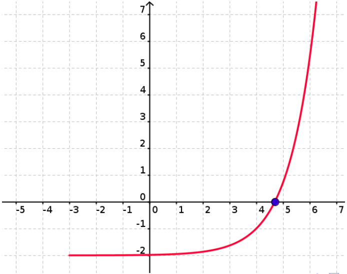
Solução numérica de equações



Introdução

É muito simples resolver

- a equação linear $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x = -\frac{b}{a} \ .$$

Como também

- a equação não-linear $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

Introdução

É muito simples resolver

- a equação linear $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x = -\frac{b}{a} \ .$$

Como também

- a equação não-linear $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ .$$

Introdução

É muito simples resolver

- a equação linear $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x = -\frac{b}{a} \; .$$

Como também

- a equação não-linear $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; .$$

Introdução

É muito simples resolver

- a equação linear $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x = -\frac{b}{a}\ .$$

Como também

- a equação não-linear $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Introdução

- Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) resolveu a equação polinomial cúbica.

- Lodovico Ferrari (1522-1565) resolveu a equação polinomial de quarto grau.

- Girolamo Cardano (1501-1576) publicou esses resultados em 1545 em *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*.

- Entretanto, não existe uma fórmula para solução de uma equação polinomial geral de grau n quando $n \geq 5$

Introdução

- Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) resolveu a equação polinomial cúbica.

- Lodovico Ferrari (1522-1565) resolveu a equação polinomial de quarto grau.

- Girolamo Cardano (1501-1576) publicou esses resultados em 1545 em *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*.

- Entretanto, não existe uma fórmula para solução de uma equação polinomial geral de grau n quando $n \geq 5$

Introdução

- Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) resolveu a equação polinomial cúbica.

- Lodovico Ferrari (1522-1565) resolveu a equação polinomial de quarto grau.

- Girolamo Cardano (1501-1576) publicou esses resultados em 1545 em *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*.

- Entretanto, não existe uma fórmula para solução de uma equação polinomial geral de grau n quando $n \geq 5$

Introdução

- Niccolo Fontana Tartaglia (1499-1557) resolveu a equação polinomial cúbica.
- Lodovico Ferrari (1522-1565) resolveu a equação polinomial de quarto grau.
- Girolamo Cardano (1501-1576) publicou esses resultados em 1545 em *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*.
- Entretanto, não existe uma fórmula para solução de uma equação polinomial geral de grau n quando $n \geq 5$

Introdução

- Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

- Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?
- No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

- Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

- Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?
- No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Introdução

- Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

- Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?
- No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Introdução

- Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

- Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?
- No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Introdução

- Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

- Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?
- No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

▶ Portanto, não existirá uma fórmula geral para solução de uma equação não-linear arbitrária da forma

$$f(x) = 0$$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

Perguntas:

▶ Como garantir a existência de uma solução em $\mathbb{R}$ e como determiná-la?

▶ No presente curso, vamos estudar estas questões!

Objetivo: Desenvolver métodos numéricos para determinar uma solução aproximada para $f(x) = 0$, sendo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Introdução

- Métodos para determinar os zeros de uma função são geralmente iterativos: a ideia é gerar uma sequencia de valores $x^{(k)}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \xi \ .$$

Existência de solução

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Observação:
O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

Existência de solução

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Observação:

O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

Existência de solução

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Observação:

O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

Existência de solução

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Observação:

O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Observação:

O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

Existência de solução

- Claramente $f(x) = x^2 + 1$ não possui raiz real.

Para evitar essas dificuldades, vamos explorar primeiro a existência de soluções no conjunto dos números reais:

Teorema 1: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponhamos que $f(a)f(b) \leq 0$.

Então, existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

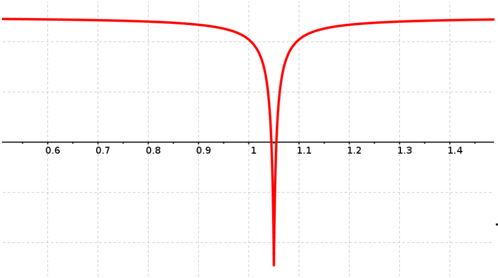
Observação:

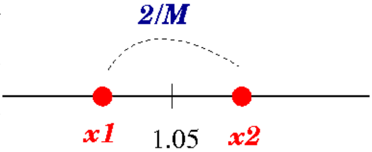
O Teorema 1 não garante unicidade de solução.

- Veja $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1 + M\,|x - 1.05|}$.

As raízes são $x_1 = 1.05 - \dfrac{1}{M}$ e $x_2 = 1.05 + \dfrac{1}{M}$.

Teorema 1 não garante unicidade de solução

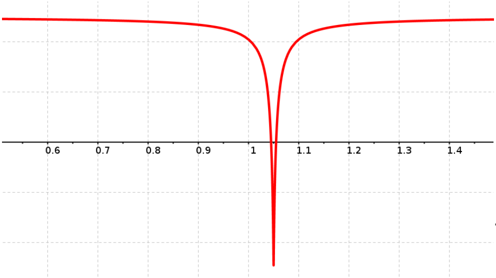


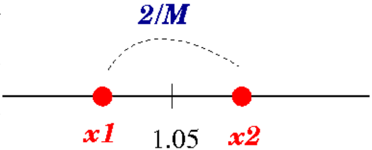


- As raízes distam $\dfrac{2}{M}$.

Assim, se M for suficientemente grande, as raízes x_1 e x_2 estarão tão próximas de modo que x_1 e x_2 podem estar no mesmo intervalo $[a, b]$.

