

## Fyzikální praktikum 2

### 6. Elektromagnetické kmity v RLC obvodu

#### Cíle měření

1. Určit impedanci několika součástí (odpor, kondenzátor, cívka).
2. Změřit frekvenční charakteristiku buzeného RLC obvodu a určit z nich odpor, indukci a kapacitu RLC obvodu.
3. Změřit přechodový jev (vlastní kmity) RLC obvodu s podkritickým, kritickým a nadkritickým tlumením, a určit vlastní frekvenci obvodu a koeficient útlumu.

#### Teorie obvodů s R, L a C součástkami

RLC obvod sestává z odporu s velikostí  $R$ , cívky s indukčností  $L$  a kondenzátoru s kapacitou  $C$  řazených buď do série nebo paralelně. V těchto obvodech dochází při buzení zdrojem střídavého napětí na určité frekvenci k rezonanci charakterizované maximem proudu. Podobné rezonanční chování můžeme vidět v mnoha oblastech fyziky např. v situaci, kdy je závaží přichycené pružinou buzené periodickou silou. Obvody s R, L a C mají široké uplatnění např. jako rezonátory, filtry s horní a dolní propustí anebo integrační členy (viz úloha č. 5).

Uvažujme obvod, kde jsou prvky R, L a C řazené v sérii, viz obr. 6.1, a jsou buzeny napětím z funkčního generátoru  $U(t)$ . Druhý Kirchhoffův zákon říká, že součet úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřeném obvodu rovná součtu napětí na zdrojích. V případě tohoto obvodu tedy nabývá tvar

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U(t) , \quad (6.1)$$

kde  $U_R(t)$ ,  $U_L(t)$  a  $U_C(t)$  jsou napětí na odporu, cívce a na kondenzátoru. Podle Ohmova zákona je napětí na odporu

$$U_R(t) = RI(t) . \quad (6.2)$$

Faradayův zákon dává napětí pro cívku

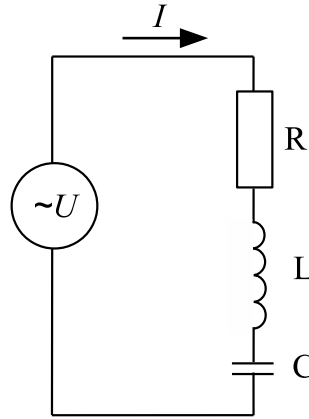
$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (6.3)$$

a z Coulombova zákona lze odvodit, že napětí na kondenzátoru nabíjeném proudem  $I(t)$  za čas  $t$  je

$$U_C(t) = U(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt , \quad (6.4)$$

kde  $U(0)$  je napětí v čase  $t = 0$ . Dosazením těchto napětí do rovnice (6.1) a jejím zderivováním podle času dostáváme rovnici

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{dU(t)}{dt} . \quad (6.5)$$



Obrázek 6.1: Schéma sériového RLC obvodu napájeného zdrojem střídavého napětí  $U(t)$ .

Rozeberme ustálené řešení tohoto obvodu při buzení střídavým napětím, kdy je zapojen postupně pouze člen R nebo L nebo C, a nakonec celý obvod RLC. Předpokládejme nyní, že střídavé napětí  $U(t)$  má tvar harmonické funkce a můžeme ji vyjádřit jako reálnou část komplexní funkce

$$\hat{U}(t) = \hat{U}_0(\omega)e^{i\omega t}, \quad (6.6)$$

kde střískou označujeme komplexní funkci. Využíváme zde matematický aparát komplexních čísel<sup>1</sup>, kdy amplituda napětí  $\hat{U}_0(\omega)$  je komplexní, tzn. můžeme ji vyjádřit jako  $\hat{U}_0(\omega) = |\hat{U}_0(\omega)|e^{i\varphi_U(\omega)}$ . Veličina  $\varphi_U$  zde vyjadřuje fázi napětí. Můžeme očekávat, že i proud má stejný tvar

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_0(\omega)e^{i\omega t}. \quad (6.7)$$

Analogicky  $\hat{I}_0(\omega) = |\hat{I}_0(\omega)|e^{i\varphi_I(\omega)}$ . Připomeňme, že tento aparát komplexních čísel můžeme použít, protože zacházíme s lineárními veličinami a operátory, u kterých se v libovolném bodě můžeme vrátit k reálným veličinám vyjádřením jejich reálné části, např.  $U(t) = \text{Re}[\hat{U}(t)]$  pomocí Eulerovy rovnice  $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ . Reálné části veličin musíme používat, pokud pracujeme s nelineárními veličinami, např. s výkonem  $P \propto I(t)^2$ .

## Obvod s odporem

Nejjednodušší případ nastává, pokud je zapojen pouze odpor. Pak na levé straně rovnice (6.5) zůstane pouze druhý člen. Po dosazení rovnic (6.6) a (6.7) do (6.5) dostáváme

$$R\hat{I}_0(\omega) = \hat{U}_0(\omega), \quad (6.8)$$

která vyjadřuje Ohmův zákon pro amplitudy  $\hat{I}_0(\omega)$  a  $\hat{U}_0(\omega)$ . V obvodech střídavého proudu se často používá komplexní impedance  $\hat{Z}(\omega) = |\hat{Z}(\omega)|e^{i\varphi_Z(\omega)}$  definovaná jako

$$\hat{Z}(\omega) \equiv \frac{\hat{U}_0(\omega)}{\hat{I}_0(\omega)} = \frac{|\hat{U}_0(\omega)|}{|\hat{I}_0(\omega)|}e^{i(\varphi_U - \varphi_I)}. \quad (6.9)$$

Rozdíl  $\varphi_U(\omega) - \varphi_I(\omega)$  vyjadřuje fázový rozdíl mezi proudem a napětím. Typicky volíme  $\varphi_U = 0$  (volba počátku času). V případě odporu pak dostáváme pro jeho impedanci

$$\hat{Z}_R(\omega) = R = R_R. \quad (6.10)$$

kde jsme pro velikost odporu měřeného rezistoru zavedli veličinu  $R_R$  z důvodu odlišení od ostatních odporů, které se v obvodu mohou vyskytnout. Jelikož je tato impedance reálná, vidíme, že pro fázi impedance odporu platí  $\varphi_R = \varphi_U - \varphi_I = 0$ .

<sup>1</sup>Pro podrobnější diskuzi aparátu komplexních čísel velmi doporučujeme pročíst [1].

