Método da Bissecção

Estimativa do nº de iterações K:

$$\underbrace{|x_k - \xi| \le \frac{(b-a)}{2^{k+1}} < \varepsilon}$$

$b - a < \varepsilon \cdot 2^{k+1}$ | $2^{k+1} > \frac{b-a}{\varepsilon}$

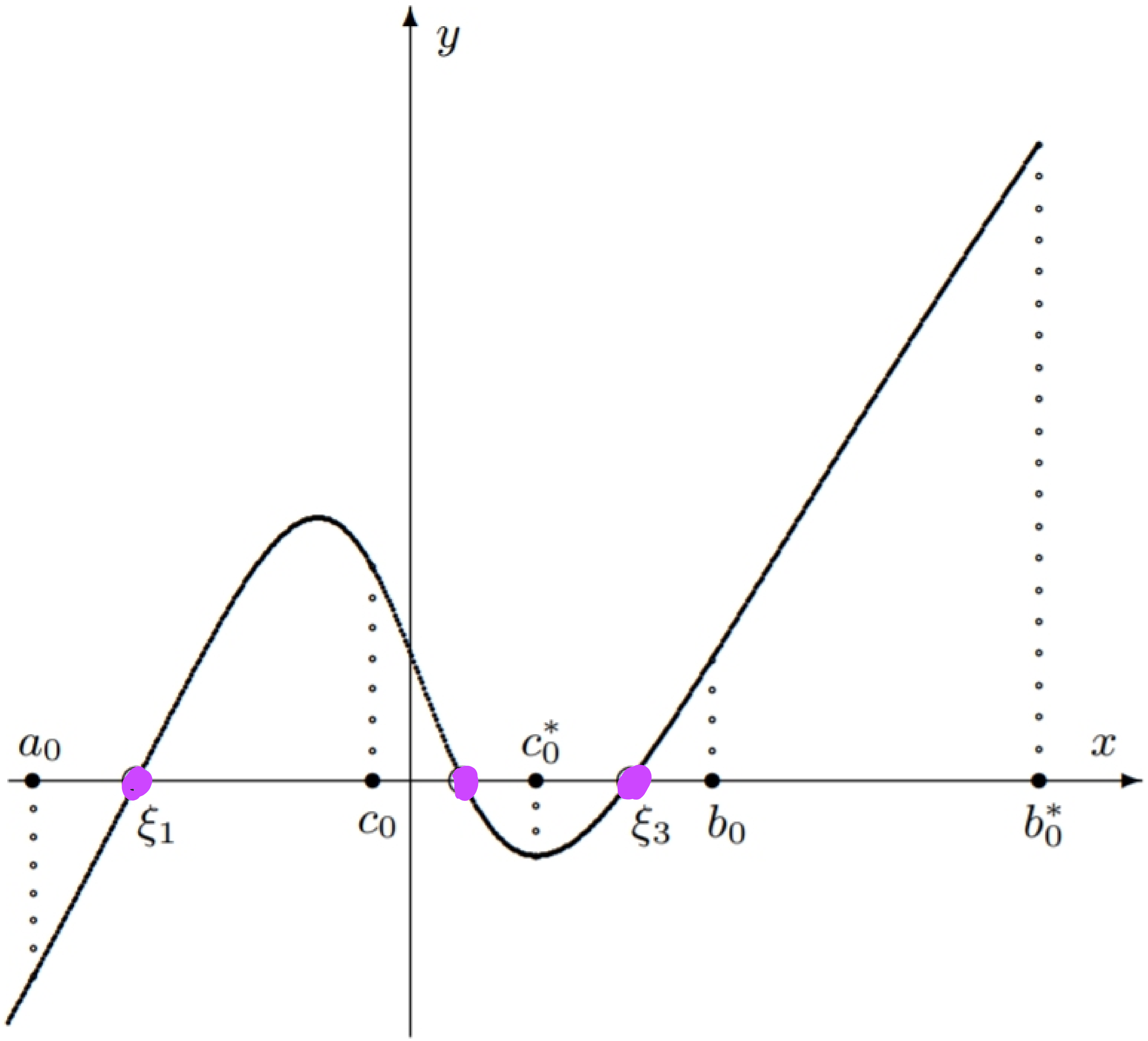
$\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{k+1}$ | $\log_2 2^{k+1} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$

$\log_2$ é f.ção crescente

$$(K+1)\cdot\underbrace{\log_2 2}_{=1} > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$K > \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1 \right\rceil$$

↳ próximo natural.



y
x
a_0
ξ_1
c_0
c_0^*
ξ_3
b_0
b_0^*

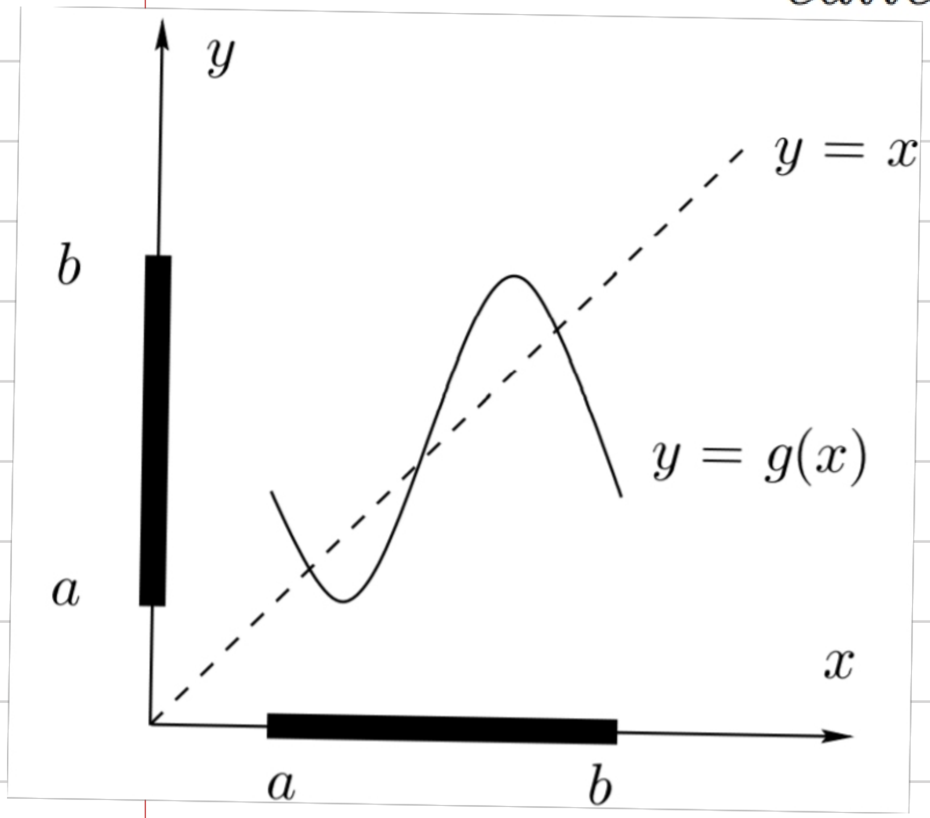
Solução Numérica de Equações

Profa. Gilcilene

PósMAC-UNESP

Método da Iteração Simples
(da Iteração Linear)
(do Ponto Fixo)

Theorem 1.2 (Brouwer's Fixed Point Theorem) *Suppose that g is a real-valued function, defined and continuous on a bounded closed interval $[a, b]$ of the real line, and let $g(x) \in [a, b]$ for all $x \in [a, b]$. Then, there exists ξ in $[a, b]$ such that $\xi = g(\xi)$; the real number ξ is called a* **fixed point of the function** *g.*



$g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$

contínua

$\Downarrow$

$\exists\, \xi \in [a,b] : g(\xi) = \xi$

Demonstração:

Seja $f(x) = x - g(x)$.

Observe que:

(i) $g(a) \in [a, b] \Rightarrow$

$g(a) \geq a$

(ii) $g(b) \in [a, b] \Rightarrow$

$g(b) \leq b$

Então,

$f(a) = a - g(a) \leq 0$ por (i)

$f(b) = b - g(b) \geq 0$ por (ii)

Temos então que $f(a).f(b) \leq 0$ e que f é contínua. $\Rightarrow$ Pelo Teo 1.1,

$\exists\, \xi \in [a,b] : \; 0 = f(\xi) = \xi - g(\xi)$ ■

Exemplo 1.1:

$$f(x) = e^x - 2x - 1 \; ; \; x \in [1,2]$$

Obs: $f(1) = e^1 - 3 < 0$

$f(2) = e^2 - 5 > 0$

f é cont. $\Rightarrow \exists$ raíz de f.

Teo 1.1

$$\boxed{g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0}$$

$$0 = e^x - 2x - 1 \Rightarrow 2x = e^x - 1$$

$$\boxed{x = \frac{e^x - 1}{2}}$$

$$g(x) = \frac{e^x - 1}{2} \; ; \; x \in [1,2]$$

$$g(1) = \frac{e - 1}{2} \approx 0,85 \Rightarrow g(1) \notin [1,2]$$

$$g(2) = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19 \Rightarrow g(2) \notin [1,2]$$

g não satisfaz as hipóteses do Teo 1.2.

