

1. Resolva numericamente o problema:

$$y' = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

utilizando o método de Runge–Kutta de segunda ordem com  $h = 0.1$  até  $x = 0.5$ . Compare o valor obtido com a solução analítica:

$$y(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x.$$

2. Um corpo com uma massa inicial de  $200 \text{ kg}$  é acelerado por uma força constante de  $200 \text{ N}$ . A massa decresce a uma taxa de  $1 \text{ kg/s}$ . Além disso, o corpo está sujeito a uma resistência do ar igual a duas vezes a velocidade. Sabe-se que a equação diferencial é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2000 - 2v}{200 - t}.$$

Se o corpo está em repouso em  $t = 0$ , a solução exata é  $v = 1000 - e^{\ln(1999/40000)}(200 - t)^2$ . Resolva o problema numericamente usando um método de Runge-Kutta de ordem 4.

3. Verifique a zero-estabilidade e consistência dos seguintes métodos, analisando as raízes do polinômio característico:

(a)  $y_{n+2} - y_{n+1} = 0$

(b)  $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$

Usando o teorema de Lax, determine se os métodos acima são convergentes.

4. Resolva numericamente o PVI com  $h_1 = 0.1$  e  $h_2 = 0.05$ :

$$y' = -2xy^2, \quad y(0) = 1,$$

no intervalo  $[0, 2]$  utilizando:

- Euler explícito,
- Runge–Kutta de 2<sup>a</sup> ordem,
- Runge–Kutta de 4<sup>a</sup> ordem.

Calcule o erro global em  $x = 2$  e verifique empiricamente a ordem de convergência de cada método.

A ordem de convergência empírica é dada por:

$$p = \frac{\log\left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}.$$