### Obvod s kondenzátorem

V případě, kdy je v obvodu jen kondenzátor, zůstane na levé straně rovnice (6.5) pouze třetí člen. Analogicky s předchozí částí pak dostáváme pro impedanci kapacity

$$\hat{Z}_C(\omega) = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \quad (6.11)$$

Zde je již impedance komplexní. Fáze napětí na kondenzátoru  $\hat{U}_0(\omega) = \hat{Z}_C(\omega)\hat{I}_0(\omega)$  se liší o  $-\pi/2 = -90^\circ$  relativně k proudu, tzn. že harmonický profil napětí se „opozďuje“ za proudem. Ze změřené velikosti impedance  $|\hat{Z}_C(f)|$  na dané frekvenci  $f = \omega/2\pi$  je možno vypočíst kapacitu jako

$$C = \frac{1}{2\pi f |\hat{Z}_C(f)|}. \quad (6.12)$$

Tento případ představuje ideální kondenzátor. V reálných součástkách existují ztráty, které si můžeme představit jako přídavný odpor zapojený do série, tzv. ekvivalentní sériový odpor (v angličtině se používá zkratka „ESR“). S impedancemi můžeme pracovat podobně jako s odpory v obvodu se stejnosměrným proudem, tzn., v sériovém zapojení je celková impedance dána součtem impedancí jednotlivých elementů a tedy impedanci reálného kondenzátoru je možno vyjádřit jako

$$\hat{Z}_C^r(\omega) = \hat{Z}_C(\omega) + R_C = \frac{-i}{\omega C} + R_C. \quad (6.13)$$

Odtud vyjádříme fázi impedance kondenzátoru  $\varphi_C$  jako

$$\tan \varphi_C = \frac{\text{Im } \hat{Z}_C^r(\omega)}{\text{Re } \hat{Z}_C^r(\omega)} = \frac{-1}{\omega R_C C}. \quad (6.14)$$

Odpor tedy způsobí, že fáze již má větší hodnotu než  $-90^\circ$ . Pro  $\omega \rightarrow 0$  se blíží ideální hodnotě  $-90^\circ$ , pro  $\omega \rightarrow \infty$  se fáze blíží 0, tzn., kondenzátor se chová jako odpor. Z amplitudy a fáze  $\hat{Z}_C^r(\omega)$  lze vyjádřit pomocí rovnice (6.13) kapacitu

$$C = \frac{-1}{2\pi f |\hat{Z}_C^r(f)| \sin \varphi_C}, \quad (6.15)$$

(záporné znaménko zde vystupuje protože fázový úhel kondenzátoru  $\varphi_C$  je záporný) a ekvivalentní sériový odpor

$$R_C = |\hat{Z}_C^r(f)| \cos \varphi_C. \quad (6.16)$$

Jako míra kvality kondenzátoru na určité frekvenci se zavádí bezrozměrná veličina činitel jakosti  $Q$  (v angl.  $Q$ -factor,  $Q$  z angl. quality), který je daný velikostí poměru imaginární a reálné části  $\hat{Z}_C^r(\omega)$ ,  $Q(\omega) = 1/(\omega C R_C)$ . Jeho převrácená hodnota  $D = 1/Q = \omega C R_C$  (z angl. dissipation) se nazývá ztrátový činitel, je dána podílem odporové a kapacitní složky a vyjadřuje míru ztráty energie. Nejmenší ztrátový činitel mají kondenzátory vzduchové (řádově  $10^{-5}$  až  $10^{-6}$ ) na 1 kHz. Keramické kondenzátory mají ztrátový činitel řádově  $10^{-4}$ , kondenzátory s plastovou fólií  $10^{-3}$  a kondenzátory papírové  $10^{-2}$ . Ztrátový činitel elektrolytických kondenzátorů bývá 0,1 až 0,3 [2, 3]. Poznamenejme, že v reálném kondenzátoru je sériový ekvivalentní odpor frekvenčně závislý a je nutno ho charakterizovat v blízkosti frekvence, na kterém pak s kondenzátorem pracujeme.

### Obvod s cívkou

V případě, kdy v obvodu je pouze cívka, pak na levé straně rovnice (6.5) zůstane pouze první člen. Analogicky s předchozí částí pak dostáváme pro impedanci cívky

$$\hat{Z}_L(\omega) = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}. \quad (6.17)$$

Impedance je zde opět komplexní a její fáze  $\pi/2$  značí, že fáze napětí na kondenzátoru  $\hat{U}_0(\omega) = \hat{Z}_L \hat{I}_0(\omega)$  je o  $\pi/2$  větší než u proudu, tzn., napětí se na cívce „předbíhá“ před proudem o  $90^\circ$ . Ze změřené velikosti impedance  $|\hat{Z}_L(f)|$  na dané frekvenci  $f$  je možno vypočíst indukčnost jako

$$L = \frac{|\hat{Z}_L(f)|}{2\pi f} . \quad (6.18)$$

Reálnou cívku si můžeme opět představit jako ideální cívku zapojenou v sérii s ekvivalentním sériovým odporem a její impedance je

$$\hat{Z}_L^r = \hat{Z}_L(\omega) + R_L = i\omega L + R_L . \quad (6.19)$$

Odtud vyjádříme úhel této impedance jako

$$\tan \varphi_L = \frac{\omega L}{R_L} . \quad (6.20)$$

Z amplitudy a fáze  $\hat{Z}_L^r(\omega)$  (6.19) lze vyjádřit indukci

$$L = \frac{|\hat{Z}_L^r(f)| \sin \varphi_L}{2\pi f} , \quad (6.21)$$

a ekvivalentní sériový odpor

$$R_L = |\hat{Z}_L^r(f)| \cos \varphi_L . \quad (6.22)$$

Ekvivalentní sériový odpor způsobí, že fáze již má menší hodnotu než  $90^\circ$ . Pro  $\omega \rightarrow \infty$  se blíží ideální hodnotě  $+90^\circ$ , pro  $\omega \rightarrow 0$  se fáze blíží 0, tzn., cívka se chová jako odpor. Jako míra kvality cívky na určité frekvenci se opět vyjadřuje pomocí činitele jakosti (velikosti poměru imaginární a reálné části impedance),  $Q(\omega) = \omega L / R_L$  a ztrátový činitel je  $D = 1/Q = R_L / (\omega L)$ . Jen krátce zmiňme, že sériový odpor není jedinou charakteristikou reálné cívky. Na vysokých frekvencích se začne projevovat paralelní kapacita vznikající mezi jednotlivými smyčkami cívky. Proto se v tomto praktiku omezíme na relativně malé frekvence pod 3 kHz, kde je tento efekt relativně slabý – projevuje se tak, že ekvivalentní sériový odpor není konstanta, ale závisí na frekvenci. Na dostatečně nízkých frekvencích by se hodnota  $R_L$  měla blížit stejnosměrnému odporu cívky.