Teorema 1 não garante unicidade de solução





- As raízes distam $\dfrac{2}{M}$.

Assim, se M for suficientemente grande, as raízes x_1 e x_2 estarão tão próximas de modo que x_1 e x_2 podem estar no mesmo intervalo $[a, b]$.

Método da Bissecção

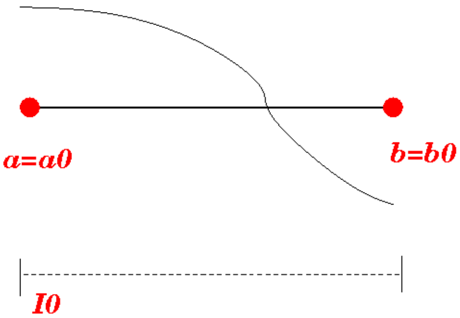
Método da Bissecção

- Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(\xi) = 0$ para algum $\xi \in [a, b]$.

A estratégia do método da bissecção consiste em dividir o intervalo em duas partes iguais (ao meio) e escolher o subintervalo em que f muda de sinal (onde estará ξ).

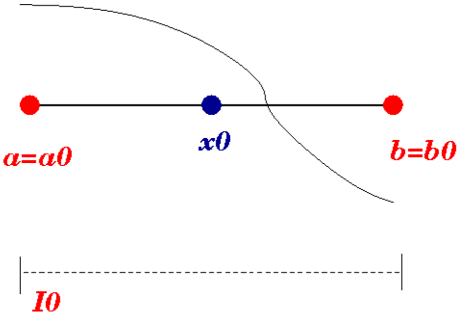
Veja o esquema geométrico:

Interpretação Geométrica e Convergência



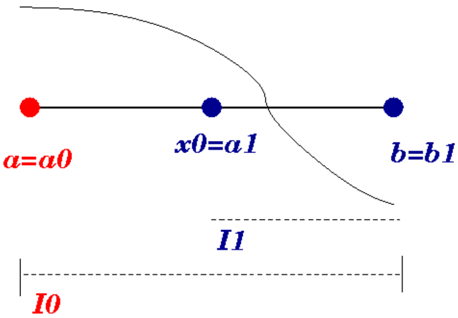
- Notação: comprimento do Intervalo: $|I|$.
- $|I_0| = |b - a| = |b_0 - a_0|$

Interpretação Geométrica e Convergência



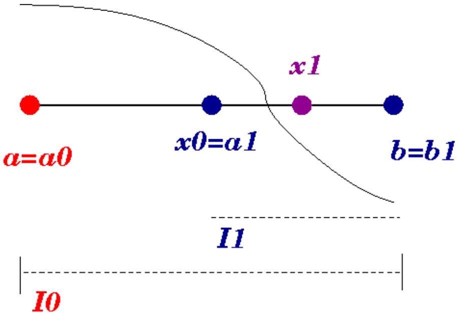
- $x_0 = \dfrac{b_0 + a_0}{2}$

Interpretação Geométrica e Convergência



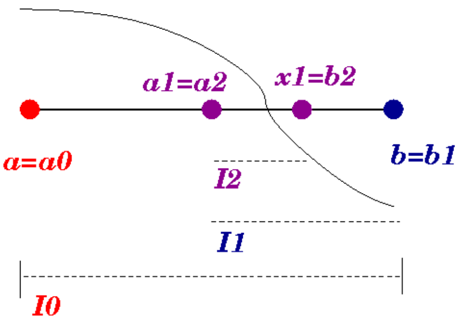
- $|I_1| = \dfrac{|I_0|}{2}$
- $|x_0 - \xi| \leq |I_1| = \dfrac{|I_0|}{2}$

Interpretação Geométrica e Convergência



- $x_1 = \dfrac{b_1 + a_1}{2}$

Interpretação Geométrica e Convergência



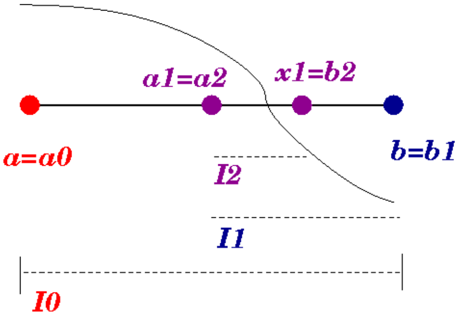
- $|I_2| = \dfrac{|I_1|}{2} = \dfrac{|I_0|}{2^2}$
- $|x_1 - \xi| \leq |I_2| = \dfrac{|I_0|}{2^2}$

Generalizando

$$|I_{k+1}| = \frac{|I_0|}{2^{k+1}}$$

$$|x_k - \xi| \leq \frac{|I_0|}{2^{k+1}}$$

Como $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|b-a|}{2^{k+1}} = 0$, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{k\to 0} |x_k - \xi| = 0$ $\Leftrightarrow \lim_{k\to 0} x_k = \xi$.



