Rozwiązywanie równań i układów równań nad skończonymi strukturami algebraicznymi z wykorzystaniem SAT-solvera.

Patryk Popek

Praca Licencjacka

Uniwersytet Marie Curie Skłodowskiej w Lublinie
Instytut Informatyki
2023

Spis treści

1 Wstęp

Matematyka jest codzienną częścią naszego życia. Jesteśmy związani z nią nawet o tym nie wiedząc. Mijamy ją w sklepach, w różnego rodzaju statystykach widzianych w internecie, czy niektórzy pracują z nią zawodowo.

Matematyka jest królową nauk, bez której nie mogłaby powstać logika oraz fizyka, co za tym idzie. nie mogłaby też powstać informatyka. Cała informatyka, nie licząc kilku praw fizycznych spowodowanych skończonością naszego świata, jest tak naprawdę matematyką zapisaną w systemie binarnym. Idąc dalej tym tokiem, logika i informatyką są pochodną matematyki.

Celem tej pracy jest napisanie aplikacji, która rzecz czysto matematyczną, czyli równanie matematyczne zapisane w postaci funkcji będzie potrafiła rozwiązać za pomocą narzędzi logicznych takich w środowisku informatycznym

2 Opis Teoretyczny Problemu

Poniżej przedstawione są pojęcia związanie z pracą.

2.1 Pojęcia Matematyczne

1. **Struktura algebraiczna**: Jest to trójka (A, B, C), gdzie A jest dziedziną algebry, B jest dozwolonymi operacjami na zbiorze oraz C jest opisanymi relacjami elementów dziedziny względem siebie nawzajem.

2. **Grupa:** Jest to zbiór G posiadający działanie $\circ$, które posiada następujące własności:

   a) Wewnętrzność: Dla dowolnych $a, b \in G$ działanie $a \circ b \in G$.

   b) Łączność: Dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzi $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

   c) Element neutralny: Istnieje $e \in G$ takie, że dla każdego $a \in G$ $a \circ e = a$.

   d) Odwracalność: Dla każdego $a \in G$ Istnieje $x \in G$ takie, że $a \circ x = e$.

   e) Jeżeli dla dowolnego $a, b \in G$ zachodzi $a \circ b = b \circ a$ wtedy grupa jest grupą abelową.

   Przykładową grupą abelową zgodną z powyższą definicją jest grupa $G(2, +)$ czyli XOR.

3. **Funkcja:** Jest to operacja przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Innymi słowami, każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje dokładnie jeden element $y \in Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji, a zbiór Y przeciwdziedziną. Najpopularniejszą formą przedstawienia funkcji jest podanie jej wzoru na przykład $f_x = x + 2$

4. **Arność:** Jest to liczba argumentów przyjmowana przez funkcję. Jeżeli arność wynosi 0 wtedy funkcja jest funkcją stałą

5. **Liczność(eng. Cardinality):** Jest to liczba elementów znajdujących się w zbiorze. Na potrzeby tej pracy określa dziedzinę wczytanej do aplikacji struktury .

6. **Punkt przecięcia funkcji:** Mamy dwie funkcje F_1 oraz F_2. Punkt przecięcia oznacza miejsce, w którym $F_1 = F_2$. Posiadając wzory powyższych funkcji możemy ułożyć równanie, za pomocą którego umiemy wyliczyć wartość powyższego punktu.

7. **Równanie:** Jest to wyrażenie postaci $t_1 = t_2$, gdzie t_1, t_2 są dowolnymi wyrażeniami algebraicznymi zgodnymi z używaną algebrą. Równania dzielimy na 3 typy:

   a) Sprzeczne: Równanie nie posiada rozwiązania, czyli za zmienną równania nie da się podstawić żadnej wartości z dziedziny algebry.

   b) Oznaczone: Równanie posiada rozwiązania, czyli za zmienną równania da się podstawić co najmniej jedną wartość z dziedziny algebry.

   c) Tożsame: Równanie jest zawsze rozwiązywalne bez względu na to jaką wartość z dziedziny algebry podstawimy za zmienną równania.

8. **Notacja Polska:** Sposób zapisu wyrażeń, w którym operator/nazwa funkcji znajduję się przed argumentami. Na przykład $/ + xy - ab$ jest równoważne zapisowi $(x + y)/(a + b)$

2.2 Pojęcia Logiczne

Poniższe definicje odnoszą się do logiki zerowego rzędu.

1. **Zmienna zdaniowa:** jest to najmniejszy możliwy element w logice. Przyporządkowuje się jej wartość prawda(1) albo fałsz(0).

2. **Negacja:** Jest to zaprzeczenie zmiennej zdaniowej $x = 1$ $\neg x = 0$.

3. **Literał:** Jest to pojedyncze wystąpienie zmiennej x $\neg x$.

4. **Spełnialność funkcji:** Funkcja logiczna jest spełnialna gdy istnieje wartościowanie, które zwraca wartość logiczną funkcji 1.

5. **Prawdziwość funkcji:** Funkcja logiczna jest spełnialna przy każdym wartościowaniu, czyli zawsze zwraca wartość logiczną funkcji 1.