Obrázek 6.2 shrnuje dosažené výsledky a souhrnně ukazuje (komplexní) impedance reálné cívky ( $\hat{Z}_L^r$ ), odporu ( $\hat{Z}_R$ ) a reálné kapacity ( $\hat{Z}_C^r$ ), kde každá z nich má hodnotu reálné části rovnu  $R$ .

## RLC obvod

Pro vyřešení RLC obvodu nejprve podělme rovnici (6.5) indukčností  $L$  a obdržíme

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU(t)}{dt} . \quad (6.23)$$

Tato rovnice je analogická pohybové rovnici tlumeného mechanického oscilátoru. Člen s první derivací proudu představuje disipaci energie a je úměrný konstantě tlumení  $\alpha$ , kde

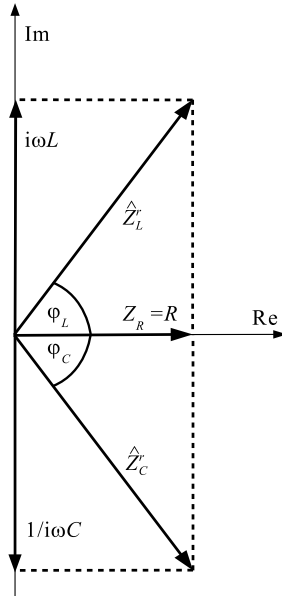
$$2\alpha = \frac{R}{L} . \quad (6.24)$$

Konstanta u třetího členu zleva určuje kruhovou rezonanční frekvenci oscilátoru

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (6.25)$$

Připomínáme, že jednotka  $\omega$  (stejně jako jednotka  $\alpha$ ) je rad/s a  $\omega$  se pojí s frekvencí  $f$  (jednotka Hz) jako  $\omega = 2\pi f$ . Pro rezonanční frekvenci tedy dostáváme

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} . \quad (6.26)$$



Obrázek 6.2: Impedance odporu  $\hat{Z}_R$ , reálné cívky  $\hat{Z}_L^r$ , a reálného kondenzátoru  $\hat{Z}_C^r$  zobrazené v rovině komplexních čísel. Reálná část všech impedancí má hodnotu  $R$ .

Rovnici (6.23) pomocí zavedených konstant můžeme přepsat na

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L} \frac{dU(t)}{dt}. \quad (6.27)$$

Jedná se o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu pro proud  $I(t)$ .

### Ustálené řešení

Rozeberme nejprve, podobně jako výše, ustálené řešení při buzení střídavým napětím o úhlové frekvenci  $\omega$ . Vyjádříme závislost proudu obvodem relativně k budícímu napětí pomocí veličiny  $\hat{G}(\omega) \equiv \hat{I}_0(\omega)/\hat{U}_0(\omega)$ , která se nazývá vodivost. Vodivost je převrácenou hodnotou impedance,  $\hat{G}(\omega) = 1/\hat{Z}(\omega)$  a má jednotku Siemens (zn. S) nebo  $\Omega^{-1}$ . Po dosazení rovnic (6.6) a (6.7) do (6.27) dostáváme pro vodivost

$$\hat{G}(\omega) \equiv \frac{\hat{I}_0(\omega)}{\hat{U}_0(\omega)} = i\omega \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega}, \quad (6.28)$$

kde

$$F = 1/L \quad (6.29)$$

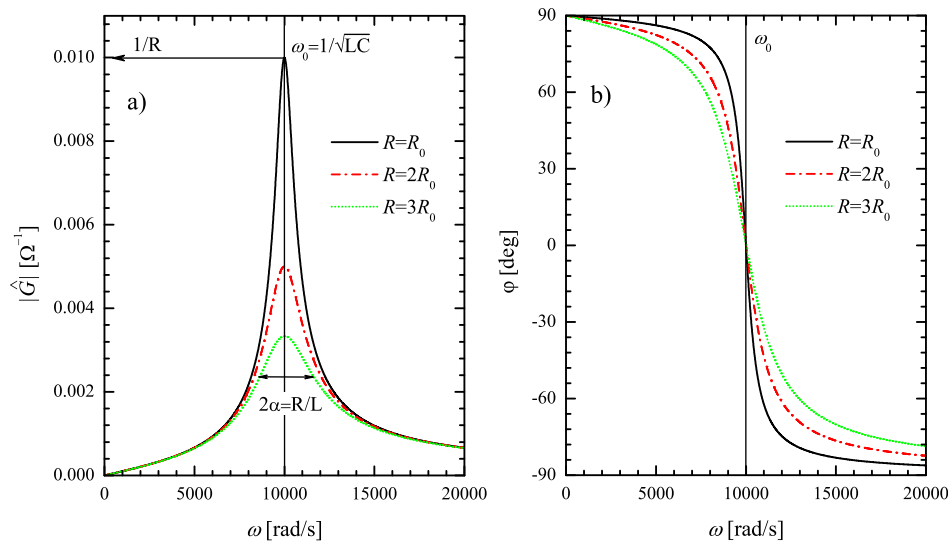
je oscilátorová síla. Člen  $F/(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega 2\alpha)$  je rezonanční a setkáme se s ním v mnoha fyzikálních situacích, např. při řešení mechanického oscilátoru nebo při kmitech iontů v pevných látkách (tzv. Lorentzův oscilátor). Člen  $i\omega$  zde vystupuje<sup>2</sup>, protože vztah (6.28) představuje závislost proudu na napětí<sup>3</sup>.

Vztah (6.28) můžeme alternativně vyjádřit pomocí původních veličin  $R$ ,  $L$  a  $C$  jako

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}. \quad (6.30)$$

<sup>2</sup>Znaménko u tohoto členu závisí na zvoleném znaménku u času ve vztazích (6.6) a (6.7). V návodu k této úloze používáme znaménko směru času stejné jako je zvykem v elektrotechnice. Na druhou stranu, v kvantové teorii či teorii pevných látek se používá časová závislost  $e^{-i\omega t}$ , která by změnila znaménko u všech členů  $i\omega$ .

<sup>3</sup>Amplituda náboje na kondenzátoru  $\hat{q}_0$  člen  $i\omega$  nemá, viz rovnice (6.35) v části věnované přechodovému jevu a dále viz [1].



