Rectas y planos

Unidad 2

Respuestas

Álgebra A (62)
Cátedra: Escayola

Nota. *Si no entendés alguna respuesta o alguna de las tuyas no coincide con las aquí presentadas, no dudes en consultarlo en el foro.*

Rectas y planos

Ejercicio 1.

a) P_1 pertenece a la recta. P_2 NO pertenece a la recta. P_3 NO pertenece a la recta. P_4 pertenece a la recta. P_5 NO pertenece a la recta.

b) P_1 pertenece a la recta. P_2 pertenece a la recta. P_3 pertenece a la recta. P_4 NO pertenece a la recta. P_5 NO pertenece a la recta.

Ejercicio 2.

a) $(x;y) = \lambda(3,1) + (-1,2)$

b) $(x;y) = \lambda(2,-1) + (-1,-3)$

c) $(x;y) = \lambda(-2,3) + (1,-4)$

d) $(x;y) = \lambda(3,-2)$

Ejercicio 3.

a) (i) $(x;y) = \lambda(1,-2) + (0,1)$
(ii) $(x;y) = \lambda(1,\frac{2}{3}) + (0,-\frac{5}{3})$
(iii) $(x;y) = \lambda(1,0) + (0,-2)$
(iv) $(x;y) = \lambda(0,1) + (3,0)$

b) (i) $2x - 3y = -1$
(ii) $y = 3$
(iii) $x = 2$

Ejercicio 4.

a) $(x;y;z) = \lambda(0,1,0) + (0,2,4)$

b) $(x;y;z) = \lambda(1,0,-3) + (-2,3,4)$

c) $(x;y;z) = \lambda(0,0,1) + (1,2,3)$

d) $(x;y;z) = \lambda(1,1,1) + (1,9,-3)$

Ejercicio 5.

a) P_1 pertenece al plano. P_2 NO pertenece al plano. P_3 pertenece al plano. P_4 NO pertenece al plano. P_5 pertenece al plano.

b) P_1 pertenece al plano. P_2 NO pertenece al plano. P_3 pertenece al plano. P_4 pertenece al plano. P_5 NO pertenece al plano.

Ejercicio 6.

a) $-2x + 2y + z = 8$

b) $(x;y;z) = \lambda(1,0,\frac{1}{2}) + \mu(0,1,-\frac{3}{2}) + (0,0,\frac{1}{2})$

Ejercicio 7.

a) $(x;y;z) = t(1,0,1) + s(1,1,5) + (3,2,7)$ y $z = x + 4y - 4$

b) $(x;y;z) = t(1,0,0) + s(0,1,0) + (1,2,1)$ y $z = 1$

c) $(x;y;z) = t(1,0,4) + s(0,1,-4) + (0,0,1)$ y $-4x + 4y + z = 1$

d) $(x;y;z) = t(1,0,1) + s(0,1,1) + (0,0,1)$ y $x + y - z = -1$

Ejercicio 8.

a) No son colineales.

b) No son coplanares.

Ejercicio 9.

a) $a = 10$

b) No existen valores de a que cumplan lo pedido.

Ejercicio 10.

a) $\overrightarrow{u} = (0, 0, 0)$

b) $\overrightarrow{u} = (10, -5, 5)$

c) $\overrightarrow{u} = (-10, 5, -5)$

d) $\overrightarrow{u} = (0, -6, 0)$

Ejercicio 11.

a) $\overrightarrow{a} = (19, 1, 7)$ No es único, hay infinitos.

b) $\overrightarrow{b} = t(32, 0, -8)$, con $t \in \mathbb{R}$

c) $\overrightarrow{c} = \left(\frac{8}{\sqrt{17}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{17}}\right)$. No es único, hay un vector más que cumple lo pedido.

Ejercicio 12. —

Intersección de rectas y planos

Ejercicio 13. $L \cap \Pi = \emptyset$, $L' \cap \Pi = \{(0, 1, 2)\}$

Ejercicio 14.

a) Son concurrentes. Existe un único plano que las contiene.

b) Son paralelas no coincidentes. Existe un único plano que las contiene.

c) Son coincidentes. Existen infinitos planos que las contienen.

d) Son alabeadas. No existe ningún plano que las contenga.

Ejercicio 15.

a) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

b) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 = \Pi_2$.

c) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = \lambda(1, -3, -5) + (0, 1, 3)\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 16.

a) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y - 3z = -15 \\ 4x + 7z = 29 \end{cases}$

Ejercicio 17.

a) $(3, 2, 2)$

b) $\emptyset$

Distancias y ángulos entre rectas y planos

Ejercicio 18.

a) $\angle(L_1, L_2) = \frac{\pi}{2}$

b) Las rectas de ecuaciones vectoriales $(x; y) = t(1, 0) + (2, 1)$ o $(x; y) = s(0, 1) + (2, 1)$

Ejercicio 19.

a) $L_1 \cap L_2 = \{(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2})\}$

b) El plano de ecuación vectorial $(x; y; z) = t(1, 2, 3) + s(1, -2, 1) + (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2})$ y $\angle(L_1, L_2) = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 20.

a) —

b) L_3 de ecuación vectorial $(x; y; z) = t(1, 2, -1) + (-1, 1, 3)$ y $\angle(L_3, L_2) = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 21.
$(3\sqrt{2} + 2, -3\sqrt{2} + 1, -1)$ y $(-3\sqrt{2} + 2, 3\sqrt{2} + 1, -1)$

Ejercicio 22.