Verifique $g(x) = \ln(2x+1)$, $x \in [1,2]$.

$$g(1) = \ln(3) \approx \underline{\underline{1,09}} > 1$$

$$g(2) = \ln(5) \approx 1,6 < 2$$

Como g é monotônica crescente então $g(x) \in [g(1), g(2)] \subset [1,2]$.

Para $g(x) = \ln(2x+1)$, $x \in [1,2]$ pode-se aplicar o Teo 1.2.: $\exists\ \xi \in [1,2] : g(\xi) = \xi$.

Note que:

$$\underbrace{g(\xi)} = \xi$$

$$\underbrace{\ln(2\xi+1)} = \xi$$

$$e^{\ln(2\xi+1)} = e^{\xi}$$

$$2\xi + 1 = e^{\xi}$$

$$\underbrace{e^{\xi} - 2\xi - 1} = 0$$

$$\underbrace{f(\xi)} = 0$$

Teorema 1.3 (da contração)

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$
- **g é uma contração em $[a, b]$**

ENTÃO,

- g possui um **único** ponto fixo $\xi \in [a, b]$
- $\mathbf{x_k} \to \xi$, $k \to \infty$, **para qualquer** valor inicial $\mathbf{x_0} \in [a, b]$

($\{x_k\}$ é a sequencia gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$)

Demonstração:

Existência: Pelo Teo 1.2., $\exists\, \xi \in [a,b] : g(\xi) = \xi$.

Unicidade: seja $\eta \in [a,b] : g(\eta) = \eta$.

$|\xi - \eta| = |g(\xi) - g(\eta)| \leq L \cdot |\xi - \eta|$, $0 < L < 1$, para algum

$(1 - L) \cdot |\xi - \eta| \leq 0$. Como $1 - L > 0$,

então $|\xi - \eta| = 0 \Rightarrow \eta = \xi$.

$$|x_k - \xi| = |g(x_{k-1}) - g(\xi)| \leq$$

$$\leq L \cdot |x_{k-1} - \xi|; \; k \geq 1$$

e para algum $0 < L < 1$.

$k=1$: $|x_1 - \xi| \leq L \cdot |x_0 - \xi|$

$k=2$: $|x_2 - \xi| \leq L \cdot |x_1 - \xi| \leq L^2 \cdot |x_0 - \xi|$

$\vdots$

$$|x_k - \xi| \leq L^k \cdot |x_0 - \xi| \; ; \; k \geq 1; \; 0 < L < 1$$

Como $0 < L < 1 \Rightarrow L^k \to 0, k \to \infty$.

Então, $|x_k - \xi| \to 0$; $k \to \infty$.

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi$$

independente da escolha de $x_0 \in [a, b]$.

$\blacksquare$

Exemplo 1.2:

$$f(x) = e^x - 2x - 1$$

$$g(x) = \ln(2x+1),$$

$$x \in [1,2].$$

Pelo Teo 1.2: $g : [1,2] \longrightarrow [1,2]$ contínua

então admite $\xi \in [1,2] : g(\xi) = \xi$.

Vamos verificar se g é uma contração (para construirmos o met. numérico pela iteração simples convergente)

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ g \text{ é contínua em } [1,2] \\ \bullet\ g \text{ é derivável em } (1,2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{T.V.M}$$

dados $x, y \in [1,2]$, existe η entre x e y, e portanto, $\eta \in (1,2)$, tal que:

$$g'(\eta) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}$$

$$|g(x)-g(y)| = |g'(\eta)| \cdot |x-y|$$

$$|g(x)-g(y)| \leq \frac{2}{3} \cdot |x-y|$$

$\therefore$ g é uma contração!

Precisamos mostrar que

$|g'(\eta)| < 1$.

$g'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$; $g''(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2} < 0$

Como $g''(x) < 0$; $\forall x \in [1,2]$ então

g' é decrescente em $[1,2]$.

