
Periodová analýza

F4191: Praktikum z astronomie 2

Artem Gorodilov

23. ledna 2025

1. Abstrakt

V této práci jsem analyzoval světelné křivky šesti neznámých objektů a také světelnou křivku hvězdy Kepler-1063. Pro analýzu jsem sestrojil periodogramy pro frekvence < 10 cyklů/den a určil čtyři signifikantní frekvence, z nichž jsem získal odpovídající periody charakterizující hypotetické rekurentní změny systému.

Výpočty byly provedeny pomocí skriptu v Pythonu (viz. PoruchikRzhevsky).

$$P(f) = \frac{1}{2\sigma^2} \left[\frac{(\sum_i w_i (x_i - \bar{x}) \cos(2\pi f(t_i - \tau)))^2}{\sum_i w_i \cos^2(2\pi f(t_i - \tau))} + \frac{(\sum_i w_i (x_i - \bar{x}) \sin(2\pi f(t_i - \tau)))^2}{\sum_i w_i \sin^2(2\pi f(t_i - \tau))} \right],$$

kde f je frekvence, x_i jsou hodnoty dat (např. jas hvězdy), t_i jsou odpovídající časy, σ^2 je rozptyl dat, \bar{x} je průměr dat a τ je korekce pro fázi.

Výstupem periodogramu jsou frekvence, které odpovídají dominantním periodickým v datech, například rotačním periodám hvězd nebo oběžným periodám exoplanet. Hlavní vrcholy v periodogramu představují frekvence, na kterých je variabilita nejvýraznější. Výška těchto vrcholů udává sílu variability na dané frekvenci. Významné vrcholy mají hodnoty, které výrazně převyšují úroveň šumu, jež v periodogramu funguje jako základní hladina. Šum slouží k odlišení skutečných signálů od náhodných fluktuací v datech.

SNR (Signal-to-Noise Ratio) je poměr mezi silou signálu a úrovní šumu. V kontextu periodogramu se SNR vypočítává jako poměr výšky vrcholu (síly signálu) k průměrné nebo mediánové úrovni šumu. Matematicky lze SNR vyjádřit jako:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{peak}}}{P_{\text{noise}}},$$

2. Úvod

2.1. Periodogram

Periodogram je nástroj používaný k analýze časových řad, například světelných křivek hvězd, za účelem identifikace periodických signálů. Princip jeho činnosti spočívá v transformaci časových dat na frekvenční doménu a měření síly variability při různých frekvencích.

Matematicky je periodogram založen na Lomb-Scarglově metodě, která je zvláště vhodná pro nerovnoměrně vzorkované časové řady. Tato metoda odhaduje periodogram jako:

kde P_{peak} je hodnota výkonu na dané frekvenci (vrchol periodogramu) a P_{noise} je úroveň šumu. Vysoká hodnota SNR naznačuje, že detekovaný signál je silnější než šum, a tím pádem pravděpodobně skutečný.

FAP (False Alarm Probability) je pravděpodobnost, že detekovaný vrchol v periodogramu vznikl náhodně, vlivem šumu, a nikoli jako důsledek skutečné periodické variability. Nižší hodnota FAP znamená vyšší důvěru ve skutečnost detekovaného signálu.

2.2. Prewhitening

Prewhitening je iterativní metoda používaná k izolaci a odstranění dominantních periodických signálů z časové řady. Proces začíná výpočtem Lomb-Scargleho periodogramu, který identifikuje nejvýznamnější frekvenci na základě spektrální síly. Tato frekvence je následně upřesněna pomocí gaussovske aproximace, která poskytuje její přesnou hodnotu a nejistotu.

Po určení dominantní frekvence jsou data fázově složena podle odpovídající periody a je provedeno sinusoidní přizpůsobení. Výsledný fit se odečte od původní časové řady, čímž vzniká reziduální signál, který je dále analyzován v další iteraci. Tento postup se opakuje, dokud nejsou izolovány všechny signifikantní frekvence nebo dokud není dosažen určitý práh, například nízký SNR.

2.3. Window funkce

Window funkce je analytický nástroj používaný při zpracování časových řad, zejména v Fourierově analýze a při výpočtu periodogramů, k popisu vzorkovací charakteristiky dat. Její hlavní úlohou je kvantifikovat artefakty, které vznikají vlivem ome-

zené délky a nepravidelného rozmístění časových pozorování.

V kontextu Lomb-Scargleho periodogramu je window funkce určena výpočtem periodogramu časové řady, která obsahuje jednotkovou hodnotu amplitudy ve všech časových bodech. Tento periodogram poskytuje informaci o frekvenčních složkách, které jsou inherentně přítomné v samotném vzorkování dat, nikoli ve skutečném signálu. Výsledkem je spektrum, které ukazuje rozložení vedlejších laloků a interferenčních efektů, které mohou ovlivnit přesnost identifikace frekvencí.

3. Zpracování dat

3.1. Data

Analyzoval jsem světelné křivky šesti neznámých objektů. Každá křivka byla pozorována v časovém intervalu přibližně 300 d.

Pro analýzu periodického chování objektu Kepler-1063 (KepID: 2985767) jsem zkombinoval světelné křivky z několika pozorování Keplerovy čtvrti. Každé z pozorování mělo expoziční dobu 1800 s (kadence: dlouhá). Data byla získána a sestavena pomocí knihovny `lightkurve`¹. Celková doba pozorování byla 1470.46 d.

3.2. Pipeline

Pomocí funkce `analyze_light_curve()` jsem vykreslil světelnou křivku a analyzoval ji, abych získal periodogram. Funkce bere jako parametry názvy souboru nebo objektu Kepler, maximální počet signifikantních frekvencí na výstupu a maximální frekvenci vybranou pro analýzu. V mém případě jsou hodnoty posledních dvou parametrů následující:

¹<https://lightkurve.github.io/lightkurve/>

max_frequencies=4, max_frequency=10.

Skript poté provede prewhitening pomocí funkce `prewhiten_lightcurve()`. Tato funkce cyklicky vyhledává signifikantní frekvence. Za tímto účelem projdou původní data LombScargleovým fitováním, po kterém získáme frekvence a jejich síly pro danou časovou konfiguraci a zbytkový tok. Skript poté vyhledá maxima na grafu čas-frekvence pomocí funkce `find_peaks()` dostupné v knihovně SciPy², provede Gaussův fit jejich vrcholů na periodogram, provede sinusový fit fázově složené světelné křivky pro nalezenou frekvenci a opraví zbytkový tok z fitovaných dat. To pokračuje, dokud funkce nenajde 4 signifikantní frekvence. Skript také vypočítá Window funkci pomocí funkce `window_function()`, která se následně použije pro vizuální analýzu periodogramu, SNR pro každou z nalezených frekvencí a vypočítá hodnoty FAP.

K výpočtu veličin a jejich nejistot byla použita knihovna Uncertainties pro Python. Chyby byly rozšířeny o Studentův koeficient (2-Tail Confidence Level) s ohledem na stupně volnosti pro každou hodnotu, pro interval spolehlivosti 68.27%.

4. Výsledky

4.1. Původní soubory dat

Světelné křivky pro soubory dat 1, 2, 3, 4, 5 a 6 jsou zobrazeny na obrázcích (2a), (2b), (2c), (2d), (2e) a (2f) resp.

Jejich odpovídající periodogramy jsou znázorněny na obrázcích (3), (4), (5), (6), (7) a (8).

Fázově složené světelné křivky pro každou nalezenou signifikantní frekvenci odvozenou ze zbytkového toku jsou zobrazeny

na obrázcích (9), (10), (11), (12), (13) a (14).

Fázově složené světelné křivky s nalezenými signifikantními frekvencemi superponované na původní světelnou křivku jsou zobrazeny na obrázcích (15), (16), (17), (18), (19) a (20).

Frekvence, periody, síla, SNR a FAP jsou uvedeny v tabulkách (1), (2), (3), (4), (5) a (6).

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
4.96799+/-0.00003	0.201289+/-0.000001	0.69	95.13	1.77e-164
4.73131+/-0.00001	0.211358+/-0.000001	0.68	95.83	1.50e-156
1.10394+/-0.00002	0.905844+/-0.000012	0.86	373.26	0.00e+00
4.96742+/-0.00002	0.201312+/-0.000001	0.18	24.60	6.48e-05

Tabulka (1) Výsledky analýzy pro dataset 1.dat.

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
3.04011+/-0.00003	0.328936+/-0.000003	0.56	116.35	7.90e-95
0.89276+/-0.00007	1.120118+/-0.000093	0.53	128.85	8.49e-82
1.91776+/-0.00001	0.521441+/-0.000003	0.55	139.23	4.34e-91
3.04152+/-0.00003	0.328783+/-0.000003	0.16	18.02	1.36e-03

Tabulka (2) Výsledky analýzy pro dataset 2.dat.

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
2.35215+/-0.00002	0.425143+/-0.000004	0.72	143.00	1.51e-182
3.50067+/-0.00001	0.285659+/-0.000001	0.81	205.34	1.10e-271
2.92004+/-0.00003	0.342461+/-0.000004	0.13	13.78	1.85e-01
1.44576+/-0.00005	0.691679+/-0.000026	0.11	9.45	1.00e+00

Tabulka (3) Výsledky analýzy pro dataset 3.dat.

