

# Solução numérica de problema de valor inicial

Irineu Palhares

November 2025

# Sumário

## Problema de Valor Contorno

A forma mais geral dos problema de contorno aos quais nos referirremos é:

$$\begin{aligned}y'' &= f(x, y, y') \\a_1 y(a) + b_1 y'(a) &= \gamma_1 \\a_2 y(b) + b_2 y'(b) &= \gamma_2\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $a_1, a_2, b_1, b_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes reais conhecidas, tais que nem  $a_1$  e  $b_1$ , nem  $a_2$  e  $b_2$  sejam nulas ao mesmo tempo.

# O método das diferenças finitas

As aproximações mais usadas para a primeira derivada no ponto  $x_i$  são:

Avançada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Atrasada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Centrada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

## Aproximação para a derivada de segunda ordem

Utilizando a série de Taylor, deduziremos a aproximação mais típica para a derivada segunda, bem como a expressão do erro para ela. Para tal, usaremos a expansão nos pontos  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$ :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i+1}) \quad (2)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i-1}) \quad (3)$$

E, agora, (2) + (3) nos fornece:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24} \left[ y^{(iv)}(\xi_{i+1}) + y^{(iv)}(\xi_{i-1}) \right]$$

## Fórmula para $y''$

Assim, temos a expressão para  $y''(x_i)$ :

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

com erro da ordem de  $h^2$ .

## Exemplo: PVI linear

### Example

$$\begin{aligned}y''(x) + 2y'(x) + y(x) &= x \\y(0) &= 0 \\y(1) &= -1\end{aligned}\tag{4}$$

A solução analítica desse problema é  $y = 2e^{-x}(1 - x) + x - 2$ .

# PVC não linear

## Example

$$\begin{aligned}y'' &= y \sin y + xy \\y(0) &= 1 \\y(1) &= 5\end{aligned}\tag{5}$$

## Exercícios

1. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned}y'' &= y' + 2y + \cos x, x \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\y(0) &= -0.3, \\y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -0.1\end{aligned}\tag{6}$$

cuja solução analítica é  $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$ .

2. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3 \\y(1) &= 17, \\y(3) &= \frac{43}{3}\end{aligned}\tag{7}$$

o qual tem solução exata  $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ .