

$$F(x) = \chi_\Gamma(x) \mathbf{P}\{w_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, w_{t_n} \in \Gamma_n\};$$

(**) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C \cap \{\eta \in \Gamma\} \cap \{w_{t+t_1} - w_t \in \Gamma_1, \dots, w_{t+t_n} - w_t \in \Gamma_n\}) &= \\ &= \mathbf{P}\{w_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, w_{t_n} \in \Gamma_n\} \int_C \chi_\Gamma(\eta) d\mathbf{P}, \end{aligned}$$

и истинность этого равенства вытекает из независимости приращений и однородности винеровского процесса.

Произвольную неотрицательную измеримую функцию $f(x, \omega)$ представляем в виде монотонного предела линейных комбинаций индикаторов:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{1}{2^n} \chi_{\{k/2^n \leq f < (k+1)/2^n\}} + n\chi_{\{f \geq n\}}.$$

$$2. M \left| \int_s^{s+h} b(\xi_u) du - \sum_{k=0}^{n-1} b(\xi_{s+kh/n}) \frac{h}{n} \right|^2 \leq$$

$$\leq h^2 \sup_{\substack{|u-v| \leq h/n \\ s \leq u, v \leq s+h}} M |b(\xi_u) - b(\xi_v)|^2 \leq \frac{\text{const}}{n} \rightarrow 0.$$

$$3. \delta_n(h, x) \leq 4M |\xi_h(x; \omega)|^2 + 4|x|^2 +$$

$$+ 4M \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\xi_{kh/n}(x; \omega)) [w_{(k+1)h/n} - w_{kh/n}] \right|^2 +$$

$$+ 4M \left| \sum_{k=0}^{n-1} b(\xi_{kh/n}(x; \omega)) \frac{h}{n} \right|^2.$$

Для первого слагаемого оценка уже получена; третье равно

$$4 \sum_{i,j=1}^r \left[\sum_{k=0}^{n-1} M |\sigma_i^j(\xi_{kh/n})|^2 \frac{h}{n} \right] \leq 4r^2 h K^2 \max_{0 \leq u \leq h} M |\xi_u|^2,$$

четвертое слагаемое не превосходит

$$4h \sum_{i=1}^r \left[\sum_{k=0}^{n-1} M |b^i(\xi_{kh/n})|^2 \frac{h}{n} \right] \leq 4rh^2 K^2 \max_{0 \leq u \leq h} M |\xi_u|^2,$$

а $M |\xi_u(x; \omega)|^2$ уже оценено.

4. Из формулы (11) получаем

$$\|P^t f - f\| \leq t \|Lf\| \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0).$$

5. Из той же формулы получаем

$$\|t^{-1}(P^t f - f) - Lf\| =$$

$$= t^{-1} \left\| \int_0^t (P^s Lf - Lf) ds \right\| \leq \max_{0 \leq s \leq t} \|P^s Lf - Lf\| \rightarrow 0 \quad (t \downarrow 0).$$

6. Стохастические уравнения: $d\omega_t = d\omega_t$, $d\xi_t = \omega_t dt$; коэффициенты: $b^1 \equiv 0$, $b^2(x, y) = x$, $\sigma_1^1 \equiv 1$, прочие — нули. Отсюда

$$a^{11} \equiv 1, \quad a^{12} = a^{21} = a^{22} \equiv 0;$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

7. Из оценки $M |\xi_t(x; \omega) - \xi_t(y; \omega)|^2 \leq 3|x-y|^2 \exp\{3L^2 \times [r^2 t + rt^2]\}$ вытекает, что $\lim_{y \rightarrow x} (\mathbf{P}) \xi_t(y; \omega) = \xi_t(x; \omega)$; из сходимости по вероятности следует слабая сходимость распределений: $P(t, y, \cdot) \rightarrow P(t, x, \cdot)$. Это и есть феллеровское свойство.

8*. Коэффициенты диффузии и сноса суть соответственно 1 и $-x/(1-s)$ (см. задачу 3* § 11.2); полагая $\sigma = 1$, выписываем стохастическое уравнение; $dZ(t) = dw_t - \frac{Z(t)}{1-t} dt$ (это случай, не рассмотренный нами: неоднородный по времени и с особенностью в коэффициенте сноса).

§ 13.1

Решения задач этого параграфа можно получить, воспроизведя в более простой обстановке решения задач и доказательства микротеорем следующего параграфа; но полезно сначала заняться задачами, связанными с цепями Маркова, а потом только обратиться к диффузионным процессам.

6. Уравнение: $m(x+1)/2 - m(x) + m(x-1)/2 = -1$, $0 < x < n$; решение: $m(x) = x(n-x)$ для $0 \leq x \leq n$.

8. Уравнение $v(x+1)p - v(x) + v(x-1)q = -1$, $x > 0$; общее решение: $v(x) = x/(p-q) + C_1 + C_2(q/p)^x$ при $x \geq 0$, $p \neq q$, $v(x) = -x^2 + C_1 + C_2x$ при $x \geq 0$, $p = q = 1/2$. При $p \geq q$ неотрицательных решений нет, и, значит, $M_x \tau = \infty$; при $p < q$ наименьшее неотрицательное решение есть $m(x) = x/(q-p)$.

9*. $q(x) Pz(x) - z(x) = -g(x)$, $x \in D$; $z(x) = 0$, $x \notin D$.

§ 13.2

1. Используем марковское свойство:

$$\begin{aligned} P_x \{\tau \geq (n+1)T\} &= P_x (\{\tau \geq nT\} \cap \theta_{nT}^{-1} \{\tau \geq T\}) = \\ &= \int_{\{\tau \geq nT\}} P_{\xi_{nT}} \{\tau \geq T\} P_x (d\omega) \leq (1-\delta) P_x \{\tau \geq nT\}; \end{aligned}$$

по индукции получаем оценку (1), а дальше пользуемся тем, что

$$M_x \tau \leq T \sum_{n=0}^{\infty} P_x \{\tau \geq nT\}.$$

2*. Решение аналогично доказательству теоремы 1 § 13.3.

3*. Инфинитезимальный оператор марковского семейства (η_t, P_x) задается формулой $Af(x) = a[f(x+1) - f(x)] - af'(x)$. Гладкая финитная функция $v(x)$, определяемая формулой $a^{-1}x(l+1-x)$ при $0 \leq x \leq l+1$, удовлетворяет уравнению $Av(x) = -1$ при $x \in [0, l]$. Из этого вытекает, что

$$v(x) = M_x [v(\eta_{\tau \wedge T}) + (\tau \wedge T)] \geq M_x (\tau \wedge T).$$

Пределный переход при $T \rightarrow \infty$ дает нужную оценку.

4. Собственно, решать после того, как прочтен предыдущий текст, уже нечего.

5. Искомая вероятность $p(x)$ — решение задачи $\frac{1}{2} a(x) p''(x) + b(x) p'(x) = 0$, $p(c) = 0$, $p(d) = 1$. Общее решение уравнения есть $C_1 \int e^{-2b(x)/a(x)} dx + C_2$; решение, удовлетворяющее

граничным условиям:

$$p(x) = \int_c^x e^{-2b(y)/a(y)} dy / \int_c^d e^{-2b(y)/a(y)} dy.$$

6. Достаточно проверить, что $\frac{1}{2} \Delta \ln |x| = 0$. Теперь займемся предельными переходами. Обозначим через τ_r, τ_R, τ_0 момент первого достижения окружностей радиуса r, R и точки 0. При $R \rightarrow \infty$ момент τ_R стремится к бесконечности, поэтому $\lim_{R \rightarrow \infty} P_x \{\tau_r < \tau_R\} = P_x \{\tau_r < \infty\}$ (это — вероятность монотонного предела событий), т. е. вероятность когда-либо достичь d_1 равна 1.

Далее, $\tau_0 = \lim_{r \downarrow 0} \tau_r$, поэтому

$$P_x \{\tau_0 < \tau_R\} = \lim_{r \downarrow 0} P_x \{\tau_r < \tau_R\} = 0$$

при всех $x \neq 0$; предельным переходом при $R \rightarrow \infty$ получаем $P_x \{\tau_0 < \infty\} = 0$.