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
1.83302+/-0.00002	0.545547+/-0.000006	0.68	125.84	1.88e-158
3.92680+/-0.00002	0.254660+/-0.000001	0.78	192.19	1.23e-241
6.04377+/-0.00004	0.165460+/-0.000001	0.12	13.15	9.53e-01
0.74150+/-0.00002	1.348620+/-0.000028	0.10	11.71	1.00e+00

Tabulka (4) Výsledky analýzy pro dataset 4.dat.

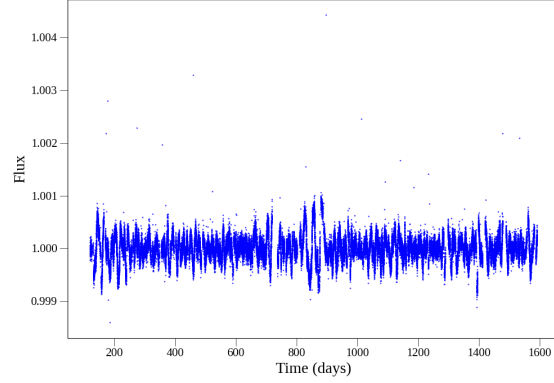
²<https://scipy.org/>

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
7.62956+/-0.00002	0.131069+/-0.000000	0.51	65.01	1.46e-72
9.13811+/-0.00002	0.109432+/-0.000000	0.47	59.37	7.88e-62
7.83772+/-0.00002	0.127588+/-0.000000	0.51	67.90	1.38e-72
2.16349+/-0.00002	0.462217+/-0.000004	0.54	125.72	7.03e-84

Tabulka (5) Výsledky analýzy pro dataset 5.dat.

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
1.75607+/-0.00004	0.569454+/-0.000014	0.63	131.70	8.06e-128
1.88514+/-0.00002	0.530464+/-0.000006	0.57	103.35	3.86e-100
4.55604+/-0.00001	0.219489+/-0.000001	0.57	143.63	1.85e-99
9.25930+/-0.00008	0.108000+/-0.000001	0.13	15.29	3.07e-01

Tabulka (6) Výsledky analýzy pro dataset 6.dat.



Obrázek (1) Světelná křivka pro Kepler-1063.

4.2. Kepler-1063

Světelná křivka pro Kepler-1063 je zobrazena na obrázku (1).

Odpovídající periodogram je znázorněn na obrázku (21).

Fázově složené světelné křivky pro každou nalezenou signifikantní frekvenci odvozenou ze zbytkového toku jsou zobrazeny na obrázku (22).

Fázově složené světelné křivky s nalezenými signifikantními frekvencemi superponované na původní světelnou křivku jsou zobrazeny na obrázku (23).

Frekvence, periody, síla, SNR a FAP pro Kepler-1063 jsou uvedeny v tabulce (7).

Frequency [c/d]	Period [d]	Amplitude	SNR	FAP
0.03670+/-0.00002	27.246804+/-0.014209	0.20	7475.12	0.00e+00
0.03671+/-0.00000	27.244037+/-0.003675	1.01	1667990.01	nan
0.03671+/-0.00000	27.244195+/-0.003673	1.01	1663040.36	nan
0.03671+/-0.00000	27.244185+/-0.003673	1.01	1663860.66	nan

Tabulka (7) Výsledky analýzy pro Kepler-1063.

5. Závěr

5.1. Dataset 1

V souboru dat 1 jsou nejpravděpodobnější signifikantní frekvence $f_1 = 4.96799(3)$ c/d a $f_2 = 4.73131(1)$ c/d. Obě

mají poměrně vysoký SNR a nízký FAP a nespádají do oblasti vrcholu Windowov funkce. Frekvence $f_3 = 1.10394(2)$ c/d má FAP = 1 a spadá do oblasti vrcholu Windowov funkce, což ji vylučuje ze seznamu pravděpodobných frekvencí. Frekvence $f_4 = 4.96742(2)$ c/d je blízká frekvenci $f_1 = 4.96799(3)$ c/d, ale má mnohem menší FAP, což je také důvod k jejímu vyloučení ze seznamu pravděpodobných frekvencí.

Při analýze fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok je vidět, že fit každé frekvence kromě $f_4 = 4.96742(2)$ c/d je výrazná sinusoida. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat ukazuje, že frekvence $f_3 = 1.10394(2)$ c/d zjevně není signifikantní frekvencí a lze ji vysvětlit mezerami v datech světelné křivky nebo jinou systematickou periodicitou nesouvisející s chováním objektu.

5.2. Dataset 2

V souboru dat 2 jsou nejpravděpodobnější signifikantní frekvence $f_1 = 3.04011(3)$ c/d, $f_2 = 0.89276(7)$ c/d a $f_3 = 1.91776(1)$ c/d. Obě mají poměrně vysoký

SNR a nízký FAP, ale blíží se ploše vrcholu Windowov funkce. Frekvence $f_4 = 3.04152(3)$ c/d je blízká frekvenci $f_1 = 3.04011(3)$ c/d, ale má mnohem nižší FAP, což je také důvodem k jejímu vyloučení z pravděpodobných frekvencí.

Při analýze fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok vidíme, že fit každé frekvence kromě $f_4 = 3.04152(3)$ c/d je výrazná sinusoida. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat ukazuje, že všechny frekvence nějakým způsobem odpovídají popisu periodicity objektu.

5.3. Dataset 3

V souboru dat 3 jsou nejpravděpodobnější signifikantní frekvence $f_1 = 2.35215(2)$ c/d a $f_2 = 3.50067(1)$ c/d. Obě mají poměrně vysoký SNR a nízký FAP a nespádají do oblasti vrcholu Windowov funkce. Frekvence $f_3 = 2.92004(3)$ c/d je blízká frekvenci $f_1 = 2.35215(2)$ c/d, ale má mnohem menší FAP a také spadá do oblasti vrcholů Windowov funkce, což je také důvodem k jejímu vyloučení ze seznamu pravděpodobných frekvencí. Frekvence $f_4 = 1.44576(5)$ c/d má FAP = 1 a spadá do oblasti vrcholu Windowov funkce, což ji vylučuje ze seznamu pravděpodobných frekvencí.

Při analýze fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok je vidět, že frekvence $f_1 = 2.35215(2)$ c/d a $f_2 = 3.50067(1)$ c/d vykazují výrazné sinusové chování. Frekvence $f_3 = 2.92004(3)$ c/d a $f_4 = 1.44576(5)$ c/d takové chování nevykazují. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat ukazuje, že frekvence $f_4 = 1.44576(5)$ c/d zjevně není signifikantní frekvencí.

5.4. Dataset 4

V souboru dat jsou 4 nejpravděpodobnější signifikantní frekvence: $f_1 = 1.83302(2)$ c/d a $f_2 = 3.92680(2)$ c/d. Obě mají poměrně vysoký SNR a nízký FAP a nespádají do oblasti vrcholu Windowov funkce. Frekvence $f_3 = 6.04377(4)$ c/d má FAP = 0.95 a spadá do oblasti vrcholu Windowov funkce, což je také důvodem k jejímu vyloučení z pravděpodobných frekvencí. Frekvence $f_4 = 0.74150(2)$ c/d má FAP = 1 a spadá do oblasti vrcholu Windowov funkce, což ji vylučuje ze seznamu pravděpodobných frekvencí.

Při analýze fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok je vidět, že frekvence $f_1 = 1.83302(2)$ c/d a $f_2 = 3.92680(2)$ c/d vykazují výrazné sinusové chování. Frekvence $f_3 = 6.04377(4)$ c/d a $f_4 = 0.74150(2)$ c/d takové chování nevykazují. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat ukazuje, že frekvence $f_3 = 6.04377(4)$ c/d a $f_4 = 0.74150(2)$ c/d zjevně nejsou významné frekvence.

5.5. Dataset 5

V souboru dat 5 jsou všechny nalezené frekvence $f_1 = 7.62956(2)$ c/d, $f_2 = 9.13811(2)$ c/d, $f_3 = 7.83772(2)$ c/d a $f_4 = 2.16349(2)$ c/d pravděpodobné. Všechny mají vysoký SNR a nízký FAP a jsou mimo vrcholy okenní funkce.

Při analýze fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok je vidět, že fit pro všechny frekvence vykazuje výrazné sinusové chování. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat rovněž ukazuje, že frekvence jsou vhodné pro vysvětlení periodického chování objektu.

5.6. Dataset 6

V souboru dat 6 jsou nejpravděpodobnější signifikantní frekvence $f_1 = 1.75607(4)$ c/d, $f_2 = 1.88514(2)$ c/d a $f_3 = 4.55604(1)$ c/d. Obě mají poměrně vysoký SNR a nízký FAP a nespádají do oblasti vrcholu Windowovy funkce. Frekvence $f_4 = 9.25930(8)$ c/d má SNR = 15.3 a FAP = 0.31.

Analýza fázově složených světelných křivek pro zbytkový tok ukazuje, že fit každé frekvence kromě $f_4 = 9.25930(8)$ c/d je výrazná sinusoida. Analýza fázově složených světelných křivek získaných z původních dat ukazuje, že frekvence $f_4 = 9.25930(8)$ c/d není významnou frekvencí.