6. **Koniunkcja:** Funkcja logiczna postaci $x \wedge y$, zwraca 1 tylko i wyłącznie wtedy gdy zarówno x,y=1.

7. **Alternatywa:** Funkcja logiczna postaci $x \vee y$, zwraca 0 tylko i wyłącznie wtedy gdy zarówno x,y=0.

8. **Implikacja:** Funkcja logiczna postaci $x \rightarrow y$, zwraca 0 tylko i wyłącznie wtedy gdy x=1,y=0.

9. **Koniunkcyjna postać normalna (CNF):** Funkcja logiczna, która jest koniunkcją alternatyw.

10. **Dysjunkcyjna postać normalna (DNF):** Funkcja logiczna, która jest alternatywą koniunkcji.

11. **Klauzula Horna:** Jest to alternatywa posiadająca co najwyżej jeden literał niezanegowany.

2.3 SAT-Solver

3 Aplikacja i algorytmy w niej zastosowane

Aplikacja, którą napisałem na potrzeby tej pracy podzielona została na kilka kroków. Etapy te zostały ułożone liniowo i każdy kolejny można wykonać dopiero po ukończeniu wszystkich wcześniejszych. Wszystkie etapy są reprezentowane w interfejsie aplikacji za pomocą przycisków.

3.1 Wczytanie algebry do programu

3.1.1 Pliki .ua

Algebry, które są wykorzystywane w mojej aplikacji są reprezentowane poprzez pliki z rozszerzeniem "ua". Skrót ten pochodzi od wyrażenia "universal algebra". Są to pliki w formacie XML.

Powyższe zdjęcie przedstawia wygląd pliku opisującego algebrę. Sekcjami interesującymi nas najbardziej w tym pliku są cardinality oraz operations. Cardinality informuje o dziedzinie całej struktury. Jest ona niezmienna i ograniczona do zakresu $x \in \{0, 1, ..., cardinality - 1\} \wedge x \in \mathbb{N}$ Operations opisuje wszystkie dostępne operacje na strukturze. Sekcja ta jest podzielona na podsekcje op poświęcone poszczególnym działaniom. OpName informuje o nazwie działania, jest to identyfikator, po którym będzie można znaleźć działanie w programie. Arity określa arność funkcji reprezentowanej przez to działanie. Najważniejszą częścią opisu działania jest opTable. Jest to struktura przedstawiająca wyniki działania opisywanej funkcji na wszystkich możliwych wariancjach z powtórzeniami o długości arity dziedziny algebry. Tabele te są główną osią, dzięki której powstaje finalna formuła CNF używana w SatSolverze. Algebra pokazana stronę wyżej posiada dwa działania: Działanie d, które jest dwuargumentowym dodawaniem modulo 4 oraz działanie m, które jest dwuargumentowym mnożeniem modulo 4.

3.1.2 Algorytm w programie

1. Wczytaj plik do programu.
2. Zapisz w programie nazwę oraz dziedzinę algebry.
3. Pobierz listę operacji.
4. Przejdź do kolejnej niezapisanej operacji.
5. Zapisz arność i nazwę operacji.
6. Zapisz tablicę wartości funkcji.

```xml
<?xml version='1.0' encoding='utf-8'?>
<algebra>
  <basicAlgebra>
    <algName>P4</algName>
    <cardinality>4</cardinality>
    <operations>
      <op>
        <opSymbol>
          <opName>d</opName>
          <arity>2</arity>
        </opSymbol>
        <opTable>
          <intArray>
            <row r="[0]">0,1,2,3</row>
            <row r="[1]">1,0,3,2</row>
            <row r="[2]">2,3,0,1</row>
            <row r="[3]">3,2,1,0</row>
          </intArray>
        </opTable>
      </op>
      <op>
        <opSymbol>
          <opName>m</opName>
          <arity>2</arity>
        </opSymbol>
        <opTable>
          <intArray>
            <row r="[0]">0,0,0,0</row>
            <row r="[1]">0,1,2,3</row>
            <row r="[2]">0,2,0,2</row>
            <row r="[3]">0,3,2,1</row>
          </intArray>
        </opTable>
      </op>
    </operations>
  </basicAlgebra>
</algebra>
```

Rysunek 1: Przykładowy plik reprezentujący algebrę uniwersalną

7. Jeżeli pozostała jakaś niezapisana operacja wróć do punktu 4.

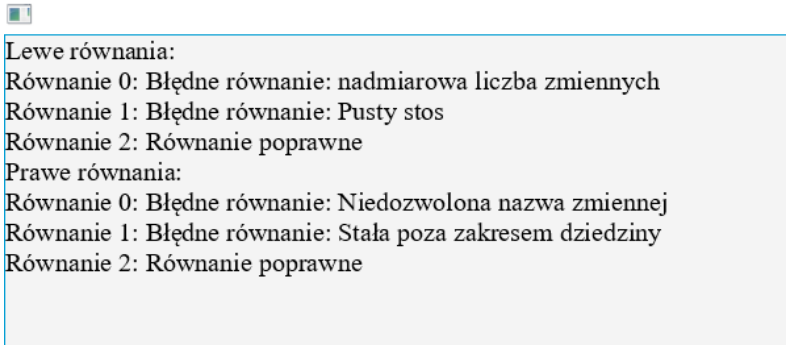
3.2 Format i sprawdzenie poprawności równania

