Ústav fyzikální elektroniky PřF MU

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Artem Gorodilov
Obor: Astrofyzika **Skupina:** Pá 10:00
Naměřeno: 10. března 2023
Testováno: uznano

Úloha č. **4:** **Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení**

$T = 20,8$ °C
$p = 989$ hPa
$\varphi = 32,5$ %

1. Zadání

Změřit gravitační zrychlení metodou inverzního kyvadla a gravitační konstantu Cavendishovou metodou.

2. Teorie

2.1. Reverzní kyvadlo (zrychlení volného pádu)

Reverzní kyvadlo je zařízení, které je kyvadlem s těžištěm nad opěrným bodem, připevněným ke konci tuhé tyče.

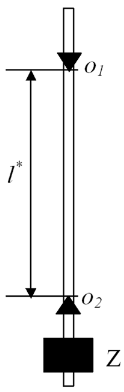
Byla změřena perioda kyvadla vzhledem ke dvěma osám. Je třeba změřit polohu závaží, při které je perioda kyvadla na obou osách stejná.

Pak je třeba najít vzdálenost mezi osami kyvadla. K tomuto účelu bylo použito metrové pravítko.

Pak lze pomocí vzorce (1) určit tíhové zrychlení v tomto bodě pokusu.

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{1}$$

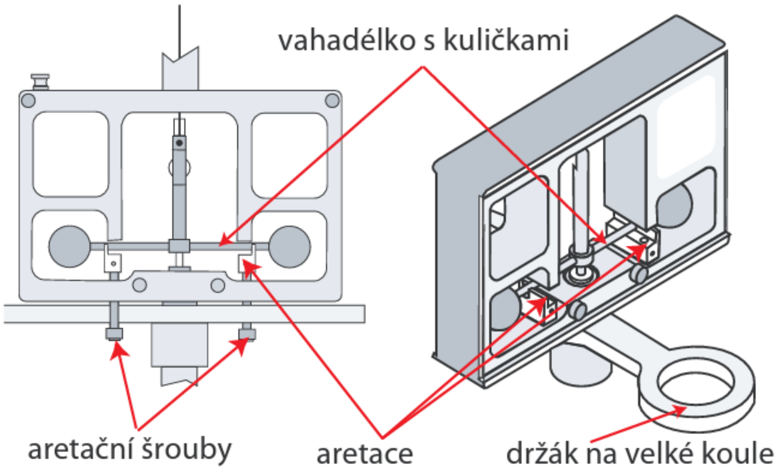
kde T je perioda kyvadla, l je vzdálenost mezi osami a g je tíhové zrychlení.



Obrázek 1: Reverzní kyvadlo. Symboly x_1, x_2 označují vzdálenosti os O_1, O_2 od těžiště T.

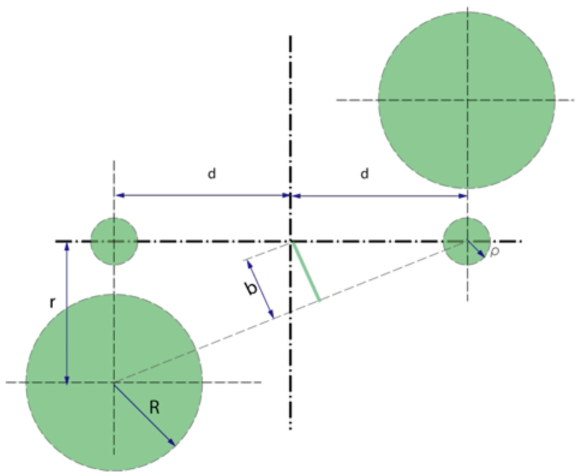
2.2. Cavendishova metoda (gravitační konstanta)

Podstatou Cavendishovy metody je měření momentu hybnosti při gravitační interakci mezi dvěma koulemi o malé hmotnosti a dvěma hmotnými koulemi. Malé kuličky jsou upevněny na ose, která přenáší moment na závit, k němuž je připevněno zrcadlo, které odráží laser na stěnu, což umožňuje určit periodu změny polohy kuliček. Pevné koule mohou být ve dvou polohách, a proto se jejich rovnovážné polohy mohou měnit. Tyto údaje lze použít k měření gravitační konstanty.



