

## Fyzikální praktikum 2

### 4. Brownův pohyb a pohyblivost částic

#### Úkoly k měření

##### Brownův pohyb

- Brownův pohyb.

##### Pohyblivost volných elektronů v kovu

- Teplotní závislost pohyblivosti volných elektronů v kovu.

#### Brownův pohyb

##### Teorie

Jsou-li v kapalině rozptýleny malé částice, pak se tyto částice sráží s okolními molekulami kapaliny. Jsou-li rozměry uvažovaných částic dostatečně malé (řádově stovky nm), nemusí být v každém okamžiku kompenzovány impulzy sil, kterými molekuly kapaliny působí na tyto částice. Vlivem takto nevykompenzovaných impulzů se částice pohybuje, přičemž se v delším časovém intervalu směr pohybu náhodně mění. Tento druh pohybu se nazývá Brownův pohyb. Pohybující se částice předává při pohybu energii okolním molekulám a protože je mnohem větší než molekuly kapaliny, je možné její pohyb v kapalině popsat Stokesovým zákonem. Brownův pohyb byl prvním fyzikálním dějem, v němž se projevila existence molekul a měl tedy velký význam při experimentálním ověření molekulární kinetické teorie hmoty. Neuspořádaný pohyb brownovské částice se řídí Einsteinovým zákonem: sledujeme-li polohy částice v definovaných časových okamžicích, pak střední kvadratické posunutí částice je úměrné zvoleným časovým intervalům. Ukážeme nyní odvození tohoto zákona a experimentální postup při jeho ověření.

V dalším nebudeme přímo pracovat s vektory přemístění částice, ale budeme uvažovat průměty těchto vektorů do libovolného pevného směru. Pohybová rovnice má tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad (4.1)$$

kde  $m$  je hmotnost částice,  $F_1$  je výsledná (nevykompenzovaná) síla způsobená srážkami s molekulami kapaliny a  $F_2$  je síla způsobená odporem prostředí (okolními molekulami). Pak platí

$$F_2 = -k \frac{dx}{dt}. \quad (4.2)$$

Podle Stokesova zákona [3] je pro kulovou částici

$$k = 6\pi\eta r, \quad (4.3)$$

kde  $\eta$  je viskozita kapaliny,  $r$  je poloměr částice a  $\frac{dx}{dt}$  je rychlost částice. Pak lze (4.1) psát ve tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1 - k \frac{dx}{dt}. \quad (4.4)$$

Vynásobením rovnice (4.4) veličinou  $x$  dostaneme:

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = F_1x - kx \frac{dx}{dt}. \quad (4.5)$$

Jednoduše lze ukázat, že

$$x \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4.6)$$

$$x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2). \quad (4.7)$$

Pak dosazením (4.6) a (4.7) do vztahu (4.5) dostaneme

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x^2) - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = F_1x - \frac{1}{2}k \frac{d}{dt} (x^2). \quad (4.8)$$

Zajímáme se ovšem pouze o střední hodnoty uvedených veličin, které je možné pozorovat v časovém intervalu  $t$ . Protože je pohyb částice chaotický, pak střední hodnota součinu  $F_1x = 0$ . Označme dále

$$\frac{d}{dt} (\langle x^2 \rangle) = h \quad (4.9)$$

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle. \quad (4.10)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice (4.10) je dvojnásobek střední hodnoty kinetické energie částice. Aplikujeme-li na pohyb brownovské částice teorii ideálních plynů a zajímáme-li se o složku rychlosti částice pouze ve směru jedné osy (osy  $x$ , jeden ze tří směrů), dostaneme pak

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3RT}{2N_A}, \quad m \left\langle \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{RT}{N_A}, \quad (4.11)$$

kde  $N_A$  je Avogadrovo číslo,  $T$  absolutní teplota kapaliny a  $R$  univerzální plynová konstanta. Dosazením (4.11) do vztahu (4.10) dostaneme

$$-\frac{kh}{2} = \frac{m}{2} \frac{dh}{dt} - \frac{RT}{N_A}, \quad (4.12)$$

a tedy

$$\frac{dh}{h - \frac{2RT}{N_A k}} = -\frac{k}{m} dt. \quad (4.13)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\ln \left( h - \frac{2RT}{N_A k} \right) - \ln C = -\frac{k}{m} t, \quad (4.14)$$