Почему нельзя получить $P_x \{\tau_0 < \infty\}$ предельным переходом от $P_x \{\tau_r < \infty\}$ при $r \downarrow 0$? Дело в том, что, тогда как $\bigcap_{r > 0} \{\tau_r < \tau_R\} = \{\tau_0 < \tau_R\}$, пересечение $\bigcap_{r > 0} \{\tau_r < \infty\}$ не совпадает с $\{\tau_0 < \infty\}$, потому что $\lim_{r \downarrow 0} \tau_r$ может быть равен ∞ .

7. $P_x \{\tau_r < \tau_R\} = (1/|x| - 1/R)/(1/r - 1/R)$; имеем $P_x \{\tau_r < \infty\} = \lim_{R \rightarrow \infty} P_x \{\tau_r < \tau_R\} = r/|x|$ при $|x| \geq r$; $P_x \{\tau_0 < \tau_R\} = \lim_{r \downarrow 0} P_x \{\tau_r < \tau_R\} = 0$, и точно так же $P_x \{\tau_0 < \infty\} = 0$ при $x \neq 0$ (ср. задачу 2* § 7.4).

8. $m(x) = (R^2 - |x|^2)/r$; в частности, среднее время выхода для траектории, начинающейся в центре шара, равно R^2/r .

Совершенно так же, если D — область, ограниченная поверхностью второго порядка:

$$D = \left\{ x: v(x) = \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j + \sum_i B_i x^i + C \geq 0 \right\},$$

имеем

$$\frac{1}{2} \Delta v(x) \equiv \sum_i A_{ii}.$$

Отсюда вытекает, что $M_x \tau < \infty$, если $\sum_i A_{ii} < 0$; в случае ограниченной области D , т. е. эллипсоида

$$M_x \tau = v(x) / \left| \sum_i A_{ii} \right|.$$

Можно доказать (например, используя стохастические интегралы), что это выполняется и для неограниченной области и что $M_x \tau = \infty$, если $\sum_i A_{ii} \geq 0$.

- 9*. $M_{x,y} \tau = (x^2 \sin^2(a/2) - y^2 \cos^2(a/2)) / \cos a$ при $a < \pi/2$,
 $M_{x,y} \tau < \infty$ для острого угла,
 $M_{x,y} \tau = \infty$ для прямого или тупого.

10*. Конечно.

11*. Проверяется, что

$$u(x^1, x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x^1 x^2}(y) f(y) dy$$

— ограниченное решение задачи $\frac{1}{2} \Delta u = 0$ в D , $u(x^1, x^2) \rightarrow f(y)$ при $(x^1, x^2) \rightarrow (y, 0) \in \partial D$.

12. Вне компакта

$$D_N = D \cap \{x: |x| \leq N\}$$

изменим функцию u , оставив ее гладкой, но сделав финитной. Имеем для $x \in D_N$: $u(x) = M_x u(\xi_{\tau_N})$, где τ_N — момент выхода из D_N .

Устремляем N к бесконечности, пользуясь леммой Фату:

$$u(x) \geq M_x \lim_{N \rightarrow \infty} u(\xi_{\tau_N}) \geq M_x \varphi(\xi_\tau),$$

потому что если $\tau < \infty$, то $u(\xi_{\tau_N}) = \varphi(\xi_\tau)$ при достаточно больших N ; при $\tau = \infty$ нижний предел неотрицателен, а вместо $\varphi(\xi_\tau)$ берется 0.