Równania, na których pracuje moja aplikacja są przyjmowane w formie funkcyjnej czyli $f_{(x,y)}$. Dzięki temu łatwo można zamienić powyższy zapis na notację polską, dla której znamy algorytm sprawdzania poprawności poda-

nego wyrażenia, dla określonej dziedziny. Zamiana ta polega na usunięciu nawiasów i przecinków z podanego stringa. Jedno równianie jest podawane w dwóch częściach: jako lewa strona i prawa strona.

3.2.1 Algorytm sprawdzania poprawności wyrażenia w notacji polskiej

1. Przejdź do ostatniego znaku równania.
2. Pobierz kolejny znak równania, jeżeli jest dostępny.
3. Sprawdź, czy rozpatrywany znak jest nazwą dozwolonej operacji.
4. Jeżeli nie, sprawdź czy jest dozwoloną stałą lub zmienną.
5. Jeżeli nie przejdź do kroku 11.
6. jeżeli znak został określony jako operacja ściągnij ze stosu ilość znaków równej arności operacji i dodaj na stos znak wynikowy.
7. Jeżeli na stosie zabrakło symboli lub nastąpił ich nadmiar przejdź do kroku 11.
8. Jeżeli znak został określony jako stała lub zmienna dodaj go do stosu.
9. Jeżeli pozostały nierozpatrzone znaki przejdź do kroku 2
10. Jeżeli nie ma już nierozpatrzonych znaków równania, zakończ działanie i zwróć prawdę
11. Zwróć fałsz

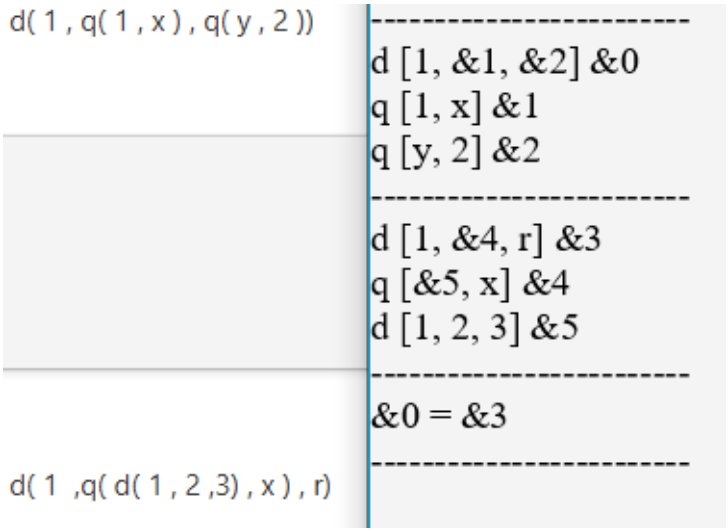


Rysunek 2: Przykładowe wyjście algorytmu

Algorytm sprawdzający zwraca 5 różnych wynikowych komunikatów dotyczących poprawności równania względem wczytanej algebry. Pierwszy komunikat od góry występuje, gdy w momencie napotkania operacji ilość elementów na stosie przekracza jej arność. Mamy wtedy za dużo argumentów do obsłużenia dlatego równanie jest niepoprawne. Komunikat drugi występuje w sytuacji odwrotnej do poprzedniej, czyli na stosie mamy niewystarczającą ilość elementów do zastosowania napotkanej operacji. Komunikat trzeci dotyczy sytuacji gdy zmienna którą napotkamy nie jest jednoliterowa. Ostatni komunikat sprawdza przynależność stałych do dziedziny. Zapobiega to podawaniu liczb ujemnych do programu.

3.3 Krok pomocniczy: zbudowanie listy równań

Aplikacja dopuszcza możliwość, w której działanie algebry jest argumentem innego działania. Dzięki temu istnieje możliwość stworzenia nieskończonego drzewa zagnieżdżeń funkcji. Z perspektywy programu zapis $f(1, x)$ oraz $f(1, f(1, x))$ to ten sam zapis gdyż funkcja najbardziej zewnętrzna ma te same argumenty: stałą 1 na pierwszym miejscu i niewiadomą na drugim. Chcielibyśmy jednak móc rozróżnić powyższe równania. Biorąc pod uwagę powyższy problem stworzyłem dodatkową strukturę reprezentowaną poprzez listę trójek (X,Y,Z), gdzie X oznacza nazwę operacji, Y jest listą argumentów operacji, a Z to symbol reprezentujący wynik działania



Rysunek 3: Przykładowe wyjście algorytmu

W ten sposób uzyskujemy dostęp do zagnieżdżonych operacji poprzez ich symbol wynikowy, co widać na screnie wyżej