Splines Cúbicas Süli & Mayers

- $f \in C[a,b]$
- $K = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_m = b\}$ tal que
  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$.
- $S = \{s \in C^2[a,b] : s(x_i) = f(x_i)\,;\ i = 0, 1, \ldots, m\}$.

  s é um polinômio de grau 3 em $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Diferentemente da spline linear, não existe unicidade para s, pois temos 02 pontos com informações para determinar um pol. cúbico (com 4 coeficientes incógnitas) ~~[illegible]~~

nº incógnitas > nº eqs.

$$S(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}_{\text{4 coeficientes p/ cada subintervalo}}$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$\overset{I_1}{a = x_0 \;—\; x_1} \;\overset{I_2}{—\; x_2} \;\cdots\; \overset{I_m}{x_{m-1} \;—\; x_m = b}$$

$\therefore$ Temos $4.m$ coeficientes a deter-minar no total.

Teremos que impor:

- $(m+1)$ condições de interpolação:
  $S(x_i) = f(x_i)$; $i = 0, 1, \ldots, m$.
- $3(m-1)$ condições de continuidade:
  $S \in C^2[a,b] \Rightarrow$ S, S', S'' são contínuas nos nós internos $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$

  S cont em $(m-1)$ ptos

  S' " " $(m-1)$ ptos

  S'' " " $(m-1)$ ptos

$\Rightarrow (m+1) + 3(m-1) = 4m - 2$

condições para determinar $4m$ coeficientes!) Faltam 02 condições!

Dependendo da escolha dessas 02 condições, pode-se construir vários tipos de splines cúbicas!

$\hookrightarrow$

1

Uma classe importante de splines cúbicas é a classe das splines cúbicas naturais (+ usadas!)

Spline Cúbica Natural : S_2

$$S_2 \in S \quad e \quad \begin{cases} S_2''(x_0) = 0 & (i) \\ S_2''(x_m) = 0 & (ii) \end{cases}$$

Vamos provar que essas 02 condições adicionais (i) e (ii) fornecerá unicamente S_2.

Construção de S_2:

(1) seja $\sigma_i = S_2''(x_i)$; $i = 0, \dots, m$.

$$\Rightarrow \sigma_0 = S_2''(x_0) = 0$$
$$\sigma_m = S_2''(x_m) = 0$$

(2) S_2'' é linear em cada $[x_{i-1}, x_i]$ pois $S_2 \in P_3$.

$$\Rightarrow S_2'' = \frac{x_i - x}{h_i}\sigma_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\sigma_i,$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$ $\quad h_i = x_i - x_{i-1}$.

(3) Integrando 2x S_2'' em $[x_{i-1}, x_i]$: (Tarefa)

$$S_2(x) \ (*) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}\sigma_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}\sigma_i + \alpha_i(x - x_{i-1}) + \beta_i(x_i - x);$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$.

α_i, β_i : constantes de integração.

(4) Pela interpolação:

$$\begin{cases} S_2(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = \frac{1}{6}\sigma_{i-1} \cdot h_i^2 + \beta_i h_i \\ S_2(x_i) = f(x_i) = \frac{1}{6}\sigma_i h_i^2 + \alpha_i h_i \end{cases}$$

(5) Isolando α_i e β_i:

$$\left.\begin{aligned} \beta_i &= \frac{f(x_{i-1}) - 1/6\,\sigma_{i-1} \cdot h_i^2}{h_i} \\ \alpha_i &= \frac{f(x_i) - 1/6 \cdot \sigma_i \cdot h_i^2}{h_i} \end{aligned}\right\} (**)$$

⑥ Substituindo α_i e β_i em ⊛

$$S_2(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}\sigma_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}\sigma_i +$$

$$+ \frac{f(x_i) - 1/6\,\sigma_i h_i^2}{h_i} \cdot (x - x_{i-1}) +$$

$$+ \frac{f(x_{i-1}) - 1/6\,\sigma_{i-1} \cdot h_i^2}{h_i}(x_i - x) \; ;$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i].$$