Obrázek 6.3: Amplituda vodivosti (a) a její fáze (b) sériového obvodu RLC pro hodnoty  $L = 0,1$  H,  $C = 100$  nF. Jsou zde vyneseny tři křivky pro hodnoty odporu  $R = R_0$ ,  $R = 2R_0$  a  $R = 3R_0$ , kde  $R_0 = 100$   $\Omega$ . Rezonanční frekvence  $\omega_0 = 10000$  rad/s. Plná šířka rezonančních křivek v úrovni  $1/\sqrt{2} \approx 71$  % maxima je rovna  $2\alpha$ , což je ilustrováno šipkou v případě  $R = 3R_0$  ( $2\alpha = 3000$  rad/s.)

Pravou stranu tohoto výrazu můžeme také jednoduše obdržet jako převrácenou hodnotu RLC impedancí v sérii  $1/(\hat{Z}_R + \hat{Z}_L + \hat{Z}_C)$ .

Amplitudu vodivosti vyjádříme jako

$$|\hat{G}(\omega)| = \sqrt{\hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega)} = \omega \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (6.31)$$

Fázi vodivosti  $\varphi_G(\omega)$  vyjádříme jako

$$\tan \varphi_G(\omega) = \frac{\text{Im } \hat{G}(\omega)}{\text{Re } \hat{G}(\omega)} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\alpha\omega} = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}. \quad (6.32)$$

Obrázek 6.3(a) vykresluje závislost amplitudy vodivosti RLC obvodu na kruhové frekvenci  $\omega$  pro hodnoty  $L = 0,1$  H,  $C = 100$  nF a tři hodnoty odporu  $R = R_0$ ,  $R = 2R_0$  a  $R = 3R_0$ , kde  $R_0 = 100$   $\Omega$ . Na rezonanční frekvenci je amplituda rovna  $1/R$  a tedy rovnice (6.31) má na této frekvenci tvar stejnosměrného Ohmova zákona. Z amplitudy vodivosti v rezonanci tedy můžeme určit  $R$ . V reálném RLC obvodu tento odpor odpovídá ztrátám v celém obvodu daným součtem ekvivalentních sériových odporů všech součástí na dané frekvenci

$$R_{\text{celek}} = R_R + R_L + R_C, \quad (6.33)$$

kde  $R_R$  je velikost přidaného odporu v obvodu. Šířka rezonance  $|\hat{G}(\omega)|$  je pro slabé tlumení úměrná  $\alpha$ , přesněji řečeno, šířka  $|\hat{G}(\omega)|$  ve výšce  $1/\sqrt{2} \approx 71$  % maxima je rovna  $2\alpha$  a je možno z ní určit  $L$  při znalosti  $R$ .<sup>4</sup> Z frekvence rezonance pak pomocí vztahu (6.25) určíme  $C$  a RLC obvod je tak plně charakterizován.

Obrázek 6.3(b) vykresluje frekvenční závislost fáze vodivosti stejného RLC obvodu. Na rezonanční frekvenci  $\omega = \omega_0$  je fáze nulová. V limitě  $\omega \rightarrow 0$  fáze nabývá hodnoty  $+90^\circ$  a v limitě  $\omega \rightarrow \infty$  nabývá  $-90^\circ$ . Tedy celková změna fáze při průchodu rezonanční frekvencí je  $180^\circ$ .

<sup>4</sup>V elektrotechnice se často uvažuje o výkonu, který je úměrný kvadrátu proudu a tedy  $G^2$ . Pro  $G^2$  je pak šířka  $2\alpha$  v polovině výšky maxima, tzv. FWHM (z angl. full width at half maximum).

### Přechodový jev

Přechodový jev v RLC obvodu vzniká při skokové změně budícího napětí, např. při vypnutí zdroje. Vyjádřeme přechodový jev napětí na kondenzátoru  $U_C(t)$ , což bude v tomto praktiku přímo měřená veličina. Vraťme se k rovnici (6.1), do které dosadíme vztahy (6.2), (6.3). S uvažováním definice proudu  $I(t) = dq(t)/dt$ , kde  $q(t)$  je náboj na kondenzátoru, a vztahu  $q(t) = U_C(t)C$  dostáváme rovnici

$$\frac{d^2 U_C(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dU_C(t)}{dt} + \omega_0^2 U_C(t) = \omega_0^2 U(t) , \quad (6.34)$$

kde jsme použili výše zavedených konstant  $\alpha$  a  $\omega_0$ . Tato rovnice je formálně podobná rovnici (6.27), ale vystupuje zde napětí na kondenzátoru  $U_C(t)$  a pravá strana je úměrná budícímu napětí  $U(t)$ , kdežto v rovnici (6.27) její derivaci. Pro úplnost zmiňme, že při harmonickém buzení (6.6) je řešení této rovnice

$$\frac{\hat{U}_{C0}(\omega)}{\hat{U}_0(\omega)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega} . \quad (6.35)$$

Tento vztah a tedy napětí na kondenzátoru (potažmo jeho náboj  $q(t) = U_C(t)C$ ) je formálně ekvivalentní výchylce mechanického oscilátoru, více viz [1].

Dále se již věnujme skokové změně napětí, kdy v čase  $t = 0$  se napětí  $U(t)$  skokově změní z konstantní hodnoty  $U_i$  na konstantní hodnotu  $U_f$ . Nejprve uvažujme homogenní diferenciální rovnici, tzn. rovnici (6.34) bez pravé strany. Předpokládejme řešení ve tvaru  $U_C(t) = U_{C0}e^{\lambda t}$ . Po dosazení dostáváme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 . \quad (6.36)$$

Řešení této kvadratické rovnice je

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} , \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} . \quad (6.37)$$

Obecné řešení homogenní části rovnice (6.34) pro případ  $\alpha \neq \omega_0$  je

$$U_C(t) = U_{C1}e^{\lambda_1 t} + U_{C2}e^{\lambda_2 t} , \quad (6.38)$$

kde  $U_{C1}$  a  $U_{C2}$  jsou konstanty dané počátečními podmínkami. Teorie diferenciálních rovnic říká, že řešení nehomogenní rovnice (6.34) je pak lineární superpozice řešení homogenní rovnice (6.38) plus jakékoliv řešení nehomogenní rovnice. Řešení nehomogenní rovnice (6.34) s konstantní pravou stranou je konstanta. Tedy obecné řešení (6.34) pro  $t > 0$  je

$$U_C(t) = U_{C1}e^{\lambda_1 t} + U_{C2}e^{\lambda_2 t} + U_f , \quad (6.39)$$

kde poslední konstanta na pravé straně je konečné napětí  $U_f$ , jelikož musí  $U_C(t \rightarrow \infty) = U_f$ .

