

## Fyzikální praktikum 2

### 3. Elektrické pole, můstkové metody měření odporu

#### Úkoly k měření

##### Měření odporu můstkovou metodou

- Měření odporů dvou rezistorů a jejich sériové a paralelní kombinace pomocí Wheatstonova můstku.
- Ověření vztahů pro skládání odporů.

##### Rozložení potenciálu v okolí dvouvodičového vedení

- Pochopení a praktické zvládnutí měření rozložení elektrického pole v elektrolytické vaně pomocí střídavého mostu.
- Porovnání měřeného elektrostatického pole v okolí dvouvodičového vedení s teoretickým výpočtem.

##### Měření odporu můstkovou metodou

###### Teoretický úvod

Můstkové metody jsou často užívané pro stanovení hodnoty odporů. Principiální zapojení můstku je na obrázku 3.1. Čtyři odpory jsou zapojeny do „čtverce“, v jehož jedné úhlopříčce je zapojen zdroj napětí a v druhé měřicí přístroj určující velikost procházejícího proudu  $I$ . Neprochází-li touto větví proud, říkáme, že můstek je vyvážen. Tento stav ( $I = 0$ ) zřejmě nastane, je-li napětí mezi body  $B$  a  $D$  nulové, tj.

$$U_{BD} = 0. \quad (3.1)$$

Toto napětí můžeme vyjádřit jako rozdíl potenciálů v bodech  $B$  a  $D$  vzhledem k bodu  $A$

$$U_{BD} = U_{BA} - U_{DA}. \quad (3.2)$$

Obdobně lze uvažované napětí určit, vezmeme-li za vztažný bod bod  $C$

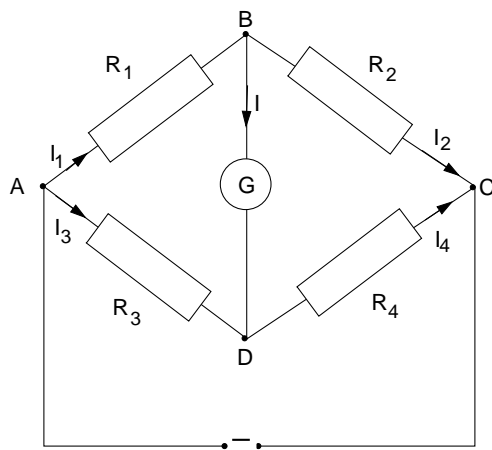
$$U_{BD} = U_{BC} - U_{DC}. \quad (3.3)$$

Z podmínek (3.1) až (3.3) plyne

$$U_{BA} = U_{DA}, \quad U_{BC} = U_{DC}. \quad (3.4)$$

protože mezi body  $B$  a  $D$  neprochází proud, musí odpory  $R_1$  a  $R_2$  procházet proud  $I_1$  a odpory  $R_3$  a  $R_4$  proud  $I_3$ . Pak lze podmínku (3.4) psát následovně

$$R_1 I_1 = R_3 I_3, \quad R_2 I_1 = R_4 I_3, \quad (3.5)$$



Obrázek 3.1: Obecné zapojení stejnosměrného můstku.

odkud dělením obou rovnic dostáváme podmínku rovnováhy na můstku

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (3.6)$$

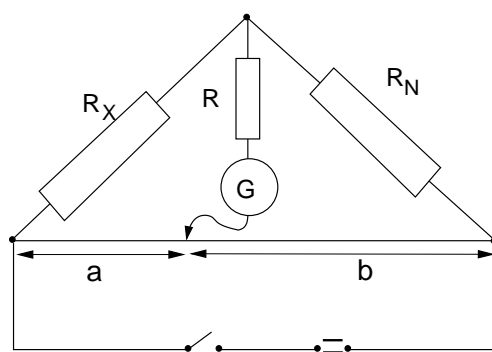
Je-li např. hodnota odporu  $R_1$  neznámá, lze ji stanovit ze vztahu

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2, \quad (3.7)$$

tzn. musíme znát absolutní hodnotu jednoho odporu a poměr zbývajících dvou odporů.

Uvedený závěr nám poslouží ke stanovení hodnoty neznámého odporu  $R_x$  v zapojení můstku podle obrázku 3.2. Odporů jsou v tomto případě tvořeny přesně lineárním potenciometrem realizovaným homogenním odporovým drátem s posuvným kontaktem, kterým nastavujeme můstek do rovnováhy. Je-li délka drátu  $l$ , pak v rovnováze platí

$$R_x = R_N \frac{a}{b} = R_N \frac{a}{l-a}. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.2: Můstek s lineárním potenciometrem.

