

Ústav fyzikální elektroniky PŘF MU

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Artem Gorodilov

Obor: Astrofyzika

Skupina: Pá 10:00

Naměřeno: 24. března 2023

Testováno: uznáno

Úloha č. 5: Měření modulu pružnosti pevných látek

$$T = 20,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 980 \text{ hPa}$$

$$\varphi = 39 \text{ \%}$$

1. Zadání

Musí být změřen modul pružnosti v tahu a ve smyku.

Modul pružnosti v tahu se měří natažením drátu a průhybem nosníku.

Modul pružnosti ve smyku se měří kroucením pevné kuličky na drátu. Měříme kroucení drátu, na kterém je kulička zavěšena.

2. Teorie

2.1. Modul pružnosti v tahu

Ke stanovení modulu pružnosti v tahu použijeme Hookův zákon:

$$\sigma_n = \varepsilon E \quad (1)$$

kde σ_n je normálové napětí, ε je poměrné prodloužení a E je modul pružnosti v tahu.

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \quad (2)$$

kde F_n je síla ve směru normály, S je plocha, na kterou působí síla F_n .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

kde Δl je prodloužení a l je původní délka.

2.1..1 Metoda tahového drátu

K drátu připevněnému na jedné straně přidáme závaží a změříme výslednou pevnost v tahu.

Pomocí vzorce zjistíme modul pružnosti v tahu:

$$E = \frac{4gl}{\pi d^2 k_1} \quad (4)$$

kde g je tíhové zrychlení, l je původní délka drátu, d je průměr drátu a k_1 je směr přímky v grafu závislosti mezi protažením drátu a přidanou hmotností, který dostaneme dále.

2.1..2 Metoda průhybu materiálu

Na nosník ze známého materiálu upevněný k osám připevníme závaží a změříme průhyb nosníku. Pomocí vzorce zjistíme modul pružnosti v tahu:

$$E = \frac{gl^3}{4h^3wk_2} \quad (5)$$

kde l je vzdálenost mezi osami, h je výška nosníku, w je šířka nosníku a k_2 je směr přímky v grafu závislosti mezi protažením drátu a přidanou hmotností, který dostaneme dále.

2.2. Modul pružnosti ve smyku

Pro určení modulu pružnosti drátu v tahu změříme periodu rotace masivní koule zavěšené na pevném drátu.

Dále zjistíme modul pružnosti ve smyku podle vzorce:

$$G = \frac{16\pi mR^2l}{5r^4T^2} \quad (6)$$

kde m je hmotnost zavěšené koule, R je poloměr zavěšené koule, l je délka drátu, r je poloměr drátu a T je perioda kmitů.

3. Měření

3.1. Nejistoty

Pro použité nástroje byly získány následující nejmenší dělení a chyby typu B:

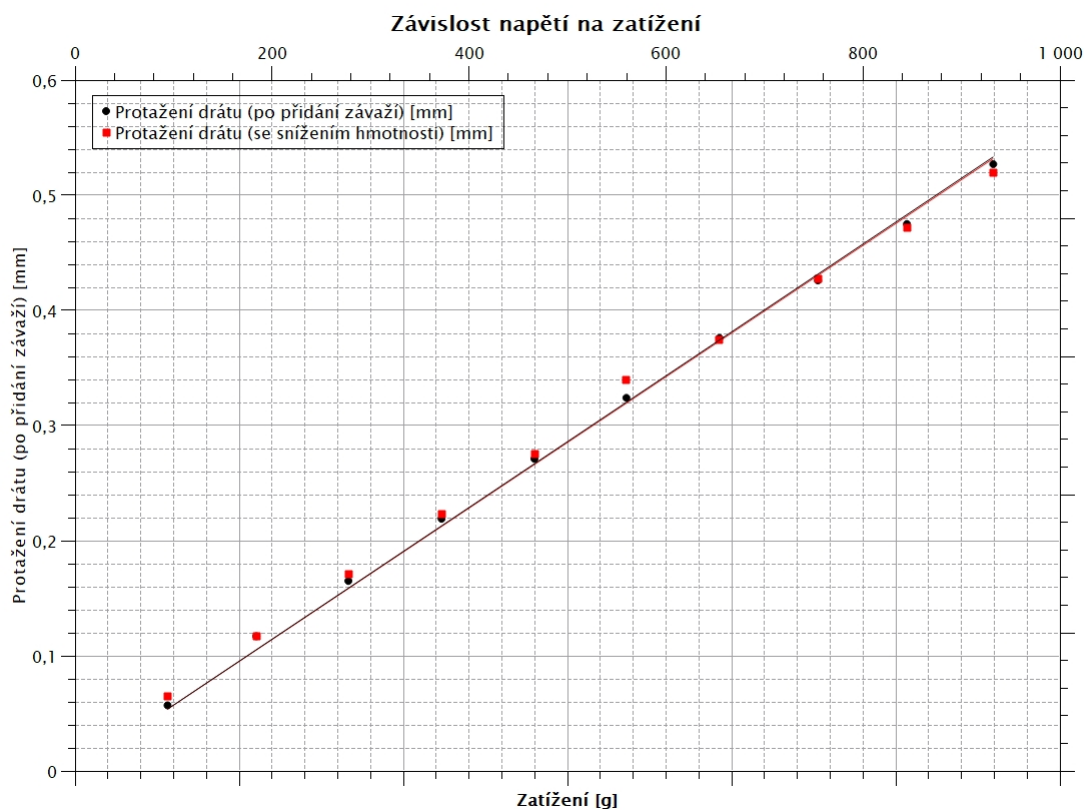
σ_v [g]	σ_u [mm]	σ_m [mm]	σ_t [mm]	σ_l [mm]
0.001	0.001	0.01	0.02	1.0