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{\frac{32}{3}}$

Ejercicio 23.

a) Una normal para Π es $N = (7, 8, 6)$, que puede hallarse haciendo el producto vectorial entre los vectores directores de Π. Esta es la misma normal que Π' (que aparece en los coeficientes de la ecuación implícita).

b) Para la recta L de ecuación vectorial $(x; y; z) = \lambda(7, 8, 6)$, se tiene $P = \left(\frac{189}{149}, \frac{216}{149}, \frac{162}{149}\right)$ y $Q = \left(-\frac{14}{149}, -\frac{16}{149}, -\frac{12}{149}\right)$

c) $d(P, Q) = \frac{29}{\sqrt{149}}$. Este número representa la distancia entre Π y Π'.

d) No importa la elección de la recta L. La distancia entre dos planos paralelos se pueden medir entre dos puntos cualesquiera (uno de uno y otro de otro) que se encuentren en un segmento perpendicular a ambos.

Ejercicio 24.

a) Hallando una ecuación vectorial para L_1, se ve que $(1, 0, 2)$ es un posible vector director para dicha recta.

b) Para Π de ecuación implícita $x + 2z = -5$, se tiene que $Q = (1, 1, -3)$.

c) $d(P, Q) = 1$. Este número representa la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

Ejercicio 25.

a) Una normal de Π es $(1,1,1)$, y este vector es perpendicular al vector director $(-1,0,1)$ de L (pues el producto escalar entre ambos vectores da 0). Por lo tanto, L es paralela a Π.

b) Para L' de ecuación vectorial $\lambda(1,1,1)+(1,1,2)$, se tiene $Q=(0,0,1)$.

c) $d(P,Q)=\sqrt{3}$. Este número representa la distancia entre L y Π.

Ejercicio 26.

$k=-\frac{3}{2}$.

La idea es que al usar que L_1 y L_2 son ortogonales, den dos valores de k (debería dar -1 y $-\frac{3}{2}$), mientras que con $k=-1$ el plano es paralelo a la recta, en el otro caso no. Luego la recta que se obtiene con $-\frac{3}{2}$ interseca al plano, y se cumple la segunda condición.

Ejercicio 27.

a) No se intersecan y no son paralelas.

b) Π_1 de ecuación vectorial $\lambda(3,2,1)+\mu(2,-3,0)+(4,3,0)$ y Π_2 de ecuación vectorial $t(3,2,1)+s(2,-3,0)+(0,0,-1)$.

c) Usando la recta L de ecuación vectorial $\lambda(3,2,-13)$, se tiene que $L\cap\Pi_1=\{(\frac{27}{91},\frac{18}{91},-\frac{117}{91})\}$ y $L\cap\Pi_2=\{(\frac{39}{182},\frac{26}{182},-\frac{169}{182})\}$. Luego, $d(\Pi_1,\Pi_2)=\frac{5}{\sqrt{182}}$. Este número representa la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

Proyecciones y simetrías

Ejercicio 28.

a) $(-2,-1)$

b) $(-4,6)$

c) $(-3,-1,4)$

d) $(2,3,2)$

Ejercicio 29.

a) $(1;2)$

b) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Ejercicio 30.

a) $(2,1)$

b) $(-2,0)$

c) $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$

Ejercicio 31.

a) $(x,y)=(2,2)+\lambda(2,2)$

b) $(x,y)=(1,2)+\lambda(4,8)$

c) $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)+\lambda(9,3)$

Ejercicio 32.

a) $(3,-2,4)$

b) $(2,\frac{8}{5},\frac{4}{5})$

c) $(\frac{11}{7},\frac{16}{7},-\frac{13}{7})$

Ejercicio 33.

a) $R=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

b) $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(3,0,3) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\}$

c) $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3x - y - 3z + \frac{5}{2} = 0$

Ejercicio 34.

a) Sobre el eje x: $(5;0)$. Sobre el eje y: $(0;-3)$

b) $(1;1)$

c) $\left(\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}; 0\right)$

d) $\left(-\frac{9}{13}; 1; -\frac{6}{13}\right)$

Ejercicio 35.

a) $P = (x_0, 4 - x_0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$

b) Hay muchas soluciones. Si llamamos a $\vec{w} = (a,b,c)$ y asumimos que a, b, c son distintos de cero, entonces una posible solución se obtiene tomando $c = 3 - 2a - 3b$ para valores de a, b que verifiquen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Ejercicio 36.

$x - 2y + 2z = -1$

Ejercicio 37.

$\vec{z} = (2;-6;-4)$ y $\vec{z} = (-2;6;4)$