Integração Numérica

Irineu Lopes Palhares Junior

FCT/UNESP,
irineu.palhares@unesp.br

Conteúdos

Informações sobre os conteúdos

1. Fórmulas de Newton Cotes
   - Regra dos Trapézios
   - Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson
   - Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson
2. Quadratura Gaussiana

Regra dos trapézios

Se usarmos a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 temos

$$I_T = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right),$$

que é a área do trapézios de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Regra dos Trapézios Generalizada

Como podemos ver, tanto graficamente quanto pela expressão do erro, se o intervalo de integração é grande, a fórmula dos Trapézios nos fornece resultados que pouco têm a ver com o valor da integral exata. O que podemos fazer neste caso é uma subdivisão do intervalo de integração e aplicar a regra dos Trapézios repetidas vezes.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \sum_{i=0}^{m-1} h^3 \frac{f''(c_i)}{12}, \;\; c_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Erro na Regra dos Trapézios

O erro na Regra dos Trapézios é

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f'(c),\ c \in (x_0, x_1).$$

O erro na regra dos Trapézios generalizada é dado por

$$E_{TR} = -\frac{mh^3 f''(\xi)}{12}.$$

Exemplo

Example

Seja $I = \int_0^1 e^x dx$

a) Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra dos Trapézios repetida. Estime o erro cometido.

b) Qual o número mínimos de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}?

Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson

Novamente podemos usar a fórmula de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de $f(x)$ por um polinômio de grau 2.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2).\right]$$

Em cada par de subintervalos, temos

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right] - \frac{h^5}{90} f''''(c_k)$$

$c_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$ e $k = 1, \ldots, \frac{m}{2}$.
Então,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + f_{x_m} + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})\right) +$$
$$+ 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{m-2})\right)\Big]$$

e

$$Erro = -\frac{mh^5}{180} f''''(\xi),\ \xi \in (a, b).$$

Erro na Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson

Podemos mostrar, embora a demonstração seja um pouco mais elaborada que a feita na regra dos Trapézios, que a expressão do erro na fórmula de Simpson, supondo que $f''''(x)$ é contínua em $[a, b]$, é

$$E_S = -\frac{h^5}{90} f''''(c), c \in (a, b).$$

Desta expressão para o erro observamos que o ganho na potência de h, ao passar da aproximação linear para a quadrática, foi substancial. No próximo exemplo este granho ficará evidenciado.
O erro na Regra de Simpson generalizada é dado por:

$$Erro = -\frac{mh^5}{180} f''''(\xi), \ \xi \in (a, b).$$

Exemplo

Example

Seja $I = \int_0^1 e^x dx$.

a) Calcule uma aproximação para I usando a regra 1/3 de Simpson com $m = 10$. Estime o erro cometido.

b) Para que valor de m teríamos erro inferior a 10^{-3}?

b)

Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson Generalizada

Erro na Regra $\frac{3}{8}$ de Simpson

Teorema geral do erro

Theorem

Seja $f \in C^{n+2}[a,b]$. *Então o erro na integração numérica,* E_n, *usando as fórmulas de Newton-Cotes é:*

i) *se* n *é ímpar,*

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} \int_0^n u\,(u-1)\ldots(u-n)\,du, \;\; \xi \in [a,b];$$

ii) *se* n *é par,*

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)(\xi)}}{(n+2)!} \int_0^n \left(u - \frac{n}{2}\right) u\,(u-1)\ldots(u-n)\,du, \;\; \xi \in [a,b].$$

Quadratura Gaussiana

Nas fórmulas de Newton-Cotes, os pontos $x_0, \ldots, x_n$ sobre os quais são construídos os polinômios $L_k(x)$ são pontos igualmente espaçados, prefixados em $[a, b]$. Na Quadratura Gaussiana deixamos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ indeterminados e assim conseguimos fórmulas do mesmo tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + \ldots + A_n f(x_n),$$

onde

$$A_k = \int_a^b L_k(x)dx$$

que são exatas para polinômios de grau $\leq 2n+1$.

Quadratura Gaussiana: caso $n = 1$

Veremos a seguir a construção da fórmula da Quadratura Gaussiana para $n = 1$, ou seja, queremos determinar x_0, x_1, A_0 e A_1, tais que

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

seja exata para polinômios de grau ≤ 3.
Dizer que a fórmula é exata para polinômios de grau ≤ 3 equivale dizer que a fórmula é exata para

$$g_0(t) = 1,\ g_1(t) = t,\ g_2(t) = t^2 \text{ e } g_3(t) = t^3.$$

Temos então o sistema não linear com quatro equações e quatro incógnitas:

$$
\begin{aligned}
A_0 + A_1 &= 2 \\
A_0 t_0 + A_1 t_1 &= 0 \\
A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 &= 2/3 \\
A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Resolvendo, temos

$$t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \; t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } A_0 = A_1 = 1.$$

Observação

No caso de um intervalo $[a, b]$ genérico, efetuamos a mudança de variável:

$$x = \frac{1}{2}\left[a + b + t\,(b - a)\right].$$

Assim, para $t \in [-1, 1]$ corresponde $x \in [a, b]$.

Example

Calcular $\int_0^{10} e^{-x} dx$ usando a fórmula de Quadratura Gaussiana com dois pontos.