Prova: $n \geq 1$ ← $\boxed{\text{Teo } 6.1}$

Existência: Para cada k fixado

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

considere o polinômio

$$L_k^n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$L_k^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Note que, por construção

a) $L_k^n(x_k) = 1$ e $L_k^n(x_i) = 0$
$i \neq k$.

ou seja,

$$L_k^n(x_i) = \begin{cases} 0 \,; & i \neq k \\ 1 \,; & i = k \end{cases}$$

b) $L_k^n \in P_n(\mathbb{R})$; $k = 0, 1, \dots, n$.

Desta forma, vamos considerar o seguinte polinômio:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{L_k^n(x)} \cdot y_k}$$

$$P_n(x) = y_0 \cdot L_0^n(x) + y_1 L_1^n(x) + \dots + y_n L_n^n(x)$$

Como $P_n(x)$ é comb. linear de $L_k^n(x)$, então $\underline{P_n \in P_n(\mathbb{R})}$.

E note que

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{L_k^n(x_i)}_{=1 \; k=i} \cdot y_k = y_i$$

$\therefore \; p_n \in P_n(\mathbb{R})$

e

$p_n(x_i) = y_i$.

Provada a Existência!

Unicidade

Suponhamos que existe outro polinômio $q_n \in P_n(\mathbb{R})$, $q_n \neq P_n$, tal que

$$q_n(x_i) = y_i \; ; \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

O polinômio $\pi_n = q_n - P_n \in P_n(\mathbb{R})$

Note que:

$$\begin{cases} \Pi_n(x_0) = q_n(x_0) - p_n(x_0) = y_0 - y_0 = 0 \\ \Pi_n(x_1) = q_n(x_1) - p_n(x_1) = y_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \\ \Pi_n(x_n) = q_n(x_n) - p_n(x_n) = y_n - y_n = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ Π_n possui $(n+1)$ raízes reais distintas!

Da Álgebra, isso só é possível se $\Pi_n \equiv 0$, ou seja

$$q_n - p_n \equiv 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{q_n = p_n}}$$

$$\boxed{\text{Para o caso: } n = 0}$$

$n = 0$: $P_0(x) = y_0 . L_0^0(x)$

$\underbrace{P_0(x_0) = y_0}$ $\iff$ $L_0^0(x_0) = 1$

Como $P_0 \in \mathcal{P}_0$, segue que $L_0^0(x) = 1$.

é a única solução. $\blacksquare$

Exemplo 6.1:

grau 2: $n = 2$; $k = \underline{\underline{0}}, 1, 2$.

$x_0 = -1$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

$\boxed{k = 0}$

$$\underline{\underline{L_0^2(x)}} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(-1-0)\cdot(-1-1)} \Rightarrow$$

$$L_0^2(x) = \frac{x\cdot(x-1)}{2}$$

$\boxed{k=1}$

$$L_1^2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(0+1)(0-1)} \Rightarrow$$

$$L_1^2(x) = 1 - x^2 .$$

$$\boxed{k=2}$$

$$L^{2}_{2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\cdot(x-0)}{(1+1)(1-0)} \Rightarrow$$

$$L^{2}_{2}(x) = \frac{x\cdot(x+1)}{2}$$

$$P_2(x) = \underbrace{f(x_0)}\cdot \underbrace{L_0^2(x)} + \underbrace{f(x_1)}\cdot \underbrace{L_1^2(x)} +$$

$$+ \underbrace{f(x_2)}\cdot \underbrace{L_2^2(x)}$$

$$\begin{cases} f(x_0) = f(-1) = e^{-1} \\ f(x_1) = f(0) = e^{0} = 1 \\ f(x_2) = f(1) = e^{1} = e \end{cases}$$

$$P_2(x) = 1 + x\cdot\left[\underbrace{\frac{e-e^{-1}}{2}}_{\operatorname{senh}(1)}\right] + x^2\left[\underbrace{\frac{e+e^{-1}}{2}}_{\cosh(1)} - 1\right]$$

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \; ; \quad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$P_2(x) = 1 + \operatorname{senh}(1)\cdot x + [\cosh(1) - 1]\,x^2$$

↳ pol. interp. de Lagrange para $f(x)=e^x$, de grau 2

Teorema 6.2.

Prova: Dados $\underline{x = x_i}$, $i = 0, 1, \dots, \underline{\underline{n}}$

(I) está satisfeita, pois ambos os membros se anulam:

$$f(x_i) - p_n(x_i) = 0$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\Pi_{n+1}(x_i)} = 0$$