5.7. Kepler-1063

Při analýze světelné křivky Keplera-1063 se ukázalo, že frekvence v každé iteraci prewhiteningové funkce konvergují k hodnotě okolo $f = 0.0367$ c/d, což odpovídá periodě $P = 27.24$ c/d. Avšak pro frekvenci $f_1 = 0.03670(2)$ c/d při vysokém SNR je hodnota FAP = 1. A pro ostatní frekvence nebyl výpočet FAP v zásadě proveden.

Fázově složené světelné křivky pro data získaná ze zbytkového toku ukazují, že poslední tři frekvence vykazují sinusové chování, zatímco první nikoli. Fázově složené světelné křivky pro původní data nevykazují v zásadě žádné sinusové chování.

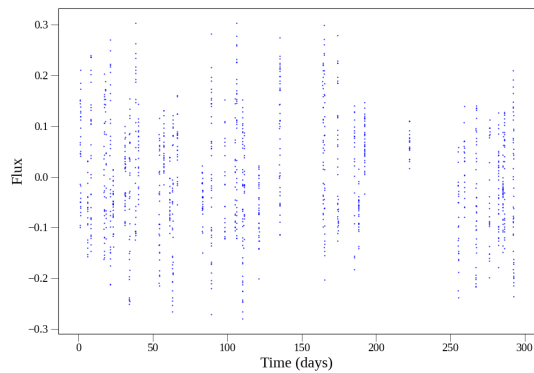
To vše s vysokou pravděpodobností znamená, že mnou nalezená perioda není periodou popisující periodické chování objektu. Navíc víme, že Kepler-1063 má exoplanetu Kepler-1063b s periodou $P = 14.08$ d (viz. Holczer et al. [2016] a Morton et al. [2016]). Hned je vidět, že mnou nalezená perioda je téměř přesně poloviční než perioda, kterou má exoplaneta. Možná je to jen náhoda, nicméně se pokusím spekulovat, proč

by tomu tak mohlo být. Je možné, že se překrývají dva tranzity s různou hloubkou. Největší vrchol ve spektru musí být harmonickou skutečné periody. Ve skutečnosti se zdá, že zde dochází k tomu, že oba tranzity jsou interpretovány jako výsledek stejného signálu, zatímco ve skutečnosti budou mít oba tranzity mírně odlišné hloubky a tvary.

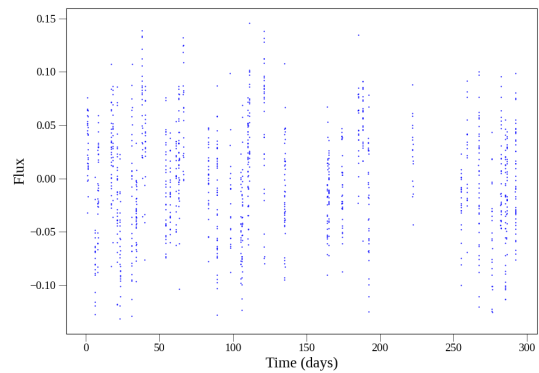
Fázově složená světelná křivka pro původní data s poloviční periodou $P = 13.62$ d je znázorněna na obrázku 24. Ani z ní nelze pozorovat sinusové chování. Problém možná spočívá v tom, že data mají určitý trend, který je třeba před analýzou vyloučit.

Reference

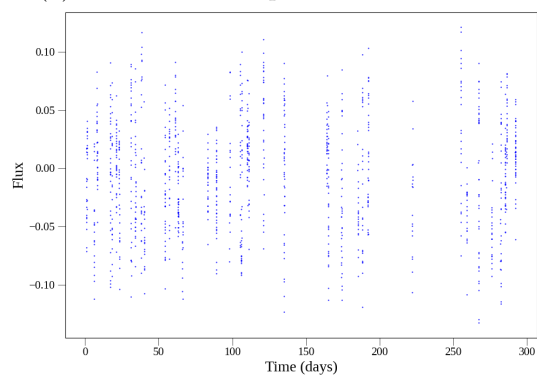
- T. Holczer, T. Mazeh, G. Nachmani, D. Jontof-Hutter, E. B. Ford, D. Fabrycky, D. Ragozzine, M. Kane, and J. H. Steffen. Transit Timing Observations from Kepler. IX. Catalog of the Full Long-cadence Data Set. *ApJS*, 225(1):9, July 2016. doi: 10.3847/0067-0049/225/1/9.
- T. D. Morton, S. T. Bryson, J. L. Coughlin, J. F. Rowe, G. Ravichandran, E. A. Petigura, M. R. Haas, and N. M. Batalha. False Positive Probabilities for all Kepler Objects of Interest: 1284 Newly Validated Planets and 428 Likely False Positives. *ApJ*, 822(2):86, May 2016. doi: 10.3847/0004-637X/822/2/86.
- PoruchikRzhevsky. Prakticka-astrofyzika. <https://github.com/PoruchikRzhevsky/Prakticka-astrofyzika>.



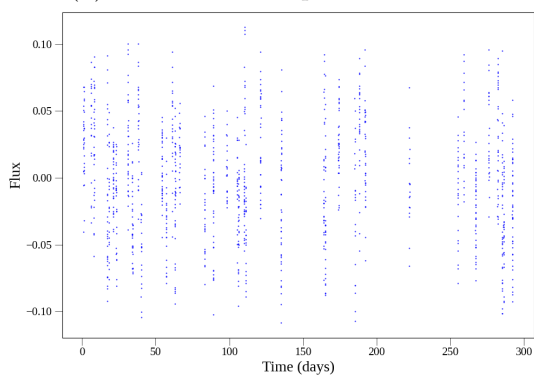
(a) Světelná křivka pro dataset 1.dat.



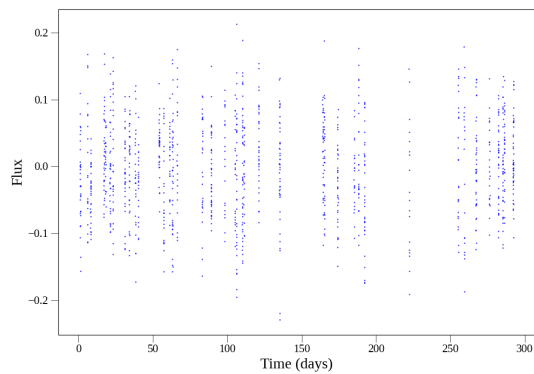
(b) Světelná křivka pro dataset 2.dat.



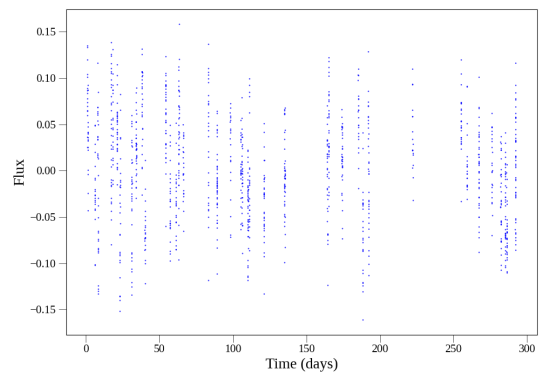
(c) Světelná křivka pro dataset 3.dat.



(d) Světelná křivka pro dataset 4.dat.

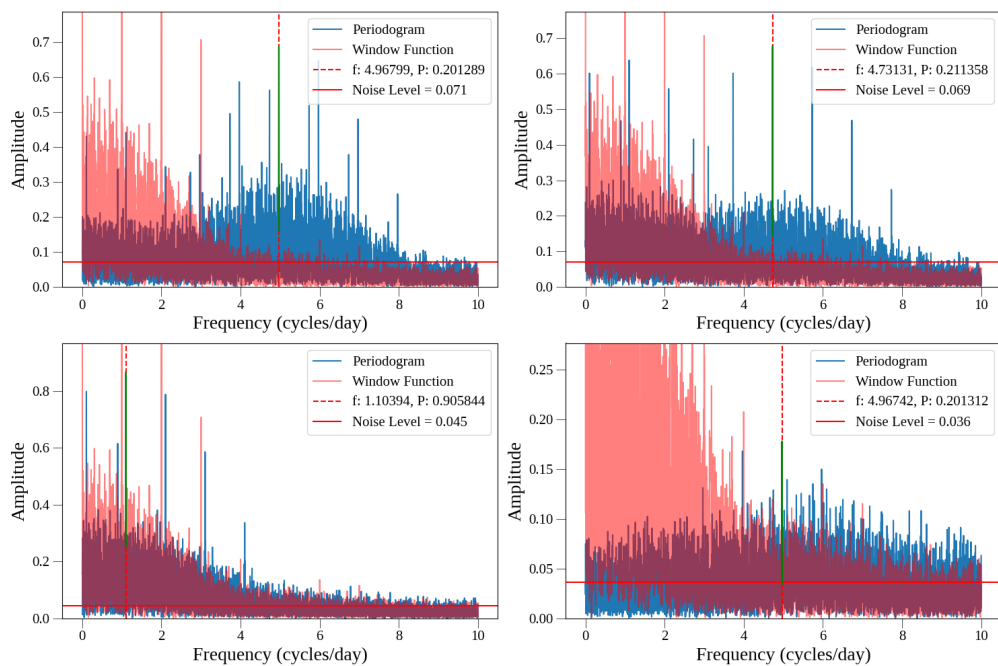


(e) Světelná křivka pro dataset 5.dat.