- $|I_2| = \dfrac{|I_1|}{2} = \dfrac{|I_0|}{2^2}$
- $|x_1 - \xi| \leq |I_2| = \dfrac{|I_0|}{2^2}$

Generalizando

$$|I_{k+1}| = \frac{|I_0|}{2^{k+1}}$$

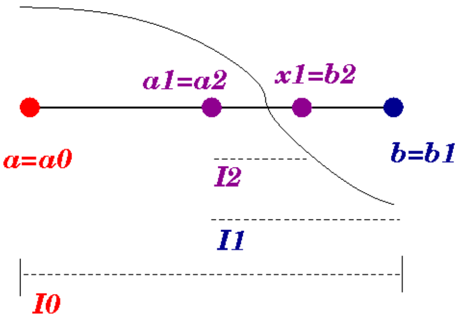
$$|x_k - \xi| \leq \frac{|I_0|}{2^{k+1}}$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|b-a|}{2^{k+1}} = 0$, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{k\to 0} |x_k - \xi| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to 0} x_k = \xi.$$

Interpretação Geométrica e Convergência



- $|I_2| = \dfrac{|I_1|}{2} = \dfrac{|I_0|}{2^2}$
- $|x_1 - \xi| \leq |I_2| = \dfrac{|I_0|}{2^2}$

Generalizando

$|I_{k+1}| = \dfrac{|I_0|}{2^{k+1}}$

$|x_k - \xi| \leq \dfrac{|I_0|}{2^{k+1}}$

Como $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{|b-a|}{2^{k+1}} = 0$, pelo Teorema do Confronto,

$\displaystyle\lim_{k\to 0} |x_k - \xi| = 0$

$\displaystyle\Leftrightarrow \lim_{k\to 0} x_k = \xi.$

Método da Bisseção

- Cada processo de divisão do intervalo é denominado iteração, em que denotamos por k.

- O Método da Bissecção pode ser descrito como

Para $k = 0, 1, 2, \cdots$
  Faça:
  $x_k = \dfrac{a+b}{2}$
  Se $f(a)f(x_k) < 0$, então $b = x_k$.
  Se não, então, $a = x_k$.

- Qual o número máximo de iterações?

Método da Bisseção

- Cada processo de divisão do intervalo é denominado iteração, em que denotamos por k.

- O Método da Bissecção pode ser descrito como

Para $k = 0, 1, 2, \cdots$

Faça:

$$x_k = \frac{a+b}{2}$$

Se $f(a)f(x_k) < 0$, então $b = x_k$.

Se não, então, $a = x_k$.

- Qual o número máximo de iterações?

Método da Bisseção

- Cada processo de divisão do intervalo é denominado iteração, em que denotamos por k.

- O Método da Bissecção pode ser descrito como

Para $k = 0, 1, 2, \cdots$

Faça:

$x_k = \dfrac{a+b}{2}$

Se $f(a)f(x_k) < 0$, então $b = x_k$.

Se não, então, $a = x_k$.

- Qual o número máximo de iterações?

Critério de Parada

- Para obter uma raiz com uma determinada precisão ε devemos, durante o processo iterativo efetuar o teste:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon \ .$$

(Erro Relativo)

- Em geral, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-m}$, sendo m o número de casas decimais que queremos corretas no resultado.

- Na prática, quando programamos devemos considerar o erro relativo na forma

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon max\{1, |x_{k+1}|\} \ ,$$

pois se $|x_{k+1}|$ estiver próximo de zero, o processo não estaciona.

Critério de Parada

- Para obter uma raiz com uma determinada precisão ε devemos, durante o processo iterativo efetuar o teste:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon \ .$$

(Erro Relativo)

- Em geral, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-m}$, sendo m o número de casas decimais que queremos corretas no resultado.

- Na prática, quando programamos devemos considerar o erro relativo na forma

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon max\{1, |x_{k+1}|\} \ ,$$

pois se $|x_{k+1}|$ estiver próximo de zero, o processo não estaciona.

Critério de Parada

- Para obter uma raiz com uma determinada precisão ε devemos, durante o processo iterativo efetuar o teste:

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon \ .$$

(Erro Relativo)

- Em geral, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-m}$, sendo m o número de casas decimais que queremos corretas no resultado.

- Na prática, quando programamos devemos considerar o erro relativo na forma

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon max\{1, |x_{k+1}|\} \ ,$$

pois se $|x_{k+1}|$ estiver próximo de zero, o processo não estaciona.

Numéro de iterações

- Além do teste do erro relativo devemos colocar um número máximo de iterações, pois se o programa não estiver correto e/ou o método não se aplicar ao problema, o programa entrará em *looping*:

Considere a seguinte estimativa com a precisão ε conveniente:

$|x_k - \xi| \leq \dfrac{(b-a)}{2^{k+1}} = \varepsilon,$

então,

$2^{k+1}\varepsilon = (b-a)$

$log_2(2^{k+1}) = log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right)$

$k = log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1.$

Assim, $\forall\ k > log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1,\ k \in \mathbb{N}$

obtém-se a precisão desejada.

▶ Além do teste do erro relativo devemos colocar um número máximo de iterações, pois se o programa não estiver correto e/ou o método não se aplicar ao problema, o programa entrará em *looping*:

Considere a seguinte estimativa com a precisão ε conveniente:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

então,

$$2^{k+1}\varepsilon = (b-a)$$

$$log_2(2^{k+1}) = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right)$$

$$k = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1.$$

Assim, $\forall\ k > log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1,\ k \in \mathbb{N}$

obtém-se a precisão desejada.

Numéro de iterações

- Além do teste do erro relativo devemos colocar um número máximo de iterações, pois se o programa não estiver correto e/ou o método não se aplicar ao problema, o programa entrará em *looping*:

Considere a seguinte estimativa com a precisão ε conveniente:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

então,

$$2^{k+1}\varepsilon = (b-a)$$

$$log_2(2^{k+1}) = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right)$$

$$k = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1.$$

Assim, $\forall\ k > log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1,\ k \in \mathbb{N}$

obtém-se a precisão desejada.