Dado x, $x \neq x_i$; $i = 0, 1, \dots, n$,

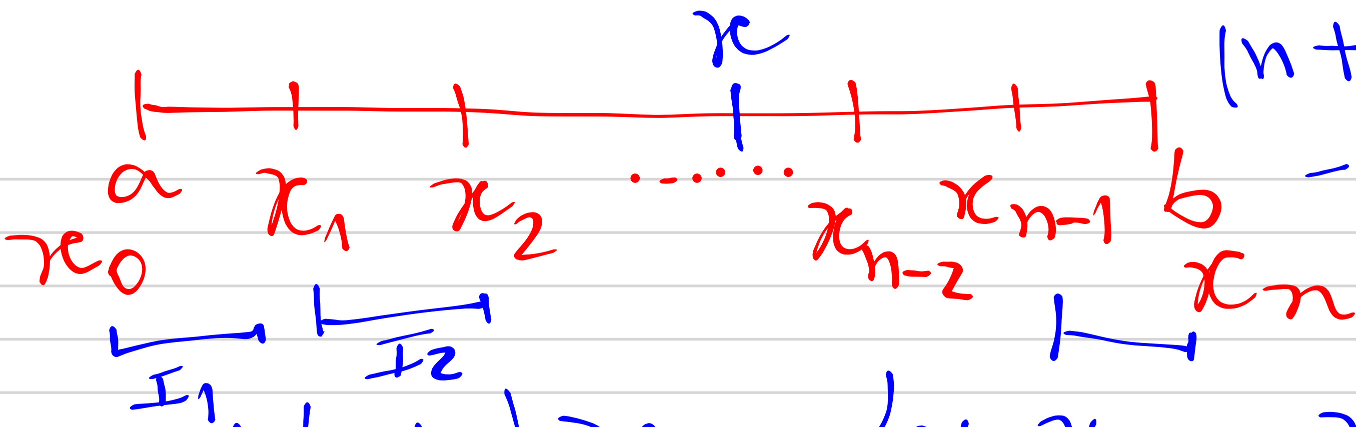
defina: $t \longmapsto \varphi(t)$,

$$\varphi(t) = f(t) - p_n(t) - \left[\frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_{n+1}(x)}\right]\pi_{n+1}(t)$$

4

Note que: $\begin{cases} \varphi(x_i) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$ φ possui $(n+2)$ zeros.

$(n+1)$ sub-intervalos.



φ possui $(n+2)$ zeros $\{x_0, x_1, \dots, x_n, x\}$

Temos $(n+1)$ subintervalos.

Aplicando o Teo de Rolle para φ em cada um dos $(n+1)$ subintervalos, obtemos que $\varphi'(t)$ se anula em $(n+1)$ pontos. $(*)$ $\rightarrow$

$\boxed{n=0}$ $\Rightarrow$ $n+1 = 1$ subintervalo,

então ψ' se anula em

um ponto $\xi \in (a,b)$, $\psi'(\xi) = 0$.

Em (4)

$$\psi'(t) = f'(t) - \cancel{P_0'(t)} - \left[\frac{f(x) - P_0(x)}{\Pi_1(x)}\right] \cdot 1$$

$$\Pi_1(t) = (t - x_0) \Rightarrow \Pi_1'(t) = 1.$$

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \left[\frac{f(x) - p_0(x)}{\pi_1(x)} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - p_0(x) = f'(\xi) \cdot \pi_1(x)}$$

Fica provado (I) para $n = 0$.

$n \geq 1$

$\psi \longrightarrow (n+2)$ zeros

$\psi' \longrightarrow (n+1)$ zeros $\quad (n+1) - \underline{0}$,

$\psi'' \longrightarrow n$ zeros $\quad (n+1) - \underline{1}$ "

$\psi''' \longrightarrow n-1$ zeros $\quad (n+1) - \underline{2}$ "

$\vdots \qquad \vdots$

$\psi^{(n+1)} \longrightarrow \underline{\underline{1}}$ zero $\quad (n+1) - \underline{n}_{(n+1)}$

→ (*) Como $\varphi'(t)$ se anula em $(n+1)$ pontos, pelo Teo de Rolle, $\varphi''(t_i)$ se anula em n pontos.

Como $\varphi^{(n+1)}$ é contínua, podemos aplicar o Teorema de Rolle até chegar que:

$\varphi^{(n+1)}$ se anula em 1 ponto $\xi \in (a,b)$.

De (4):

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - \left[\frac{f(x) - P_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\right]\cdot (n+1)!$$

$$P_n^{(n+1)}(t) \to 0$$

Vamos usar que:

$$\prod_{n+1}^{(n+1)} (t) = (n+1)!$$

Prova-se por indução sobre n.

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \left[\frac{f(x) - p_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)}\right](n+1)!$$

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{\Pi_{n+1}(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

?

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \Pi_{n+1}(x)$$

Provado (I).

Como $f^{(n+1)}$ é contínua em $[a,b]$, então, $|f^{(n+1)}|$ também é contínua em $[a,b]$, T.W é garantida a existência de máximo em $[a,b]$:

$$M_{n+1} = \max_{\eta \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\eta)| \text{ e}$$

(II) fica provado:

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leqslant \underbrace{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}}\cdot \Pi_{n+1}(x) \;.$$

$\blacksquare$

Exemplo: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $x \in [-5,5]$

Grau n	Erro Máximo
2	0.65
4	0.44
16	14.25
20	58.59
24	252.78

$$\text{Erro Máximo} = \frac{1}{4} M_{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)}$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [-5,5]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

$$P_n \longrightarrow f$$

Obs: Os zeros do polinômio de Chebyshev corrigem o "efeito de Runge".