Fyzikální sekce přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Zpracoval: Jakub Jedlička **Naměřeno:** 30.9.2022

Obor: Učitelství Bi, F **Ročník:** 2. **Semestr:** 3. **Testováno:**

Úloha č. **5:** Magnetické pole

T= 22,2 °C
p= 980 hPa
φ= 41 %

1. Úvod

V první části úlohy budu měřit horizontální složku magnetického pole Země pomocí Gaussova magnetometru.

V druhé části úlohy budu měřit odezvu feromagnetického materiálu pomocí hysterezní křivky z osciloskopu.

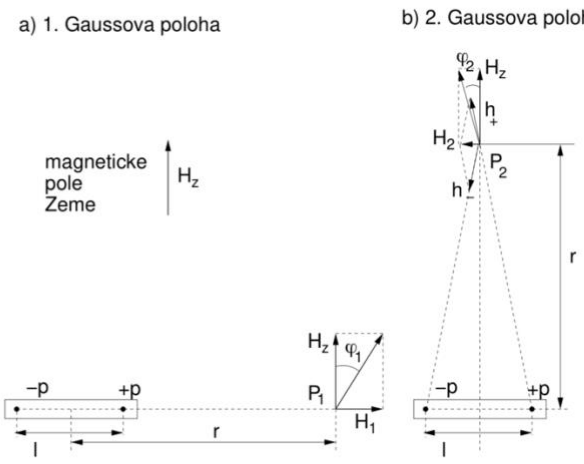
2. Teorie

- **Geomagnetické pole**

Vlastnosti magnetického pole popisujeme pomocí intenzity magnetického pole, které se značí *H*. Tento vektor se dá v každém bodě rozdělit na 2 složky. Na složku horizontální a na složku vertikální. V našem měření se budeme zabývat horizontální složkou H_Z.

Horizontální složka magnetického pole Země se dá změřit Gaussovým magnetometrem, a to tak, že se porovná intenzita pole Země s intenzitou permanentního magnetu pomocí magnetické střelky (kompasu), která ukazuje lokální směr magnetického pole Země. Jelikož se pro reálný případ nedají rozměry permanentího magnetu zanedbat, tak se použije nahrazení a místo tyčového magnetu se použijí 2 monopóly o magnetickém množství *+p* a *-p*, které jsou od sebe ve vzdálenosti *l*. Pak se dá magnetická intenzita spočítat pomocí následujícího vztahu. Je ovšem třeba zdůraznit, že magnetické monopóly, jsou pouze fiktivní a že v reálném případě by toto neexistuje.

Pro měření horizontální složky magnetického pole země pomocí Gaussova magnetometru se používají 2 Gaussovy polohy, které určují polohu permanentního magnetu vůči střelce kompasu. Gaussovy polohy jsou zobrazeny na obrázku 1.



Obrázek 1. Schéma experimentálního uspořádání.

První Gaussova poloha označuje případ, kdy měříme pole v ose permanentního magnetu a magnetická intenzita je v bodě P_1 je dána vztahem:

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{p}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{p}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right]$$

1)

Kde *r* je vzdálenost od středu magnetu ke střelce kompasu, *l* je redukovaná délka. Po úpravě tohoto vztahu dostaneme:

$$H_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{2M}{r^3(1-\lambda^2)^2}$$

2)

Kde $\lambda = l/2r$ a $M = pl$ je magnetický moment magnetu.
Magnetické pole v druhé Gaussově poloze P_2 sečteme z polí h_+ a h_-:

$$h_+ = h_- = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p}{r^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p}{r^2(1+\lambda^2)}$$

3)

Poměr intenzity H_2 k h_+ je dán vztahem:

$$\frac{H_2}{h_+} = \frac{l}{r\sqrt{1+\lambda^2}}$$

4)

Díky tomu se magnetická intenzita v druhé Gaussově poloze spočte jako:

$$H_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{M}{r^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5)

Díky těmto vztahům známe intenzitu magnetického pole v bodech P_1 a P_2. Výchylka magnetky v první Gaussově poloze P_1 z jejího původního směru k magnetickému pólu Země je φ_1, přičemž platí:

$$tan\varphi_1 = \frac{H_1}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z}\frac{2M}{r^3(1+\lambda^2)^2}$$

6)

Toto platí obdobně i pro druhou Gaussovu polohu P_2, kde se střelka kompasu vychýlí o úhel φ_2:

$$tan\varphi_2 = \frac{H_2}{H_z} = \frac{1}{4\pi\mu_0 H_z}\frac{M}{r^{3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

7)

Z obou těchto vztahů lze již určit velikost magnetického pole Země, známe-li redukovanou délku *l* a velikost magnetického momentu *M*. Ale úpravou těchto vztahů lze dospět k vyjádření, kde se redukovaná délka nevyskytuje.

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H_z}\right)^3 = \frac{1}{8}r^9 tan^3\varphi_1\,(1-\lambda^2)^6$$

8)

$$\left(\frac{M}{4\pi\mu_0 H_z}\right)^4 = r^{12} tan^4\varphi_2(1+\lambda^2)^6$$

9)

Po vzájemném vynásobení vztahů 8) a 9) dostaneme:

$$\left(\frac{M}{\pi\mu_0 H_z}\right)^7 = \frac{1}{8}r^{21} tan^3\varphi_1 tan^4\varphi_2(1-\lambda^4)^6$$

10)

Po dalších úpravách dostaneme rovnici:

$$A = \frac{M}{H_z} = \frac{4\pi\mu_0 r^3}{7}\left(\frac{3tan\varphi_1}{2} + 4tan\varphi_2\right) \tag{11}$$

Nyní potřebujeme určit magnetický moment magnetu, který určíme z periodických kmitů v magnetickém poli Země. Pokud je osa magnetu otočena vůči magnetickému poli Země o úhel φ, pak na něj působí magnetický moment, který má velikost:

$$MH_z sin\varphi \doteq MH_z\varphi \tag{12}$$

Toto platí ovšem pouze pro malé úhly. Pohybová rovnice magnetu je poté dána:

$$J\frac{(d^2\varphi)}{dt^2} + MH_z\varphi + D\varphi = 0 \tag{13}$$

Kde *J* je moment setrvačnosti permanentního magnetu a *D* je torzní moment závěsu, který v našem měření kvůli jeho malé velikosti můžeme zanedbat.

Vyjádřením frekvence pomocí doby kmitů magnetu $\tau = T/2$, kde *T* je perioda kmitů, tak dostaneme rovnici:

$$B = MH_z = \frac{\pi^2 J}{\tau^2} \tag{14}$$

Kde moment setrvačnosti *J* můžeme vyjádřit pomocí vztahu:

$$J = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{l^2}{3}\right) \tag{15}$$

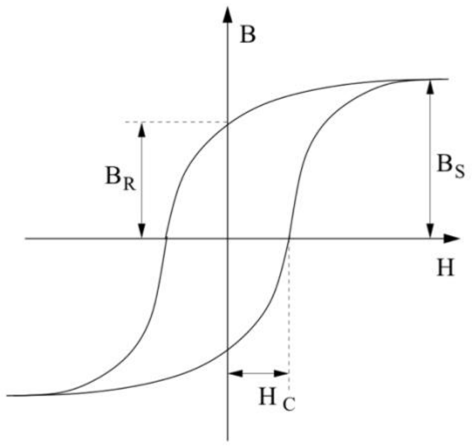
Kde *m* je hmotnost magnetu, *R* je jeho poloměr a *l* je jeho délka.

Poté díky vztahům 11) a 14), kde máme veličiny $A = M/H_z$ a $B = MH_z$ můžeme určit velikost horizontální složky intenzity magnetického pole Země jako:

$$H_z = \sqrt{\frac{B}{A}}\ ; M = \sqrt{AB} \tag{16}$$

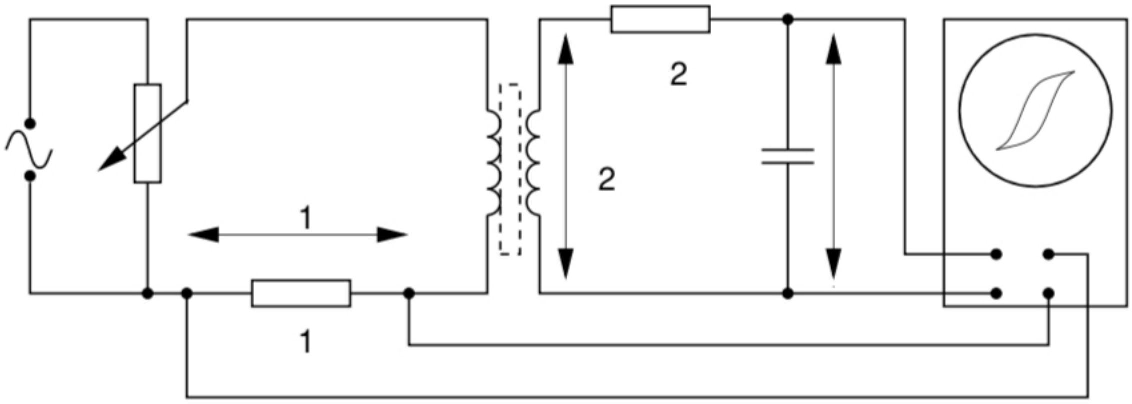
- **Magnetická odezva feromagnetického materiálu**

Materiály se dají dělit na diamagnetické, paramagnetické a feromagnetické, s tím že feromagnetické materiály se od ostatních liší tím, že dokáží vykazovat magnetizaci bez vnějšího magnetického pole. Tato magnetizace dokáže nabývat maximální hodnoty, kdy jsou všechny přítomné magnetické momenty orientovány stejným směrem a nazýváme ji saturační (nasycená) magnetizace M_S. Po odstranění vnějšího magnetického pole zůstává v materiálu remanentní (zbytková) M_R. Dále se dá popsat veličina, která udává velikost vnějšího pole při kterém je celková magnetická indukce nulová a nazýváme ji koercitivní síla (pole) H_C. Podle této veličiny dělíme materiály na magneticky měkké a magneticky tvrdé.



Obrázek. 2. Hysterézní smyčka

Měření provádíme na feromagnetickém jádře, které je společné pro 2 cívky s různými počty závitů (transformátor). Do transformátoru je vpuštěn střídavý elektrický proud a je zapojený podle obrázku 3.



Obrázek 3. Zapojení obvodu

Primární vinutí transformátoru slouží k buzení magnetického pole a na sekundárním vinutí sledujeme indukované napětí. Intenzitu magnetického pole spočítáme podle Ampérova zákona. Jelikož se jedná o totroid, tak rovnice nabude pro intenzitu *H* tento tvar:

$$H = \frac{N_1 I}{2\pi r}$$

17)

Kde N_1 je počet závitů primárního vinutí, *I* je proud tekoucí každým závitem a *r* je poloměr. Proud *I* dostaneme díky Ohmovu zákonu z U_1, který měříme na osciloskopu a odporu rezistoru R_1, který je připojený do série s proudovou cívkou. Díky tomu se hodnota magnetické intenzity rovna:

$$H(t) = \frac{N_1}{2\pi r R_1} U_1(t)$$

18)

Jelikož je poloměr vnější kružnice a vnitřní kružnice dostatečně malý, můžeme považovat magnetickou intenzitu nezávislou na poloměru *r* a nemusíme tak integrovat. Za *r* poté dosadíme aritmetický průměr.

Tím, že obvodem protéká střídavý proud, tak se i v sekundární cívce transformátoru se s časem mění magnetická indukce *B*. Tuto změnu na čase můžeme vypočítat díky Faradayovu zákonu, který říká, jak se mění indukované elektrostatické napětí E_2 v závislosti na čase.

$$E_2(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt}$$

19)

Kde *Φ* je celkový magnetický tok sekundární cívkou, *S* je průřez toroidu a N_2 je počet závitů na druhé cívce. Díky tomu je magnetický tok $\phi = N_2 SB.$ Abychom mohli změřit napětí přímo úměrné magnetické indukci, je v obvodu zařazen RC člen. Průběh napětí na kondenzátoru o kapacitě C dostaneme z druhého Kirchhoffova zákona, díky které dostaneme diferenciální rovnici:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{1}{R} E_2(t)$$

20)

Z této rovnice poté dokáži dostat průběh napětí na kondenzátoru, který je dán vztahem:

$$U_C(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^\infty E_2(t-\tau) e^{-\left(\frac{\tau}{RC}\right)} d\tau$$

21)

Je-li časová konstanta integračního obvodu *RC* mnohem větší než perioda budícího střídavého proudu, lze exponencionální člen v integrálu položit přibližně 1. Potom po dosazení z rovnice 20) do rovnice 21) dostaneme výraz pro napětí U_C.

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC}\int_{\infty}^{t} N_2 S \frac{dB}{dt} |\tau \, d\tau \, ; U_C(t) \approx \frac{N_2 S}{RC} B(t)$$

22)

A po úpravě dostaneme vztah pro magnetickou indukci:

$$B(t) = \frac{RC}{N_2 S} U_C(t)$$

23)

V zapojení podle obrázku 3. nastavíme poté osciloskop do režimu X-Y, kde zobrazuje vzájemnou závislost napětí na jednotlivých vstupech. Magnetizaci poté můžeme spočítat pomocí tohoto vztahu, kam za chybějící hodnoty dosadíme vztahy 18) a 23).

:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

24)

3. Postup

- **Geomagnetické pole**

Gaussův magnetometr nastavíme do první Gaussovi polohy, čili šipka směřující k severu je kolmá na pravítko, na kterém je kompas uchycen. Poté tyčový magnet dáme na kolejnici rovnoběžně s pravítkem a měříme změnu úhlu v různých vzdálenostech od kompasu. Poté co v jedné poloze změříme úhel vychýlení střelky kompasu, tak magnet otočíme o 180°C a opět změříme změnu úhlu. Takto měření opakujeme pro 3 polohy na jedné straně magnetometru a pro 3 polohy na druhé straně magnetometru. Díky tomu dostaneme 12 hodnot změn úhlů magnetické střelky.

Poté magnet zavěsíme a vychýlíme z rovnovážné polohy a měříme frekvenci s jakou vykonává harmonický pohyb.

Dále magnet musíme z vážit na rovnoramenných vahách.

- **Magnetická odezva feromagnetického materiálu**

Zapojíme obvod podle obrázku 3 a z osciloskopu uložím hodnoty.

Šuplerou poté změříme rozměr jádra transformátoru

4. Zpracování měření

- **Geomagnetické pole**

Rozměry a hmotnost magnetu:

Průměr: d = 0,02205m ; R = 11,03(1).10^{-3} m

Délka: l = 12,338(1).10^{-2} m

Hmotnost: m = 298,57(1).10^{-3} kg

Naměřené změny úhlů v 1. a 2. Gaussově poloze pro různé vzdálenosti:

r [cm]	Gaussova poloha 1		Gaussova poloha 2	
	φ_1 [°]		φ_2 [°]	
	magnet	otočený magnet	magnet	otočený magnet
30	73,1	73,1	50,6	56,3
40	56,3	45,0	33,8	28,1
50	22,5	39,4	16,9	22,5
-30	67,5	73,1	50,6	56,3
-40	56,3	45,0	33,8	22,5
-50	28,1	39,4	11,3	16,9

Tangens pro první a druhou Gaussovu polohu:

r [cm]	$tan(\varphi 1)$	$tan(\varphi 2)$
30	3,0(4)	1,4(2)
40	1,3(4)	0,6(1)

50	0,6(3)	0,4(1)
-30	2,9(6)	1,4(2)
-40	1,3(4)	0,6(2)
-50	0,7(2)	0,3(1)

Vypočítaná hodnota A pro jednotlivé vzdálenosti r:

r [cm]	A [10^{-9} Nm^3/A^2]
30	603(2)
40	617(1)
50	648(2)
-30	589(1)
-40	588(1)
-50	557(1)

A = 600(1) 10^{-9} Nm^3A^{-2}

Změřená periody:

periody	[s]
T1	10,8
T2	10,35
T3	10,85
T4	9,9
T5	10,2
T6	9,8
T7	10,55
T8	9,8

T = 10,3(4) s

Výslednou periodu dosadím do rovnice 14) a 15), díky tomu zjistím hodnoty B a J. Jejich nejistoty zjistím pomocí těchto vzorců:

$$u_B = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 u_J^2 + \left(-\frac{8\pi^2 J}{T^3}\right)^2 u_T^2} \qquad 25)$$

$$u_J = \sqrt{\left(\frac{R^2 + \frac{l^2}{3}}{4}\right)^2 u_m^2 + \left(\frac{mR}{2}\right)^2 u_R^2 + \left(\frac{lm}{6}\right)^2 u_l^2} \qquad 26)$$

J = 4,199(2).10^{-4} kg.m^2

B = 1,6(1) 10^{-4} kg.m^2.s^{-2}

Po dosazení do rovnice 16) dostaneme horizontální složku magnetického pole Země a magnetický moment použitého magnetu. Nejistotu horizontální složky magnetického pole Země a magnetického momentu magnetu určíme ze zákona šíření nejistot:

$$u_{H_Z} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{AB}}{2A^2}\right)^2 u_A^2 + \left(\frac{\sqrt{A}}{2A\sqrt{B}}\right)^2 u_B^2} \qquad 27)$$

$$u_M = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{AB}}{2A}\right)^2 u_A^2 + \left(\frac{\sqrt{AB}}{2B}\right)^2 u_B^2} \qquad 28)$$

$$\boldsymbol{H_z = 16,3(1) Am^{-1}}$$

$$M = 9,8(3).10^{-6} Am^2$$

- **Magnetická odezva feromagnetického materiálu**

Parametry součástek obvodu:

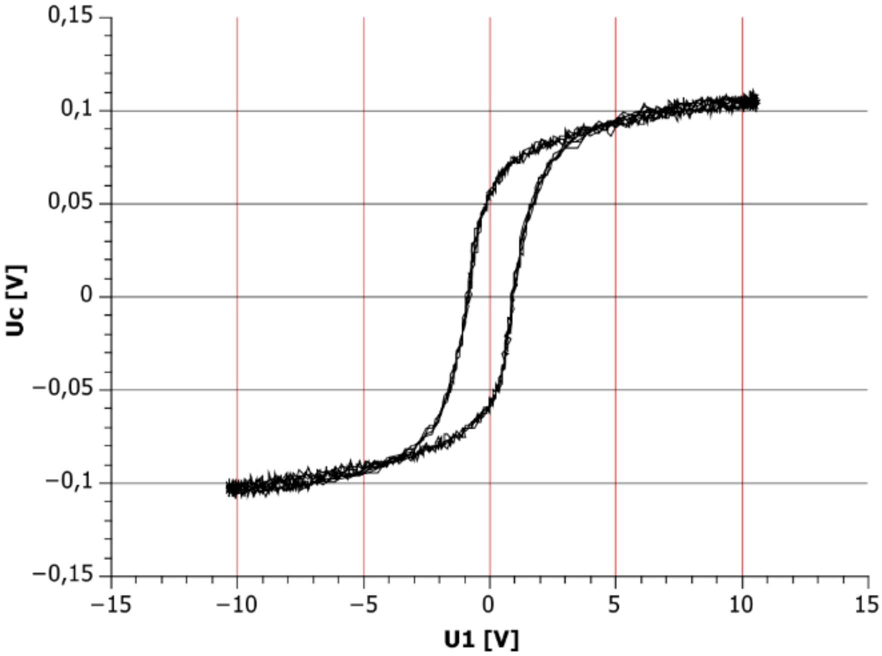
R_1 = 83 Ω
R_2 = 120 Ω
N_1 = 260
N_2 = 900
$d_{vnitřní}$ =1,95(0,003)cm
$d_{vnější}$ = 2,90(0,003) cm
h = 0,7(0,003) cm
C = 1,0 µF

Plocha průřezu jádra a nejistota spočítaná pomocí zákona o přenosu nejistot:

$$u(S) = \sqrt{\frac{1}{4}h^2u^2(d_{vnější}) + \frac{1}{4}h^2u^2(d_{vnitřní}) + \frac{(d_{vnější} - d_{vnitřní})^2}{4}u^2(h)} \quad 29)$$

S = 0,332(2) cm^2

Hysterézní křivka:



Z grafu vyšly hodnoty:

U_1 = 0,85 V
U_C(rem) = 0,0497 V
U_C(sat) = 0,0926 V

Po dosazení do rovnic 18) a 23) dostaneme a pro získání nejistot požijeme vzorce 30) a 31):

$$u(H) = \frac{N_1 U_1 u(r)}{2\pi R_1 r^2} \quad 30)$$

$$u(B) = \frac{R_2 C U_C u(S)}{N_2 S^2} \quad 31)$$

H_C = 33,87(0,35) Am^{-1}
B_{rem} = 0,154(2) T
B_{sat} = 0,288(4) T

5. Závěr

- **Geomagnetické pole**

  V první části úlohy jsem měřil horizontální složku intenzity magnetického pole Země pomocí Gaussova magnetometru. Vypočítaná hodnota činí $H_z = 16{,}3(1)Am^{-1}$. Podle tabulkových hodnot by měla být přibližně 16,1 Am^{-1}, z čehož usuzuji, že se naše měření dá považovat za předné. Dále jsem vypočítal magnetický moment požitého magnetu, který činí $M = 9{,}8(3).10^{-6}Am^2$.

- **Magnetická odezva feromagnetického materiálu**

  V druhé části úlohy jsem vypočítal koercitivní pole, remanentní magnetizaci a saturační magnetizaci pomocí vykreslení hysterézní křivky, ze které jsem odečetl hodnoty napětí U_1, U_C(rem) a U_C(sat). Díky tomu mi vyšly tyto hodnoty H_C = 33,87 Am^{-1}, B_{rem} = 0,154(2) T a B_{sat} = 0,288(4) T.