Fyzikální sekce přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM 2

Zpracoval: Jakub Jedlička **Naměřeno:** 23. 9. 2022

Obor: učitelství Bi, F **Ročník:** 2. **Semestr:** 3. **Testováno:**

Úloha č. 4: **Brownův pohyb a pohyblivost částic**

T = 23,4 °C

p = 987 hPa

φ = 59 %

1. Úvod

V první části úlohy budu měřit Brownův pohyb a ověřovat Einsteinův vztah, kterým by se měla brownovská částice řídit.

V druhé části úlohy budu měřit pohyblivost volných elektronů v měděném drátu navinutého na cylindrické jádro.

2. Teorie

- **Brownův pohyb**

Pokud se v kapalině nacházejí malé částice dochází díky narážení atomů kapaliny na atomy částic k pohybu. Tento pohyb se neprojevuje, pokud je částice velká, protože impulzy sil atomů kapaliny se navzájem vykompenzují, ale pokud je částice malá, tak k tomuto vykompenzování nedochází. Díky tomu dochází k náhodnému pohybu, který nazýváme Brownův pohyb a ten lze popsat Stokesovým zákonem. Tento pohyb se řídí Einsteinovým zákonem: sledujeme-li polohy částice v definovaných časových okamžicích, pak střední kvadratické posunuti částice je úměrné zvoleným časovým intervalům.

Pro výpočet použijeme 2. Newtonův zákon, který budeme postupně pro naši situaci upravovat.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \tag{1}$$

Kde m je hmotnost částice, F_1 je výsledná síla (která není vykompenzována) sílou F_2, která určuje sílu odporu okolních molekul.

Pro sílu F_2 platí vztah:

$$F_2 = -k\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

de se k podle Stokesova zákona pro kulovou částici rovná: $k = 6\pi\eta r$. V tomto případě je η viskozita kapaliny a r je poloměr částice, dále dx/dt je rychlost částice.

Dosazením rovnice 2) do rovnice 1) a celý tento výraz vynásobíme x dostaneme vztah:

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = F_1x - kx\frac{dx}{dt} \tag{3}$$

Do této diferenciální rovnice dosadíme:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(x^2) - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(x^2) \tag{5}$$

Poté dostaneme tvar:

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\,(x^2) - \; m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \; = \; F_1 x - \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2) \tag{6}$$

Ale jelikož nás zajímají pouze střední hodnoty, tak $F_1\,x = 0$ a dále můžeme označit, že:

$$\frac{d}{dt}(\langle x^2\rangle) = h \tag{7}$$

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2}\frac{dh}{dt} - \; m\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\rangle \tag{8}$$

Jelikož je druhý člen na pravé straně rovnice (8) je dvojnásobek středí hodnoty kinetické energie částice. Pokud aplikujeme na pohyb brownovské částice teorii ideálních plynů a zajímáme-li se o složku rychlosti pouze ve směru jedné 3 os, dostaneme pak vztah:

$$\left\langle\frac{1}{2}mv^2\right\rangle = \frac{3RT}{2N_A}\;;\; m\left\langle\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\rangle = \frac{RT}{N_A} \tag{9}$$

Kde N_A je Avogradova konstanta, T absolutní teplota kapaliny a R universální plynová konstanta.

Pokud dosadíme rovnici (9) do vztahu (8) dostaneme:

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2}\frac{dh}{dt} - \frac{RT}{N_A} \tag{10}$$

Po úpravě:

$$\frac{dh}{h - \frac{2RT}{N_A k}} = \; -\frac{k}{m}dt \tag{11}$$

Integrací a úpravou této rovnice dostaneme:

$$h - \frac{2RT}{N_A k} = \; Ce^{-\frac{k}{m}t} \tag{12}$$

Kde C je integrační konstanta. Pokud máme časový interval dostatečně veliký, tak můžeme poslední člen v rovnici (12) zanedbat, protože se blíží k 0.

Díky této úpravě můžeme vztah (12) upravit na:

$$h = \frac{2RT}{N_A k} \tag{13}$$

Pokud rovnici (13) dosadíme do rovnice (7) společně s konstantou k pro kulovou částici a tuto rovnici zintegrujeme, dostaneme:

$$\langle x^2\rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A}t \tag{14}$$

Což je Einsteinův výraz pro střední kvadratické posunutí brownovské částice.

- **Pohyblivost volných elektronů v kovu**

Vodivost kovu je dána pohybem volných nositelů náboje, což jsou v kovových látkách převážně volné elektrony. Hustotu proudu j můžeme definovat vztahem:

$$j = ne_0v_d \tag{15}$$

Kde v_d je driftová rychlost elektronů v kovu, e_0 je elementární náboj a n je koncentrace volných elektronů, které se podílení na proudu.

Dále pro pohyblivost elektronů μ zavedeme:

$$\mu = \frac{v_d}{E} \tag{16}$$

Kde E je intenzita elektrického pole. Poté rovnice (15) a (16) zkombinujeme a dostaneme vztah:

$$j = ne_0\mu E = \sigma E = \frac{1}{\rho}E \tag{17}$$

Kde σ je měrná vodivost a ρ měrný odpor kovu. Z tohoto vztahu tedy plyne, že:

$$\sigma = ne_0\mu \tag{18}$$

Závislost elektronů na teplotě můžeme stanovit, pokud určíme pro danou teplotu měrnou vodivost kovu nebo měrný odpor. Teplotní závislost měrného odporu ρ se pro malé odchylky teploty ΔT (řádově desítky °C) vzhledem k refenční teplotě aproximuje lineárním vztahem:

$$\rho = \rho_0\ (1 + \alpha\Delta T) \tag{19}$$

Kde je α teplotní součinitel odporu a ρ_0 je měrný odpor při refenční teplotě.

Pro drát, který má mít odpor R, má délku L a plošný průřez velikosti S platí vztah:

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S} \tag{20}$$

Pomocí vztahu (20) můžeme stanovit pohyblivost nositelů náboje pomocí této rovnice:

$$\mu = \frac{L}{e_0nRS} \tag{21}$$

A tak můžeme stanovit pohyblivost částic ve vodiči. Potřebujeme k tomu pouze znát jeho rozměry a odpor.

Pohyblivost elektronů se dá také vyjádřit pomocí relaxační doby τ. Ta se dá interpretovat jako střední doba mezi srážkami elektronu a nečistot v kovu nebo rozptylovými procesy na jádrech atomu kovu, které jsou delokalizovány díky kmitům způsobených teplem. Za dobu τ mezi rozptylovými procesy se zvětší rychlost elektronu ve směru elektrického pole díky působící síle pole e_0E o rychlost: $\Delta v = \frac{e_0E}{m}\tau$, kde m je hmotnost elektronu. Po rozptylu se elektron pohybuje náhodou rychlostí a náhodným směrem. Právě díky tomuto náhodnému výsledku rozptylových procesů se středná rychlost, se kterou se elektron pohybuje, je právě střední rychlostí získané díky urychlení elektrickým polem. Té se pak říká driftová rychlost $v_d = \frac{e_0\tau}{m} = \mu E$, díky tomu platí:

$$\mu = \frac{e_0\tau}{m} \tag{22}$$

$$\sigma = \frac{n e_0^2 \tau}{m} \tag{23}$$

Koncentraci volných elektronů lze spočítat pro daný materiál ze známé hmotnosti, hustoty ρ a počtu volných elektronů připadajících na jeden atom.

$$n = z \frac{\rho}{A m_u} \tag{24}$$

Kde A je atomové hmotnostní číslo daného prvku, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg je atomová hmotnostní jednotka.

Koncentrace některých kovů jsou uvedeny v tabulce (1):

Tabulka (1): hustoty, hmotnostní čísla, počet volných elektronů na jeden atom a koncentrace volných elektronů některých vybraných kovů

Materiál	ρ (kg.m^{-3})	A	z	n (10^{28} m^{-3})
Cu	8960	63,55	1	8,5
Al	2700	26,98	3	18,1
Ag	10500	107,87	1	5,9

3. Postup

- **Brownův pohyb**

  Na skleněnou tyčinku nabereme malé množství temperové běloby. Toto malé množství poté rozmícháme ve vodě a stejnou skleněnou tyčkou nabereme jednu malou kapku roztoku. Tuto kapku přeneseme na podložní sklíčko a kápneme doprostřed označené plochy. Následně zakryjeme krycím sklíčkem, tak aby nedošlo ke kontaktu tekutiny a ohraničení. Takto vytvořený preparát vložíme do mikroskopu. Prvně pozorujeme na malé zvětšení a postupně zvětšení přidáváme a doostřujeme. Na obrazovce si najdu co největší hustotu náhodně kmitajících částic. Poté na televizní obrazovku nasadím průhlednou fólii a u pěti částic zaznamenám změnu polohy s 5 vteřinovými intervaly, které stanovuji pomocí elektrického metronomu. Po zaznamenání polohy preparát z mikroskopu vyjmu a vložím do mikroskopu Bürkerovu komůrku. Zopakuji postup jak v předchozí části a na stejné zvětšení jako u pozorování částic najdu nejmenší čtvereček, u kterého znám přesnou velikost. Díky tomu mohu spočítat velikost zvětšení mikroskopu. Díky zvětšení mikroskopu poté zjistím velikost jednotlivých drah částic.

- **Pohyblivost volných elektronů v kovu**

  Přesné měření odporu vodiče se obvykle provádí pomocí stejnosměrného nebo střídavého mostu, obrázek (1). Most v praktiku vyvažuje hodnoty odporu a indukčnosti automaticky, díky tomu nemusíme vyvažovat most ručně, čímž by se mohla snadno udělat systematická chyba. Most musí být ale nastavený na režim kompenzace indukčnosti L, protože kdyby se tak nestalo, tak by most ukazoval na displeji záporné hodnoty indukčnosti.

  Měděný drát navinutý na cylindrické jádro připojíme k automatickému RLCG mostu a pro měření tepelné závislosti odporu drátu ponoříme vzorek do kádinky naplněné studenou vodou. Tuto kádinku se vzorkem poté postupně zahříváme na teplotu až 70°C. Frekvence používaného automatického RLCG mostu v praktiku je f = 1 kHz.

4. Měření a zpracování dat

- **Brownův pohyb**

Mikroskop zvětšil 50 µm na 13,5 cm. Díky tomu dostanu jednoduchou rovnici:

$$50\mu m\ .x = 13{,}5cm$$

Z ní jsem si vypočítal, že zvětšení x = 2700

Vzorce pro střední kvadratická posunutí:

$$\langle L_5^2\rangle = \frac{(\Sigma_{i=1}^{10} L_{i,i+1}^2)}{n}$$

$$\langle L_{10}^2\rangle = \frac{(\Sigma_{i=1}^{9} L_{i,i+2}^2)}{n}$$

$$\langle L_{15}^2\rangle = \frac{(\Sigma_{i=1}^{8} L_{i,i+3}^2)}{n}$$

Naměřené vzdálenosti v intervalech 5s, 10s a 15s

1. částice			
n	L_5^2 [mm²]	L_{10}^2 [mm²]	L_{15}^2 [mm²]
1	361	576	625
2	36	256	400
3	64	841	361
4	144	289	225
5	484	576	324
6	441	121	324
7	324	121	36
8	64	196	64
9	256	361	
10	121		

$\boldsymbol{\langle L_5^2\rangle = 229{,}5\ mm^2; \langle L_{10}^2\rangle = 371\ mm^2; \langle L_{15}^2\rangle = 295\ mm^2}$

2. částice			
n	L_5^2 [mm^2]	L_{10}^2 [mm^2]	L_{15}^2 [mm^2]
1	121	225	1225
2	225	400	1024
3	144	900	1024
4	324	324	729
5	100	625	729
6	196	400	225
7	361	625	
8	256	144	
9	529		

$\boldsymbol{\langle L_5^2\rangle = 250{,}7\ mm^2; \langle L_{10}^2\rangle = 455{,}4\ mm^2; \langle L_{15}^2\rangle = 826\ mm^2}$

Je-li Einsteinův zákon pro chaotický pohyb pravdivý, musí platit podle vztahu (14) pro poměry středních kvadratických posunutí poměr:

$$\langle L_5^2\rangle : \langle L_{10}^2\rangle : \langle L_{15}^2\rangle = 1 : 2 : 3$$

(25)

Poměr střední hodnoty kvadratického posunutí částice 1:

1 : 1,6 : 1,2

Poměr střední hodnoty kvadratického posunutí částice 2:

1 : 1,8 : 3,2

I když ani u jedné částice Einsteinův poměr (25) nevychází ani po zpracování nejistoty, budu ale pokračovat v následujících výpočtech s hodnotami částice 2, protože u ní zmiňovaný poměr vychází lépe.

Jelikož nedošlo k tečení roztoku mohu požít tento vztah pro odhadnutí poloměru částice:

$$\langle L^2 \rangle = 2\,\langle x^2 \rangle \tag{26}$$

Za $\langle x^2 \rangle$ dosadím vztah (14) a z následujícího vzorce vytknu poloměr částice r. Tímto pak dostanu vztah:

$$r = \frac{2RT}{3\langle L^2 \rangle \pi \eta N_A} \tag{27}$$

Pro výpočet poloměru r musím odhadnout absolutní teplotu T, kterou stanovím na 298 K (25°C), dále musím z tabulek vyčíst viskozitu kapaliny η, která má hodnotu $\eta = 0{,}891.\,10^{-3}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$. Avogadrova konstanta N_A = 6,022.10^{23} mol^{-1}. Universální plynová konstanta R = 8,314 J.K^{-1}.mol^{-1}. Pro výpočet dále použiji skutečné střední kvadratické posunutí částice 2 vypočtené ze zvětšení mikroskopu.

Po dosazení těchto hodnot dostanu hodnoty r:

r = 114 nm

Poloměr částice barvy je 114 nm.

- **Pohyblivost volných elektronů v kovu**

Díky vztahu (17) a (20) si mohu vyjádřit měrný odpor ρ pro každou teplotu, ke které náleží určitá hodnota odporu jako:

$$\rho = \frac{RS}{L} \tag{28}$$

Pro výpočet měrné vodivosti σ využiji vztah (17) ze kterého si σ vyjádřím pomocí ρ:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{29}$$

Pro výpočet pohyblivosti nositelů náboje μ použiji rovnici (21), kam koncentraci volných elektronů n dosadím z Tabulky (1) pro měď.

Tabulka naměřených hodnot a z ní následné vypočtené hodnoty teploty v Kelvinech, rozdíl refenční teploty (jako refenční teplotu jsem si stanovil 23,4 °C) a naměřené teploty, měrný odpor ρ pro jednotlivé teploty, elektrická vodivost a pohyblivost elektronů.

teploty [°C]	R [Ω]	T [K]	ΔT [K]	ρ[Ω.m]	σ[$Ω^{-1}$.m^{-1}]	μ [m^2Vs^{-1}]
23,4	55,80	296,4	0	1,89471E-06	527786,2806	3,87594E-05
24,3	55,90	297,3	0,9	1,8981E-06	526842,1191	3,869E-05
25,8	56,00	298,8	2,4	1,9015E-06	525901,3296	3,86209E-05
29,1	56,30	302,1	5,7	1,91168E-06	523099,0135	3,84151E-05
32,2	57,00	305,2	8,8	1,93545E-06	516674,9905	3,79434E-05
36,9	57,5	309,9	13,5	1,95243E-06	512182,1645	3,76134E-05
38,4	57,8	311,4	15	1,96262E-06	509523,7795	3,74182E-05
39,7	58	312,7	16,3	1,96941E-06	507766,801	3,72892E-05

42,1	58,5	315,1	18,7	1,98639E-06	503426,9138	3,69705E-05
43,9	58,7	316,9	20,5	1,99318E-06	501711,6603	3,68445E-05
47,3	59,2	320,3	23,9	2,01015E-06	497474,2307	3,65333E-05
48,7	59,4	321,7	25,3	2,01695E-06	495799,2333	3,64103E-05
50	59,6	323	26,6	2,02374E-06	494135,4775	3,62881E-05
52,4	60	325,4	29	2,03732E-06	490841,241	3,60462E-05
54,1	60,3	327,1	30,7	2,04751E-06	488399,2447	3,58669E-05
56	60,6	329	32,6	2,05769E-06	485981,4267	3,56893E-05
59	61	332	35,6	2,07127E-06	482794,6632	3,54553E-05
61,1	61,3	334,1	37,7	2,08146E-06	480431,8835	3,52818E-05
63,3	61,6	336,3	39,9	2,09165E-06	478092,1178	3,51099E-05
65,1	62	338,1	41,7	2,10523E-06	475007,6525	3,48834E-05
67,1	62,4	340,1	43,7	2,11881E-06	471962,7317	3,46598E-05
68,1	62,5	341,1	44,7	2,12221E-06	471207,5913	3,46044E-05

Teplotní součinitel α jsem počítal ze vztahu (19) a pro měděný drát mi vyšel:

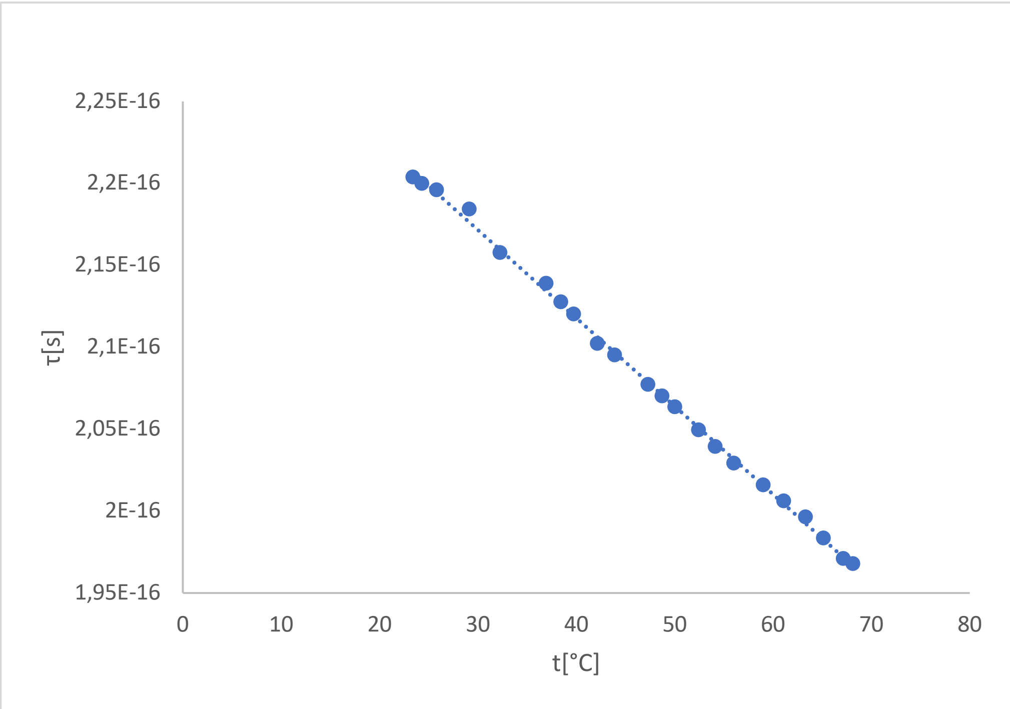
$$\boldsymbol{\alpha = 2,74\,.\,10^{-3}\,\left(2,69\,.\,10^{-4}\right) K^{-1}}$$

Pro výpočet střední doby srážek elektronů τ využiji vztah (22), ze kterého si τ vyjádřím jako:

$$\tau = \frac{\mu m}{e_0} \tag{30}$$

Díky tomu dostanu tabulku hodnot, kde jsou k jednotlivým teplotám přiřazené hodnot τ:

teploty [°C]	τ [s]
23,4	2,20386E-16
24,3	2,19992E-16
25,8	2,19599E-16
29,1	2,18429E-16
32,2	2,15747E-16
36,9	2,13871E-16
38,4	2,12761E-16
39,7	2,12027E-16
42,1	2,10215E-16
43,9	2,09499E-16
47,3	2,07729E-16
48,7	2,0703E-16
50	2,06335E-16
52,4	2,04959E-16
54,1	2,0394E-16
56	2,0293E-16
59	2,01599E-16
61,1	2,00613E-16
63,3	1,99636E-16
65,1	1,98348E-16



67,1	1,97076E-16
68,1	1,96761E-16

5. Závěr

- **Brownův pohyb**

Jelikož jsem neprovedl dostatek uspokojivých měření posunutí jedné částice, které se odehrálo v intervalu 5 sekund a takovýto pohyb jsem zmapoval pouze u dvou částic, s tím že uspokojivý poměr podle Einsteinova vztahu je pouze u druhé částice. Toto je pravděpodobně zapříčiněné velikým množstvím chyb, které se u měření mohly stát. Například díky odhadu teploty dochází k veliké odchylce, prohnutím televizní obrazovky mohlo dojít ke zkreslení posunutí částice, obrazovka měla velice tlusté sklo, které taky zkreslovalo. Mikroskop měl malou hloubku ostrosti, díky tomu často docházelo k tomu, že se částice ztrácely mimo zaostřené pole a poté se opět objevovali. A nakonec i díky měření času pomocí metronomu, mohlo také dojít ke zkreslení výsledku, protože posunutí bylo závislé na reakční době člověka. Pro toto všechno si myslím, že výsledek je r = 114 nm velice orientační.

- **Pohyblivost nositelů náboje**

Teplotní součinitel mědi mi vyšel jako $\alpha = 2{,}74 \,.\, 10^{-3}\ (2{,}69 \,.\, 10^{-4})\ K^{-1}$ a tabelová hodnota teplotního součinitele mědi vychází jako α = 3,92 . 10^{-3} K^{-1}. Rozdíl mezi teplotními součiniteli může být zapříčiněn nedostatečným počtem měření u teplot vyšších jak 70 °C.