Доказываем второе утверждение:

$$v(x) = M_x v(\xi_{\tau_N}) + M_x \int_0^{\tau_N} g(\xi_s) ds;$$

$$v(x) \geq M_x \lim_{N \rightarrow \infty} v(\xi_{\tau_N}) + M_x \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_N} g(\xi_s) ds \geq M_x \int_0^\tau g(\xi_s) ds.$$

15*. Окружим точку x сферой $S = \{y: |y - x| = \varepsilon\}$; момент первого достижения этой сферы обозначим через τ_S . Для траекторий, начинающихся внутри сферы,

$$\theta_{\tau_S} \tau = \tau - \tau_S, \quad \theta_{\tau_S} w_\tau = w_\tau.$$

Пользуемся строго марковским свойством относительно момента τ_S :

$$p(x) = P_x \{w_\tau \in \Gamma\} = P_x (\theta_{\tau_S}^{-1} \{w_\tau \in \Gamma\}) = \\ = M_x P_{\xi_{\tau_S}} \{w_\tau \in \Gamma\} = M_x p(\xi_{\tau_S}).$$

Но ясно, что в силу сферической симметрии винеровского про-

цесса распределение ξ_{τ_S} на сфере — равномерное; поэтому $M_x p(\xi_{\tau_S})$ — среднее $p(y)$ по сфере S .

Итак, функция p в каждой точке равна своему среднему по любой сфере с центром в ней, не выходящей за пределы области, т. е. это гармоническая функция.

§ 13.3

1. Выпустим винеровскую траекторию из точки $(0, 0)$. Вероятность того, что она достигнет n -го маленького кружочка до выхода из большого круга, не превосходит вероятности достичь этого кружочка раньше выхода из круга $\{(x, y) : (x - 1/2^n)^2 + y^2 \leq 4\}$ (рис. 44). Эта последняя вероятность равна $(\ln 2 - \ln(1/2^n)) / (\ln 2 - \ln(1/2^{n+3}))$ (см. задачу 6 § 13.2), т. е. $(n+1)/(n^3 + 1)$. Ряд из этих вероятностей сходится, процесс

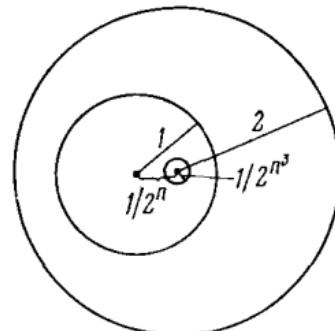


Рис. 44

с вероятностью 1 до выхода из круга достигает лишь конечного числа из маленьких кружочков, откуда

$$P_{0,0}\{\tau > 0\} = 1.$$

2. Возьмем непрерывно дифференцируемую неотрицательную функцию $g(z)$ на $[0, \infty)$, равную z^2 в 2ε -окрестности точки 0 и нулю вне некоторого отрезка. Обозначим через $u_x(y)$ следующую функцию в R' : $u_x(y) = g(|y - x|)$. Эти функции принадлежат $C_{\text{фин}}^{(2)}$, и легко видеть, что для $x \in U_\varepsilon(x_0)$ нормы

$$\|Lu_x\| = \max_y \left| \frac{1}{2} \sum_i a^{ij}(y) \frac{\partial^2 u_x(y)}{\partial y^i \partial y^j} + \sum_i b^i(y) \frac{\partial u_x(y)}{\partial y^i} \right|$$

ограничены сверху каким-то числом K . Мы знаем, что

$$u_x(\xi_t) - \int_0^t Lu_x(\xi_s) ds$$

— мартингал; поэтому

$$u_x(\xi_t) - \int_0^t Lu_x(\xi_s) ds + Kt$$

— субмартингал, причем неотрицательный. Пользуемся колмого-

ровским неравенством: для $x \in U_{\varepsilon/2}(x_0)$

$P_x \{ \xi_t \notin U_\varepsilon(x_0) \text{ при каком-то } t \leq h \} \leq$

$$\leq P_x \left\{ \max_{0 \leq t \leq h} \left[u_x(\xi_t) - \int_0^t L u_x(\xi_s) ds + Kt \right] \geq \varepsilon^2/4 \right\} \leq$$

$$\leq 4\varepsilon^{-2} M_x \left[u_x(\xi_h) - \int_0^h L u_x(\xi_s) ds + Kh \right] = 4\varepsilon^{-2} K h \rightarrow 0 \quad (h \downarrow 0).$$