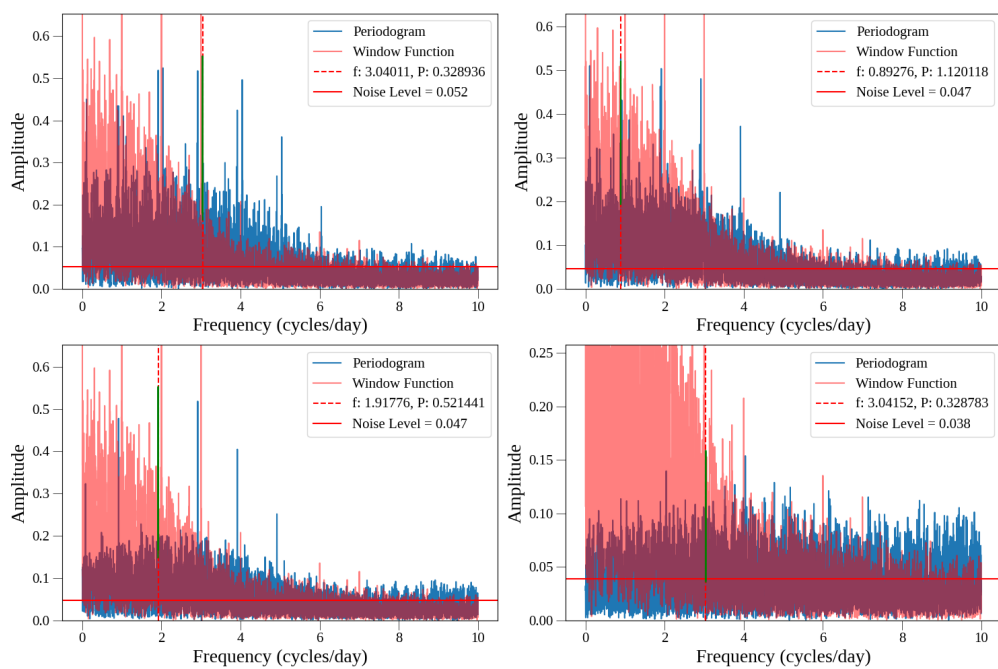


(f) Světelná křivka pro dataset 6.dat.

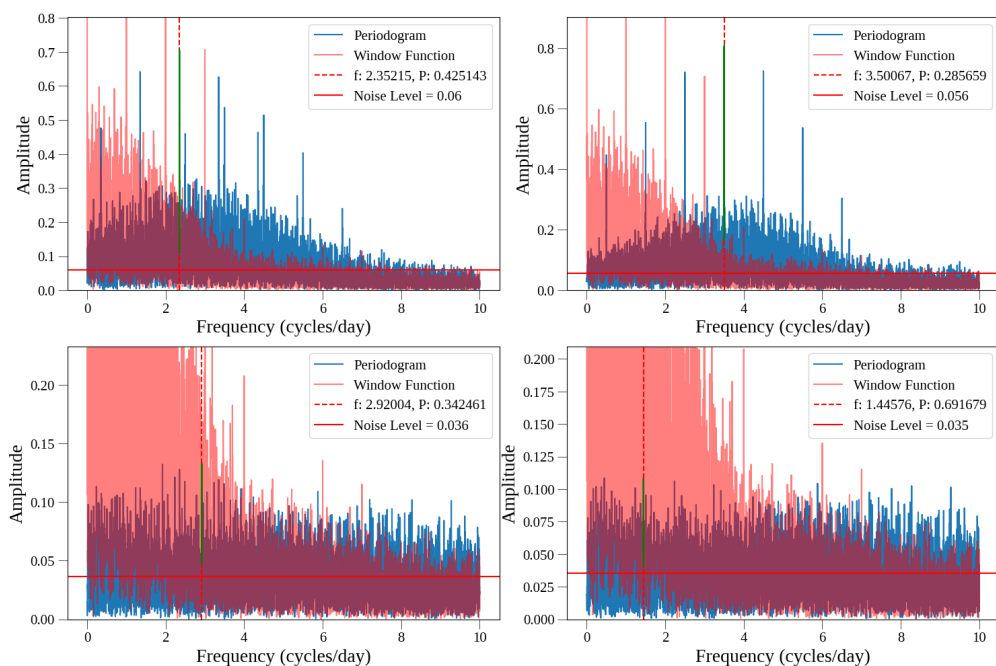
Obrázek (2) Světelné křivky pro všechny datasey.



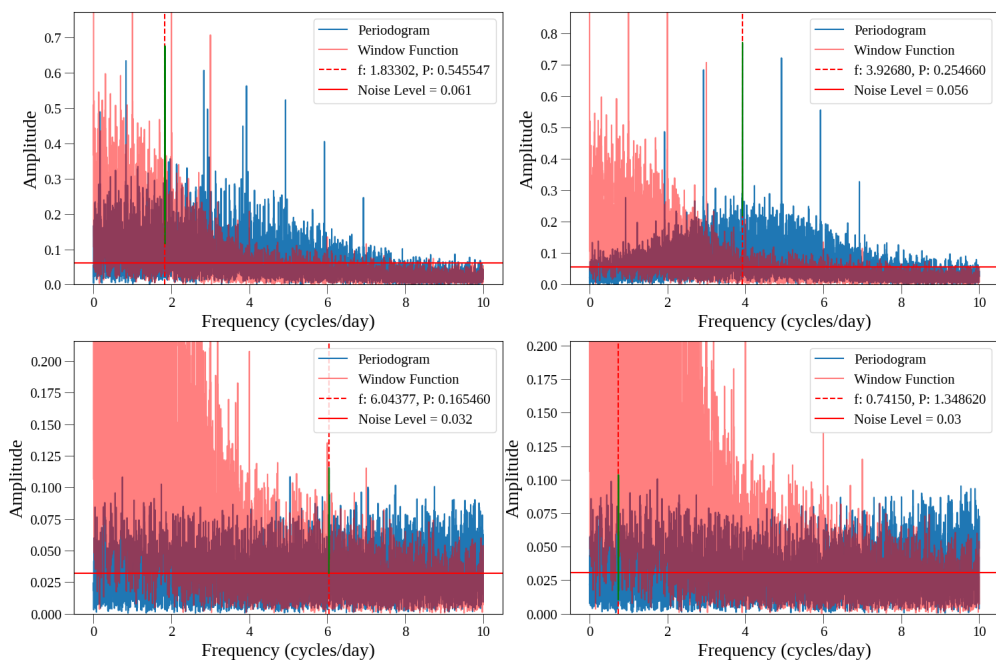
Obrázek (3) Periodogram pro dataset 1.dat.



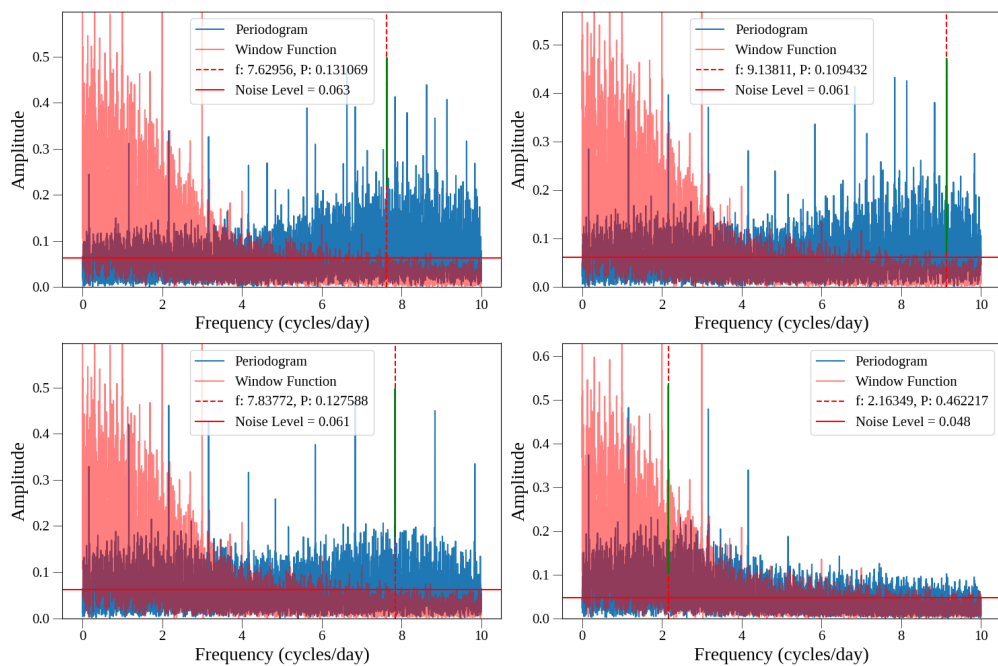
Obrázek (4) Periodogram pro dataset 2.dat.