neboli po úpravě

$$h - \frac{2RT}{N_A k} = C e^{-\frac{k}{m} t}, \quad (4.15)$$

kde  $C$  je integrační konstanta. Je-li časový interval  $t$  měření dosti velký, můžeme v poslední rovnici zanedbat člen  $e^{-\frac{k}{m} t} \rightarrow 0$  na pravé straně a dostáváme

$$h = \frac{2RT}{N_A k}. \quad (4.16)$$

Jestliže se vrátíme k původnímu významu parametrů  $h$  a  $k$  dostaneme

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A}. \quad (4.17)$$

Rovnici (4.17) integrujeme za předpokladu počátečních podmínek  $x = 0$ ,  $t = 0$  a dostaneme

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2RT}{6\pi\eta r N_A} t, \quad (4.18)$$

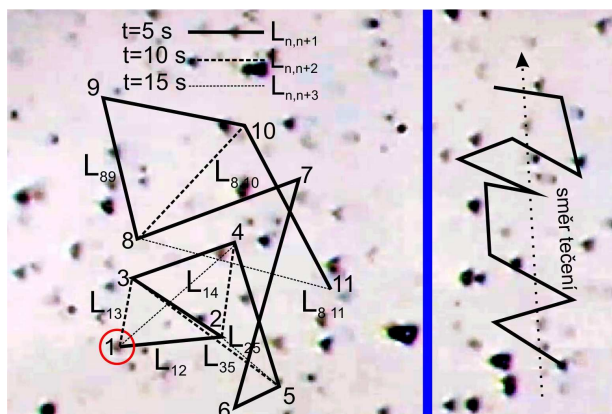
což je Einsteinův výraz pro střední kvadratické posunutí brownovské částice.

## Postup měření

Pozorování popsaného jevu se zpravidla provádí na mikroskopu se značným zvětšením, jehož obraz je možné zobrazit na velkou projekční plochu. Preparát (suspenze částic ve vodě na podložním sklíčku) je umístěn na stolečku mikroskopu a na zobrazovací plochu mikroskopu je umístěna průhledná folie, na níž zaznamenáváme v pravidelných časových intervalech polohy vybrané, stále stejné, částice. Po delší době dostaneme na folii síť vzájemně propojených bodů odpovídajících chaotickému pohybu částice. Pro další zpracování měření je nezbytné znát zvětšení mikroskopu v daném uspořádání. V tomto případě se na stoleček mikroskopu místo preparátu umístí mřížka, přičemž vzdálenosti jednotlivých vrypů jsou předem známy. Čas mezi jednotlivými polohami částice stanovujeme pomocí mechanického nebo elektronického metronomu obvykle po 5 s základního intervalu (12 bpm) (*angl.* beats per minute). Můžeme k tomu využít i například aplikaci v chytrém telefonu.

## Zpracování výsledků měření

Úkolem a smyslem měření je ověření platnosti Einsteinova vztahu (4.18). Je nutné si uvědomit, že vzdálenost mezi dvěma body na záznamové folii mikroskopu je zvětšené zobrazení projekce vektoru přemístění částice (za daný časový interval například 5 s) do roviny, na níž byl mikroskop zaostřen. K ověření vztahu (4.18) je nutno zjistit střední hodnotu čtverců projekcí vektorů přemístění do roviny nebo přímky. Jestliže se během měření neprojevovalo tečení preparátu jedním směrem, jsou vzdálenosti mezi jednotlivými body přímo průměty do roviny. Jestliže jsme naopak pozorovali tečení preparátu, musíme provést promítnutí všech vzdáleností do směru kolmého na směr tečení.



Obrázek 4.1: Příklad záznamu chaotického pohybu brownovské částice na průsvitném papíře přiloženém přes obraz z mikroskopu, v případě bez tečení preparátu (vlevo) a při tečení (vpravo). V záznamu pohybu částice vlevo jsou zaneseny trajektorie částice složené z vektorů posunutí při záznamu po časových intervalech  $t = 5$  s (plná čára),  $10$  s (přerušovaná čára) a  $15$  s (tečkovaná čára).