3. Строго марковское свойство относительно момента τ : для любого события $A \in \mathcal{F}_{\leq \tau+}$ и любого события $B \in \mathcal{F}_{\geq 0}$

$$P_x(A \cap \theta_\tau^{-1} B) = \int_A P_{\xi_\tau}(B) P_x(d\omega). \quad (*)$$

Положим $A = \{\xi_\tau \in S\}$, $B = \{\tau > 0\}$; имеем: $\theta_\tau^{-1} B = \theta_\tau^{-1} \{\tau > 0\} = \{\theta_\tau \tau > 0\} = \{0 > 0\} = \emptyset$. Левая часть (*) равна $P_x(\emptyset) = 0$;

в правой части $P_{\xi_\tau}(B) = 1$, потому что ξ_τ — сингулярная точка границы. Получаем $0 = P_x(A)$.

4. Регулярные точки границы показаны жирными линиями на рис. 45. Стрелки указывают направление сноса.

Менее всего ясна регулярность граничных точек $(0, 1)$, $(0, -1)$.

5*. Теоретико-вероятностный смысл — абсолютная непрерывность с ограниченной плотностью относительно друг друга расположений точек выхода из области для траекторий, исходящих из точек x и y . Однако, чтобы полностью правильно это понять, нужно рассматривать не геометрическую границу области, а границу Мартина (понятие о границе Мартина можно получить, прочитав § 8.5 книги Ито и Маккина (1968)).

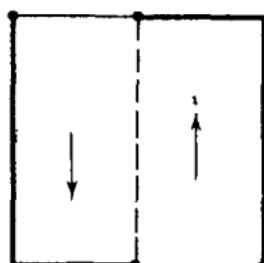


Рис. 45

пределений точек выхода из области для траекторий, исходящих из точек x и y . Однако, чтобы полностью правильно это понять, нужно рассматривать не геометрическую границу области, а границу Мартина (понятие о границе Мартина можно получить, прочитав § 8.5 книги Ито и Маккина (1968)).

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, ДОБАВЛЕННЫЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

§ 1.2

3. Из (2) получаем

$$p_{\Delta w}(x) = \prod_{i=1}^n [2\pi(t_i - t_{i-1})]^{-1/2} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right\},$$

пользуясь формулой

$$p_{A\xi}(x) = |\det A|^{-1} p_\xi(A^{-1}x)$$

преобразования плотности при невырожденном линейном преобразовании случайного вектора.

§ 2.1

11. Необходимость ясна; докажем достаточность. Согласно микротеореме 1 достаточно установить существование конечного предела

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} M \frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} \cdot \frac{\overline{\xi_{t+h'} - \xi_t}}{h'} =$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \frac{M \overline{\xi_{t+h} \xi_{t+h'}} - M \overline{\xi_{t+h} \xi_t} - M \overline{\xi_t \xi_{t+h'}} + M \overline{\xi_t \xi_t}}{hh'}$$

Числитель представляется в виде

$$\int_t^{t+h} \int_t^{t+h'} \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} M \overline{\xi_s \xi_{s'}} ds ds',$$

используется непрерывность смешанной производной.

13. Существование процесса с такой корреляционной функцией можно установить с помощью задачи 3 § 1.3:

$$\xi_t = \gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_n t^n + \dots,$$

где γ_k — некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $1/k!$. Бесконечная дифференцируемость процесса в среднем квадратическом вытекает из бесконечной дифференцируемости его корреляционной функции. Матрица ковариаций:

$$\begin{pmatrix} e & -e & e & 1 & e^{-1} \\ -e & 2e & -e & 0 & e^{-1} \\ e & -e & 7e & 0 & e^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ e^{-1} & e^{-1} & e^{-1} & 1 & e \end{pmatrix}.$$

§ 3.3

3*. Пример: ξ_t — произвольный стационарный в широком смысле случайный процесс, $\eta_t = \xi_{t+1}$. Имеем

$$M |\xi_t - \text{пр}_{H \leqslant 0} \xi_t|^2 = 0$$

при $t \leqslant 1$, тогда как, вообще говоря,

$$M |\xi_{-t} - \text{пр}_{H \geqslant 0} \xi_{-t}| \neq 0.$$

§ 5.3

3. Нужно доказать, что из $C \in \mathcal{X}^r$, $\mu(C) = 0$ вытекает $\mu'(C) = 0$; достаточно доказать для любого $\varepsilon > 0$, что $\mu'(C) < \varepsilon$. Выберем по данному ε положительное $\delta < \varepsilon/2$ так, чтобы при любом n из $\mu_{t_1 \dots t_n}(A) < \delta$ следовало $\mu'_{t_1 \dots t_n}(A) < \varepsilon/2$.