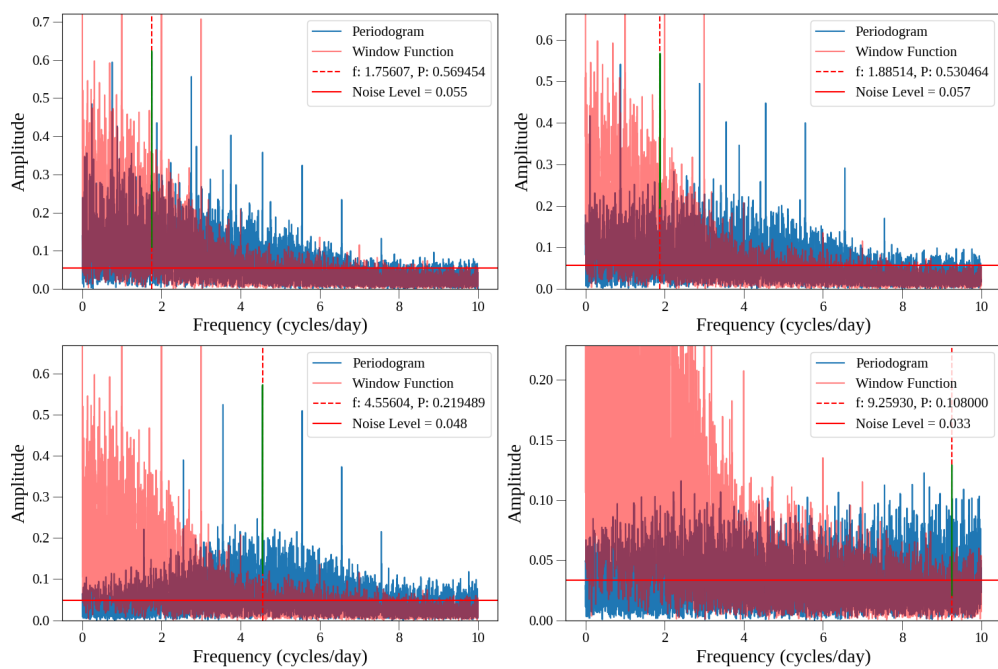
Obrázek (5) Periodogram pro dataset 3.dat.



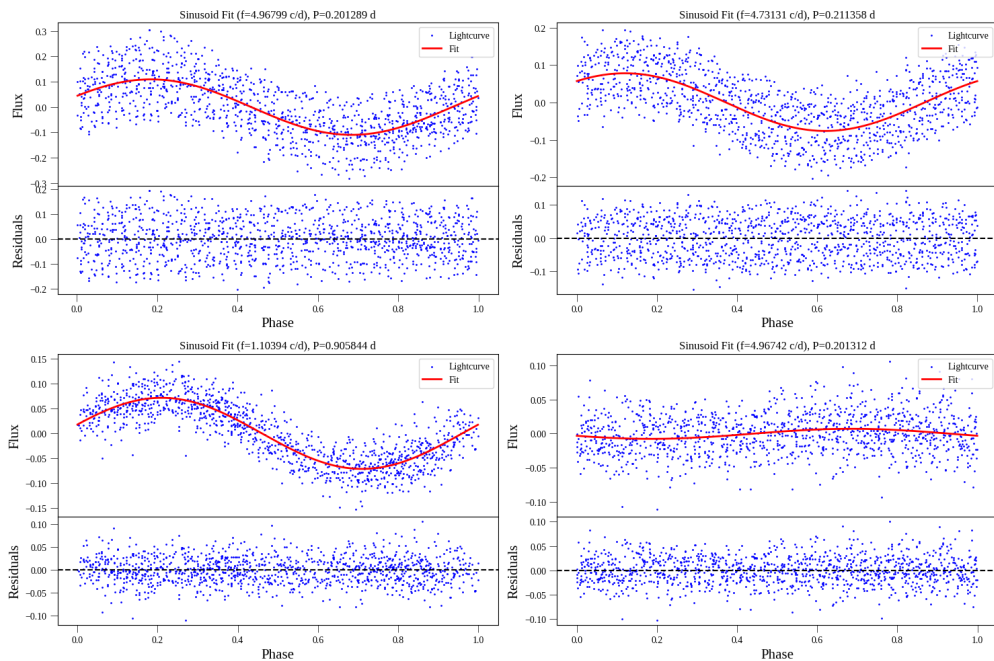
Obrázek (6) Periodogram pro dataset 4.dat.



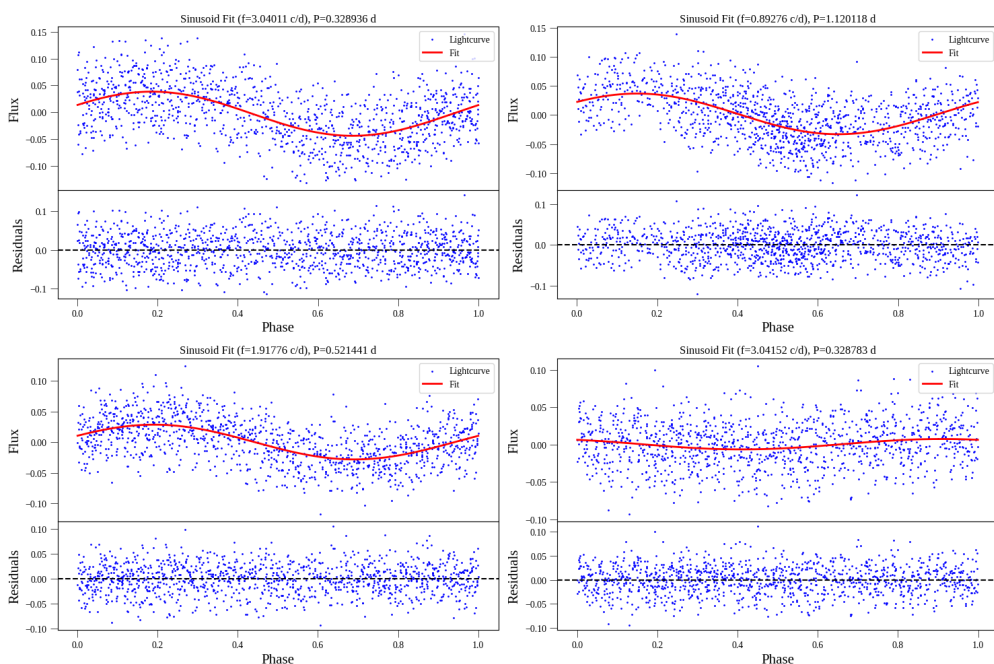
Obrázek (7) Periodogram pro dataset 5.dat.



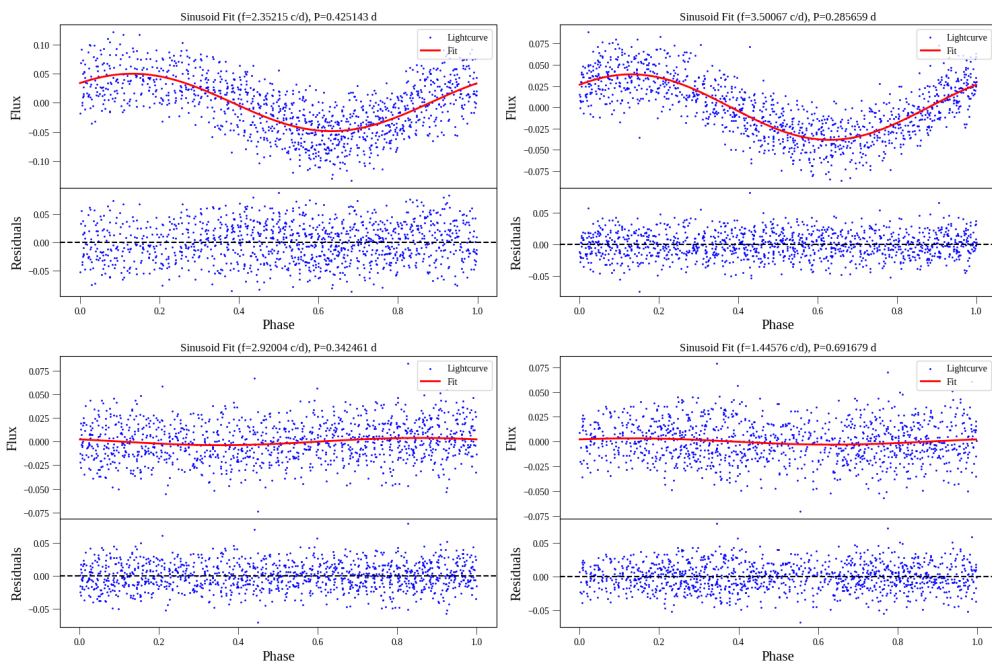
Obrázek (8) Periodogram pro dataset 6.dat.