Numéro de iterações

- Além do teste do erro relativo devemos colocar um número máximo de iterações, pois se o programa não estiver correto e/ou o método não se aplicar ao problema, o programa entrará em *looping*:

Considere a seguinte estimativa com a precisão ε conveniente:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{(b-a)}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

então,

$$2^{k+1}\varepsilon = (b-a)$$

$$log_2(2^{k+1}) = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right)$$

$$k = log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1.$$

Assim, $\forall\ k > log_2\left(\frac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1,\ k \in \mathbb{N}$

obtém-se a precisão desejada.

Numéro de iterações

▶ Além do teste do erro relativo devemos colocar um número máximo de iterações, pois se o programa não estiver correto e/ou o método não se aplicar ao problema, o programa entrará em *looping*:

Considere a seguinte estimativa com a precisão ε conveniente:
$|x_k - \xi| \leq \dfrac{(b-a)}{2^{k+1}} = \varepsilon,$
então,
$2^{k+1}\varepsilon = (b-a)$
$log_2(2^{k+1}) = log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right)$
$k = log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1.$

Assim, $\forall\ k > log_2\left(\dfrac{(b-a)}{\varepsilon}\right) - 1,\ k \in \mathbb{N}$
obtém-se a precisão desejada.

Discussões

- No caso de raizes múltiplas em um intervalo $[a, b]$, o método convergirá para qualquer uma delas, a depender da escolha inicial de $[a, b]$.

- Na prática, sempre que possível, faz-se o gráfico de f em um software para ter uma melhor escolha de $[a, b]$.

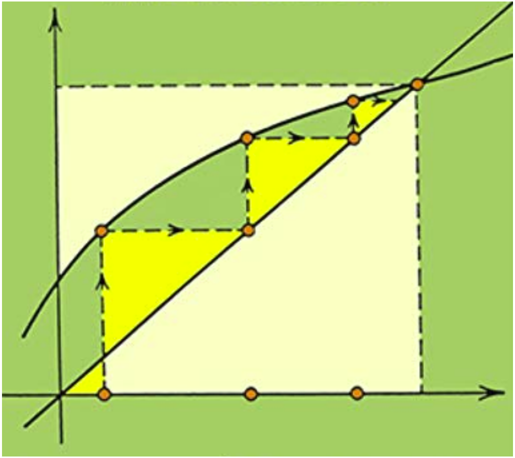
Em Resumo, vimos:

Teorema 2: Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f(a)f(b) < 0$.

O método da bissecção gera uma sequencia $\{x_k\}$ que converge para a solução da equação $f(x) = 0$ com erro $|x_k - \xi| \leq \dfrac{(b-a)}{2^{k+1}}$

Localização das raizes

Método da iteração simples (ou iteração linear ou do ponto fixo)



Capa do livro Issacson and Keller

Teorema 1.3 (da contração)

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$
- **g é uma contração em $[a, b]$**

ENTÃO,

- g possui um **único** ponto fixo $\xi \in [a, b]$
- $\mathbf{x_k} \to \xi,\ k \to \infty$, **para qualquer** valor inicial $\mathbf{x_0} \in [a, b]$

($\{x_k\}$ é a sequencia gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

- No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

- Então, mostrando que g é uma contração para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

- Determinando a única solução em $[1, 2]$:

  escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

  executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

- No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

- Então, mostrando que g é uma contração para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

- Determinando a única solução em $[1, 2]$:

  escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

  executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

- No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

- Então, mostrando que g é uma contração para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

- Determinando a única solução em $[1, 2]$:

  escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

  executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

• No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

• Então, mostrando que <u>g é uma contração</u> para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

• Determinando a única solução em $[1, 2]$:

escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

executar $Exemplo1\_2\_Suli\_Mayers.m$ GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

• No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

• Então, mostrando que g é uma contração para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

• Determinando a única solução em $[1, 2]$:

escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

• No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

• Então, mostrando que $\underline{g \text{ é uma contração}}$ para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

• Determinando a única solução em $[1, 2]$:

escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

• No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

• Então, mostrando que <u>g é uma contração</u> para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

• Determinando a única solução em $[1, 2]$:

escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$.

executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

- No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

- Então, mostrando que <u>g é uma contração</u> para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

- Determinando a única solução em $[1, 2]$:

  escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$**.**

  executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Exemplo 1.2 GNU Octave

Seja $f(x) = e^x - 2x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Aplique as garantias do Teorema 1.3 e determine a única solução de $f(x) = 0$ em $[1, 2]$.

Solução:

• No Exemplo 1.1 garantimos a existência de um ponto fixo $\xi \in [1, 2]$ de $g(x) = ln(2x + 1)$, que é solução de $f(x) = 0$.

• Então, mostrando que g é uma contração para garantir a unicidade do ponto fixo:

De fato, $\cdots$ (ver resolução na lousa/caderno)

• Determinando a única solução em $[1, 2]$:

escolhemos $x_0 = 1 \in [1, 2]$**.**

executar *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* GNU Octave

Teste outros $x_0 \in [a, b]$ (Teo 1.3 garante convergência)

Teorema 1.4:

- Considere a iteração $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$ (Def 1.1)
- Suponha que g satisfaz as condições do Teo 1.3
- Dados
  - $x_0 \in [a, b]$ e
  - uma tolerância $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x_k - \xi| \leq \varepsilon, \; \forall k \geq k_0(\varepsilon) \; \star$$

($k_0(\varepsilon)$ é o menor inteiro positivo tal que $\star$ ocorra.)

ENTÃO,

$$k_{\mathbf{0}}(\varepsilon) \leq \left[\frac{ln|x_1 - \mathbf{x_0}| - ln(\varepsilon(1 - L))}{ln(1/L)} \right] + 1$$

$[x]$: maior inteiro menor ou igual a x, $x \in \mathbb{R}$.

(I) Demonstrar do Teorema 1.4.

(II) Complementar o programa *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* afim de obter o número máximo de iterações a partir do qual obtém-se a precisão desejada,

ou seja,

inserir o cálculo de k_0 em *Exemplo1_2_Suli_Mayers.m* tal que $|x_k - \xi| \leq \varepsilon, \forall k \geq k_0(\varepsilon)$

GNU Octave

Definição ("1.4")

- Seja $\{x_k\}$ uma sequencia obtida por um método iterativo.
- Se existirem $p \geq 1$ e uma constante $c > 0$ tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c$$

- então, p é a ordem de convergência desse método numérico,
- e neste caso x_k converge para x^*, quando $k \to \infty$.

Substituindo a hipótese de contração no Teorema 1.3

g é uma contração

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq L < 1, \; \forall x, y \in [a,b], \; x \neq y.$$

a " **inclinação** da função **g**" **não ultrapassa** L

- **Assumindo g diferenciável em (a,b)**
- Pelo T.V.M., $\exists\ \eta_{xy} \in (x,y)$, $(x \neq y$ em $[a,b])$, tal que

$$g'(\eta_{xy}) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

- Assim, $|\mathbf{g'(\eta_{xy})}| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \mathbf{L}$, $\eta_{xy} \in (x,y)$.

Como $\eta_{xy} \in (x,y)$ **para quaisquer** $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, então:

$$\mathbf{|g'(x)| \leq L \;\; \forall x \in (a,b)}$$

Substituindo a hipótese de contração no Teorema 1.3

g é uma contração

$$\Leftrightarrow \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq L < 1, \ \forall x, y \in [a,b], \ x \neq y.$$

a " **inclinação** da função **g**" **não ultrapassa** L

- **Assumindo g diferenciável em (a,b)**
- Pelo T.V.M., $\exists \ \eta_{xy} \in (x,y)$, ($x \neq y$ em $[a,b]$), tal que

$$g'(\eta_{xy}) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

- Assim, $|\mathbf{g'(\eta_{xy})}| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \mathbf{L}$, $\eta_{xy} \in (x,y)$.

Como $\eta_{xy} \in (x,y)$ **para quaisquer** $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, então:

$$|\mathbf{g'(x)}| \leq \mathbf{L} \ \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Substituindo a hipótese de contração no Teorema 1.3

g é uma contração

$$\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq L < 1, \ \forall x, y \in [a,b], \ x \neq y.$$

a " **inclinação** da função **g**" **não ultrapassa** L

- **Assumindo g diferenciável em (a,b)**
- Pelo T.V.M., $\exists \ \eta_{xy} \in (x,y)$, $(x \neq y$ em $[a,b])$, tal que

$$g'(\eta_{xy}) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

- Assim, $|\mathbf{g'(\eta_{xy})}| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \mathbf{L}$, $\eta_{xy} \in (x,y)$.

Como $\eta_{xy} \in (x,y)$ **para quaisquer** $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, então:

$$|\mathbf{g'(x)}| \leq \mathbf{L} \ \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Substituindo a hipótese de contração no Teorema 1.3

g é uma contração

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq L < 1, \ \forall x, y \in [a,b], \ x \neq y.$$

a " **inclinação** da função **g**" **não ultrapassa** L

- **Assumindo g diferenciável em (a, b)**
- Pelo T.V.M., $\exists \ \eta_{xy} \in (x, y)$, ($x \neq y$ em $[a, b]$), tal que

$$g'(\eta_{xy}) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

- Assim, $|\mathbf{g}'(\eta_{\mathbf{xy}})| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \mathbf{L}$, $\eta_{xy} \in (x, y)$.

Como $\eta_{xy} \in (x, y)$ **para quaisquer** $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, então:

$$|\mathbf{g}'(\mathbf{x})| \leq \mathbf{L} \ \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

g é uma contração

$\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq L < 1, \ \forall x, y \in [a,b], \ x \neq y.$$

a " **inclinação** da função **g**" **não ultrapassa** L

- **Assumindo g diferenciável em (a,b)**
- Pelo T.V.M., $\exists \ \eta_{xy} \in (x,y)$, $(x \neq y$ em $[a,b])$, tal que

$$g'(\eta_{xy}) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y}.$$

- Assim, $|\mathbf{g}'(\eta_{\mathbf{xy}})| = \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq \mathbf{L}$, $\eta_{xy} \in (x,y)$.

Como $\eta_{xy} \in (x,y)$ **para quaisquer** $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, então:

$$|\mathbf{g}'(\mathbf{x})| \leq \mathbf{L} \ \forall \mathbf{x} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$$

Teorema 1.5

- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $g(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$
- **g é de classe C^1 em alguma V_ξ**

  (V_ξ: vizinhança de ξ; ξ ponto fixo de g.)
- $|g'(\xi)| < 1$

ENTÃO,

- $\mathbf{x_k} \to \xi$, $k \to \infty$, **SE** x_0 está **suficientemente próximo** de ξ.