Temos que:

$$1 < \eta < 2$$

então: $$g'(1) \geq g'(\eta) \geq g'(2)$$

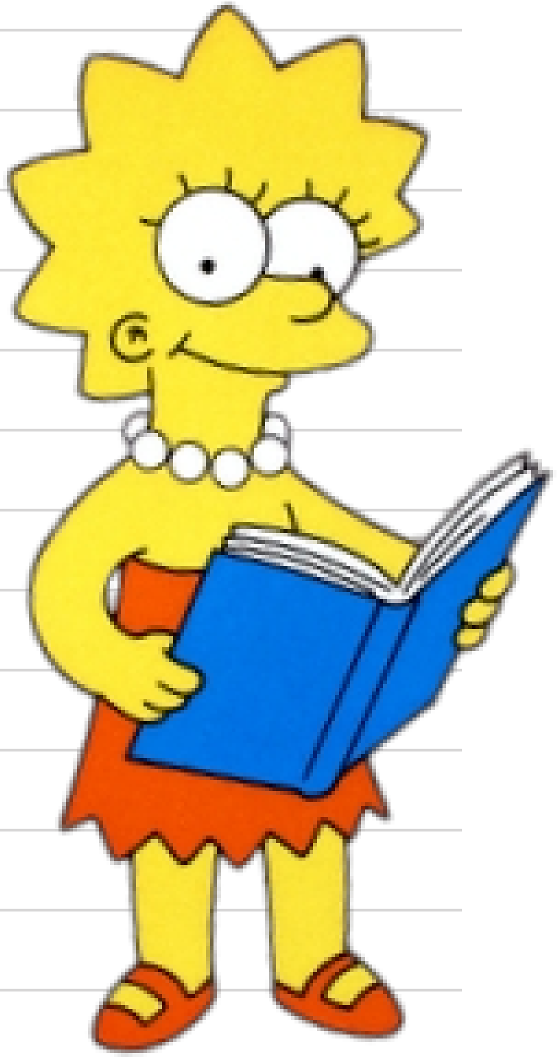
$$g'(\eta) \in [2/5, 2/3]$$

Sendo g uma contração em $[1,2]$, então a seq:

$$\boxed{\begin{gathered} x_{k+1} = \ln(2 \cdot x_k + 1) \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}}$$

é convergente $\forall x_0 \in [1,2]$.

Teorema 1.5



- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$
- **g é de classe C^1 em alguma V_ξ**
  (V_ξ: vizinhança de ξ; ξ ponto fixo de g.)
- $|g'(\xi)| < 1$

ENTÃO,

- $\mathbf{x_k} \to \xi$, $k \to \infty$, **SE** x_0 está **suficientemente próximo** de ξ.

($\{x_k\}$ é a sequencia gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$)

Demonstração:

Lema 1: $\begin{cases} g' \text{ é de classe } C^1 \text{ em } V_\xi. \\ |g'(\xi)| < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |g'(x)| < L \; ; \; 0 < L < 1, \quad \forall x \in I_\xi \subset V_\xi.$$

g' é contínua em V_ξ, sendo $V_\xi = [\xi - h, \xi + h]$, para algum $h > 0$.

Então, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right) > 0$,

$\exists\, \delta > 0 : |g'(x) - g'(\xi)| < \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right)$ sempre que $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.

$$|g'(x)| = |g'(x) - g'(\xi) + g'(\xi)| \leq$$

$$\leq |g'(x) - g'(\xi)| + |g'(\xi)| .$$

$$\leq \frac{1}{2}(1 - |g'(\xi)|) + |g'(\xi)| \; ; \forall x \in I_\delta$$

$$= \frac{1}{2}(1 + |g'(\xi)|) < 1$$

$$= L$$

$$\boxed{\text{Seja } x_K \in I_\delta.}$$

$$|x_{K+1} - \xi| = |g(x_K) - g(\xi)| \overset{\substack{\text{T.V.M entre} \\ x_K \text{ e } \xi.}}{=}$$

$$= |g'(\eta_K)| \cdot |x_K - \xi| \quad \text{para } \eta_K \text{ entre } x_K \text{ e } \xi.$$

$\Rightarrow$ η_K também está em I_δ, logo

$$|g'(\eta_K)| < L \underset{\text{ou}}{;} L < 1.$$

Então,

$$|x_{k+1} - \xi| \leq L \cdot |x_k - \xi| \quad ; \quad (1)$$

com $0 < L < 1$.

O que nos diz que $x_{k+1} \in I_\delta$.

$k=0$: $|x_1 - \xi| \leq L|x_0 - \xi|$; $x_0, x_1 \in I_\delta$

$k=1$: $|x_2 - \xi| \leq L|x_1 - \xi| \leq L \cdot L|x_0 - \xi| = L^2 \cdot |x_0 - \xi|$

$\vdots$

$$|x_k - \xi| \leq L^k \cdot |x_0 - \xi| \; ;$$

Como $0 < L < 1$, $L^k \to 0$
$k \to \infty$.

$\therefore x_k \to \xi$, $k \to +\infty$,

sempre que $x_0 \in I_\xi$.

(x_0 estiver suficientemente próximo de ξ).