Rozeznáváme zde tři případy. Pro  $\alpha > \omega_0$  hovoříme o tzv. nadkritickém tlumení. Kořeny  $\lambda_{1,2}$  (6.37) jsou reálné a řešení je dáno přímo rovnicí (6.39).

V opačném případě, kdy  $\alpha < \omega_0$ , se jedná o tzv. podkritické tlumení, kdy jsou kořeny  $\lambda_{1,2}$  komplexní a reálnou část řešení (6.39) lze vyjádřit jako

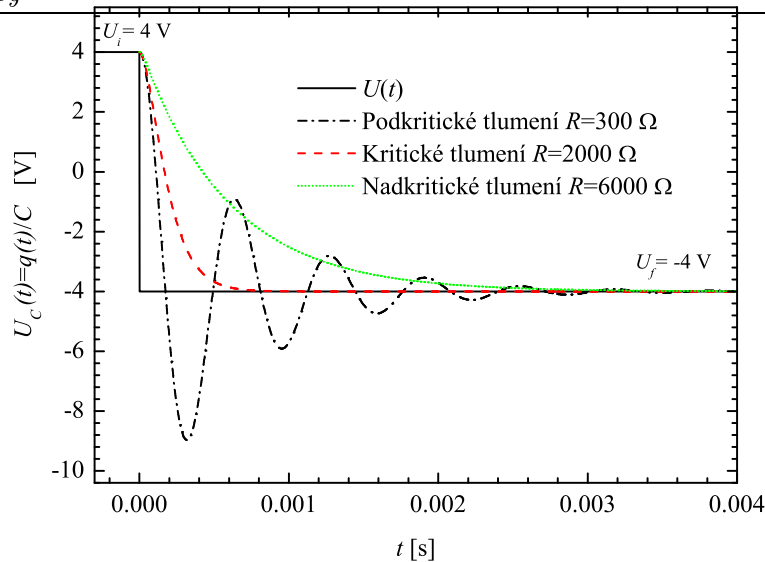
$$U_C(t) = U_{C3}e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + U_{C4}e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + U_f \quad (6.40)$$

nebo alternativně pomocí fáze  $\phi$  jako

$$U_C(t) = U_{C5}e^{-\alpha t} \cos (\omega_d t + \phi) + U_f , \quad (6.41)$$

kde  $U_{C3}, U_{C4}, U_{C5}$  resp.  $\phi$  jsou opět konstanty dané počátečními podmínkami. Frekvence

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (6.42)$$



Obrázek 6.4: Přechodový jev RLC obvodu při skokové změně budícího napětí  $U(t)$  z hodnoty 4 V na -4 V pro podkritické ( $R = 300 \Omega$ ), kritické ( $R = 2000 \Omega$ ) a nadkritické tlumení ( $R = 6000 \Omega$ ) a pro  $L = 0,1$  H a  $C = 100$  nF. Vyneseno je napětí na kondenzátoru úměrné jeho náboji.

se nazývá tlumená kruhová rezonanční frekvence, kterou obvod při přechodovém jevu dočasně kmitá.

Třetí hraniční případ je tzv. kritické tlumení, které nastává pro takové hodnoty odporu  $R = R_k$ , kdy

$$\alpha = \omega_0. \quad (6.43)$$

Dosazením do rovnice (6.34) lze ukázat, že řešení má pro tento případ tvar

$$U_C(t) = (U_{C6} + U_{C7}t)e^{\lambda t} + U_f \quad (6.44)$$

a vyznačuje se nejrychlejším útlumem daným  $\lambda = -\alpha = -\omega_0$ . Tento stav je žádoucí např. při stabilizaci, kdy je potřeba co nejrychleji utlumit systém vyvedený z rovnováhy vnějším stimulem.

Všechna tato řešení musí splňovat počáteční podmínky. V našem případě musí napětí v čase  $t = 0$  mít hodnotu  $U_C(t = 0) = U_i$ . Zároveň předpokládáme, že napětí  $U_i$  bylo dostatečně dlouho konstantní, takže je RLC obvod již v rovnováze, a tudíž se napětí s časem nemění a tedy proud je nulový,  $I(t \rightarrow 0^-) = dq(t = 0)/dt = 0$ . Vzhledem k tomu, že je součástí obvodu indukce, nemůže se proud měnit skokově, a tedy tato podmínka platí i v limitě  $t \rightarrow 0$  zprava, tedy pro výše nalezená řešení. Aplikací těchto podmínek obdržíme volné konstanty. Pro nadkritické tlumení získáváme

$$U_{C1} = \frac{U_i - U_f}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad U_{C2} = \frac{U_i - U_f}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (6.45)$$

pro podkritické tlumení

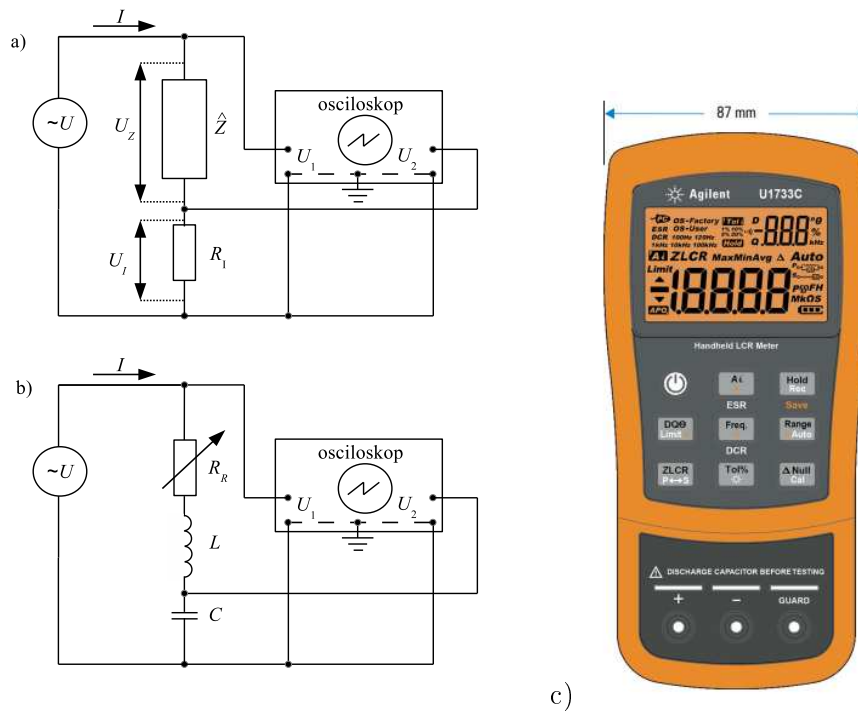
$$U_{C5} = (U_i - U_f) \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)^2}, \quad \phi = -\arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) \quad (6.46)$$