Выберем в алгебре цилиндрических множеств множество

$C_{\varepsilon/2} = \{x: (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A_{\varepsilon/2}\}$ так, чтобы $(\mu + \mu')(C_{\varepsilon/2} \Delta C) < \delta$; тогда, в частности, $\mu(C_{\varepsilon/2}) < \delta$, т. е. $\mu_{t_1 \dots t_n}(A_{\varepsilon/2}) < \delta$, откуда $\mu'(C_{\varepsilon/2}) = \mu'_{t_1 \dots t_n}(A_{\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$. Получаем:

$$\mu'(C) \leq \mu'(C_{\varepsilon/2}) + \mu'(C_{\varepsilon/2} \Delta C) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

14. Распределение μ_{η_t} абсолютно непрерывно относительно μ_{ξ_t} .

с плотностью $\frac{d\mu_{\eta_t}}{d\mu_{\xi_t}}(x_t) = 0$, если $x_t - x_0 \neq 0$, $\frac{d\mu_{\eta_t}}{d\mu_{\xi_t}}(x_0) = e^a$ при $x_t - x_0 = 0$. Так как эта плотность обращается в 0 на множестве положительной μ_{ξ_t} -меры, то распределение μ_{η_t} не абсолютно непрерывно относительно μ_{ξ_t} .

§ 7.2

1. То, что данная формула задает предсказуемую случайную функцию, ясно. Нужно доказать, что $\eta_t - \tilde{\eta}_t$ — мартингал, для чего достаточно проверить, что $M(\eta_{t+1} - \eta_t | \mathcal{F}_t) = \tilde{\eta}_{t+1} - \tilde{\eta}_t$.

2. Любая неслучайная функция, имеющая неограниченную вариацию на конечном отрезке.

3. $\widetilde{w}_t^3 = \int_0^t 3w_s ds (+ \text{const})$. Доказательство можно провести, пользуясь формулами

$$M(f(w_t) | \mathcal{F}_{\leq s}) = \Phi(w_s),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int e^{-(y-x)^2/2(t-s)} f(y) dy,$$

$$M\left(\int_s^{t'} f(w_u) du | \mathcal{F}_{\leq s}\right) = g(w_s),$$

$$g(x) = \int_t^{t'} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(u-s)}} \int e^{-(y-x)^2/2(u-s)} f(y) dy \right] du,$$

а можно получить, применяя формулу Ито (см. § 12.3).

§ 8.2

1. Для функции f , принимающей конечное число значений, утверждение непосредственно следует из уравнения Чепмена — Колмогорова; любую ограниченную измеримую функцию можно приблизить измеримыми функциями, принимающими конечное число значений, сколь угодно точно в смысле равномерной сходимости; далее пользуемся тем, что интеграл от равномерного предела равен пределу интегралов.

§ 10.2

1. Пусть $f \in C_{\text{прав}}$. Для произвольного $\epsilon > 0$ выбираем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon/2 \quad \text{при } \rho(x, y) < \delta.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} |P^t f(x) - f(x)| &\leq \\ &\leq \int_{U_\delta(x)} |f(y) - f(x)| P(t, x, dy) + \int_{V_\delta(x)} |f(y) - f(x)| P(t, x, dy). \end{aligned}$$

Первый интеграл не превосходит $\epsilon/2$, второй — $2 \|f\| \alpha_\delta(t)$; при достаточно малых t это также меньше $\epsilon/2$, а вся разность меньше ϵ сразу для всех x .

