Úloha: Hmotnost černé díry v centru Galaxie

Jméno: Artem Gorodilov **Datum odevzdání:** 18.05

Shrnutí úkolů:

1. Zakreslete do grafu polohy hvězdy $S2$ z tabulky 23 včetně nejistot jejich určení. Nejistoty v obou osách vyznačte jako příslušně dlouhé úsečky.

Tabulka 23: Přepočtené souřadnice hvězdy $S2$. Předpokládaná černá díra má souřadnice (0.0, 0.0).

Měření	Datum [rok]	x ["]	dx ["]	y ["]	dy ["]
1	1992.226	0.104	0.003	-0.166	0.004
2	1994.321	0.097	0.003	-0.189	0.004
3	1995.531	0.087	0.002	-0.192	0.003
4	1996.256	0.075	0.007	-0.197	0.010
5	1996.428	0.077	0.002	-0.193	0.003
6	1997.543	0.052	0.004	-0.183	0.006
7	1998.365	0.036	0.001	-0.167	0.002
8	1999.465	0.022	0.004	-0.156	0.006
9	2000.474	-0.000	0.002	-0.103	0.003
10	2000.523	-0.013	0.003	-0.113	0.004
11	2001.502	-0.026	0.002	-0.068	0.003
12	2002.252	-0.013	0.005	0.003	0.007
13	2002.334	-0.007	0.003	0.016	0.004
14	2002.408	0.009	0.003	0.023	0.005
15	2002.575	0.032	0.002	0.016	0.003
16	2002.650	0.037	0.002	0.009	0.003
17	2003.214	0.072	0.001	-0.024	0.002
18	2003.353	0.077	0.002	-0.030	0.002
19	2003.454	0.081	0.002	-0.036	0.002

2. Body proložte elipsou a situaci zakreslete do grafu. Nejjednodušší je postupovat podle návodu, který je přiložen k materiálům předmětu (`QtiPlot` nebo `Python`). Uvědomte si, že elipsa nemusí nutně procházet přímo všemi naměřenými body. Každý bod je přece určen s nějakou nejistotou.

3. Hodnoty poloos v úhlových vteřinách přepočítejte na délku vyjádřenou ve světelných dnech, jestliže víme, že v tomto případě 2" odpovídají 82 světelným dnům. Uveďte taky nejistotu určení délky poloosy zakreslené elipsy a diskutujte. Všechny zjištěné hodnoty zapište do tabulky 24.

Tabulka 24: Velikost poloos oběžné trajektorie hvězdy $S2$.

Poloosa	Délka		Nejistota určení	
	["]	[světelné dny]	["]	[světelné dny]
hlavní	0,116	4,76	0,005	0,2
vedlejší	0,055	2,26	0,003	0,1

4. Vypočtěte plochu elipsy oběžné trajektorie S_{el}= $(2{,}2 \pm 2) \cdot 10^{28}\,m^2 \approx (33{,}7 \pm 2)\,ld^2$

5. Určete periodu oběhu P hvězdy $S2$ s využitím vztahu 19. Využít můžete nasledující přístupy:

   a) použití kartonu a přesných vah
   Elipsu vytiskněte, zkopírujte na tuhý papír (nebo karton) a vystřihněte. Vystřiženou elipsu zvažte na vahách s přesností 0.01 gramu. Určená hmotnost odpovídá ploše S_{el}. Nyní vystřihněte část, která dle měření v tabulce 23 nebyla opsána průvodičem, a opět ji zvažte. Dostane hodnotu pro plochu ΔS. Skutečné plochy bychom samozřejmě dostali jednoduchým přepočtem, ale protože potřebujete jen poměr ploch, není taková konverze zapotřebí. Přesnost metody zvýšíte, když elipsu nalepíte na nějaký karton, ale pozor, aby bylo lepidlo rozprostřeno rovnoměrně.

   Hmotnost elipsy: . . . .

   b) počítání čtverečků
   Elipsu vyznačte do grafu, který má naznačenou poměrně jemnou souřadnou síť. Pomocí čtverečků této sítě určete plochu elipsy S_{el} a plochy ΔS pro pět různých časových intervalů Δt. Okamžiky vymezující příslušné segmenty naleznete v tabulce 23. Do tabulky 25 zapište čísla měření počátečního a konečného bodu zvolené výseče z tabulky 23, odpovídající Δt, vypočtenou plochu ΔS.