Obrázek 2: Cavendishovy torzní váhy

Stream z IP kamery bude zpracován přehrávačem VLC Player. Software bude v pravidelných intervalech pořizovat snímky obrazovky s polohou laseru na stěně. Poté bude série snímků analyzována programem Cavendish. Z nich bude vynesen graf, který bude zobrazovat pohyb laseru podél vodorovné osy v závislosti na poloze pevných koulí.



Obrázek 3: K určení momentu gravitačních sil

Pomocí vzorce můžete vypočítat, jak se koule s malou hmotností otáčí pod vlivem koulí s velkou hmotností:

$$J = 2m(\frac{2}{5}p^2 + d^2) \tag{2}$$

kde J je moment setrvačnosti, m je hmotnost koulí o malé hmotnosti, p je poloměr koulí o malé hmotnosti a d je polovina vzdálenosti mezi středy koulí o malé hmotnosti.

Direkční moment se pak vypočítá podle vzorce:

$$D = (\frac{2\pi}{T})^2 J \tag{3}$$

kde T je perioda, kterou lze vypočítat z grafu vytvořeného pomocí Cavendish.

Pak vypočteme moment gravitačních sil:

$$M_{grav} = \varphi D \tag{4}$$

kde φ je úhel mezi rovnovážnými polohami, který lze vypočítat trigonometricky pomocí softwaru IrfanView.

Pro výpočet gravitační konstanty použijeme vzorec:

$$G = \frac{M_{grav}}{2(Mm)d(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2+r^2)^{\frac{3}{2}}})} \tag{5}$$

kde M je hmotnost masivních koulí a m je hmotnost koulí s malou hmotností.

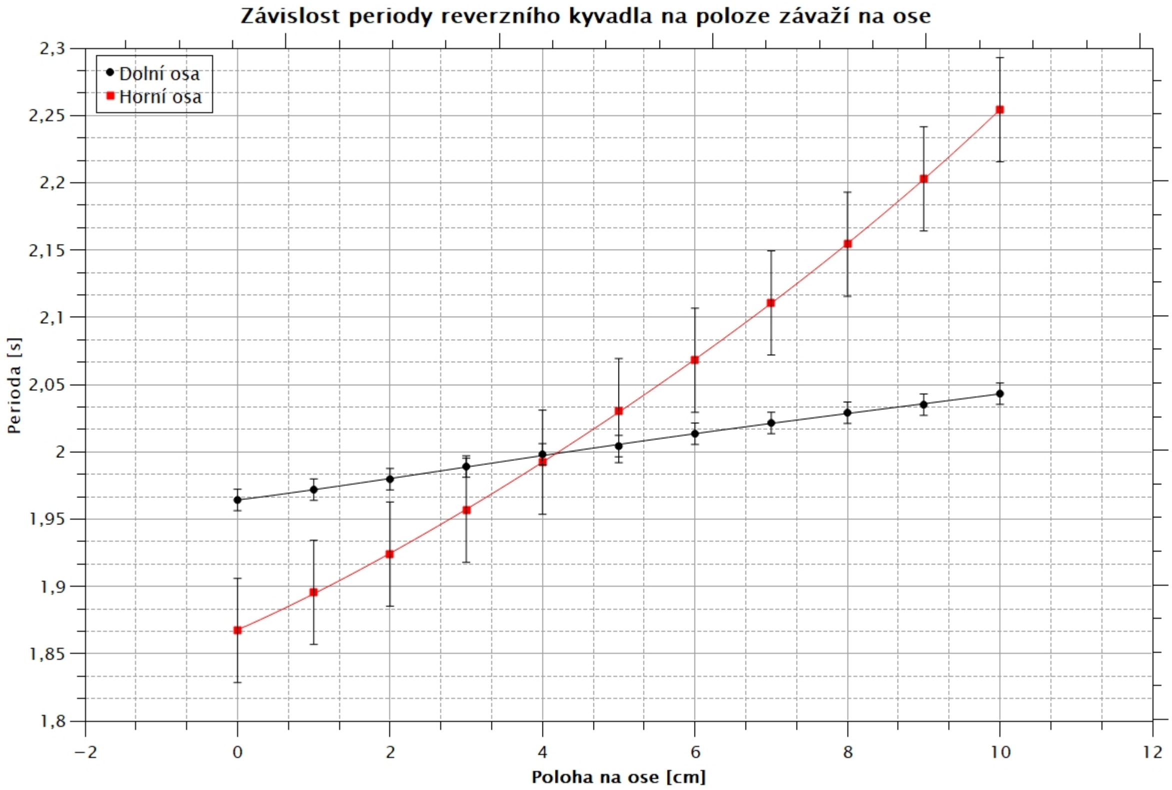
3. Měření

3.1. Reverzní kyvadlo (zrychlení volného pádu)

Po posunutí závaží podél os v krocích po 1 cm byly získány následující hodnoty periody:

Poloha na ose [cm]	Dolní osa [s]	Horní osa [s]
0	1.96418	1.86718
1	1.97184	1.89552
2	1.97962	1.92396
3	1.98902	1.95648
4	1.99808	1.99222
5	2.00420	2.03060
6	2.01340	2.06800
7	2.02140	2.11060
8	2.02900	2.15420
9	2.03500	2.20280
10	2.04320	2.25420

Graf se standardní chybou je následující:



Obrázek 4: Závislost periody reverzního kyvadla na poloze závaží na ose

Nejistota hodnot periody pro horní osu je větší, protože při kývání kyvadla bylo těžiště nahoře, což usnadňuje předání počáteční hybnosti kyvadlu při jeho uvolnění.

Z grafu je patrné, že když je závaží umístěno 4 cm na ose, perioda kyvadla je

$$T = 1.99808 \; [s]$$

Po výpočtu nejistot z grafu se získá výsledek:

$$T = 1.998 \; [s], \; u_C(g) = 0.008 \; [s]$$

Vzdálenost mezi osami:

0.03

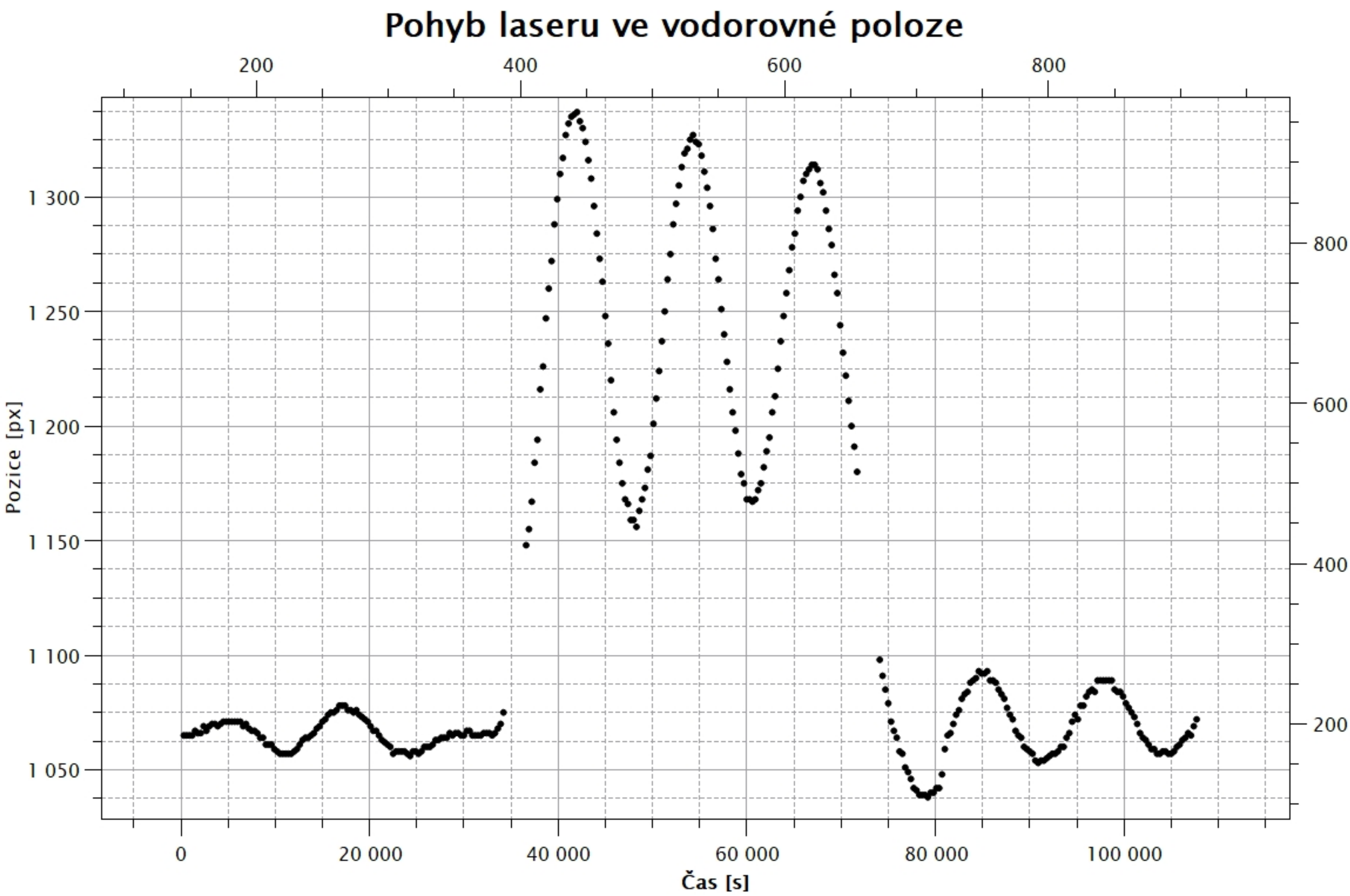
$$l = (99{,}0 \pm 0.3) \; [cm] \; p = 99.73\%$$