Rozsah můstku lze měnit změnou známého odporu  $R_N$ . Měření je nejpřesnější, je-li  $R_3 \approx R_4$ , tj.  $a \approx b$ . Odpor  $R$  slouží jako předřadný odpor, kterým zmenšujeme proud měřícím přístrojem v případě, že most není ještě vyvážen.

Můstkovou metodou je možné měřit odpory v poměrně širokém intervalu s dostatečnou přesností. Při měření odporů řádu  $10^0 \Omega$  a menších se začíná uplatňovat vliv spojů. Při měření velkých odporů řádu  $10^6 \Omega$  a vyšších je proud procházející můstkem malý a můstek je málo citlivý. Tato

otázka je diskutována např. v [2]. Proudová citlivost můstku udává, jak velká je změna proudu vyvolaná jednotkovou změnou odporu. Citlivost můstku úzce souvisí s požadovanou přesností měření. Čím větší přesnosti chceme dosáhnout, tím větší jsou požadavky na citlivost můstku a měřicí přístroje.

## Úkoly

1. Změřte hodnoty odporů dvou rezistorů a jejich sériového a paralelního zapojení pomocí Wheatstonova můstku. Pro každý z rezistorů a jejich kombinací proveďte 4 až 8 měření pro různé polohy posuvného kontaktu (obr. 3.2). Výsledky statisticky zpracujte.
2. Ověřte platnost vztahů pro výpočet sériově a paralelně řazených rezistorů. Použijte přitom porovnání přímo naměřených hodnot odporů příslušných kombinací dvou rezistorů a hodnot teoretických, vypočtených z odporů jednotlivých rezistorů. Při porovnání uvažte též intervaly spolehlivosti přímo měřených hodnot a vypočtených hodnot.

## Rozložení potenciálu v okolí dvou vodičového vedení

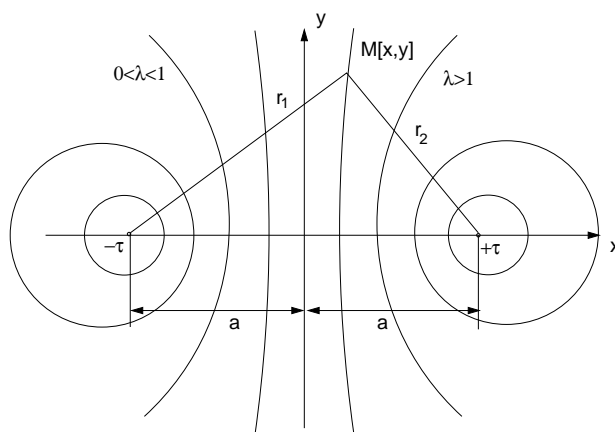
### Teoretický úvod

Potenciál pole ve vzdálenosti  $r$  od přímého vodiče s lineární hustotou náboje  $\tau$  je

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{r}, \quad (3.9)$$

kde  $R$  je vzdálenost od vodiče, ve které klademe potenciál roven nule  $V(R) = 0$  (nelze volit  $V(\infty) = 0$ , protože náboj je rozložen na vodiči, jehož délka není omezena). Volíme-li místo nulového potenciálu ve vzdálenosti  $R = 1$  m od vodiče, pak můžeme vztah (3.9) psát

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln r. \quad (3.10)$$



Obrázek 3.3: Ekvipotenciální hladiny v rovině kolmé na dva rovnoběžné nekonečně dlouhé nabitě vodiče.

Potenciál v bodě  $M$  (obrázek 3.3) od dvou lineárních rovnoběžných vodičů je podle principu superpozice s přihlédnutím ke vztahu (3.10) dán

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.11)$$

Na vodičích jsou rozloženy elektrické náboje s konstantními lineárními hustotami  $+\tau$  a  $-\tau$ . Pro ekvipotenciály platí

$$\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{konst.}, \quad \text{nebo} \quad \frac{r_2}{r_1} = \lambda, \quad (3.12)$$

kde  $r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}$  a  $\lambda > 0$  je parametr ekvipotenciálních hladin.