a pro kritické tlumení

$$U_{C6} = U_i - U_f, \quad U_{C7} = (U_i - U_f)\alpha. \quad (6.47)$$

Tato řešení jsou vykresleny na obr. 6.4 pro realistickou situaci, kdy se napětí skokově mění z  $U_i = 4$  V na  $U_f = -4$  V pro jedno podkritické, nadkritické a kritické tlumení. Přechodový jev lze taktéž pozorovat pomocí proudu v RLC obvodu. Časové závislosti proudu bychom získali derivací výše obdržených vztahů.





Obrázek 6.5: (a) Aparatura pro měření impedance  $\hat{Z}$  (nebo vodivosti  $\hat{G} = 1/\hat{Z}$ ) sestávající z funkčního generátoru jako zdroje napětí  $U$  s určitou frekvencí, osciloskopu, měřené impedance  $\hat{Z}$  a referenčního odporu  $R_I$ . V schématu jsou naznačena napětí  $U_I$  na referenčním odporu  $R_I$  a napětí  $U_Z$  na měřené impedanci  $Z$ . Referenční (stínící) vodiče kanálů  $U_1$  a  $U_2$  jsou uvnitř osciloskopu spojeny a uzemněny. (b) Aparatura analogická panelu (a) použitá pro měření přechodového jevu náboje na kondenzátoru  $C$ . (c) RLC metr Agilent U1733C.

Tlumení RLC oscilátoru se často také charakterizuje bezrozměrným jakostním činitelem  $Q$ , který je zde definován jako

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (6.48)$$

který představuje počet oscilací  $N$ , které oscilátor vykoná, než jeho energie poklesne na  $1/e$  původní hodnoty, vynásobený faktorem  $2\pi$ , tj.  $N = Q/(2\pi) \approx Q/6$ . Energie je úměrná kvadrátu proudu, proto je v definici  $Q$  (6.48) faktor 2 ve jmenovateli.

## Popis experimentální aparatury a měření

Úloha začíná měřením s RLC metrem Agilent U1733C, viz obr. 6.5(c). Je to moderní ruční přístroj umožňující měřit velikost impedance a z ní určit kapacitu, indukčnost nebo odpor součástek (volba přepínáním tlačítka ZLCR). Umožňuje změřit fázi impedance (zde označena jako  $\theta$ ) a z ní činitel jakosti  $Q$  nebo ztrátový činitel  $D$  (volba přepínáním tlačítka DQ $\theta$ ). Tento přístroj taktéž umožňuje změřit ekvivalentní sériový odpor (přepíná se podržením tlačítka Ai (ESR) na 3 s). Pro určení stejnosměrného odporu, např. cívky, se použije stejnosměrný mód, který se přepíná podržením tlačítka Freq. (DCR) na 3 s. Přístroj pracuje na diskretních frekvencích 100, 120 Hz a 1, 10 a 100 kHz (přepínání tlačítkem Freq.) s tím, že po zapnutí je vždy nastavena referenční frekvence 1 kHz. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkaze [5].

Měření s osciloskopem probíhá na aparatuře sestávající z funkčního generátoru jako zdroje napětí  $U$  o určité frekvenci  $f$ , osciloskopu, měřené impedanci  $\hat{Z}$  a referenčním odporu  $R_I$ , viz obr. 6.5(a). Druhý kanál osciloskopu  $U_2$  měří napětí  $U_I$  na referenčním odporu  $R_I$ , pomocí něhož určíme proud obvodem  $I = U_I/R_I = U_2/R_I$ . První kanál osciloskopu  $U_1$  je připojen na výstup z funkčního generátoru a měří celkové napětí  $U_1 = U_Z + U_I$ . V osciloskopu jsou vždy referenční

(stínící) vodiče obou kanálů propojeny a uzemněny (v obr. 6.5(a) naznačeno čárkovaně), tedy první kanál nemůže být připojen pouze na testované impedanci  $\hat{Z}$ , ale musí mít propojený zemnicí vodič se zemnicím kontaktem funkčního generátoru. Signální kontakty kabeláže jak na osciloskopu tak na funkčním generátoru mají červenou barvu, kdežto stínící (uzemněné) kontakty buď modrou nebo černou barvu.

Impedanci  $\hat{Z}$  vyjádříme pomocí její definice. Jelikož  $U_Z = U_1 - U_I = U_1 - U_2$ , pak

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}_Z}{\hat{I}} = R_I \frac{\hat{U}_Z}{\hat{U}_I} = R_I \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}_2}{\hat{U}_2}, \quad (6.49)$$

kde jsme přešli ke komplexní reprezentaci všech napětí. Moderní osciloskopy umožňují vyjádřit rozdíl signálů  $U_M = U_1 - U_2$  a změřit jak jeho amplitudu  $U_{M0}$  (tzv. špička-špička, v angl. peak-to-peak) tak fázi  $\varphi_{M \rightarrow 2} = \varphi_M - \varphi_2$  vůči kanálu  $U_2$ . Impedanci (6.49) pak vyjádříme pomocí experimentálně měřitelných veličin  $U_{M0}$ ,  $\varphi_{M \rightarrow 2}$  a amplitudy druhého kanálu  $U_{20}$  jako

$$\hat{Z} = R_I \frac{\hat{U}_M}{\hat{U}_2} = R_I \frac{U_{M0} e^{i\varphi_M}}{U_{20} e^{i\varphi_2}} = R_I \frac{U_{M0}}{U_{20}} e^{i\varphi_M - i\varphi_2} = R_I \frac{U_{M0}}{U_{20}} e^{i\varphi_{M \rightarrow 2}} \quad (6.50)$$

Amplituda impedance  $|\hat{Z}|$  resp. její fáze  $\varphi_Z$  je pak rovna

$$|\hat{Z}| = \frac{R_I U_{M0}}{U_{20}} \quad \text{resp.} \quad \varphi_Z = \varphi_{M \rightarrow 2}. \quad (6.51)$$