Po výpočtu nejistot podle pravidel pro výpočet nejistot se získá výsledek:

$$g = 9.79 \; [\tfrac{m}{s^2}], \; u_C(g) = 0.08 \; [\tfrac{m}{s^2}]$$

3.2. Cavendishova metoda (gravitační konstanta)

Po zpracování výsledků vznikne následující graf:



Obrázek 5: Pohyb laseru ve vodorovné poloze

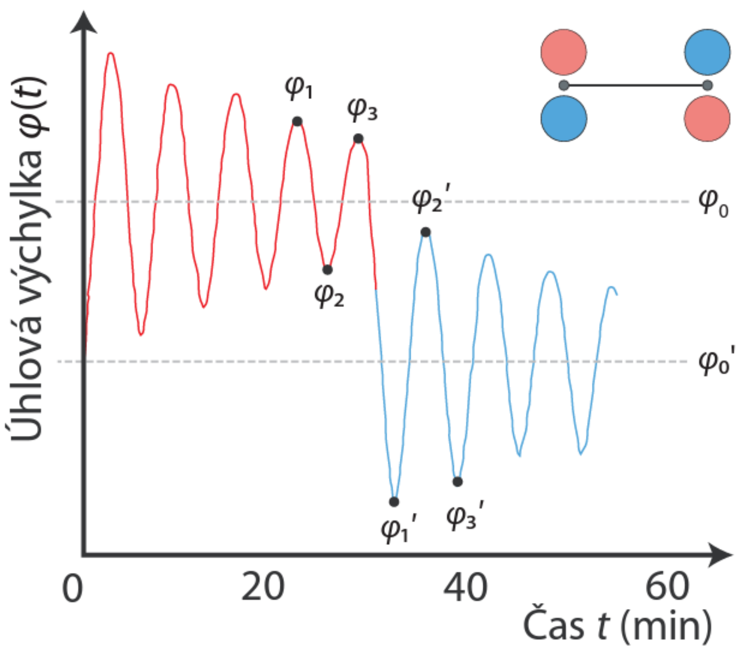
Parametry Cavendishova experimentálního přístroje:

M $[kg]$	1.5
m $[g]$	38.3
p $[mm]$	8.19
d $[mm]$	50
r $[mm]$	46.5

Vypočítáme moment setrvačnosti koulí podle vzorce (2):
Moment setrvačnosti se tedy rovná:

$$J = 1.94\text{E-}4\ kg \times m^2$$

Rovnovážnou polohu je třeba určit z grafu. To lze provést metodou tří kyvů:



Obrázek 6: Ke stanovení rovnovážné polohy metodou tří kyvů. $\varphi_0 = [(\varphi_1 + \varphi_3)/2 + \varphi_2]/2, \varphi'_0 = [(\varphi'_1 + \varphi'_3)/2 + \varphi'_2]/2$

Výsledky jsou následující:

$$\varphi_0 = 1245 \text{ px},\ \varphi'_0 = 1068 \text{ px},\ \Delta\varphi = 177 \text{ px}$$

Pro převod pixelů na metry použijte Pythogorovu větu. Najděte krajní body pravítka na stěně v pixelech, najděte vektor mezi nimi a jeho hodnotu.

$$a = (806, 175)px, b = (1417, 212)px, \overrightarrow{ab} = (611, 37)px, ab = 612.1px$$