Označme dále vzdálenosti zaznamenaných poloh s pořadovými čísly  $i$  a  $j$  jako  $L_{i,j}$ . Střední kvadratické posunutí po požadovaném časovém intervalu  $t$  získáme vypočtením aritmetického průměru čtverců naměřených vzdáleností  $L_{i,i+\delta}$ . Postup odečítání vzdáleností mezi zaznamenanými polohami částice v obrazu z mikroskopu je ukázán na obr. 4.1 a výpočetní schéma pro stanovení střední hodnoty čtverců vzdáleností je uvedeno v tabulce 4.1.

Potom platí podle tabulky 4.1:

$$\langle L_5^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{10} L_{i,i+1}^2}{10}, \quad \langle L_{10}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^9 L_{i,i+2}^2}{9}, \quad \langle L_{15}^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^8 L_{i,i+3}^2}{8}. \quad (4.19)$$

Tabulka 4.1: Čtverce vzdáleností pro částici, která byla naměřena v 11 polohách po sobě jdoucích.

po 5 s	po 10 s	po 15 s
$L_{1,2}^2$	$L_{1,3}^2$	$L_{1,4}^2$
$L_{2,3}^2$	$L_{2,4}^2$	$L_{2,5}^2$
$L_{3,4}^2$	$L_{3,5}^2$	$L_{3,6}^2$
$L_{4,5}^2$	$L_{4,6}^2$	$L_{4,7}^2$
$L_{5,6}^2$	$L_{5,7}^2$	$L_{5,8}^2$
$L_{6,7}^2$	$L_{6,8}^2$	$L_{6,9}^2$
$L_{7,8}^2$	$L_{7,9}^2$	$L_{7,10}^2$
$L_{8,9}^2$	$L_{8,10}^2$	$L_{8,11}^2$
$L_{9,10}^2$	$L_{9,11}^2$	
$L_{10,11}^2$		

Je-li Einsteinův zákon pro studovaný chaotický pohyb splněn, musí podle (4.18) pro poměry středních kvadratických posunutí platit:

$$\langle L_5^2 \rangle : \langle L_{10}^2 \rangle : \langle L_{15}^2 \rangle = 1 : 2 : 3. \quad (4.20)$$

Poznámka: Je zřejmé, že pro ověření platnosti vztahu (4.18) je nutné odhadnout chybu středního kvadratického posunutí a také chybu v určení časových intervalů. Dále je nutné si uvědomit, že Einsteinův vztah má charakter statistické zákonitosti a k jeho ověření je třeba provést měření na velkém souboru částic, jinak jsou nejistoty určených poměrů poměrně velké.

Odpovídá-li shoda naměřených středních hodnot kvadrátu posunutí v rámci chyby měření vztahu (4.20), lze rovnici (4.18) dále užít alespoň k odhadu velikosti částice. Ve vztahu (4.18) je  $\langle x^2 \rangle$  střední hodnota kvadrátu projekce vektorů přemístění do určitého směru (v našem případě jsme brali směr osy  $x$ ) a nikoliv do roviny. Jestliže však na záznamové folii měříme přímo vzdálenosti  $L$ , viz obr. 4.1(vlevo), je nutné použít vztah

$$\langle L^2 \rangle = 2\langle x^2 \rangle, \quad (4.21)$$

který plyne ze stejné pravděpodobnosti zastoupení všech směrů v rovině. Jestliže se projevovало tečení suspenze preparátu a byli jsme nuceni provádět před vlastním odečítáním vzdáleností promítání do přímky kolmé na směr tečení, viz obr. 4.1(vpravo), pak použijeme přímo

$$\langle L^2 \rangle = \langle x^2 \rangle. \quad (4.22)$$

Poznámka: Při stanovení velikosti poloměru  $r$  sledované částice ze vztahu (4.18) musíme znát skutečnou hodnotu veličiny  $\langle x^2 \rangle$ , kterou určíme ze záznamové folie pomocí známého zvětšení mikroskopu, stanoveného za pomoci měřítka. Teplotu kapaliny  $T$  ve vztahu (4.18) musíme odhadnout, zpravidla není rovna laboratorní teplotě, protože preparát se obvykle zahřívá vlivem osvětlovacího zdroje.

## Úkoly

1. Zaznamenejte pohyb alespoň pěti částic na průsvitný papír v intervalech po 5 s. Jednotlivé po sobě jdoucí polohy vzájemně spojujte lomenou čarou, podobně jako na obr. 4.1 (vlevo).
2. Na stejný průsvitný papír na obrazovce připojené k mikroskopu zaznamenejte také pomocí mřížky v Bürkerově komůrce rozteč čar o velikosti  $50 \mu\text{m}$ . Z poměru velikosti obrazu a předmětu určete zvětšení mikroskopu.