Pro amplitudu vodivosti  $|\hat{G}|$  resp. její fázi  $\varphi_G$  získáme z definice  $\hat{G} = 1/\hat{Z}$  vztahy

$$|\hat{G}| = \frac{U_{20}}{R_I U_{M0}} \quad \text{resp.} \quad \varphi_G = -\varphi_{M \rightarrow 2}. \quad (6.52)$$

Měření probíhá s pomocí digitálního osciloskopu Keysight DSOX2002A. Pro přesné změření hodnoty špička-špička a fáze je důležité, aby byly průběhy signálu na obrazovce dobře prokreslené, tzn., aby horizontální osa (čas) byla nastavena tak, aby na ní bylo několik málo (1–5) period, a vertikální osy (napětí) nastavené tak, aby signál byl v rozpětí asi 40–100 % rozsahu obrazovky. Toto je potřeba při změně frekvence typicky vždy znovu nastavit. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkazu [6].

Jako zdroj signálu se používá digitální funkční generátor Tektronix AFG2021. Má výstupní impedanci  $R_g = 50 \, \Omega$ , což si lze představit pomocí náhradního zapojení, kdy se k ideálnímu zdroji napětí do série přidá odpor  $50 \, \Omega$ . Tento odpor se do funkčních generátorů přidává, aby se minimalizovaly odrazy signálů od koaxiálního vedení, které má charakteristickou impedanci  $50 \, \Omega$  a je zakončeno zátěží  $50 \, \Omega$ . Vnitřní odpor funkčního generátoru se při měření přechodového jevu projeví jako efektivní navýšení odporu RLC obvodu o  $50 \, \Omega$ , který je tedy potřeba při interpretaci výsledků započíst. Při měření frekvenční závislosti vodivosti RLC obvodu se vnitřní odpor funkčního generátoru projeví jako pokles výstupního napětí v rezonanci – takto je možno velikost vnitřního odporu změřit. Jelikož je při výpočtu vodivosti proud dělený tímto výstupním napětím, vnitřní odpor se na výsledných hodnotách vodivosti neprojeví. Detailnější informace o přístroji jsou v jeho manuálu, který je možno najít na odkazu [7].

## Zpracování dat

### Frekvenční závislost vodivosti

Jak je zřejmé z obr. 6.3, rezonanční frekvenci je možno graficky určit z polohy maxima rezonanční křivky nebo i přesněji z frekvence, kde fáze prochází nulou. Hodnoty  $R$ ,  $L$ , a  $C$  lze získat z frekvenční závislosti vodivosti  $|\hat{G}(\omega)|$  pomocí její hodnoty v rezonanci, šířky rezonanční křivky a její rezonanční frekvence, viz diskuze pod vztahem (6.32).

Alternativně či doplňkově, lze všechny tyto hodnoty získat proložením teoretické závislosti (6.30) na  $|\hat{G}(f)|$ , viz program [4]. Tento ukázkový program je napsaný v jazyce Python a pro numerickou minimalizaci používá balíček LMfit. Zpracování dat proložením dává přesnější výsledky, protože se využijí všechny měřené body. Navíc získáme statistický odhad náhodných chyb výsledků a také můžeme testovat, nakolik frekvenční závislost dat odpovídá teoretické předpovědi.

## Přechodový jev

V případě podkritického tlumení je možné určit koeficient exponenciálního poklesu amplitudy  $\alpha$  náboje z časového průběhu napětí. Z rovnice (6.41) vidíme, že amplituda maxim nebo minim oscilací  $U_{C\max}(t)$  klesá exponenciálně jako  $U_{C5}e^{-\alpha t} + U_f$ . Odečtením  $U_f$  a logaritmováním získáme

$$\ln(U_{C\max}(t) - U_f) = \ln U_{C5} - \alpha t. \quad (6.53)$$

Tedy závislost přirozeného logaritmu rozdílu  $U_{C\max}(t) - U_f$  je lineární funkce času a její směrnice je  $-\alpha$ . Proložením lineární funkce několika body lze testovat, nakolik je pokles lineární, a určit konstantu  $\alpha$ . Souřadnice několika maxim (minim) můžeme určit buď s pomocí kurzoru osciloskopu nebo lze časový průběh uložit na USB disk a souřadnice oscilací určit na počítači (doporučováno). Z konstanty  $\alpha$  vypočtete se znalostí hodnoty  $L$  z předešlých měření odpor celého RLC obvodu  $R$  s pomocí vzorce (6.24). Tento odpor je dán součtem ekvivalentních sériových odporů všech součástek  $R_{\text{celek}}$  na frekvenci oscilací, viz (6.33). Tento odpor je však v případě přechodového jevu ještě navíc navýšen vnitřním odporem funkčního generátoru, který je  $R_g = 50 \Omega$ , viz diskuze v popisu experimentu. Srovnajte hodnoty  $R$  a  $R_{\text{celek}} + R_g$ . Tlumenou frekvenci oscilací  $\omega_d$  určíme jednoduše odečtením periody několika oscilací. Z obdržené hodnoty spočtete (netlumenou) frekvenci RLC obvodu  $\omega_0$  s pomocí vztahu (6.42) a srovnajte ji s hodnotou obdrženou z frekvenční závislosti vodivosti.

V případě nadkritického tlumení můžeme podobným způsobem určit exponenciální pokles napětí. Situace je zde komplikovanější, protože řešení (6.39) je v obecnosti součtem dvou exponenciál. Ale v režimu, kdy  $\alpha$  je velké (přibližně pro  $\alpha > 2\omega_0$ ) a tedy koeficienty (6.37) znatelně rozdílné, však pro dostatečně dlouhé časy zbude z řešení (6.39) pouze exponenciála s pomalejším útlumem  $\lambda_1$ . Analogicky k (6.53) pak získáváme rovnici  $\ln(U_C(t) - U_f) = \ln U_{C1} + \lambda_1 t$ , ze které určíme  $\lambda_1$ . Z hodnoty  $\lambda_1$  je možno vyjádřit na základě známých hodnot  $L$  a  $\omega_0$  hodnotu odporu  $R$  s pomocí rovnic (6.37) a (6.24) jako

$$R = -L \frac{\omega_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_1}. \quad (6.54)$$

V případě kritického tlumení není průběh napětí (6.44) přesně exponenciální a tudíž nelze jednoduše použít rovnici (6.53). Při zpracování protokolu se tedy spokojme s nalezením hodnoty odporu kritického tlumení  $R_k$  a srovnání s předpovědí této hodnoty s pomocí vztahů (6.43) a (6.24) na základě dříve změřených hodnot  $L$  a  $\omega_0$ .

