1 Lista de exercícios: Interpolação

1.1 Interpolação polinomial e Fórmula de Lagrange

1. Considere a tabela

x	1	3	4	5
$f(x)$	0	6	24	60

Table 1: Valores de x e $f(x)$.

   a) Determine o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.
   b) Calcule $f(3.5)$.

2. Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $y = \sin \pi x$, escolhendo os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

3. A integral elíptica completa é definida por:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(1 - \kappa^2 \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Por uma tabela de valores desta integral, encontramos:

$$K(1) = 1.5708, \quad K(2) = 1.5719, \quad K(3) = 1.5739$$

. Determinar $K(2.5)$, usando polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

4. Calcular $e^{3.1}$ usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

Table 2: Valores de x e $f(x)$.

5. Sabendo-se que $e \approx 2.72$, $\sqrt{e} \approx 1.65$ e que a equação $x - e^{-x} = 0$ tem uma raiz em $[0, 1]$, determinar o valor desta raiz usando a fórmula de Lagrange sobre três pontos.

6. Dar uma outra prova de unicidade do polinômio de interpolação $P_n(f; x)$ de uma função $y = f(x)$ sobre o conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

   Sugestão: supor a existência de outro polinômio $Q_n(f; x)$ que seja de interpolação para f sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e considerar o polinômio:

$$D_n(x) = P_n(f; x) - Q_n(f; x)$$

.

1.2 Erro na interpolação

7. Seja $f(x) = 7x^5 - 3x^2 - 1$.

    a) Calcular $f(x)$ nos pontos $x = 0$, $x = \pm 1, x = \pm 2$ e $x = \pm 3$ (usar o algoritmo de Briot-Ruffini). Construir a seguir a tabela segundo os valores crescentes de x.

    b) Construir o polinômio de interpolação para esta função sobre os pontos -2, -1, 0 e 1.

    c) Determinar, pela fórmula do limitante do erro, isto é,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} \{|f^{(n+1)}(t)|\}$$

    , um limitante superior para o erro de truncamento em $x = -0.5$ e $x = 0.5$.

8. Conhecendo-se a tabela calcular um limitante superior para o erro de truncamento

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.3	1.5
$\cos x$	0.6967	0.6216	0.5403	0.4536	0.2675	0.0707

Table 3: Valores de x e $\cos x$.

quando calculamos $\cos 1.05$ usando polinômio de interpolação sobre quatro pontos.

9. Um polinômio $P_n(x)$, de grau n, coincide com $f(x) = e^x$ nos pontos: $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Qual o menor valor de n que devemos tomar a fim de que se tenha:

$$|e^x - P_n(x)| \leq 10^{-6} \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \text{ ?}$$

1.3 Fórmula de Newton

1. Seja a função tabelada:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	0	1	-1	0

Table 4: Caption

    a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton.

    b) Calcular $f(0.5)$.

2. Dada a função tabelada:

    a) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre dois pontos (interpolação linear).

x	0	1	1.5	2.5	3.0
$f(x)$	1.0	0.5	0.4	0.286	0.25

Table 5: Caption

b) Determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton sobre três pontos (interpolação quadrática).

c) Calcular $f(0.5)$ usando os itens a) e b).

Lembre-se que a fórmula de Newton do polinômio de interpolação sobre três pontos é igual ao polinômio sobre dois pontos adicionados ao termo de ordem 2. Além disso, o ponto x_0 deve ser comum aos dois polinômios. Portanto, tome cuidado ao escolher os pontos.

3. A função

$$y = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

é dada pela seguinte tabela: Através da fórmula de Newton, calcule y para $x = 0.0378$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
y	∞	4.0379	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679	2.2953

Table 6: Caption

usando parábola e parábola cúbica.

4. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada:

x	1.00	1.10	1.15	1.25	1.30
$f(x)$	1.00	1.048	1.072	1.118	1.140

Table 7: Caption

a) Determinar o valor aproximado de $\sqrt{1.12}$ usando polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos.

b) Calcular um limitante superior para o erro.

5. Sabendo-se que a equação $x^4 + 6x^2 - 1 = 0$ tem raiz em $[0, 1]$, determinar o valor aproximado dessa raiz usando polinômio de interpolação de Newton sobre três pontos.

6. Dada a tabela:

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\sqrt{x}$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

Table 8: Caption

a) Calcular $\sqrt{1.035}$ por meio de um polinômio de interpolação de grau adequado.

b) Dar uma estimativa para o erro de truncamento.

1.4 Fórmula de Newton-Gregory

1. Considere a função $y = f(x)$ dada pela tabela: Determinar o polinômio de interpolação

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	0	2	4

Table 9: Caption

usando:

a) a fórmula de Newton.

b) a fórmula de Newton-Gregory.

2. Dada a função $y = \sin x$ tabelada:

x	1.2	1.3	1.4	1.5
$\sin x$	0.932	0.964	0.985	0.997

Table 10: Caption

a) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton.

b) Calcular o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton-Gregory

c) Calcular $\sin 1.35$

d) Dar um limitante superior para o erro.

3. Dada a tabela: Calcular α, β e γ, sabendo que ela corresponde a um polinômio do 3^o

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	α	5	β	7	γ	13

Table 11: Caption

grau. Sugestão: Construa a tabela de diferenças ordinárias.

4. Dada a tabela: Calcular $f(0.5)$ usando polinômio de interpolação sobre todos os pontos.

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	15	0	-1	0

Table 12: Caption