Geometrickým místem bodů v rovině, které mají od daných dvou bodů konstantní poměr vzdáleností  $\lambda$ , je pro  $\lambda = 1$  přímka a pro  $\lambda \neq 1$  Apolloniova kružnice. Ve zvolené soustavě kartézských souřadnic je touto přímkou osa  $y$ , středy  $S[x_s, 0]$  a poloměry  $r$  Apolloniových kružnic určíme tak, že rovnice (3.12) upravíme na tvar

$$\left(x - a \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}\right)^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}\right)^2 - a^2. \quad (3.13)$$

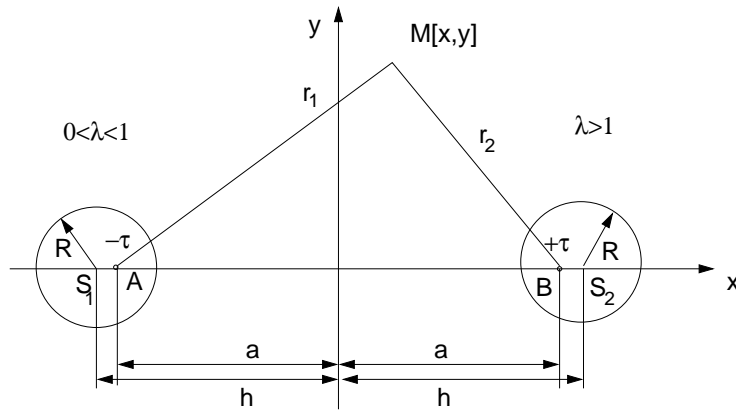
Pak

$$x_s = a \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1}, \quad r = \sqrt{x_s^2 - a^2}. \quad (3.14)$$

Z prvních tří rovnic (3.29) plyne pro potenciál elektrostatického pole Laplaceova rovnice

$$\nabla^2 V = 0. \quad (3.15)$$

Problém určení elektrostatického pole dvojvodičového vedení tvořeného rovnoběžnými válcovými vodiči nahradíme řešením elektrostatického pole dvojice rovnoběžných vodičů. Okrajové podmínky zachováme, postupujeme-li takto: dané válcové vodiče nahradíme válci z dielektrika s permitivitou prostředí  $\epsilon$  a do každého z nich vložíme přímkový vodič s lineární hustotou náboje  $\tau$ , resp.  $-\tau$  (obrázek 3.4), tzv. elektrické osy.



Obrázek 3.4: Výpočet potenciálu v bodě  $M$  od dvou válcových nekonečných vodičů s poloměrem  $R$ , mezi nimiž je rozdíl potenciálů  $U$ .

Polohu os a hodnotu  $\tau$  stanovíme tak, aby elektrické pole, které vytvářejí, mělo ekvipotenciální plochy  $V_1$  a  $V_2$  s poloměry  $R$  právě v místech povrchu válců, přičemž musí být  $V_1 - V_2 = U$ . Ve zvolené souřadné soustavě je vzdálenost středů  $S_1$  a  $S_2$  vodičových válců  $2h$ , pak poloha náhradních vodičů  $A$  a  $B$  se určí z rovnice (3.14)

$$a = \sqrt{h^2 - R^2}. \quad (3.16)$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že body  $A$  a  $B$  jsou vzájemně sdružené v kulové inverzi vzhledem ke kružnicím se středy  $S_1$  a  $S_2$ . Pak platí

$$R^2 = h^2 - a^2 = (h - a)(h + a) = \overline{S_2 A} \cdot \overline{S_2 B} = \overline{S_1 B} \cdot \overline{S_1 A}. \quad (3.17)$$

Potenciál v bodě  $M$  bude podle (3.11)

$$V = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \lambda. \quad (3.18)$$

Pro potenciály na ekvipotenciálních plochách totožných s válcovými vodiči dostaneme podle (3.18) s použitím (3.17)

$$V_1 \equiv \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h+a}{R}, \quad V_2 \equiv \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{h+a}. \quad (3.19)$$

Hodnotu  $\tau$  určíme z podmínky  $U = V_1 - V_2$

$$\tau = \frac{\pi\epsilon U}{\ln \frac{h+a}{R}}. \quad (3.20)$$

Dosazením (3.20) do (3.18) dostaneme

$$V = \frac{U}{2 \ln \frac{h+a}{R}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.21)$$