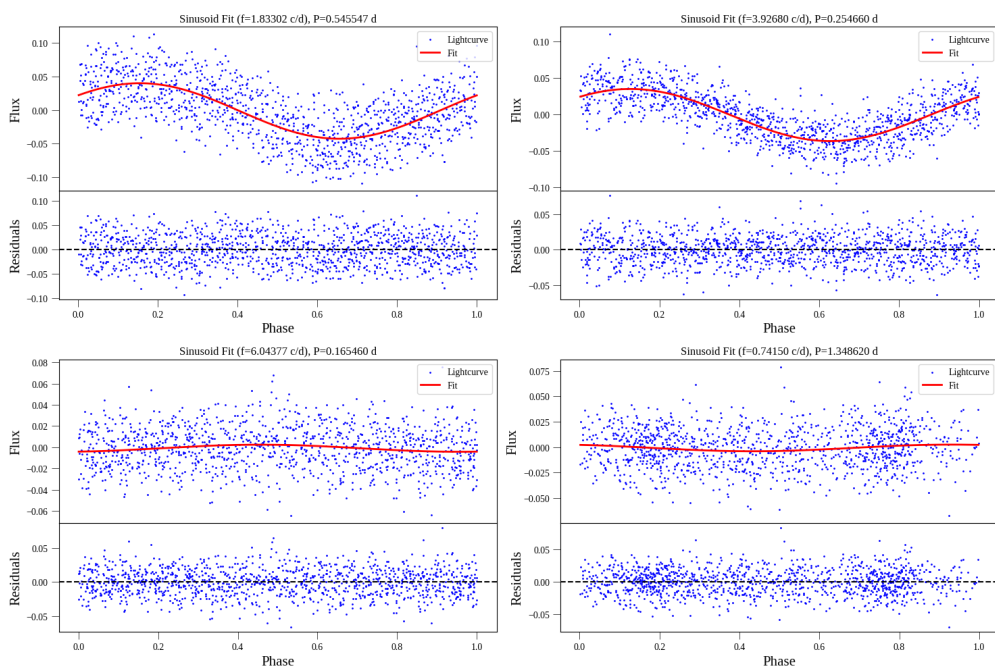
Obrázek (9) Fázově složená světelná křivka pro dataset 1.dat.



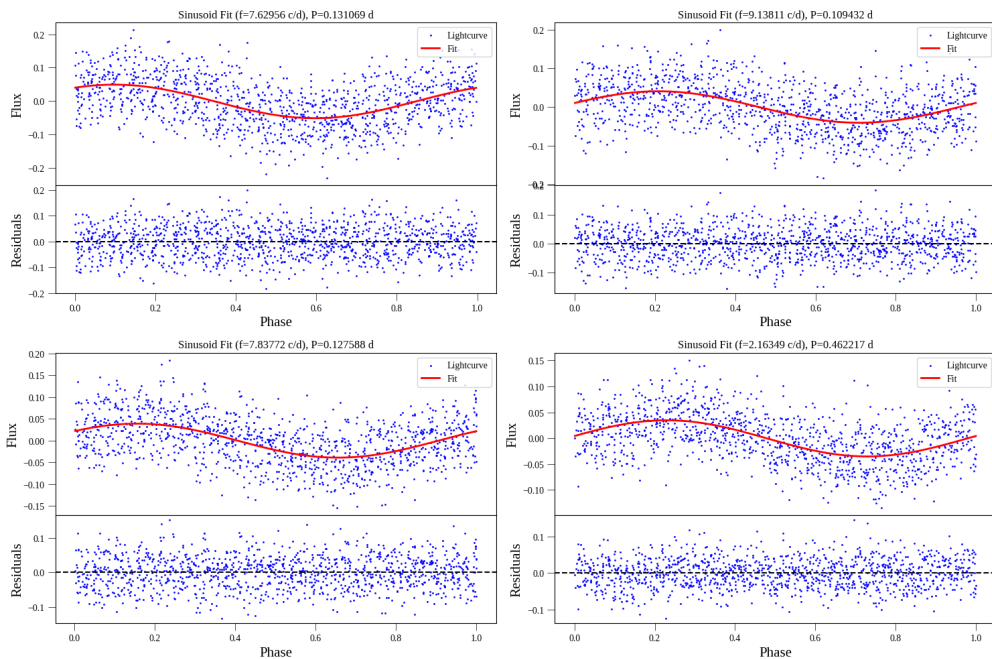
Obrázek (10) Fázově složená světelná křivka pro dataset 2.dat.



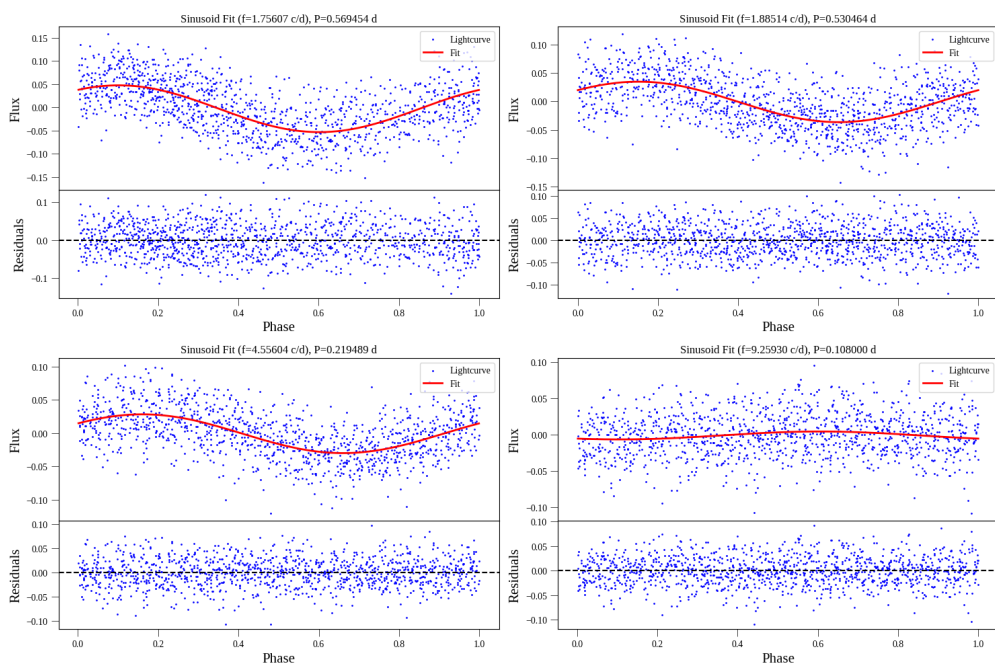
Obrázek (11) Fázově složená světelná křivka pro dataset 3.dat.



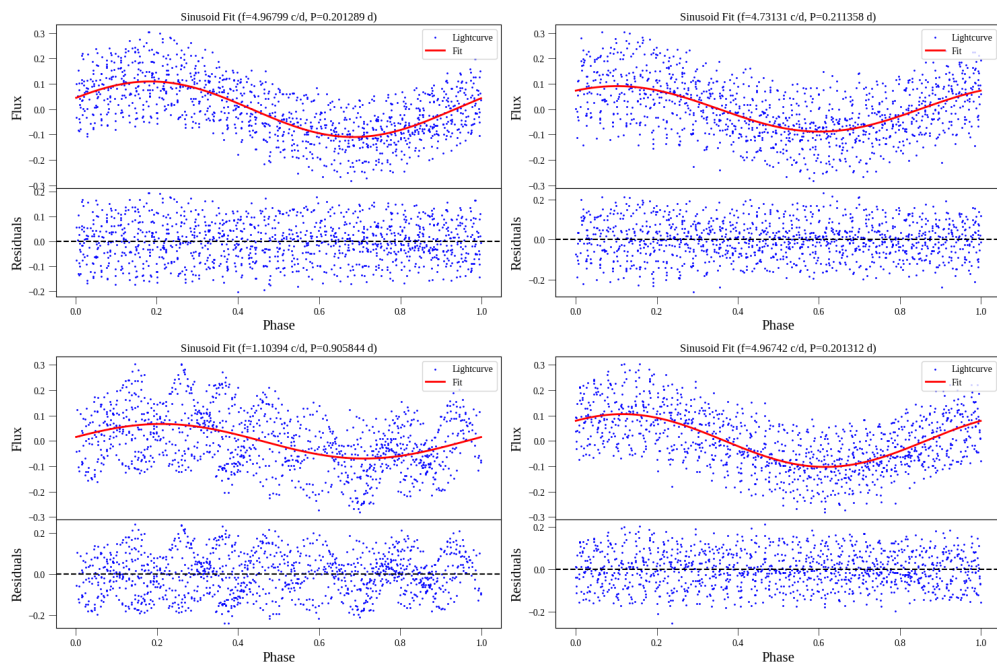
Obrázek (12) Fázově složená světelná křivka pro dataset 4.dat.



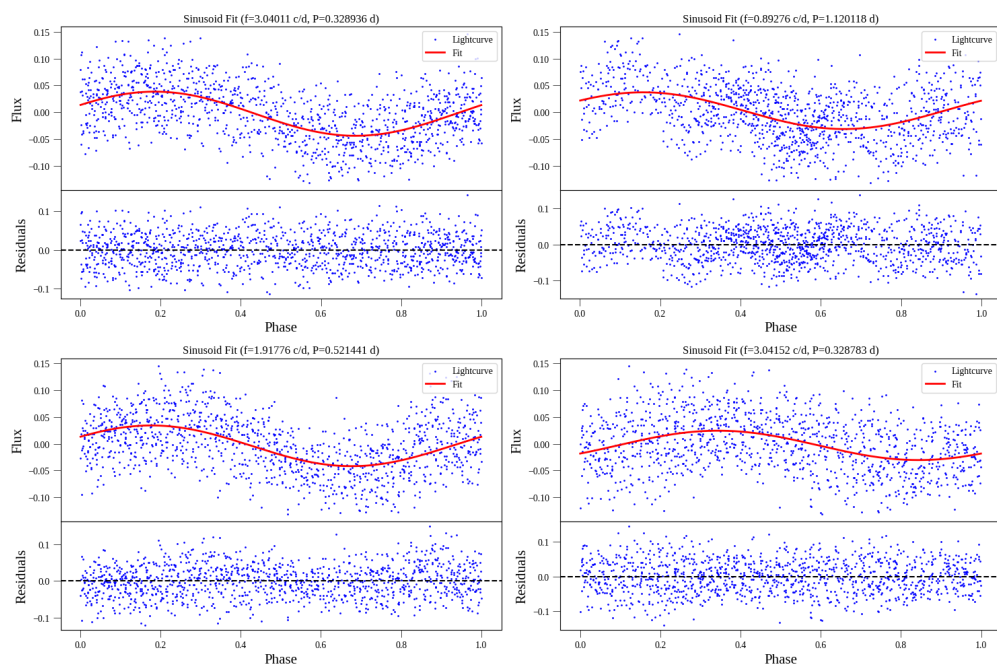
Obrázek (13) Fázově složená světelná křivka pro dataset 5.dat.