Opět alternativně či doplňkově lze ve všech těchto případech časové průběhy zpracovat proložením teoretickými vztahy (6.39), (6.41) a (6.44) pomocí programu analogickému k ukázce [4].

## Úkoly pro měření a zpracování dat

1. Impedance odporu, cívky a kondenzátoru.
  - (a) Měření pomocí RLC metru Agilent U1733C na frekvenci 1 kHz.
    - i. Změřte velikost odporu dekády  $R_R$  ( $\leq 30 \Omega$ ), kapacitu kondenzátoru  $C$ , a indukci cívky  $L$ . Změřte také fázový úhel těchto součástek  $\varphi_R$ ,  $\varphi_C$  resp.  $\varphi_L$  a ekvivalentní sériový odpor kondenzátoru  $R_C$  a cívky  $R_L$ .
    - ii. V případě cívky změřte taktéž stejnosměrný odpor  $R_L^{\text{DC}}$  buď pomocí RLC metru v režimu stejnosměrného proudu (DCR), nebo pomocí stejnosměrného multimetru.
    - iii. Ze získaných hodnot  $C$  a  $L$  vypočítejte již v praxi teoretickou hodnotu rezonanční frekvence  $f_0$  sériového RLC obvodu, viz (6.26).
  - (b) Měření pomocí osciloskopu s využitím zapojení podle obr. 6.5(a). Velikost referenčního odporu  $R_I$  zvolte přibližně  $10 \Omega$ . Použijte harmonický tvar signálu v generátoru.
    - i. Změřte amplitudu impedance  $|\hat{Z}|$  a fázi impedance  $\varphi_Z$ , viz (6.51), odporu, kondenzátoru a cívky na několika frekvencích v rozmezí 100–3000 Hz (např. na 100, 300, 1000 a 3000 Hz a frekvenci  $f_0$ ).
    - ii. Pro jednotlivé frekvence do protokolu vypočítejte u odporu hodnotu  $R_R$ , viz (6.10), u kondenzátoru  $C$  a  $R_C$ , viz (6.15) a (6.16), a u cívky  $L$ , a  $R_L$ , viz (6.21) a (6.22).
2. Rezonance sériového RLC obvodu. Použijte zapojení s osciloskopem podle obr. 6.5(a) s harmonickým signálem ve funkčním generátoru. Velikost referenčního odporu  $R_I$  zvolte přibližně  $10 \Omega$  a velikost odporové dekády  $R_R \leq 30 \Omega$ .
  - (a) Změřte frekvenční závislost amplitudy vodivosti,  $|\hat{G}|$ , a fázi vodivosti,  $\varphi_G$ , viz (6.52). Měřte ve frekvenčním rozsahu v okolí rezonance, kde se fáze mění v rozsahu od  $-80^\circ$  do  $80^\circ$ , s krokem asi  $10^\circ$ , případně i na několika dalších frekvencích dále od rezonance.
  - (b) Z frekvenční závislosti amplitudy vodivosti určete do protokolu hodnoty  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega_0$ , a  $f_0$ , viz předchozí odstavec o zpracování dat. Srovnajte tyto hodnoty s výsledky obdrženy z předchozí části a s hodnotou  $R_{\text{celek}}$  (6.33). Z těchto hodnot vypočítejte také hodnoty  $\alpha$ , viz (6.24),  $F$ , viz (6.29), a  $Q$ , viz (6.48).
  - (c) Vykreslete teoretickou frekvenční závislost  $|\hat{G}|$ , viz (6.31), a  $\varphi_G$ , viz (6.32), pro obdržené hodnoty  $R$ ,  $L$  a  $C$  a srovnajte je s naměřenými daty.
3. Přechodový jev (vlastní kmity) napětí na kondenzátoru v RLC obvodu. Použijte zapojení podle obr. 6.5(b) a obdélníkové pulzy funkčního generátoru s nízkou frekvencí asi 30 Hz.
  - (a) Změřte přechodový jev pro stejnou hodnotu odporu dekády  $R_R$  jako v předchozí části (podkritické tlumení) a uložte data na flash disk.  
Do protokolu určete hodnoty  $\omega_d$ , tlumící konstantu  $\alpha$  a jí odpovídající odpor celého RLC obvodu  $R$ . Srovnajte ji s hodnotou  $R_{\text{celek}}$  (6.33) +  $R_g$ , viz diskuze v části zpracování dat. Určete  $\omega_0$ , viz (6.42), a  $f_0$ . Výsledky srovnajte s hodnotami obdrženy pomocí frekvenční závislosti vodivosti.
  - (b) Naleznete hodnotu odporu dekády  $R_R$  odpovídající kritickému útlumu a změřte přechodový jev. Srovnajte hodnotu  $R_{\text{celek}}$  (6.33) +  $R_g$  s předpovědí odporu kritického tlumení  $R_k$  na základě  $L$  a  $\omega_0$  s pomocí vztahů (6.43) a (6.24).
  - (c) Změřte přechodový jev pro jednu hodnotu odporu dekády  $R_R$  v oblasti nadkritického tlumení odpovídající  $R_R > 2R_c$ . Určete faktor exponenciálního poklesu  $\lambda_1$ , viz (6.37), viz diskuze v části zpracování dat. Z hodnoty  $\lambda_1$  vypočítejte s pomocí rovnice (6.54) hodnotu odporu  $R$  a srovnajte ji s hodnotou  $R_{\text{celek}} + R_g$ .

**Literatura:**

- [1] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmanove přednášky z fyziky I*, Alfa, 1980, kapitola 23.
- [2] J. Koutný a I. Vlk: *Elektronika I, učebnice*, Vyšší odborná škola a Střední průmyslová škola elektrotechnická, Olomouc 2009.
- [3] J. Matáátko: *Elektronika*, Praha: IDEA SERVIS, 2008.
- [4] Příklad proložení (tzv. fitování) dat teoretickou formulí v jazyku Python 3 je možno stáhnout z depozitáře 06\_RLC\_FitovaciPříkladPython3p8.zip.
- [5] Manuál k RLC metru Agilent U1731 je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.
- [6] Manuál k osciloskopu Keysight DSOX2002A je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.
- [7] Manuál k funkčnímu generátoru Tektronix AFG2021 je možno stáhnout z aktuální interaktivní osnovy v ISu MUNI.