§ 11.2

1. Пусть $h(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на числовой прямой, равная 1 при $x \leq 0$, 0 при $x \geq 1$ и лежащая между 0 и 1 всюду. Полагаем $f_n(x) = f(x) \cdot h(|x| - n)$. Это — последовательность гладких финитных функций, для них $f_n \in D_A$, $Af_n(x) = Lf_n(x)$. Доказывается, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $Lf_n(x) \rightarrow Lf(x)$ равномерно по x . Пользуясь замкнутостью инфинитезимального оператора, получаем $f \in D_A$, $Af \in Lf$.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

\Rightarrow — следует

\rightarrow — общий знак для различных видов сходимости, в том числе слабой сходимости мер

(P) — сходимость по вероятности

\uparrow — а) монотонно стремится снизу (в том числе и о неубывающей последовательности множеств);

б) вид сходимости, введенный в § 5.3

\downarrow — монотонно стремится сверху

Черта над выражением означает:

а) комплексно-сопряженное;

б) замыкание

[] — а) целая часть; б) просто скобки

$$\langle \mu, f \rangle = \int_X \mu(dx) f(x)$$

+, — — употребляются, когда речь идет о пределах справа, слева; например: $f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

\lim — общее обозначение для предела в различных смыслах

$\lim (P)$ — предел по вероятности

I. i. m — предел в среднем квадратическом

mes — мера Лебега

w_t — винеровский процесс (определение см. в § 1.2)

$\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y в метрическом пространстве

R^1 — действительная прямая

$R_+ = [0, \infty)$

R^n — n -мерное евклидово пространство

X^T — пространство всех функций на множестве T (произвольном) со значениями в X ; в частности, $R^T = (R^1)^T$ — пространство всех вещественноненаправленных функций

Z^1 — множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и 0)

$Z_+ = \{n \in Z^1: n \geq 0\}$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ — функция Лапласа

$\mu_{t_1 \dots t_n}$ — n -мерное распределение значений случайной функции в точках t_1, \dots, t_n (см. § 1.1)

Рукописными буквами обозначаются различные системы множеств, чаще всего σ -алгебры.

\mathcal{B}^1 — σ -алгебра одномерных борелевских множеств

\mathcal{B}^n — σ -алгебра n -мерных борелевских множеств

\mathcal{B}_X — σ -алгебра борелевских подмножеств X , т. е. наименьшая σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества метрического пространства X

$\mathcal{X}^T(X)$ — наименьшая σ -алгебра в пространстве X функций на множестве T , содержащая все цилиндрические множества (см. § 5.1)

$\mathcal{X}^T(X)$ — частный случай этого обозначения, когда σ -алгебра

\mathcal{X} — σ -алгебра борелевских множеств

$\mathcal{X}^T, \mathcal{X}^T$ — частный случай этих обозначений, когда $X = X^T$

Полужирным шрифтом обозначаются различные функциональные пространства, например: $B(X, \mathcal{X})$, B_0 , $C_{\text{фин}}^{(2)}$, $H_{\geqslant +\infty}$, V .

Рубленым шрифтом обозначаются:

P — вероятность

M — математическое ожидание

D — дисперсия

$P_{s, x}$ — вероятностная мера, соответствующая марковскому процессу из данного семейства, начинающемуся в момент s в точке x (см. § 8.1)

P_x — вероятностная мера, соответствующая марковскому процессу из однородного марковского семейства, начинающемуся в момент 0 в точке x (см. § 8.4)

$M_{s, x}, M_x$ — соответствующие математические ожидания

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
- Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1965.
- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988.
- Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.
- Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов. — М.: Физматгиз, 1959.
- Дынкин Е. Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963.
- Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 1. — М.: ИЛ, 1960.
- Ито К. Вероятностные процессы. Вып. 2. — М.: Мир, 1963.
- Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.
- Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 6 изд. — М.: Наука, 1989.
- Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. — М.: Наука, 1986.
- Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: ИЛ, 1957.
- Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. — 2 изд. — М.: Наука, 1990.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. — М.: Мир, 1984. — Т. 1. — 528 с.; Т. 2. — 752 с.
- Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
- Халмощ П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бесконечномерные распределения 30, 108
— —, плотности 131
Бикомпенсатор 169
Броуновское движение 19, 187, 267