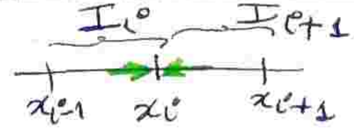
⑦ Calculando S_2' :

$$S_2'(x) = -\frac{3(x_i - x)^2}{6h_i} \cdot \sigma_{i-1} + \frac{3(x - x_{i-1})^2}{6h_i}\sigma_i +$$

$$+ \frac{f(x_i) - 1/6 \cdot \sigma_i \cdot h_i^2}{h_i} - \frac{(f(x_{i-1}) - 1/6\,\sigma_{i-1} h_i^2)}{h_i}$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i].$$

⑧ $\boxed{S_2'(x_i^+) = S_2'(x_i^-)}$



$$S_2'(x) \overset{\odot}{=} -\frac{3(x_i - x)^2 \sigma_{i-1}}{6h_i} + \frac{3(x - x_{i-1})^2}{6h_i}\sigma_i +$$

$$+ \frac{f(x_i) - 1/6 \cdot \sigma_i \cdot h_i^2}{h_i} - \frac{(f(x_{i-1}) - 1/6\,\sigma_{i-1} h_i^2)}{h_i}$$

para $x \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$

e

$$S_2'(x) \overset{\odot\odot}{=} -\frac{3(x_{i+1} - x)^2 \sigma_i}{6h_{i+1}} + \frac{3(x - x_i)^2}{6h_{i+1}} \cdot \sigma_{i+1} +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1}) - 1/6\,\sigma_{i+1} h_{i+1}^2}{h_{i+1}} - \frac{[f(x_i) - \frac{1}{6}\sigma_i \cdot h_{i+1}^2]}{h_{i+1}}$$

para $x \in I_{i+1} = [x_i, x_{i+1}]$.

Substituindo em ⑧ :

$$S_2'(x_i^-) \overset{\odot}{=} \frac{1}{2} h_i \sigma_i + \frac{f(x_i) - 1/6\,\sigma_i \cdot h_i^2}{h_i} -$$

$$- \frac{(f(x_{i-1}) - 1/6\,\sigma_{i-1} h_i^2)}{h_i} \;\; \because \; = S_2'(x_i^+) \overset{\odot\odot}{=} -\frac{1}{2} h_{i+1} \sigma_i + \;\rightarrow$$

$$+\frac{f(x_{i+1}) - \frac{1}{6}\sigma_{i+1} h_{i+1}^2}{h_{i+1}} - \frac{\left[f(x_i) - \frac{1}{6}\sigma_i h_{i+1}^2\right]}{h_{i+1}}$$

Fazendo contas para agrupar $\sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}$ no 1º membro e os valores conhecidos passam p/ 2º membro, tem-se:

$$h_i \cdot \sigma_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)\sigma_i + h_{i+1}\sigma_{i+1} = 6\left[\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}}\right) - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}\right)\right]$$

$i = 1, 2, \ldots, m-1$ pontos internos.

Sabemos que $\sigma_0 = \sigma_m = 0$.

$i=1: h_1\sigma_0 + 2(h_1+h_2)\sigma_1 + h_2\sigma_2 = b_1$

$i=2: h_2\sigma_1 + 2(h_2+h_3)\sigma_2 + h_3\sigma_3 = b_2$

$i=3: h_3\sigma_2 + 2(h_3+h_4)\sigma_3 + h_4\sigma_4 = b_3$

$\vdots$

$i=m-1: h_{m-1}\sigma_{m-2} + 2(h_{m-1}+h_m)\sigma_{m-1} + h_m\sigma_m = b_{m-1}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & h_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & h_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{m-1} & 2(h_{m-1}+h_m) \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{m-1} \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{bmatrix}}_{b}$$

$m \times 1$

Resolve de modo global e obtém cada pedacinho.

$Ax = b$: A é tridiagonal, simétrica

A é e.d.d. (estritamente diagonal dominante $\overset{\text{ALN}}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ solução $X = [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}]^t$.

(9) Determinando $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1} \rightarrow$ (**) para α_i e β_i e depois $\rightarrow$ (*) para $S_2(x)$.

(4)