   Plocha elipsy S_{el} = 170,5 čtverečků.

   c) numerická integrace
   Plochu elipsy určete pomocí spočtených hodnot hlavní a vedlejší poloosy. Plochu segmentu elipsy zjistíte pomocí $\Delta S = 0.5 \cdot \int_{\theta_A}^{\theta_B} r^2(\theta)\, d\theta$, kde index A odpovídá počátečnímu a index B koncovému měření. Při numerické integraci si rovnoměrně rozdělíte úsek mezi θ_A a θ_B na N dílků (ideálně 100 jestliže používáte program nebo Excel, pro ruční výpočet může stačit i 10) s konstantním úhlovým krokem $\Delta\theta$. Pro jednotlivé kroky platí $\theta_n = \theta_A + (n - 1/2)\,\Delta\theta$ a pro $\theta_B = \theta_A + N\,\Delta\theta$. Plochu segmentu pak dostanete jako

$$\Delta S = 0.5 \cdot \sum_{n=1}^{N} r^2(\theta_n)\Delta\theta\,. \tag{21}$$

   Úkolem je tedy určit hodnoty θ_A a θ_B, tyto úseky rozdělit na N částí, pro každé n spočítat $r(\theta_n)$ pomocí rovnice 15 a určit hodnotu sumy 21.

V každém případě si zvolte pět různých dvojic měření. Pro každou zvolenou dvojici spočtěte uvedeným postupem periodu P a zapište do tabulky 25. Nakonec určete průměrnou hodnotu periody vyplývající z vašich pěti zvolených výsečí a statistickou nejistotu. Diskutujte nejistoty určení periody zvolenou metodou.

Tabulka 25: Vybrané segmenty trajektorie hvězdy $S2$.

Výseč	Počátek měření	Koncové měření	Δt [roky]	ΔS [čtvr.]	Perioda [roky]
1	1	5	4,030	46,5	14,78
2	5	8	3,209	39,5	13,85
3	8	12	2,796	26,5	17,99
4	12	16	0,338	8	8,48
5	16	19	0,804	6,5	21,08

Průměrná hodnota periody: $P =$ 15,24 $\pm$ 2 roků.

Chyba ve výsledku může být způsobena metodou měření, která není nejpřesnější. Mohou k ní přispět i relativistické efekty způsobené pohybem hvězdy v blízkosti černé díry.

6. Dosazením do třetího Keplerova zákona vypočtěte celkovou hmotnost hvězdy a černé díry $m = m_{\mathrm{BH}} + m_{\mathrm{S}} =$ $(4,6 \pm 1) \cdot 10^{36}$ kg

7. Spočítejte kolik hvězd sluneční hmotnosti ($2 \cdot 10^{30}$ kg) bychom potřebovali, abychom dostali stejnou hmotnost jako zjištěná hodnota m?
   Počet hvězd $N =$ $2,3 \cdot 10^{6}$
   $M_{total} = M_{single} + 2,5 \lg(N)$

8. Vypočtěte pozorovanou hvězdnou velikost Slunce, pokud bychom jej umístili do vzdálenosti centra naší Galaxie ($D \approx 8.0$ kpc), a určete pozorovanou hvězdnou velikost v předchozím kroku zjištěného počtu hvězd.
   Pozorovaná hvězdná velikost Slunce ve vzdálenosti D 19,3 mag
   Pozorovaná hvězdná velikost N hvězd ve vzdálenosti D 3,4 mag

   Přestože jsme v úvodu úlohy zmínili, že náš výhled směrem ke středu Galaxie je zastíněn množstvím mezihvězdné látky, v našich úvahách a výpočtech se zmínka o extinkci dosud neobjevila. Spočítejte znovu pozorovanou hvězdnou velikost Slunce, pokud bychom jej umístili do vzdálenosti 8.0 kpc, ale tentokrát uvažujte také mezihvězdnou extinkci ve vizuálním oboru $A_V = 30$ mag. Vztah pro modul vzdálenosti pak bude mít podobu

   $$m - M = 5 \log r - 5 + A. \qquad (22)$$

   Pozorovaná hvězdná velikost Slunce ve vzdálenosti D s uvažovanou extinkcí 49,4 mag

   Pozorovaná hvězdná velikost N hvězd ve vzdálenosti D s uvažovanou extinkcí 33,5 mag

9. Spočítejte únikovou rychlost z povrchu Země za různých předpokladů, kdy budeme měnit poloměr i hmotnost Země. Začneme ale s těmi správnými hodnotami, poloměrem $R_Z = 6378$ km a hmotností $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Výsledky zapište do tabulky 26.

Tabulka 26: Únikové rychlosti z různých těles.

	$R = 6378$ km	$R = 0.5$ cm	$R = 6378$ km
	$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg	$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg	$M = 2200\ M_{\odot}$
Úniková rychlost [km/s]	11,2	400229	302625

10. Jaká by byla velikost černé díry vzniklé z vašeho těla? Jinak řečeno, určete poloměr tělesa o vaší hmotnosti, na jehož povrchu by byla úniková rychlost rovna rychlosti světla.

Poloměr černé díry z mého těla . . . $1 \cdot 10^{-25}$ m . . . .

Porovnejte tento poloměr s typickou velikostí atomu $2 \cdot 10^{-10}$ m. Diskutujte.

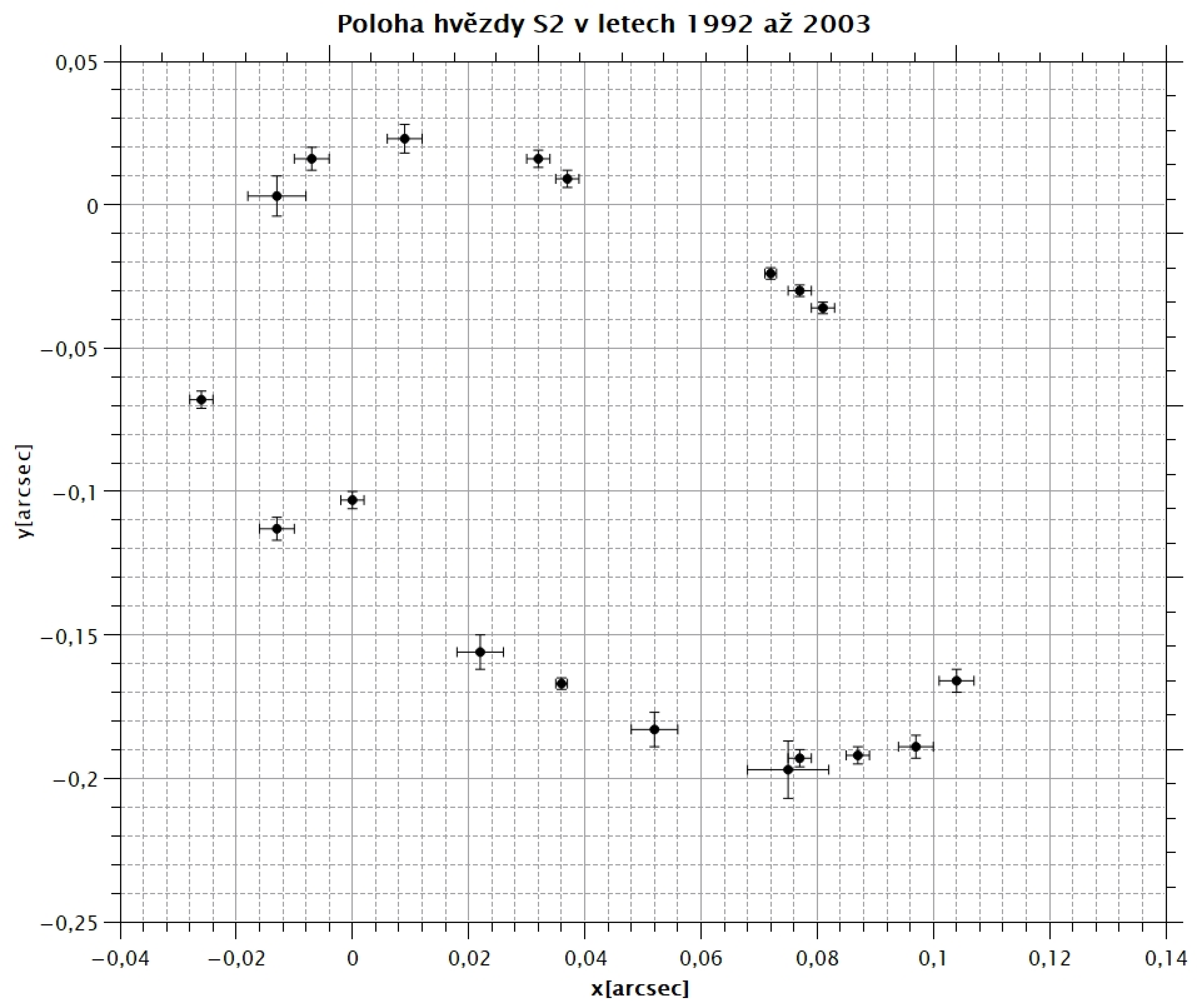
Je zřejmé, že Schwarzschildův poloměr pro objekt s malou hmotností bude neuvěřitelně malý. Je to dáno přímou úměrností Schwarzschildova poloměru k hmotnosti tělesa.
V tomto případě by byl Schwarzschildův poloměr pro mě byl $\approx 5 \cdot 10^{-16}$ poloměru atomu

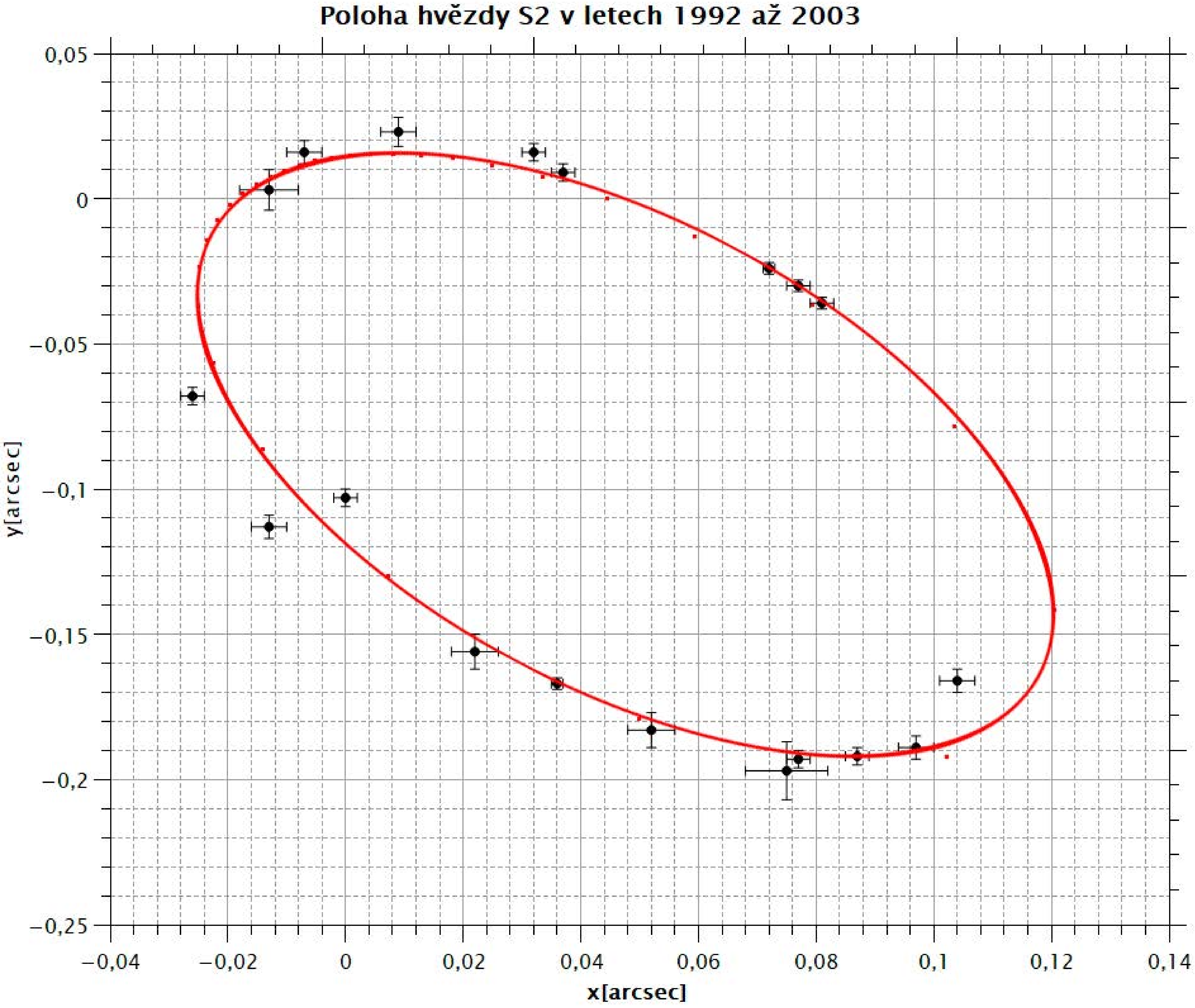
11. První detekce gravitačních vln ukázala maximum amplitudy deformace ramen detektoru o hodnotě $h = 10^{-21}$. Pokud je rameno dlouhé $L = 4$ km, jaká bude absolutní změna délky ramena ΔL?

$h = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = hL = 4 \cdot 10^{-18}$ m

Jak se změní výsledek, pokud budeme za L uvažovat poloměr Země? Porovnejte s typickou velikostí atomu.