Rovnice (3.18) je odvozena pro symetrické rozložení nábojů, které v běžném experimentálním uspořádání není splněno (obvykle máme  $V_1 = U$  a  $V_2 = 0$  nebo naopak a nikoliv  $V_1 = U/2$  a  $V_2 = -U/2$ ). Ve shodě s naším experimentálním uspořádáním posuneme hladinu, od které počítáme potenciál, o  $U/2$ , tedy

$$V = \frac{U}{2 \ln \frac{h+a}{R}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{U}{2}. \quad (3.22)$$

Parametr  $\lambda$  příslušející konkrétní ekvipotenciální hladině s potenciálem  $V$  pak vypočteme jako

$$\ln \lambda = \frac{V - \frac{U}{2}}{U} 2 \ln \frac{h+a}{R} = \left( \frac{V}{U} - \frac{1}{2} \right) 2 \ln \frac{h+a}{R}. \quad (3.23)$$

### Měření rozložení elektrostatického pole

Elektrostatické pole je svou podstatou vektorovým polem, tvořeným vektorem intenzity  $\mathbf{E}$ . Můžeme je však stejně dobře popsat, užijeme-li skalárního pole hodnot elektrostatického potenciálu  $V$ . Uvedené vektorové pole intenzity a skalární pole potenciálu jsou si zcela ekvivalentní a platí

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (3.24)$$

Ekvipotenciální hladinou se nazývá v obecném případě plocha, na které má potenciál všude stejnou hodnotu

$$V(x, y, z) = V_0 = \text{konst.} \quad (3.25)$$

Pro každý elementární posuv  $\delta x, \delta y, \delta z$  po této ploše platí zřejmě podmínky  $\delta V = 0$  a tedy také

$$-(E_x \delta x + E_y \delta y + E_z \delta z) = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{l} = 0. \quad (3.26)$$

Tato rovnice říká, že skalární součin intenzity s libovolným posunem po hladině je nulový, tj. intenzita je všude kolmá k ekvipotenciálním hladinám a siločáry jimi probíhají kolmo.

Vztah (3.24) vede ryze matematickým postupem [1] k další důležité rovnici

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (3.27)$$

tedy elektrostatické pole je pole nevírové. V místech bez náboje je také

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (3.28)$$

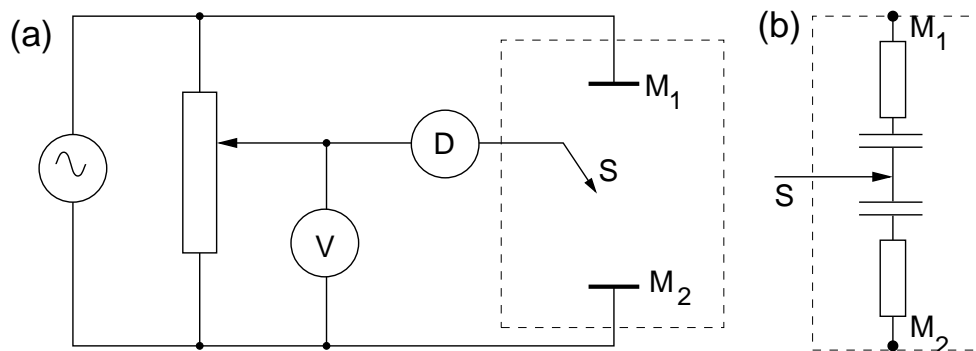
to znamená, že uvažované pole je nezřídlové.

Měření rozložení potenciálu v elektrostatickém poli je z experimentálního hlediska dosti obtížné. Využívá se proto analogie mezi elektrostatickým polem v homogenním dielektriku a elektrickým polem uvnitř homogenního vodiče, kterým protéká stacionární proud. V jednotlivých případech je pole popsáno:

Pole stacionárního proudu	Elektrostatické pole	
$\mathbf{E}_s = -\nabla V_s$	$\mathbf{E}_e = -\nabla V_e$	(3.29)
$\mathbf{j}_s = \sigma \mathbf{E}_s$	$\mathbf{D}_e = \epsilon \mathbf{E}_e$	
$\operatorname{div} \mathbf{j}_s = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{D}_e = 0$	
$\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{l} = 0$	$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0,$	

kde  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{E}_e$  je vektor intenzity pole,  $\mathbf{j}_s$  proudová hustota,  $\mathbf{D}_e$  vektor elektrostatické indukce,  $\sigma$  vodivost prostředí, ve kterém teče proud,  $\epsilon$  permitivita prostředí, v němž se elektrostatické pole vyskytuje. Za předpokladu, že dielektrikum je homogenní a neexistují v něm volné náboje a vodič je homogenní ( $\sigma = \text{konst.} \neq 0$ ), jsou soustavy rovnic (3.29) pro pole stacionárního proudu a elektrostatické pole zcela ekvivalentní. Pak lze elektrostatické pole trojrozměrného systému v prostředí s permitivitou  $\epsilon$  studovat jako pole proudu  $\mathbf{j}_s$  v prostředí s vodivostí  $\sigma$ . Měření obvykle provádíme v rovině, tj. studujeme takové trojrozměrné systémy, které mohou být popsány rozložením pole v určité rovině. Jsou to jednak systémy nezávislé na jedné ze souřadných os a jednak systémy, které mají rotační symetrii. Poslední případ se týká elektrostatických čoček.

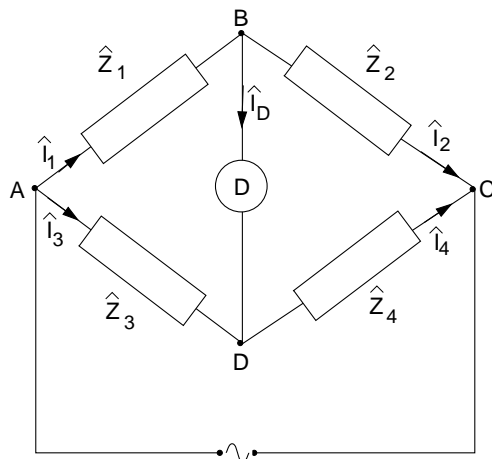
Elektrické pole v rovině obsahující osu rotační symetrie nemá normálovou složku v důsledku této symetrie. Provedeme-li řez v této rovině a jednu polovinu systému nahradíme dielektrikem (vzduch), rozložení pole se zachová, protože normálová složka je opět nulová, avšak v tomto případě na hranici vodič-dielektrikum. Na tomto principu se zakládá metoda řezu, kterou použijeme pro vyšetření pole v elektrostatické čočce tvořené dvěma válcovými elektrodami a rozdílem potenciálů  $U$ .



Obrázek 3.5: Střídavý můstek pro měření v elektrolytické vaně (a). Náhradní schéma elektrolytické vany (b).

### Střídavý můstek

Střídavý most pracuje na stejném principu jako stejnosměrný most Wheatstonův a rozumíme jím čtyři impedance zapojené dle obrázku 3.6. Most je vyvážen tehdy, jestliže detektorem  $D$  neprochází proud, pak jsou splněny jisté relace mezi impedancemi v jednotlivých větvích mostu. V případě střídavého mostu je situace poněkud komplikovanější ve srovnání se stejnosměrným



Obrázek 3.6: Obecný střídavý most.

mostem, protože na impedancích dochází obecně k fázovému posuvu proudu a napětí. Napětí na jednotlivých impedancích je rovno  $\hat{U}_i = \hat{Z}_i \hat{I}_i$ , tedy

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_1 \hat{I}_1, & \hat{U}_2 &= \hat{Z}_2 \hat{I}_2, \\ \hat{U}_3 &= \hat{Z}_3 \hat{I}_3, & \hat{U}_4 &= \hat{Z}_4 \hat{I}_4, \end{aligned} \quad (3.30)$$

Jestliže detektorem neprochází proud, je  $\hat{I}_D = 0$  a platí  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ ,  $\hat{I}_3 = \hat{I}_4$  a

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \hat{Z}_1 \hat{I}_1, & \hat{U}_2 &= \hat{Z}_2 \hat{I}_1, \\ \hat{U}_3 &= \hat{Z}_3 \hat{I}_3, & \hat{U}_4 &= \hat{Z}_4 \hat{I}_3, \end{aligned} \quad (3.31)$$

a současně je zřejmé, že  $\hat{U}_{BD} = 0$ . Tedy musí platit  $\hat{U}_1 = \hat{U}_3$  a  $\hat{U}_2 = \hat{U}_4$ . Pak dostaneme obecnou podmínku rovnováhy na střídavém mostě

$$\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_2} = \frac{\hat{Z}_3}{\hat{Z}_4}. \quad (3.32)$$