($\{x_k\}$ é a sequencia gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$)

Demonstração: ver lousa/caderno

Teorema 1.6

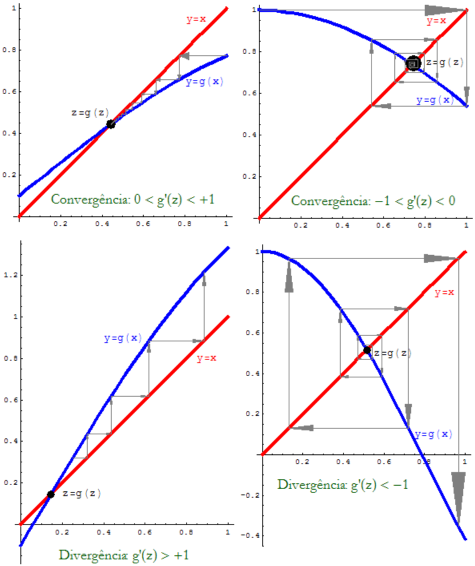
- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $\xi \in [a, b]$ é um ponto fixo de $g \quad (\xi = g(\xi))$
- g é de classe C^1 em alguma V_ξ
  (V_ξ: vizinhança de ξ; ξ ponto fixo de g.)
- $|g'(\xi)| > 1$

ENTÃO,

- $\{x_k\}$ gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$ **NÃO converge** para ξ,

qualquer que seja x_0;
exceto para $x_0 = \xi$, e
a menos que a sequencia atinja ξ em um número finito de passos.

Ilustração: Convergência X Divergência



- $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua
- $g(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$
- $\xi \in [a, b]$ é um ponto fixo de $g \quad (\xi = g(\xi))$

- ξ é um **ponto fixo estável** de g, se toda $\{x_k\}$ gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$ converge para ξ sempre que x_0 estiver suficientemente próximo a ξ.

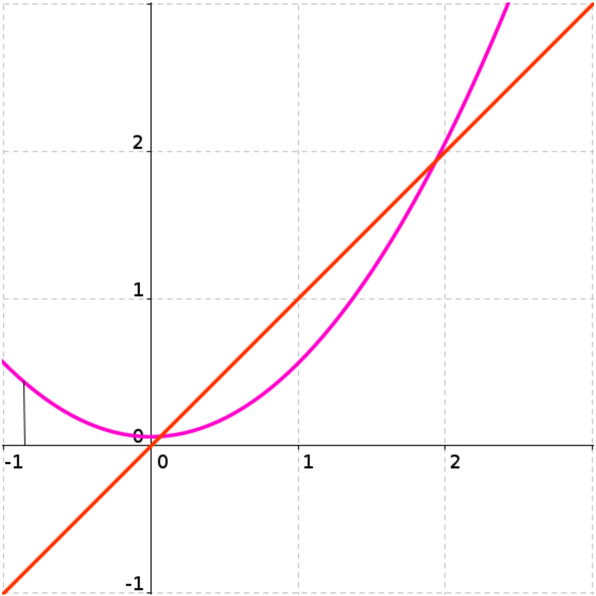
- ξ é um **ponto fixo instável** de g, se toda $\{x_k\}$ gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$ não convergir para ξ sempre que x_0 estiver suficientemente próximo a ξ.
(exceto para $x_0 = \xi$)

OBS: Um ponto fixo pode não ser estável e também não ser instável.

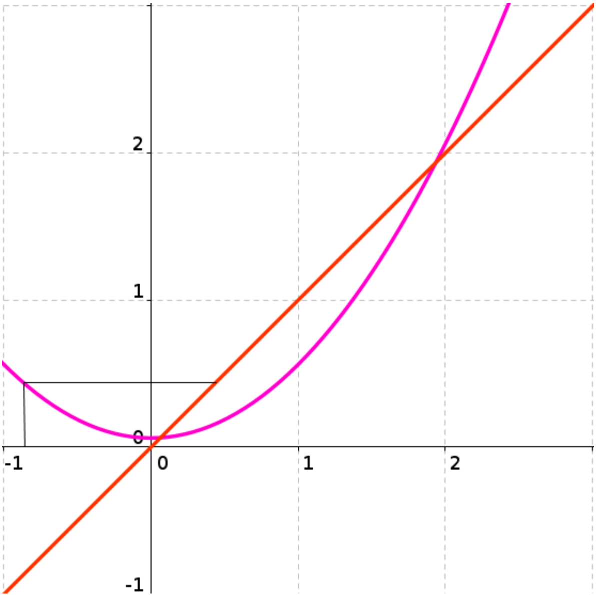
Exemplo 1.5

- Seja $\{x_k\}$ a sequencia gerada pela iteração $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots$
- $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + \dfrac{1}{8}\right)$
- a) Quais os pontos fixos de g?
- b) Classifique-os em estável/instável, se possível.
- c) Represente graficamente as iteradas para cada ponto fixo escolhido.