Absolutní změna délky pak bude $\approx 6{,}4 \cdot 10^{-15}$ m.
V porovnání s velikostí atomu je to bude $\approx 32 \cdot 10^{-6}$


Poloha hvězdy S2 v letech 1992 až 2003
y[arcsec]
x[arcsec]
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−0,2
−0,25
−0,04
−0,02
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,1
0,12
0,14


Poloha hvězdy S2 v letech 1992 až 2003
y[arcsec]
x[arcsec]
0,05
0
−0,05
−0,1
−0,15
−0,2
−0,25
−0,04
−0,02
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,1
0,12
0,14

Pro výpočet nejistot a hodnot byl použit následující kód:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.ticker import AutoMinorLocator
from matplotlib import gridspec
from scipy.optimize import curve_fit
import uncertainties as u
from uncertainties import ufloat
from uncertainties.umath import *
from uncertainties import unumpy
from astropy import constants as const

tab23 = pd.read_csv('tab23.csv')

# Nastaven  funkce reprezentuj c  elipsu
def func(xy, a, b):
    x, y = xy
    return ((x / a) ** 2 + (y / b) ** 2 - 1)

# P evod dat do numpy pol
xdata = tab23['x']
ydata = tab23['y']

# Aproximace dat
popt, pcov = curve_fit(func, (xdata, ydata), np.zeros_like(xdata))

# V pis hodnot parametr  a a b
b, a = popt
    print("a =", a / 2, "b =", b / 2)


dxdata = tab23['dx']
dydata = tab23['dy']

popt, pcov = curve_fit(func, (dxdata, dydata), np.zeros_like(dxdata))

d, c = popt
    print("c =", c / 2, "d =", d / 2)

teta = np.linspace(0, 2 * np.pi, num=30)
e = sqrt(1 - ((b/2)/(a/2))**2)
phi = math.radians(-62)

r = (a * (1 - e**2) / (1 - e * np.cos(teta))) / 2

r_array = np.array(r)
x_r_array = np.array(r * np.cos(teta))
y_r_array = np.array(r * np.sin(teta))

rotated_x = []
rotated_y = []

rotation_matrix = [[math.cos(phi), -math.sin(phi)], [math.sin(phi), math.cos(phi)]]
rotated_x.append(x_r_array  * rotation_matrix[0][0] + y_r_array * rotation_matrix[0][1])
rotated_y.append(x_r_array  * rotation_matrix[1][0] + y_r_array * rotation_matrix[1][1])

np.savetxt('rotated_x.csv', rotated_x, delimiter=',')
np.savetxt('rotated_y.csv', rotated_y, delimiter=',')

fig, ax = plt.subplots(figsize=(10,10))

ax.grid('Positions of the stars from table 18')
ax.set_title('')

ax.title.set_fontsize(20)
ax.set_xlabel('$x$ [pc]')
ax.xaxis.label.set_fontsize(10)
ax.set_ylabel('$z$ [pc]')
ax.yaxis.label.set_fontsize(10)

ax.scatter(xdata, ydata,
           s=30, c='blue', marker="s", label='')
ax.scatter(rotated_x, rotated_y,
           s=10, c='red', marker="^",)

legend = ax.legend(scatterpoints=1,markerscale = 1)
frame = legend.get_frame()
frame.set_facecolor('0.90')

plt.show()
fig.savefig('tab18pos1.png', bbox_inches='tight')

a_uns = ufloat(a/2 * 41, c/2 * 41)
b_uns = ufloat(b/2 * 41, d/2 * 41)

S_el_m = np.pi * a_uns * 2.56 * 10 ** (13) * b_uns * 2.56 * 10 ** (13)
S_el_ld = np.pi * a_uns * b_uns
    print(S_el_m)
    print(S_el_ld)

P = ufloat(15.238 * 365.25 * 24 * 60 * 60, 2.116 * 365.25 * 24 * 60 * 60)

M = (4 * np.pi**2 * (a/2 * 41 * 2.56 * 10 ** (13))**3) / (const.G * P**2)
    print(M)

u_1 = sqrt((2 * 6.6743 * 10**(-11) * 6 * 10**(24)) / (6378 * 10 **(3)))
u_2 = sqrt((2 * 6.6743 * 10**(-11) * 6 * 10**(24)) / (0.5 * 10 **(-2)))
u_3 = sqrt((2 * 6.6743 * 10**(-11) * 2200* 1.989 * 10**(30)) / (6378 * 10 **(3)))
    print(u_1 * 10**(-3), u_2 * 10**(-3), u_3 * 10**(-3))

print((2*6.6743 * 10**(-11)*69) / (3*10**8)**2)
```