kde σ_v je nejmenší dělení stupnice, σ_u je nejmenší dělení digitálního úchylkoměru, σ_m je nejmenší dělení mikrometru, σ_t je nejmenší dělení posuvného měřítka a σ_l je nejmenší dělení metru.

$u_B(\sigma_v)$ [g]	$u_B(\sigma_u)$ [mm]	$u_B(\sigma_m)$ [mm]	$u_B(\sigma_t)$ [mm]	$u_B(\sigma_l)$
0.0003	0.003	0.003	0.006	0.3

3.2. Metoda tahového drátu

Hodnotu k zjistíme tak, že vyneseme do grafu hodnotu napětí závitů v závislosti na hmotnosti břemene:



Obrázek 1: Závislost napětí na zatížení

Po provedení aproximace sklonu lze získat hodnoty k :

	Po přidání závaží	Se snížením hmotnosti
$k \left[\frac{mm}{g} \right]$	$4.754E-4 \pm 3E-6$	$4.766E-4 \pm 5E-6$

Po výpočtu průměrné hodnoty získáme výsledek:

$$k = (47.6 \pm 1) \times 10^{-5} \left[\frac{m}{kg} \right], (p = 99.73\%)$$

Po změření průměru drátu byly získány následující výsledky:

n	d [mm]
1	0.49
2	0.50
3	0.50
4	0.49
5	0.49
6	0.50
7	0.49
8	0.49
9	0.49
10	0.50

Z toho můžeme vypočítat průměr drátu:

$$d = 0.5(1)[mm] , (p = 99.73\%)$$

Údaje známé bez měření:

$$l = 1565[mm], g = 9.809980[\frac{m}{s^2}]$$

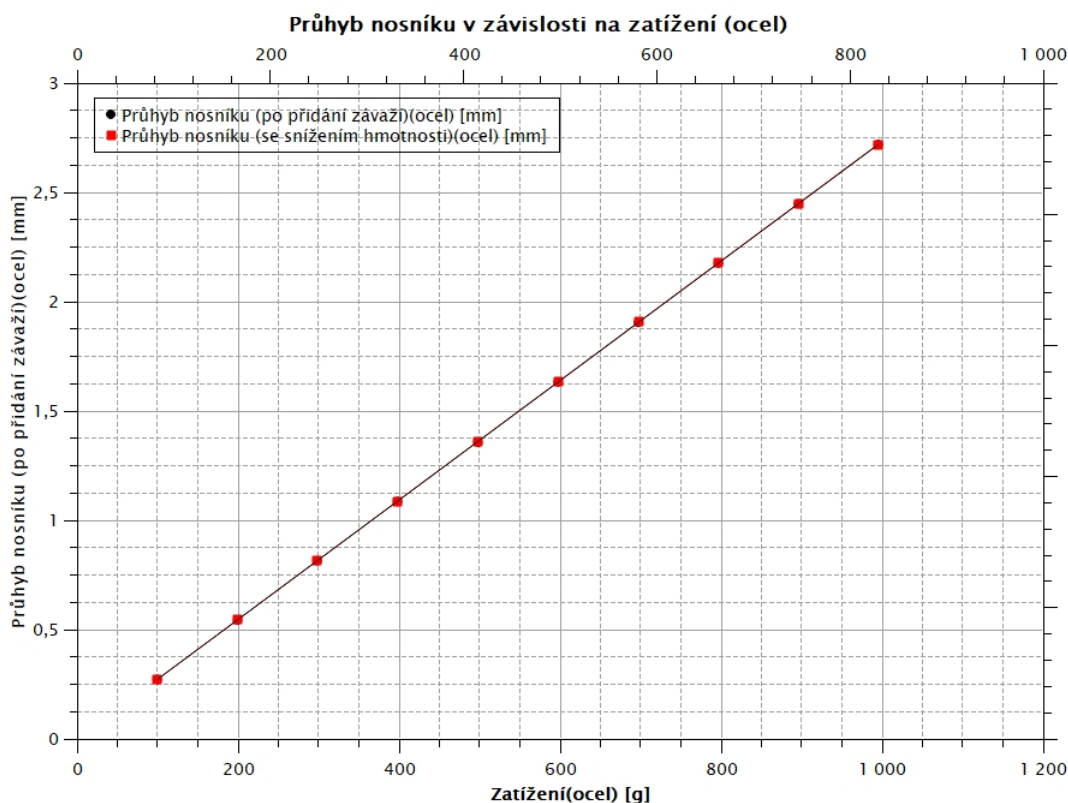
Nyní můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu podle vzorce (4):

$$E = (160 \pm 30)[GPa] , (p = 99.73\%)$$

3.3. Metoda průhybu materiálu

3.3..1 Ocel

Hodnotu k zjistíme tak, že vyneseme do grafu hodnotu napětí závitů v závislosti na hmotnosti břemene:



Obrázek 2: Průhyb nosníku v závislosti na zatížení (ocel)

Po provedení aproximace sklonu lze získat hodnoty k :

	Po přidání závaží	Se snížením hmotnosti
$k [\frac{mm}{g}]$	$2.732E-3 \pm 6E-7$	$2.734E-3 \pm 7E-7$

Po výpočtu průměrné hodnoty získáme výsledek:

$$k = (27331 \pm 21) \times 10^{-7}[\frac{m}{kg}] , (p = 99.73\%)$$

Po změření délky mezi osami, šířky a výšky nosníku se získají následující výsledky:

n	l [mm]	h [mm]	w [mm]
1	900	5,00	28,44
2	899	4,99	28,42
3	900	5,00	28,40
4	899	4,99	28,44
5	899	4,99	28,50
6	899	4,99	28,44
7	899	5,00	28,44
8	899	4,99	28,44
9	899	5,00	28,50
10	899	5,00	28,50

Z toho můžeme zjistit osovou vzdálenost, výšku a šířku nosníku:

$$l = (899.2 \pm 1)[mm], (p = 99.73\%)$$

$$h = (4.99 \pm 0.01)[mm], (p = 99.73\%)$$

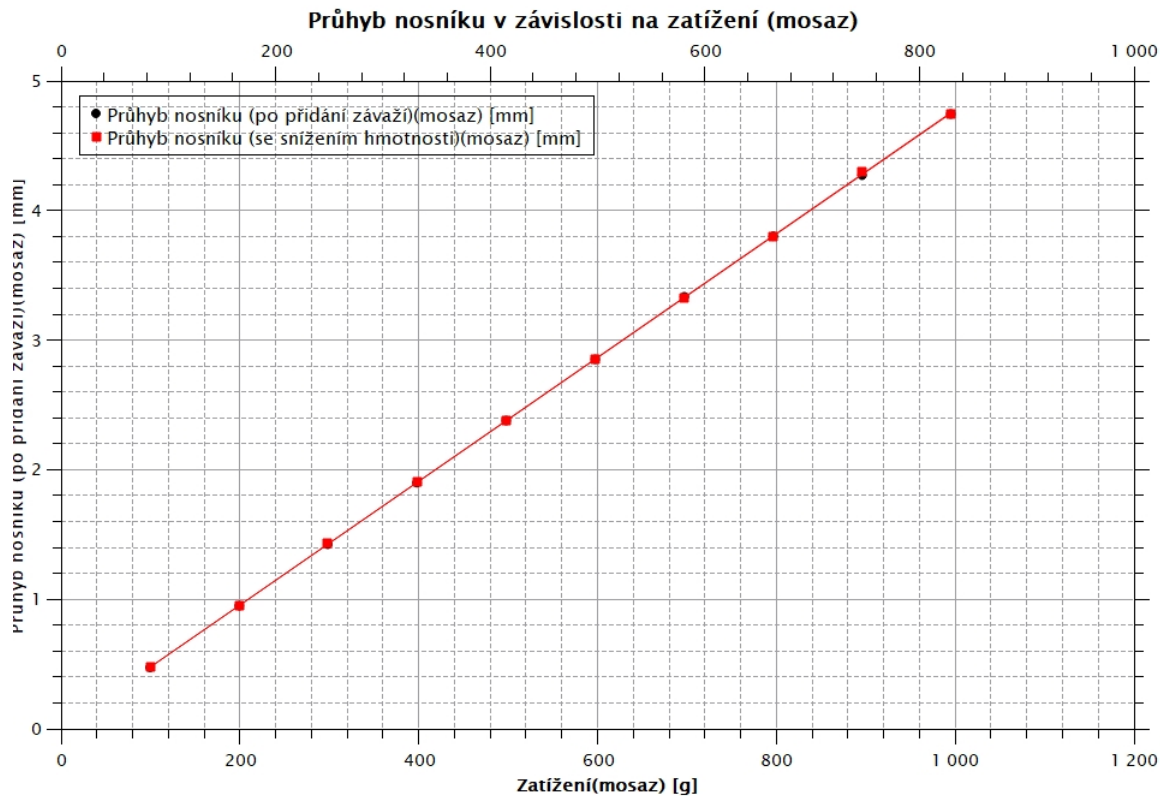
$$w = (28.45 \pm 0.05)[mm], (p = 99.73\%)$$

Nyní můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu podle vzorce (5):

$$E = (185 \pm 5)[GPa], (p = 99.73\%)$$

3.3..2 Mosaz

Hodnotu k zjistíme tak, že vyneseme do grafu hodnotu napětí závitů v závislosti na hmotnosti břemene:



Obrázek 3: Průhyb nosníku v závislosti na zatížení (mosaz)

Po provedení aproximace sklonu lze získat hodnoty k :

	Po přidání závaží	Se snížením hmotnosti
$k \left[\frac{mm}{g}\right]$	$4.773E-3 \pm 2E-6$	$4.779E-3 \pm 4E-6$

Po výpočtu průměrné hodnoty získáme výsledek:

$$k = (47759 \pm 8) \times 10^{-7} \left[\frac{m}{kg}\right], (p = 99.73\%)$$

Po změření délky mezi osami, šířky a výšky nosníku se získají následující výsledky:

n	h [mm]	w [mm]
1	4,99	28,40
2	4,99	28,45
3	4,99	28,40
4	5,00	28,43
5	4,99	28,40
6	4,99	28,50
7	4,99	28,50
8	5,00	28,40
9	4,99	28,40
10	5,00	28,50

Z toho můžeme zjistit osovou vzdálenost, výšku a šířku nosníku:

$$h = (4.99 \pm 0.02)[mm], (p = 99.73\%)$$

$$w = (28.44 \pm 0.08)[mm], (p = 99.73\%)$$

Nyní můžeme vypočítat modul pružnosti v tahu podle vzorce (5):

$$E = (106 \pm 4)[GPa], (p = 99.73\%)$$

3.4. Modul pružnosti ve smyku

Po změření průměru kuličky, délky drátu, průměru drátu a periody kmitání kuličky byly získány následující výsledky:

n	D [mm]	l [mm]	d [mm]	$10 \times T$ [s]
1	97,58	524	0,99	40,12
2	96,90	523	1,00	41,01
3	97,70	525	0,99	42,34
4	97,80	523	0,99	40,15
5	97,46	524	1,00	38,92
6	98,22	524	1,00	41,14
7	97,50	523	0,99	40,20
8	98,23	524	0,99	39,11
9	98,10	523	1,00	40,44
10	97,80	523	0,99	42,01