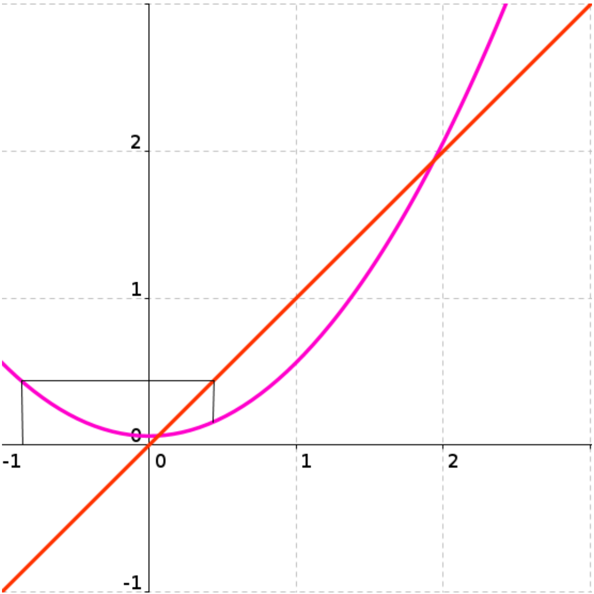
Caso $x_0 \in (-1, 0)$

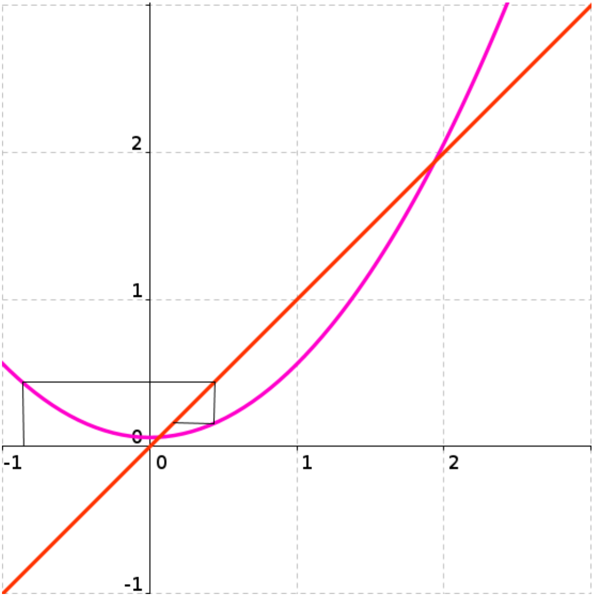


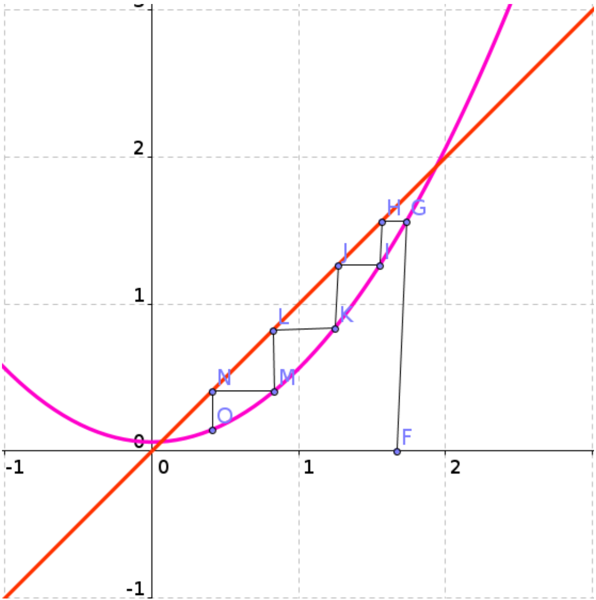
Caso $x_0 \in (-1, 0)$

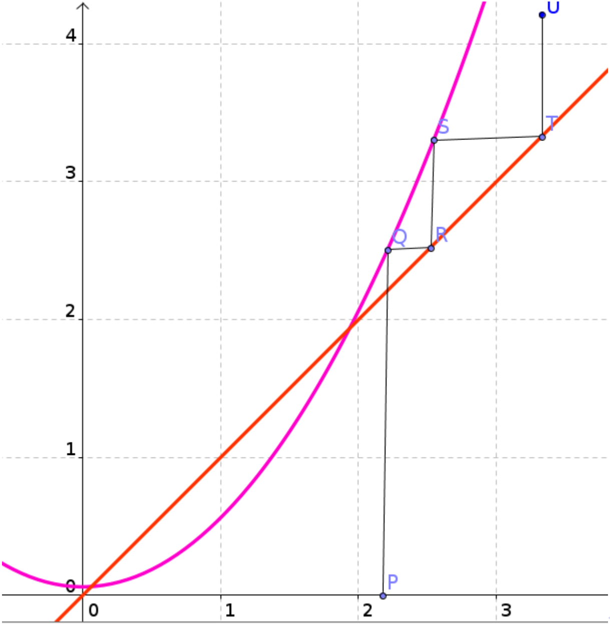


Caso $x_0 \in (-1, 0)$




2
1
0
-1
-1
0
1
2


H
G
J
I
L
K
N
M
O
F
2
1
0
-1
-1
0
1
2


4
3
2
1
0
0
1
2
3
U
S
T
Q
R
P

Método da Relaxação e o Método de Newton

Introdução

• Vimos que o Método do Ponto Fixo pode ou não convergir, depende das condições sobre a função iteração g e sua derivada g'.

• Queremos um método iterativo que se aplique a uma **diversidade** de problemas, ou seja,

que produza uma seq. $\{x_k\}$ convergente, exceto para casos muito especiais

Uma maneira de conseguir isso é por

Relaxação

Definição 1.5

- f uma função real definida e contínua em V_ξ
- Relaxação é a sequencia $\{x_k\}$ definida por

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- $\lambda \neq 0$ um número real (VEREMOS como escolhe-lo)
- x_0 um valor inicial próximo a ξ.

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \; .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \ .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \; .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \; .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \ .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Observações

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$.