Tato podmínka představuje vlastně dvě rovnice, pro reálnou a imaginární část impedancí  $\hat{Z}_i$ . Jestliže vyjádříme impedanci  $\hat{Z}$  ve tvaru

$$\hat{Z} = |\hat{Z}|e^{i\phi}, \quad (3.33)$$

kde  $|\hat{Z}|$  je absolutní hodnota a  $\phi$  fázový posuv, dostaneme ze vztahu (3.32) amplitudovou podmínku

$$\frac{|\hat{Z}_1|}{|\hat{Z}_2|} = \frac{|\hat{Z}_3|}{|\hat{Z}_4|} \quad (3.34)$$

a podmínku fázovou

$$\phi_1 - \phi_2 = \phi_3 - \phi_4 + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Aby byl střídavý most vyvážen, musí být obě podmínky splněny současně.

### Postup měření:

Měření se provádí v elektrolytické vaně zapojené jako střídavý můstek. Je to nevodivá nádoba se slabým elektrolytem, do níž se umístí modely vodičů, jejichž elektrické pole chceme vyšetřovat. Rozměry nádoby je nutno volit tak, aby hustota proudu u jejich stěn byla mnohem menší než v prostoru, kde měříme. Na obrázku 3.5 je schéma zapojení vany do střídavého mostu se dvěma

elektrodami  $M_1$  a  $M_2$ . Sondou  $S$ , jejíž potenciál nastavíme na předem zvolenou hodnotu vzhledem k některé elektrodě, hledáme ta místa v elektrolytu, jejichž potenciál je stejný jako potenciál sondy. Je-li potenciál sondy a daného místa v elektrolytu stejný, pak detektor  $D$  vykazuje minimální signál. Pomocí odečítacího zařízení (pantografu) lze postupně na graf přenést síť bodů o stejném potenciálu. Jejich spojením dostáváme průběh ekvipotenciální čáry. Siločáry jsou v každém bodě kolmé k ekvipotenciálním čarám: takovým způsobem lze postupně zmapovat průběh elektrostatického pole v určité rovině.

Měření zpravidla provádíme střídavým proudem. Vyhnete se tím možné chybě způsobené polarizací elektrod [3]. Je-li frekvence střídavého proudu  $10^2$  až  $10^3$  Hz, pracujeme v podstatě s kvazistacionárními proudy a ekvivalentnost systému rovnic (3.29) je splněna v tomto případě s dostatečnou přesností. Popsaná metoda je již poněkud překonaná moderními metodami, poskytuje však velmi dobrou představu o průběhu ekvipotenciálních čar v sestavené konfiguraci. Je-li napětí na elektrodách  $\sim 10$  V a detektorem lze měřit změny napětí řádově  $10^{-2}$  V, určíme polohu ekvipotenciálních čar s přesností asi 1 % [2].

## Úkoly

1. Určete rozložení ekvipotenciálních čar v okolí dvouvodičového vedení tvořeného rovnoběžnými válcovými vodiči.
2. Ověřte výpočtem experimentálně získané rozložení ekvipotenciálních čar. Jednak vypočtěte parametry Apolloniových kružnic  $\lambda$ ,  $x_s$  a  $r$  (viz obr. 3.4 a (3.13), (3.14), (3.16) a (3.23)) odpovídajících jednotlivým měřeným ekvipotenciálním hladinám a uveďte je do tabulky v protokolu. Dále pak zakreslete takto určené teoretické ekvipotenciální čáry do grafu s ekvipotenciálami naměřenými.<sup>1</sup>

## Literatura:

- [1] Z. Horák, F. Krupka: *Fyzika*, SNTL Praha (1976).
- [2] J. Brož a kol.: *Základy fyzikálních měření I*, SPN Praha (1983).
- [3] V. Petržílka, S. Šafrata: *Elektřina a magnetismus*, NČSAV Praha (1956).
- [4] V. Votruba, Č. Muzikář: *Teorie elektromagnetického pole*, NČSAV Praha (1955).

---

<sup>1</sup>K zobrazení naměřených a vypočtených průběhů ekvipotenciálních hladin lze s výhodou použít programovacích jazyků jako Python, Octave či Matlab; softwaru jako Gnuplot nebo QtiPlot; on-line nástrojů typu GeoGebra či Desmos.