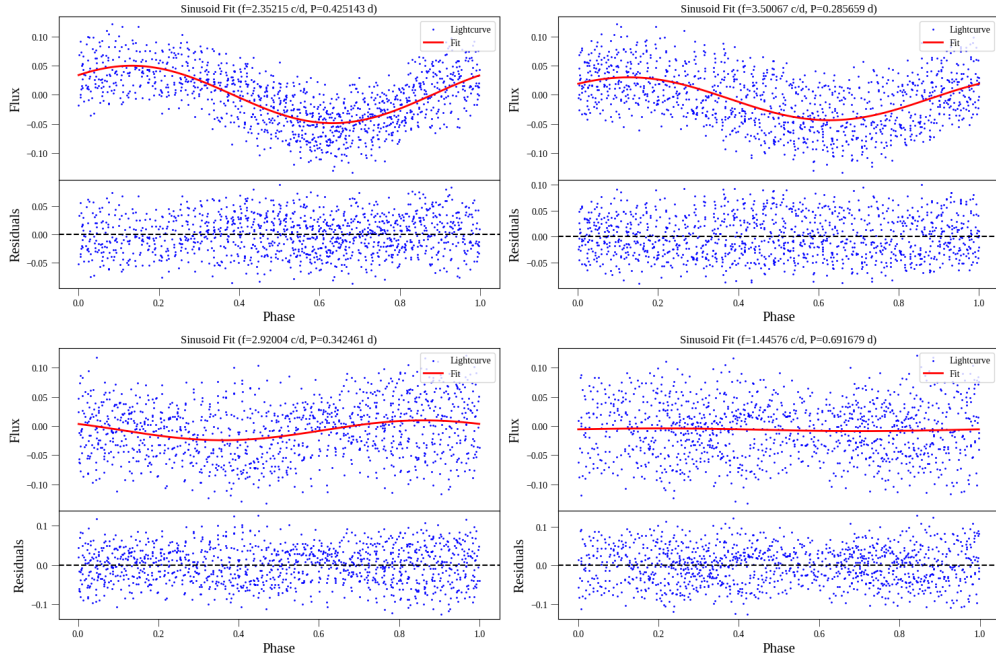
Obrázek (14) Fázově složená světelná křivka pro dataset 6.dat.



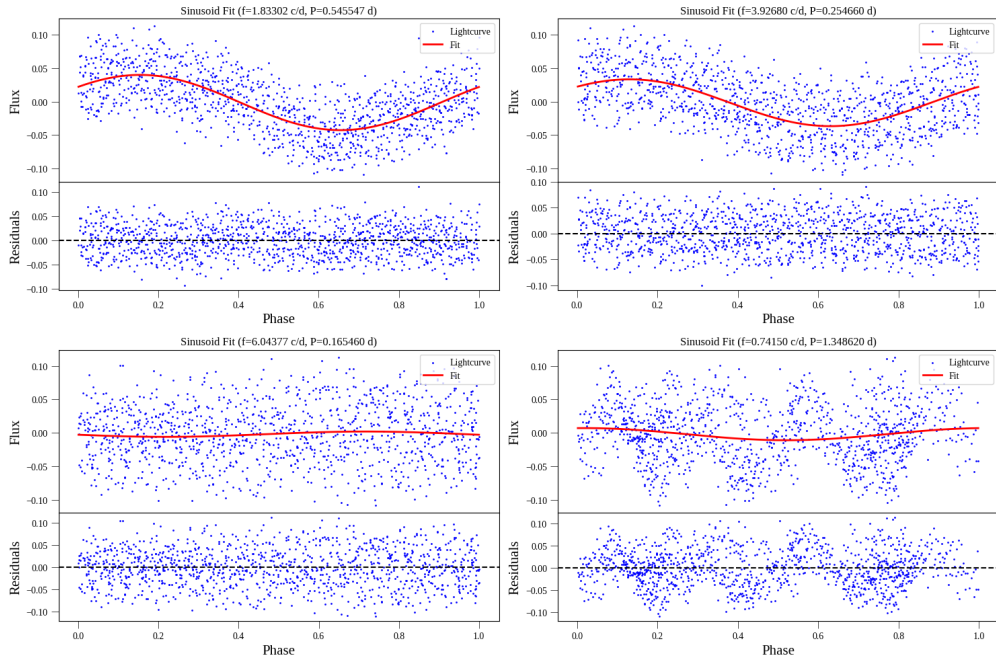
Obrázek (15) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 1.dat.



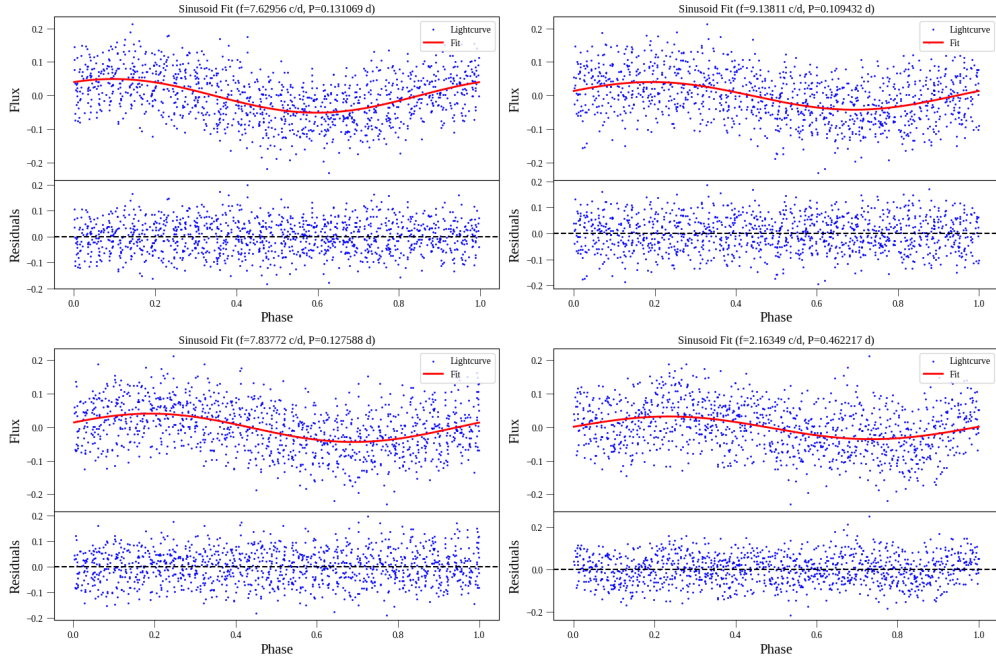
Obrázek (16) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 2.dat.



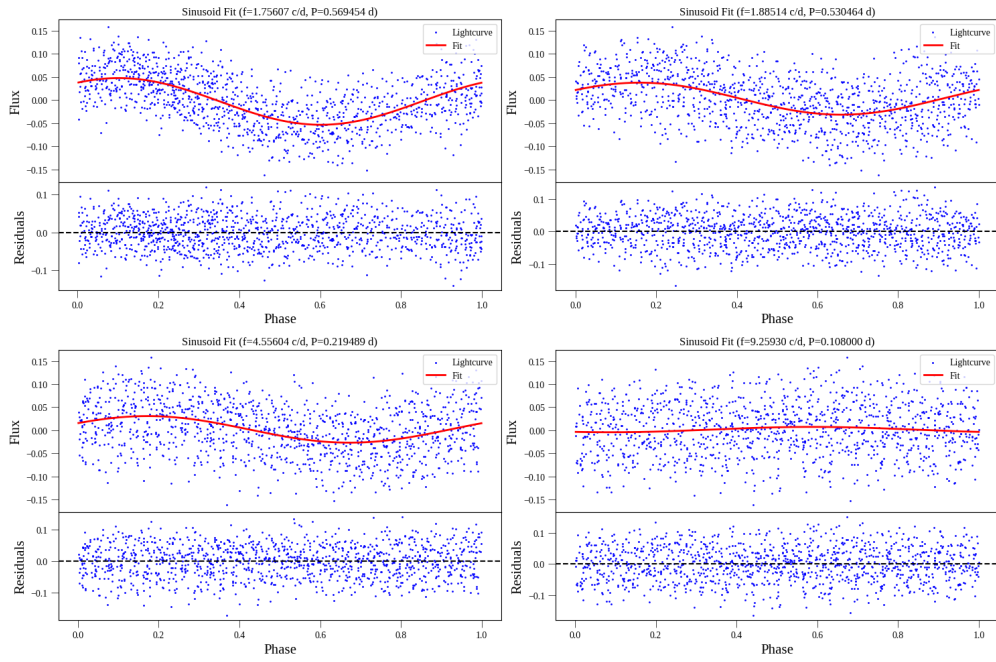
Obrázek (17) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 3.dat.