De fato, ... (ver lousa/caderno)

2) A relaxação é uma iteração simples fazendo

$$g(x_k) = x_k - \lambda f(x_k) \ .$$

- Se f é diferenciável em $V_\xi \Rightarrow g'(x_k) = 1 - \lambda f'(x_k)$
- Para que $|g'(\xi)| < 1$ pede-se que:
  - λ e $f'(\xi)$ tenham o mesmo sinal e
  - $f'(\xi) \neq 0$
  - x_0 esteja próximo de ξ

(*afim do Método da Relaxação satisfazer as hipóteses do Teo 1.5*)

Esta ideia está formalizada no próximo Teorema (1.7).

Teorema 1.7

- f função real definida e contínua em V_ξ
- $f(\xi) = 0$ (ξ é solução de $f(x) = 0$)
- f' está definida e é contínua em V_ξ ($f \in C^1(V_\xi)$)
- $f'(\xi) \neq 0$

ENTÃO,

- $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que
- $x_k \to \xi, \quad \forall\ x_0 \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta]$
  sendo $\{x_k\}$ gerada pela iteração
  $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$

Demonstração: (ver lousa/caderno)

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:
1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x)}}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x)}}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x)}}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.

Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então

$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:

1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Estendendo a ideia do Método da Relaxação

- Trocar λ constante por $\lambda = \lambda(x)$ uma função contínua de $x \in V_\xi$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda(x) f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

- o que corresponde a função iteração simples

$$g(x) = x - \lambda(x) f(x)$$

OBSERVAÇÕES:
1) Se $x_k \to \xi$, $k \to \infty$, então $f(\xi) = 0$, a menos que $\lambda(\xi) = 0$.
Tarefa!

2) $g'(x) = 1 - \lambda'(x) f(x) - \lambda(x) f'(x)$, então
$g'(\xi) = 1 - \lambda(\xi) f'(\xi)$, para ξ solução de $f(x) = 0$

A escolha de $\lambda(x)$ para que $g'(\xi)$ seja pequeno é

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f'(x)}}$$

O que nos fornece o Método de Newton!

Definição 1.6 (Método de Newton)

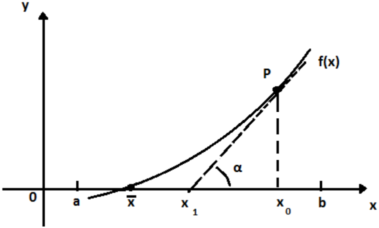
O Método de Newton para a solução de $f(x) = 0$ é definida por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

com valor inicial x_0 conhecido e

$f'(x_k) \neq 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots$

Interpretação Geométrica

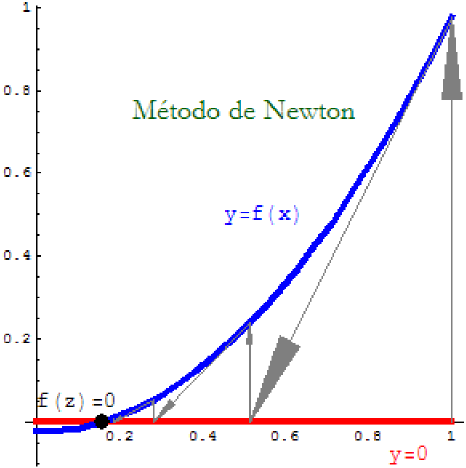


- $f'(x_k) = tg(\alpha) = \dfrac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$
- $(x_k - x_{k+1}) f'(x_k) = f(x_k)$
- $(x_k - x_{k+1}) = \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$\mathbf{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Também conhecido como Método das Tangentes

Método de Newton/Tangentes



Observação:

$\star$ Para demonstrar a convergência do Método de Newton,

basta aplicar o Teorema 1.5 a iteração simples

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$\star$ Mais importante agora:

Demonstrar a **taxa de convergência** do Método de Newton:

Teorema 1.8

- f e f'' funções contínuas em $I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ $(\delta > 0)$
- $f(\xi) = 0$ e $f''(\xi) \neq 0$
- $\exists$ $A > 0$ constante tal que

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq A, \quad \forall x, y \in I_\delta \qquad (\clubsuit)$$

(subentende $f'(y) \neq 0$ para $y \in I_\delta$)

- $|x_0 - \xi| \leq h$, $h \leq min\{\delta, 1/A\}$

ENTÃO,

- a sequencia do Método de Newton **converge** **quadraticamente** para ξ.

Observações

1) Vimos na demonstração do Teo 1.7 que a hipótese (♣) deixa implícito que $f'(\xi) \neq 0$, caso contrário a condição (♣) pode não ser válida.

2) Se $f''(\xi) = 0$, pode-se pedir que f admita terceira derivada contínua e que algumas quantidades sejam limitadas e então, obtém-se convergência cúbica.

3) É possível demonstrar que o Método de Newton converge sobre um intervalo maior se assumirmos algumas hipóteses sobre os sinais das derivadas.
(Próximo Teorena (1.8))

Teorema 1.9

- f satisfaz as condições do Teorema 1.8
- $\exists\ X \in \mathbb{R}$, $X > \xi$ tal que

f e f'' são positivas em $J = [\xi, X]$

ENTÃO

- a sequencia do Método de Newton converge quadraticamente para ξ, $\forall\ \mathbf{x_0} \in \mathbf{J}$.

(*obs: a mesma conclusão vale para outros sinais de* f' *e* f'' *em* J *- ver Exercício 1.8 pg 37, por exemplo.*)