3. Na průsvitném papíře pak proměřte vzdálenosti jednotlivých poloh a seřaďte do tabulky včetně kvadrátů příslušných vzdáleností, viz tab. 4.1. Zároveň zohledněte případné tečení preparátu.
4. Ověřte platnost vztahu (4.20), včetně nejistot poměrů a určete velikost poloměru částice.

## Pohyblivost volných elektronů v kovu

### Teorie

Vodivost kovu je dána pohybem volných nositelů náboje. V případě kovových látek jsou volné nositele náboje výhradně jednoho typu a jde o volné elektrony. Hustotu proudu elektronů  $j$  protékajícího ve vodiči vyjádříme vztahem

$$j = ne_0v_d, \quad (4.23)$$

kde  $v_d$  je driftová rychlost elektronů v kovu,  $e_0$  je elementární náboj a  $n$  je koncentrace volných elektronů podílejících se na proudu. Zavedeme-li pro pohyblivost elektronů  $\mu$  výraz

$$\mu = \frac{v_d}{E} \quad (4.24)$$

s intenzitou elektrického pole  $E$ , dostaneme Ohmův zákon ve tvaru

$$j = ne_0\mu E = \sigma E = \frac{1}{\varrho} E, \quad (4.25)$$

kde  $\sigma$  je měrná vodivost a  $\varrho$  měrný odpor kovu. Ze vztahu (4.25) tedy vyplývá

$$\sigma = ne_0\mu. \quad (4.26)$$

Závislost pohyblivosti elektronů na teplotě můžeme tedy stanovit v případě, určíme-li pro danou teplotu měrnou vodivost kovu nebo měrný odpor. Teplotní závislost měrného odporu  $\varrho$  se obvykle pro malé odchylky teploty (řádově jednotky až desítky °C)  $\Delta T$  vzhledem k referenční teplotě aproximuje lineárním vztahem

$$\varrho = \varrho_0(1 + \alpha\Delta T), \quad (4.27)$$

kde  $\alpha$  se nazývá teplotní součinitel odporu a  $\varrho_0$  je měrný odpor při referenční teplotě.

Vzhledem k tomu, že pro odpor  $R$  drátu o délce  $L$  a plošném průřezu  $S$  platí

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}, \quad (4.28)$$

můžeme stanovit pohyblivost nositelů náboje ze vztahu

$$\mu = \frac{\sigma}{e_0n} = \frac{L}{e_0nRS} \quad (4.29)$$

pomocí znalosti rozměrů vodiče a jeho elektrického odporu.

Pohyblivost volných elektronů se dá též vyjádřit pomocí relaxační doby  $\tau$ , která se dá interpretovat jako střední doba mezi srážkami elektronu s nečistotami v kovu či rozptylovými procesy na jádrech atomu kovu delokalizovaných díky tepelným kmitům. Za dobu  $\tau$  mezi rozptylovými procesy se zvětší rychlost elektronu ve směru elektrického pole díky působící síle pole  $e_0E$  o rychlost  $\Delta v = \frac{e_0E}{m}\tau$ , kde  $m$  je hmotnost elektronu. Po rozptylu elektronu se elektron pohybuje náhodným směrem s náhodnou rychlostí. Díky náhodnosti výsledku rozptylových procesů je střední rychlost,

se kterou se elektron pohybuje, právě střední rychlostí získané díky urychlení elektrickým polem. Mluvíme pak o driftové rychlosti  $v_d = \frac{e_0 \tau}{m} E = \mu E$ . Tudíž platí

$$\mu = \frac{e_0 \tau}{m}, \quad \sigma = \frac{ne_0^2 \tau}{m}. \quad (4.30)$$

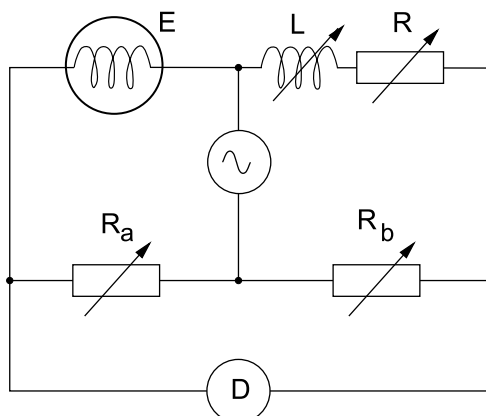
Koncentraci volných elektronů lze spočítat pro daný materiál ze známé hmotnostní hustoty  $\rho$  a počtu volných elektronů  $z$  připadajících na jeden atom

$$n = z \frac{\rho}{A m_u}, \quad (4.31)$$

kde  $A$  je atomové hmotnostní číslo daného prvku a  $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg je atomová hmotnostní jednotka. Koncentrace volných elektronů a hustoty některých běžných kovů jsou uvedeny v tabulce 4.2.

Tabulka 4.2: Hustoty, hmotnostní čísla, počet volných elektronů na jeden atom a koncentrace volných elektronů vybraných kovů [5].

Materiál	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$A$	$z$	$n$ (10 <sup>28</sup> m <sup>-3</sup> )
Cu	8960	63,55	1	8,5
Al	2700	26,98	3	18,1
Ag	10500	107,87	1	5,9



Obrázek 4.2: Střídavý most pro měření vodivosti. E – měřený vzorek, D – detektor (osciloskop), L – proměnná indukčnost.

## Postup měření

Přesné měření odporu vodiče se obvykle provádí pomocí stejnosměrného nebo střídavého mostu (viz úloha č. 3) v zapojení podle obr. 4.2. Cílem je nastavit proměnné prvky obvodu mostu  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R$  a  $L$  tak, aby větví s detektorem D neprocházel žádný proud. Pro vyrovnání střídavého mostu, tj. splnění amplitudové i fázové podmínky je také nutné eliminovat případnou parazitní indukčnost  $L$  nebo kapacitu. V okamžiku rovnováhy pak platí

$$R_x = \frac{R_a}{R_b} R. \quad (4.32)$$

V praxi se měří odpor můstku pomocí automatického RLCG mostu, tedy most automaticky vyvažuje hodnoty odporu a indukčnosti, příp. kapacity, měřené součástky a ukazuje hodnoty veličin

na displeji. Patříčným spínačem je pak potřeba mít most sepnutý v režimu kompenzace indukčnosti  $L$ . V opačném případě kapacitní součástky by displej ukazoval záporné hodnoty indukčnosti.

Vzorek v praktiku je ve formě měděného drátu navinutého na cylindrické jádro. Drát připojíme na automatický RLCG most a pro měření tepelné závislosti odporu drátu ponoříme vzorek do kádinky naplněné studenou vodou. Kádinku s cívkou ve vodě zahříváme na plotýnce do teploty okolo  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Frekvence používaného automatického RLCG mostu v praktiku je  $f = 1\text{ kHz}$ .

## Úkoly

1. Změřte odpor měděného drátu za pokojové teploty.
2. Potom ponořte do kapaliny cívkou s měděným drátem, umístěte na plotýnku vařiče a měřte teplotní závislost jeho odporu při zahřívání kapaliny.
3. Ze známých rozměrů drátu (délka použitého drátu je  $29\text{ m}$  a jeho průměr je  $0,112\text{ mm}$ ) vypočítejte teplotní závislost měrného odporu, měrné vodivosti a pohyblivosti volných elektronů v mědi a porovnejte s teoretickou závislostí vycházející z tabelovaných hodnot. Závislosti veličin vycházející z naměřených a tabelovaných hodnot též vykreslete do grafů.
4. Stanovte teplotní součinitel odporu mědi v okolí pokojové teploty včetně nejistoty měření a porovnejte s tabelovanými hodnotami.
5. Na základě naměřených hodnot vypočítejte a vykreslete do grafu teplotní závislost střední doby mezi srážkami pro měď a porovnejte se závislostí určenou na základě tabelovaných hodnot.

## Literatura:

- [1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady* 2/3, Fragment (2006).
- [2] A. Einstein, *Annalen der Physik* **324**, 371 (1906).
- [3] Z. Horák, *Technická fyzika*, SNTL Praha (1961).
- [4] V. Petržílka, S. Šafrata: *Elektrina a magnetismus*, NČSAV Praha (1956).
- [5] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin: *Solid State Physics*, Brooks/Cole (1976).
- [6] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: *Fyzikální a matematické tabulky*, str. 137, SNTL Praha 1980.