Solução numérica de problema de valor inicial

Irineu Palhares

November 2025

Sumário

PVC

A forma mais geral dos problema de contorno aos quais nos referirremos é:

$$
\begin{aligned}
& y'' = f(x, y, y') \\
& a_1 y(a) + b_1 y'(a) = \gamma_1 \\
& a_2 y(b) + b_2 y'(b) = \gamma_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2, γ_1 e γ_2 são constantes reais conhecidas, tais que nem a_1 e b_1, nem a_2 e b_2 sejam nulas ao mesmo tempo.

O método das diferenças finitas

As aproximações mais usadas para a primeira derivada no ponto x_i são:

Avançada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Atrasada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Centrada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Aproximação para a derivada de segunda ordem

Utilizando a série de Taylor, deduziremos a aproximação mais típica para a derivada segunda, bem como a expressão do erro para ela. Para tal, usaremos a expansão nos pontos x_{i+1} e x_{i-1}:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i+1}) \quad (2)$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i-1}) \quad (3)$$

E, agora, (2) + (3) nos fornece:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24}\left[y^{(iv)}(\xi_{i+1}) + y^{(iv)}(\xi_{i-1})\right]$$

Fórmula para y''

Assim, temos a expressão para $y''(x_i)$:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

com erro da ordem de h^2.

Exemplo: PVI linear

Example

$$\begin{aligned} y''(x) + 2y'(x) + y(x) &= x \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= -1 \end{aligned} \tag{4}$$

A solução analítica desse problema é $y = 2e^{-x}(1 - x) + x - 2$.

PVC não linear

Example

$$
\begin{aligned}
y'' &= y \sin y + xy \\
y(0) &= 1 \\
y(1) &= 5
\end{aligned} \tag{5}
$$

Exercícios

1. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned} y'' &= y' + 2y + \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y(0) &= -0.3, \\ y(\frac{\pi}{2}) &= -0.1 \end{aligned} \tag{6}$$

   cuja solução analítica é $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$.

2. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'),\ 1 \leq x \leq 3 \\ y(1) &= 17, \\ y(3) &= \frac{43}{3} \end{aligned} \tag{7}$$

   o qual tem solução exata $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

Algoritmo de Thomas

Considere o sistema linear tridiagonal

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

em que:

- a_i é a subdiagonal ($i = 2, \ldots, n$),
- b_i é a diagonal principal ($i = 1, \ldots, n$),
- c_i é a superdiagonal ($i = 1, \ldots, n-1$).

O algoritmo de Thomas é um método direto composto por duas etapas: *eliminação direta (forward sweep)* e *substituição retroativa (backward substitution)*.

Construção do algoritmo

Define-se as sequências modificadas c_i' e d_i' da seguinte forma:
Para $i = 1$:

$$c_1' = \frac{c_1}{b_1}, \qquad d_1' = \frac{d_1}{b_1}$$

Para $i = 2, \ldots, n$:

$$\alpha_i = b_i - a_i c_{i-1}'$$

$$c_i' = \frac{c_i}{\alpha_i}, \qquad d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{\alpha_i}$$

onde c_n' não é utilizado, pois $c_n = 0$.

Retrosubstituição

A solução é obtida a partir de:

$$x_n = d'_n$$

e, para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$:

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}$$

O algoritmo é estável desde que:

$$\alpha_i = b_i - a_i c'_{i-1} \neq 0, \quad \forall i$$

Em particular, a matriz tridiagonal deve ser preferencialmente **diagonalmente dominante**.

Análise de estabilidade de um PVC

Consideraremos aqui, Métodos de Diferenças Finitas para solução de PVC que não são baseados na resolução de problemas de valor inicial. O objetivo é fornecer um apanhado geral, enfatizando os c onceitos de dificuldades mais frequentes, como é o caso da restrição do tamanho h da malha e do tratamento da condição de fronteira com derivadas.

Seja o PVC:

$$\begin{aligned} & y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x), \\ & y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{aligned}$$

Impomos a restrição $q(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Após o processo de discretização precisamos impor que a matriz dos coeficientes A seja diagonamente dominante. Isso implica que

$$\frac{h}{2}|p(x_i)| \leq 1, \;\; i = 1, 2, \dots, N,$$

que é uma restrição sobre o tamanho do espaçamento h.

Erro de truncamento local

O erro de truncamento local τ_i é obtido apartir da fórmulação de diferenças. Para o caso considerado o erro é dado por:

$$\tau_i = \frac{h^2}{12}\left(y^{(4)}(\xi_i) - 2p(x_i)y'''(\eta_i)\right), \ i = 1, 2, \ldots, N,$$

onde ξ_i, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Assim, o erro de truncamento local é $O(h^2)$ e quando $h \to 0$ o método tende para a equação diferencial com ordem $O(h^2)$ e dizemos que o étodo é consistente de ordem 2.

Problema mal posto

O problema a ser resolvido pode apresentar dificuldades inerente se ele for mal posto. Por exemplo,

Example

$$\begin{aligned} y'' + \kappa^2 y &= 2\kappa^2 x, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 1, \end{aligned} \tag{8}$$

cuja solução analítica é $y(x) = -\frac{\sin(\kappa x)}{\sin(\kappa)} + 2x$.
Para $\kappa = \pi$ o problema não tem solução. Para $\kappa = \pi + \epsilon$, ϵ pequeno, $y(x) \approx -\epsilon^{-1} \sin((\pi + \epsilon)x) + 2x$. Assim, uma pequena variação nos dados do problema implica em grande variação na solução que passou a existir. O problema acima constitui um exemplo de um problema mal posto.

Exerícios

1. Construa um método de segunda ordem para resolver o seguinte PVF:

$$y'' + xy' + y = 2x,\ \ y(0) = 1,\ \ y(1) = 0.$$

   Admitindo $h = 0.1$ construa o sistema linear associado e resolva-o por meio do algoritmo de Thomas.

2. Seja o seguinte PVC:

$$y'' = \frac{\lambda^2}{8} - \frac{x^2}{32y^2},\ \ y(0) = 0,\ \ 2y'(1) - (1+\nu)y(1) = 0.$$

   Determine $y(1)$, para $\nu = 0.3$ e $\lambda = 0.991$, usando $h = 0.1$.