Вероятностный процесс 16
Выборочная функция 16—17
... в широком смысле 29

Гильбертов кирпич 114

Диффузия 264

Задача Дирихле 328
— интерполяции 78
— Коши 259, 322
— линейного прогнозирования 80, 98
— фильтрации 77
— экстраполяции (прогнозирования) 77
Задачи наилучшей оценки 74
Закон повторного логарифма для винеровского процесса 176, 341
Законы больших чисел для стационарных процессов 87
— нуля или единицы 31, 67, 238

Измеримость прогрессивная 152

Измеримость случайной функции 33
Инвариантная мера 229
Инфинитезимальный оператор 240

Квадратичный компенсатор 170
Компенсатор случайной функции 167
Корреляционная теория случайных функций 29
— функция 28
— — взаимная 28
— — совместная 28
— — стационарного процесса 36

Марковский момент 32, 147
— процесс 38, 185
Марковское свойство 185—199, 219
— семейство 189, 197
— — однородное 213
Мартингал 161
Мартингалы и супермартингалы, существование пределов 178
Мера с независимыми, некоррелированными значениями см. Случайная мера
Микротеорема 6
Момент достижения множества 149
 μ -система 191

Неотрицательно определенные функции 28, 89

Непрерывность в среднем 41
Неравенство Колмогорова 174
Неубывающее семейство σ -алгебр 147

Оператор замкнутый 250
— локальный 253
Операторы, связанные с марковским семейством 203
— сдвига 68, 226

Переходная плотность 184
— функция 183
— — однородная 213
Полугруппа операторов 214
Предсказуемость 152
Принцип максимума 245
Пространства случайных величин, линейно порожденные случайной функцией 64
— — —, порожденные случайной функцией 63
Процесс винеровский 18
— — многомерный 21
— —, непрерывность реализаций 18, 126
— — остановленный 224
— —, предел суммы квадратов приращений 19
— — с отражением 187
— —, существование 119
— Коши 22
— Маркова см. Марковский процесс
— пуассоновский 25
— с независимыми приращениями 34
— с некоррелированными (ортогональными) приращениями 34, 59
— со стационарными приращениями 37
— стационарный 35
— — в широком смысле 36
— — марковский 229

Равномерная интегрируемость 11
— непрерывность в среднем 42
— стохастическая непрерывность 41, 234

Распределения конечномерные 17, 108
Реализация 16
Регулярная точка границы 336
Регулярность линейная случайного процесса 80
— случайного процесса 78
Резольвента полугруппы 247

Сепарабельность случайного процесса 129
Сильная непрерывность полугруппы 244
Сингулярная точка границы 336
Сингулярность линейная случайного процесса 80
— случайного процесса 78
Случайная мера 51
— — пуассоновская 23
— — с независимыми значениями 52
— — с некоррелированными значениями 52
— последовательность 16
— функция 16
— — гауссовская 34
— —, согласованная с семейством σ -алгебр 153
Случайное поле, изотропное векторное со стационарными приращениями 37
— — однородное (стационарное) 37
— — — изотропное 37
Случайный процесс 16
Согласованности условия 111
Спектральная мера 89
— плотность 89
Спектральное представление 90
Стационарное распределение марковского семейства 230
Стохастическая матрица 184
— непрерывность 41
— эквивалентность 17
Стохастический дифференциал 295
— интеграл 55, 277
— процесс 16
Стохастическое уравнение 306
Строго марковское свойство 221, 236
Субмартингал 161
Супермартингал 161

- σ -алгебры, порожденные случайной функцией 63
 σ -алгебры «хвостов» 66
- Траектория 17
- Уравнения Чепмена — Колмогорова 183
Уравнения Колмогорова 272—276
- Феллеровские марковские семейства 208
- Формула Ито (замены переменных в стохастическом интеграле) 296—305
Фундаментальное решение уравнения параболического типа 275
- Цепь Маркова 186
Цилиндрические множества 108
- Эмпирическая функция распределения 22