Z těchto výsledků zjistíme hodnotu $\Delta\varphi$ v mm:

$$\Delta\varphi = \frac{177px}{612.1px} 0.5m = 144.6mm\ ,\ u_C(\Delta\varphi) = 0.9\ mm$$

Při znalosti vzdálenosti laseru od stěny $L = (5280 \pm 3)\ mm$ lze určit úhel mezi oběma rovnovážnými polohami.

$$\varphi = \frac{144.6mm}{5280mm} = 27.38\ \times 10^{-3}\ rad,\ u_C(\varphi) = 0.2\ \times 10^{-3}\ rad$$
$$\frac{\varphi}{4} = 6.85\ \times 10^{-3}\ rad,\ u_C(\tfrac{\varphi}{4}) = 0.04\ \times 10^{-3}\ rad$$

Nyní je třeba vypočítat direkční moment podle vzorce (3).

K tomu budeme potřebovat periodu kmitání T, kterou můžeme vypočítat tak, že z několika měření periody v grafu odečteme průměrnou hodnotu.

Výsledná hodnota periody se rovná:

$$T = 475\ s,\ u_C(T) = 2\ s$$

Z toho vyplývá, že direkční moment bude roven:

$$D = 3.387\text{E-8}\ \frac{kg \times m^2}{s},\ u_C(D) = 0.03\text{E-8}\ \frac{kg \times m^2}{s}$$

Odtud lze vypočítat hybnost gravitačních sil podle vzorce (4):

$$M_{grav} = 2.318\ \times 10^{-10}\ [N \times m],\ u_C(M) = 0.02\ \times 10^{-10}\ [N \times m]$$

Nyní máme vše, co potřebujeme k výpočtu hodnoty gravitační konstanty podle vzorce (5):

$$G = 9.43\ \times 10^{-11}\ [\frac{m^3}{kg \times s^2}],\ u_C(G) = 0.1\ \times 10^{-11}\ [\frac{m^3}{kg \times s^2}]$$

K výpočtu chyb byl použit následující kód:

```
import pandas as pd
import numpy as np
import uncertainties as u
from uncertainties import ufloat
from uncertainties.umath import *
from uncertainties import unumpy

T_1 = ufloat(1.998, 0.008)
l_1 = ufloat(99.0, 0.3)

g_1 = (4 * (np.pi)**2 * l_1) / T_1**2
print(g_1)

M_2 = ufloat(1.5, 0)
m_2 = ufloat(38.3, 0)
p_2 = ufloat(8.19, 0)
d_2 = ufloat(50, 0)
r_2 = ufloat(46.5, 0)

m_2 = m_2 * 10**(-3)
p_2 = p_2 * 10**(-3)
d_2 = d_2 * 10**(-3)
r_2 = r_2 * 10**(-3)

J_2 = 2*m_2*((2/5)*(p_2**2) + (d_2**2))
print(J_2)

T_2 = ufloat(475, 2)

D_2 = ((2 * np.pi)/T_2)**2 * J_2
print(D_2)

L_2 = ufloat(5280, 3)
df = ufloat(177, 1)
ab = ufloat(612.1, 1)
df_2 = (df / ab) * 0.5
f_2 = (df_2 * 10**3) / L_2
print(f_2)
f_2_final = f_2 / 4
print(f_2_final)

M_2_gr = f_2_final * D_2
print(M_2_gr)

G_2 = M_2_gr / (2*(M_2*m_2)*d_2*((1/(r_2**2))-(r_2/((4*(d_2**2)+(r_2**2))**(3/2)))))
print(G_2)
```

4. Závěr

Výsledná hodnota zrychlení volného pádu $g = 9.79\ [\frac{m}{s^2}]$ se poměrně dobře shoduje s brněnskou hodnotou zrychlení volného pádu $g = 9.809980\ [\frac{m}{s^2}]$.

Chyba může být způsobena chybou v měření vzdálenosti mezi osami kyvadla a také přídavnou silou kolmou na směr kývání kyvadla při jeho spuštění v experimentu.

Výsledná hodnota gravitační konstanty $G = 9.43\ \times 10^{-11}\ [\frac{m^3}{kg \times s^2}]$ se výrazně liší (pro přesné výpočty) od tabulkové hodnoty $G = 6.67\ \times 10^{-11}\ [\frac{m^3}{kg \times s^2}]$.

Chyba může být způsobena nedostatečnou přesností měření rovnovážných bodů i periody kývání.