

数值解与精确解比较图

第 2 页的图 1 展示了在 $t = 0.20$ 时，不同方法和不同 N 值下的数值解（红色虚线）与精确解（黑色实线）的比较，并在每个子图中显示了均方根误差 (RMSE)。

均方根误差 (RMSE) 总结

下表总结了在 $t = 0.20$ 时，不同方法和不同 N 值下的均方根误差：

Method	N=1	N=3	N=5	N=7
Galerkin	2.366e-02	4.886e-04	5.376e-06	3.686e-08
Subdomain	8.948e-02	3.166e-03	4.791e-05	5.268e-07
Collocation	1.125e-01	4.307e-03	1.010e-04	1.505e-06

结果分析

从上图和 RMSE 表格可以看出：

- 收敛性：**对于所有三种方法，随着 N 值的增加（即近似解中使用的基函数数量增加），数值解的精度都显著提高，RMSE 值减小。这表明这些方法对于此问题是收敛的。
- 精度比较：**
 - 伽辽金法 (Galerkin)** 在相同的 N 值下通常能提供最高的精度（最小的 RMSE）。它的收敛速度也最快，尤其是在 N 较大时，误差迅速减小到非常低的水平。
 - 子区域法 (Subdomain)** 的精度介于伽辽金法和配点法之间。
 - 配点法 (Collocation)** 在相同的 N 值下精度相对较低，但其实现最为简单，因为它避免了积分运算。
- 图像吻合度：**当 N 增加到 5 或 7 时，对于伽辽金法，数值解曲线与精确解曲线在视觉上几乎完全重合。其他方法在 $N = 7$ 时也表现出很好的吻合度。

实现原理概述

本项目通过以下步骤实现数值求解：

- 近似解代入：**将给定的近似解形式 θ 代入原始的偏微分方程 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} = 0$ ，得到一个包含未知系数 $a_j(t)$ 及其时间导数 $\dot{a}_j(t)$ 的残差方程 $R(x, t) = 0$ 。
- 加权残量法：**为了确定 $a_j(t)$ ，我们应用加权残量法。其核心思想是选择一组权函数 $W_i(x)$ ，并要求残差在加权积分意义下为零：

$$\int_0^1 R(x, t) W_i(x) dx = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N$$

这会产生 N 个关于 $a_j(t)$ 和 $\dot{a}_j(t)$ 的方程。

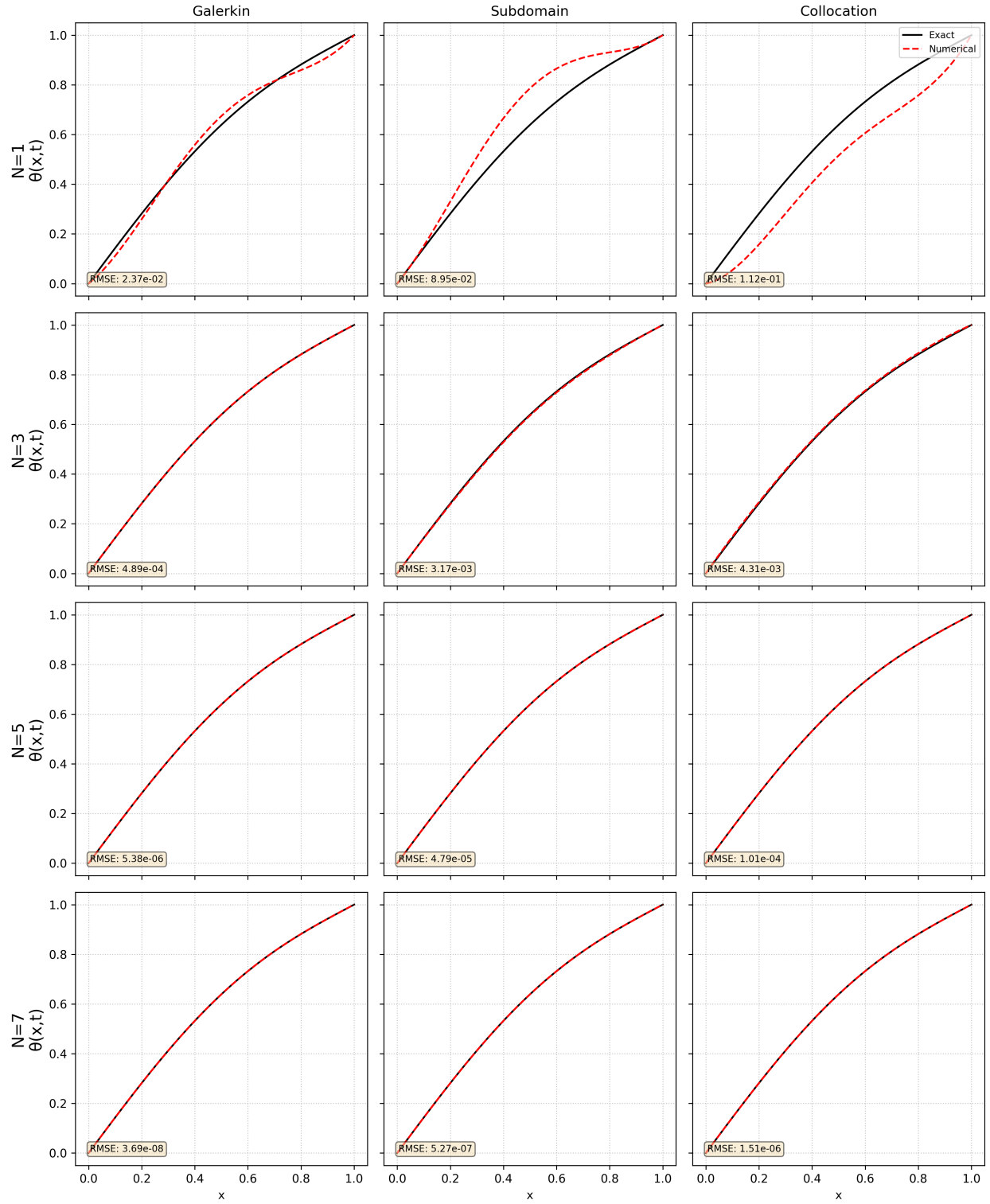
Numerical vs. Exact Solution at $t = 0.20$ 

图 1: 数值解与精确解比较

3. 不同方法的权函数选择:

- **伽辽金法:** 权函数 $W_i(x)$ 选择为近似解中的第 i 个基函数, 即 $W_i(x) = x^i - x^{i+1}$ 。积分在整个定义域 $[0, 1]$ 上进行。本项目中, 这些积分使用辛普森数值积分法计算。
- **子区域法:** 将求解域 $[0, 1]$ 等分成 N 个子区域。第 i 个权函数 $W_i(x)$ 在第 i 个子区域内为 1, 其余为 0。因此, 积分 $\int R(x, t)dx = 0$ 在每个子区域上分别执行。本项目中, 这些积分是解析计算的。
- **配点法:** 在求解域内部选择 N 个离散的配点 x_i (本项目选择等间距点 $x_i = i/(N + 1)$ for $i = 1 \dots N$)。权函数可以看作是 $W_i(x) = \delta(x - x_i)$, 这使得加权残量方程简化为 $R(x_i, t) = 0$, 即要求残差在每个配点处精确为零, 无需积分。

4. **常微分方程组 (ODEs):** 上述加权残量过程将原始的偏微分方程转化为一个关于 $a_j(t)$ 的一阶常微分方程组, 形式通常为:

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

其中 $\mathbf{a}(t) = [a_1(t), \dots, a_N(t)]^T$, \mathbf{M} 是质量矩阵, \mathbf{K} 是刚度矩阵, \mathbf{F} 是力向量或常数项向量。它们的元素由第 3 步中的积分或求值过程确定。

5. **时间积分:** 将上述 ODE 组改写为标准形式 $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{a})$ 。初始条件由 $\bar{\theta}(x, 0) = \sin(\pi x) + x$ 确定, 这导致所有 $a_j(0) = 0$ 。然后, 使用**四阶龙格-库塔法 (RK4)** 对这个 ODE 系统进行时间积分, 从 $t = 0$ 到 $t = 0.20$, 从而求解出 $a_j(t)$ 在每个时间步的值。本项目输出 $a_j(0.20)$ 。
6. **精度评估:** 得到 $a_j(0.20)$ 后, 可以构建 $t = 0.20$ 时的数值解 $\theta(x, 0.20)$, 并将其与精确解 $\bar{\theta}(x, 0.20)$ 进行比较, 通过计算均方根误差 (RMSE) 来量化精度。

未来工作与展望

- 实现自适应步长的龙格-库塔方法以提高时间积分效率和精度控制。
- 对配点法的配点选择策略进行研究 (如使用高斯点)。
- 扩展到二维问题。
- 将 C++ 计算核心与 Python 绘图更紧密地集成 (例如通过 pybind11)。