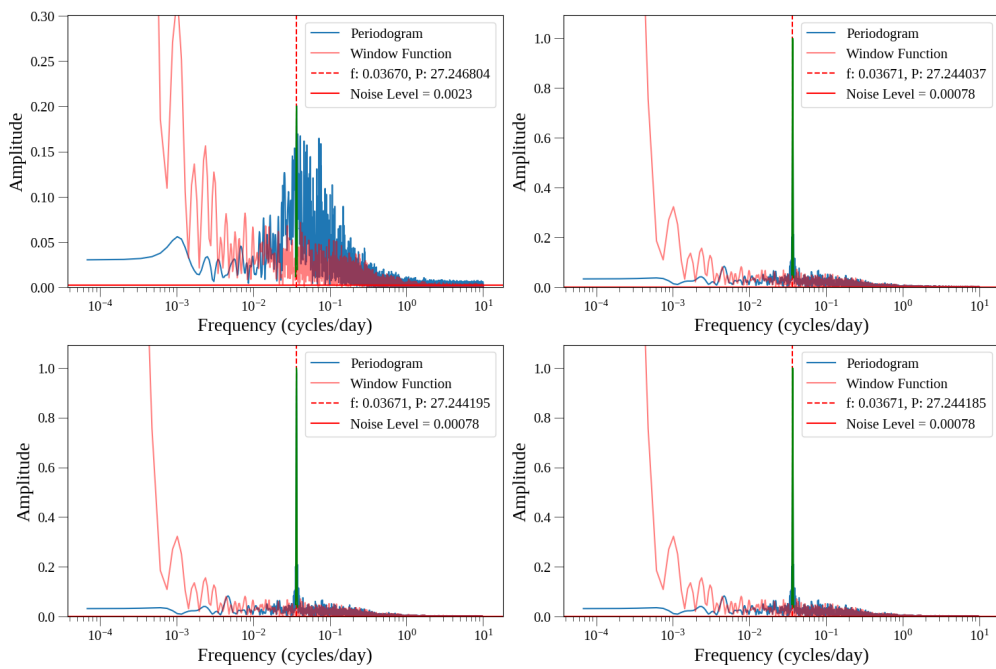
Obrázek (18) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 4.dat.



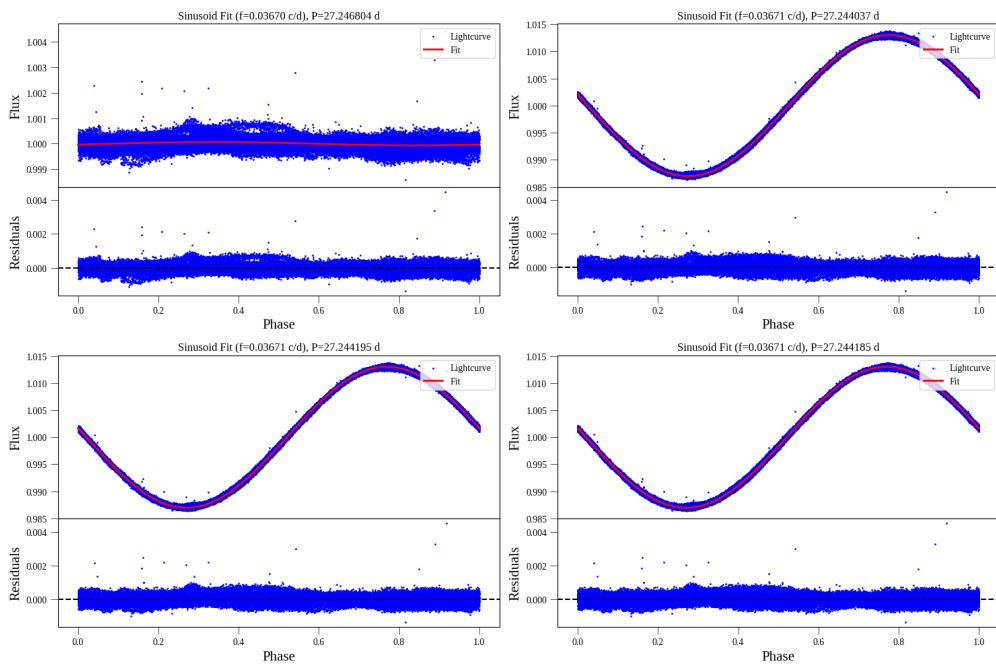
Obrázek (19) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 5.dat.



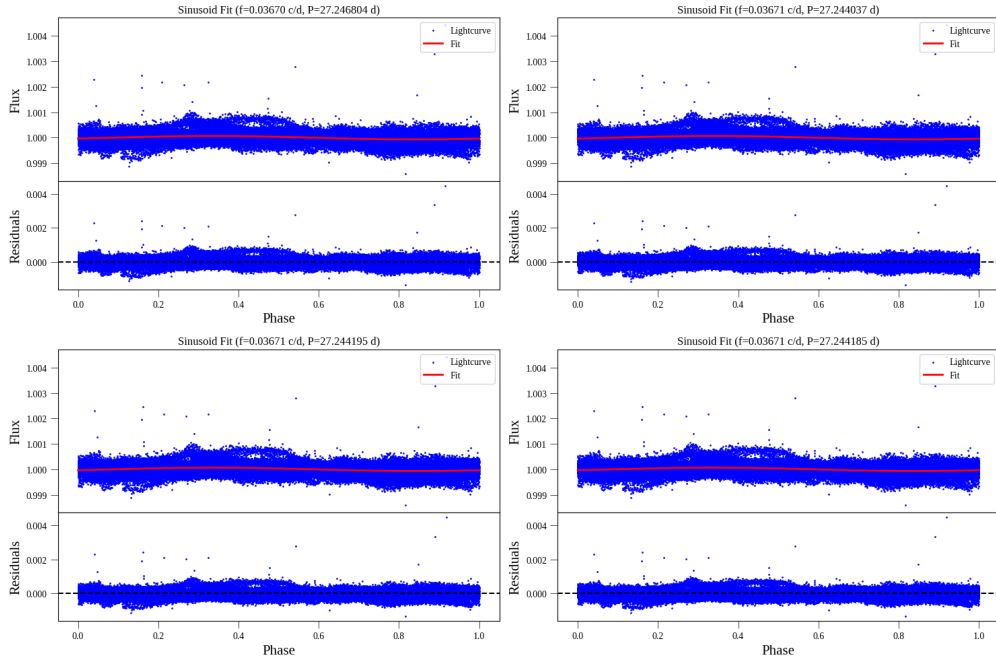
Obrázek (20) Originalni fázově složená světelná křivka pro dataset 6.dat.



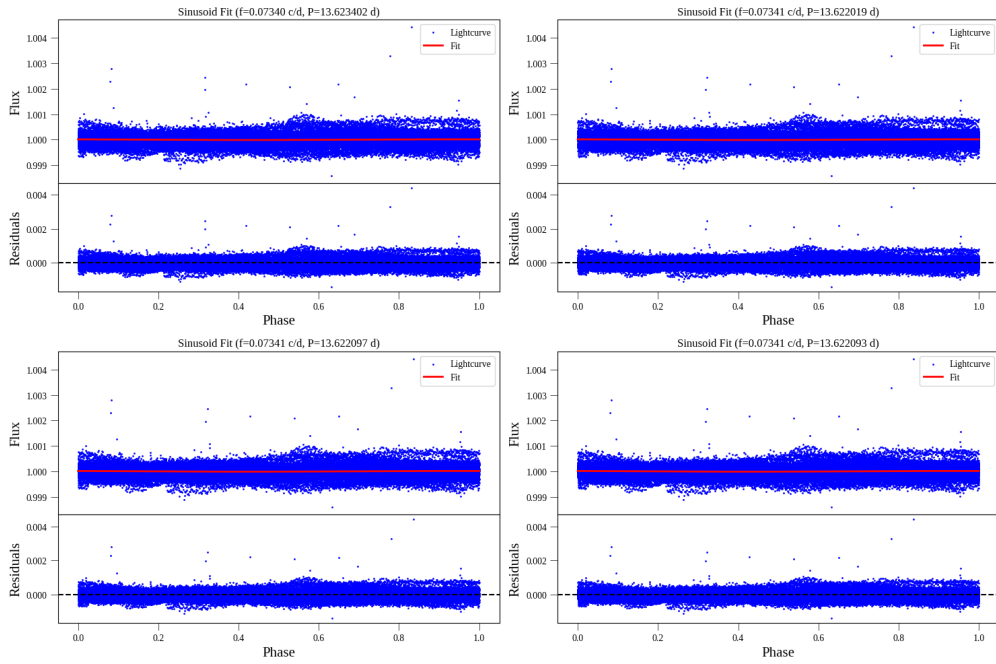
Obrázek (21) Periodogram pro Kepler-1063.



Obrázek (22) Fázově složená světelná křivka pro Kepler-1063.



Obrázek (23) Originalní fázově složená světelná křivka pro Kepler-1063.



Obrázek (24) Originalní fázově složená světelná křivka pro Kepler-1063 s poloviční periodou.