Método da Secante

- Método de Newton requer f'.
- f' pode ser desconhecida ou pode ser custoso calcular f' computacionalmente.

Assim, aproxima-se $f'(x_k)$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

e substitui no Método de Newton, obtendo:

Def. 1.8: O Método da Secante é definido por:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right]$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

onde x_0, x_1 são valores iniciais dados.

Teo. 1.10: f continuamente

① diferenciável em I,

$I_h = [\xi - h, \xi + h]$; $h > 0$.

Pg 26 (ou 38 PDF) Suli & Mayers

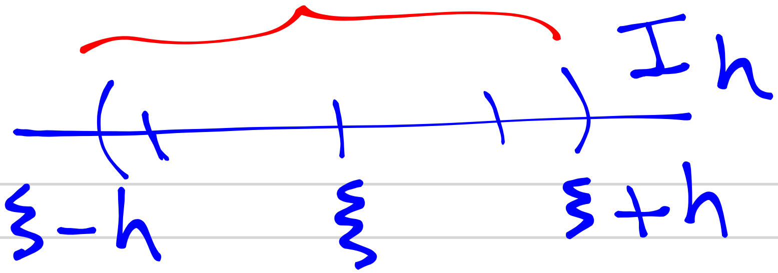
② $f(\xi) = 0$

③ $f'(\xi) \neq 0$

$\Longrightarrow x_k \longrightarrow \xi$, $k \longrightarrow +\infty$, no mínimo linearmente

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right]$$

Demonstração:



- Como $f'(\xi) \neq 0$, s.p.g., $f'(\xi) = \alpha > 0$ (1)

- f' é contínua em $\xi \Rightarrow$

$\forall \varepsilon = \frac{\alpha}{4} > 0$; $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tq

$|f'(x) - f'(\xi)| < \varepsilon$, sempre que $|x - \xi| < \delta_\varepsilon$. (*)

Seja $\delta = \min\{\delta_\varepsilon, h\}$.

Então, $(*)$ vale para δ também:

$$\underbrace{f'(\xi)}_{\alpha} - \underbrace{\varepsilon}_{\frac{\alpha}{4}} < f'(x) < \underbrace{f'(\xi)}_{\alpha} + \underbrace{\varepsilon}_{\frac{\alpha}{4}}, \; x \in I_\delta$$

(1)

$$\boxed{0 < \frac{3}{4}\alpha < f'(x) < \frac{5}{4}\alpha;}$$

(2) $\forall x \in I_\delta$.

• Do Método das Secantes:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right]$$

$k \geq 1$

$(\times -1)$ e $(+\xi)$

$$\xi - x_{k+1} = \xi - x_k + f(x_k) \cdot \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right]$$

(3)

$k \geq 1$

Se x_k e x_{k-1} estiverem em I_δ,

f é continuamente diferenciável entre x_k e x_{k-1}.

Vamos aplicar o T.V.M:

$\exists\ \underbrace{\varphi_k}$ entre x_k e x_{k-1} tal que

$\varphi_k \in I_\delta$

$$f'(\varphi_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (4)$$

$k \geq 1$

4 $\hookrightarrow$ 3

$$\xi - x_{k+1} = \xi - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(\eta_k)}, \quad k \geq 1$$

5

Vamos aplicar novamente o T.V.M para f entre x_k e ξ:

$\exists\, \vartheta_k$ entre x_k e ξ tq $f'(\vartheta_k) = \dfrac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi}$

$(\vartheta_k \in I_\delta)$

$$f(x_k) = (x_k - \xi) \cdot f'(\vartheta_k) \qquad (6)$$

(6) $\to$ (5)

$$\xi - x_{k+1} = \underbrace{\xi - x_k} + \underbrace{(x_k - \xi)} \cdot \frac{f'(\vartheta_k)}{f'(\varphi_k)}$$

$k \geq 1$; $\vartheta_k, \varphi_k \in I_\delta$.

$$\xi - x_{k+1} = (\xi - x_k)\underbrace{\left[1 - \frac{f'(\vartheta_k)}{f'(\eta_k)}\right]}_{<2/3}$$

7

$$\boxed{\underbrace{|x_{k+1} - \xi|}_{} < \underbrace{\frac{2}{3}}_{} \cdot \underbrace{|x_k - \xi|}_{}}$$

1

$k=0: \quad |x_1 - \xi| < 2/3\,|x_0 - \xi|$

$k=1: \quad |x_2 - \xi| < 2/3\,|x_1 - \xi| < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot |x_0 - \xi|$

$\vdots \quad |x_{k+1} - \xi| < (2/3)^{k+1} \cdot |x_0 - \xi|$

Quando $k \to \infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \to 0$,

e portanto, $x_k \to \xi$. $\blacksquare$

Para simplificar notação:

$$x > A \Rightarrow -x < -A$$

2 $\begin{cases} 0 < \underline{A < x} < B \\ 0 < A < y < B \end{cases}$

$$y > A \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{A}$$

$$y < B \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{B}$$

$A = 3/4\, \alpha$

$B = 5/4\, \alpha$

$x = f'(\vartheta_k)$

$y = f'(\varphi_k)$

$$1-\frac{X}{Y}=\frac{Y-X}{Y}<\frac{B-A}{A}=\frac{B}{A}-1$$

$$1-\frac{X}{Y}<\frac{5/4\,\cancel{\alpha}}{3/4\,\cancel{\alpha}}-1=\frac{2}{3}$$

$$1-\frac{X}{Y}=\frac{Y-X}{Y}>\frac{A-B}{B}=\frac{A}{B}-1$$

$$1-\frac{X}{Y}>\frac{3/4\,\cancel{\alpha}}{5/4\,\cancel{\alpha}}-1=-\frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{3} < -\frac{2}{5} < 1 - \frac{x}{4} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left| 1 - \frac{x}{4} \right| < \frac{2}{3}$$

7