Z toho můžeme získat hodnoty poloměru koule, délky drátu, poloměru drátu a periody kmitání:

$$R = (48.7 \pm 0.3)[mm], (p = 99.73\%)$$

$$l = (524 \pm 2)[mm], (p = 99.73\%)$$

$$r = (0.49 \pm 0.01)[mm], (p = 99.73\%)$$

$$T = (4.1 \pm 0.2)[s], (p = 99.73\%)$$

Pomocí těchto údajů získáte modul pružnosti ve smyku podle vzorce (6):

$$G = (73 \pm 8)[GPa] , (p = 99.73\%)$$

K výpočtu chyb byl použit následující kód:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import uncertainties as u
from uncertainties import ufloat
from uncertainties.umath import *
from uncertainties import unumpy

k_1plus = ufloat(4.7538165901965*10**(-4), 2.9794349869204*10**(-6))
k_1minus = ufloat(4.7664667377935*10**(-4), 5.4479069915030*10**(-6))

k_1final = (k_1plus + k_1minus) / 2

print(k_1final)

g = ufloat(9.809980, 0)
l_1 = ufloat(1565, 0)
d_1 = ufloat(0.50, 0.01)
k_1final_new = ufloat(4760*10**(-7), 120*10**(-7))

l_1 = l_1 * 10**(-3)
d_1 = d_1 * 10**(-3)

E_1 = (4*g*l_1)/(np.pi*(d_1**2)*k_1final_new)

print(E_1)

k_2_1plus = ufloat(2.7321414396821*10**(-3), 6.1154451675715*10**(-7))
k_2_1minus = ufloat(2.7340466541304*10**(-3), 7.2165633954165*10**(-7))

k_2_1final = (k_2_1plus + k_2_1minus) / 2

print(k_2_1final)

l_2 = ufloat(899.2, 1)
h_2_1 = ufloat(4.99, 0.01)
w_2_1 = ufloat(28.45, 0.05)
k_2_1final_new = ufloat(27331*10**(-7), 21*10**(-7))

l_2 = l_2 * 10**(-3)
h_2_1 = h_2_1 * 10**(-3)
w_2_1 = w_2_1 * 10**(-3)

E_2_1 = (g * ((l_2)**3)) / (4 * ((h_2_1)**3) * w_2_1 * k_2_1final_new)

print(E_2_1)

k_2_2plus = ufloat(4.7727484765013*10**(-3), 1.7774045017633*10**(-7))
k_2_2minus = ufloat(4.7790613353523*10**(-3), 3.6645865967836*10**(-7))

k_2_2final = (k_2_2plus + k_2_2minus) / 2

print(k_2_2final)

h_2_2 = ufloat(4.99, 0.02)
w_2_2 = ufloat(28.44, 0.08)
k_2_2final_new = ufloat(47759*10**(-7), 8*10**(-7))

h_2_2 = h_2_2 * 10**(-3)
w_2_2 = w_2_2 * 10**(-3)

E_2_2 = (g * ((l_2)**3)) / (4 * ((h_2_2)**3) * w_2_2 * k_2_2final_new)

print(E_2_2)

D_3 = ufloat(97.729, 0.524)
l_3 = ufloat(523.6, 2)
d_3 = ufloat(0.997, 0.012)
T_3 = ufloat(40.544, 2)
m_3 = ufloat(5905, 0)

R_3 = (D_3 / 2) * 10**(-3)
l_3 = l_3 * 10**(-3)
r_3 = (d_3 / 2) * 10**(-3)
T_3 = T_3 / 10
m_3 = m_3 * 10**(-3)

print(R_3)
print(r_3)

G = (16 * np.pi * m_3 * ((R_3)**2) * l_3) / (5 * ((r_3)**4) * ((T_3)**2))

print(G)
```

4. Závěr

4.1. Metoda tahového drátu

Výsledný modul pružnosti v tahu $E = (164 \pm 33)[GPa]$ drátu má mnohem nižší hodnotu než tabulkový $E = 190 - 215[GPa]$. To může být způsobeno nepřesností při měření koeficientu k .

4.2. Metoda průhybu materiálu

4.2..1 Ocel

Výsledný získaný modul pružnosti v tahu ocelového nosníku $E = (185 \pm 5)[GPa]$ včetně chyby je podobný tabulkovému $E = 190 - 215[GPa]$. To může být způsobeno nepřesností při měření součinitele k .

4.3. Mosaz

Výsledný modul průhybu mosazného nosníku $E = (106 \pm 4)[GPa]$ se započtením chyby je podobný tabulkovým údajům $E = 90 - 100[GPa]$. To může být důsledkem nepřesnosti při měření součinitele k .

4.4. Modul pružnosti ve smyku

Výsledek získaný pro modul pružnosti ve smyku drátu $G = (73 \pm 8)[GPa]$, se započtením nepřesnosti, je podobný tabulkovému údaji $G = 80 - 85[GPa]$. To může být způsobeno nepřesností při měření periody T kmitání kuličky.