Melhor Aproximação: Caso Contínuo

Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Universidade Estadual Paulista (Unesp)
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Presidente Prudente, SP

Aproximação Polinomial

- Buscamos o polinômio de grau n p_n que fornece a **melhor aproximação** para a função f

Recordando algumas definições

- $C[a,b]$ é o espaço vetorial normado munido, por exemplo, das normas:
  - $||f||_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$
  - $||f||_2 = \left(\int_a^b w(x)|f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

    w uma função real, contínua, positiva e integrável em (a,b).
- A norma-2 $||\cdot||_2$ é a norma induzida pelo produto interno:

  $< f, g >= \int_a^b w(x)f(x)g(x) \, dx$ em $[a,b]$,
- $L^2_w(a,b)$ é o conjunto das funções reais $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $w(x)|f(x)|^2$ é integrável em (a,b).

  Quando $w = 1$, denota-se simplesmente por $L^2(a,b)$

Teorema da Aproximação de Weierstrass

Sejam

• $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,

• w uma função real, contínua, positiva e integrável em (a, b).

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p tal que

$||f - p||_2 < \varepsilon$.

A melhor aproximação na $|| \cdot ||_2$

PROBLEMA: Dado $f_w^2(a,b)$. Queremos encontrar $p_n \in P_n$ tal que:

$$||f - p_n||_2 = \min_{q \in P_n} ||f - q||_2 \ .$$

- p_n : polinômio da melhor aproximação de grau n para a função f na norma $|| \cdot ||_2$ em (a,b).

Algumas considerações

Vamos considerar $w = 1$.
Escrevendo o polinômio p_n na base canonica $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \ .$$

Queremos encontrar c_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ que minimizam o erro $e_n = f - p_n$, na norma-2:

$$||e_n||_2 = ||f - p_n||_2 = \left(\int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Como a raiz quadrada é crescente, basta simplesmente, minimizar:

$$E(c_0, c_1, \ldots, c_n) = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 \ dx$$

Titulo

Devemos impor $\dfrac{\partial E(c_0, c_1, \ldots, c_n)}{\partial c_j} = 0.$

$$0 = \frac{\partial E(c_0, c_1, \ldots, c_n)}{\partial c_j} = \frac{\partial}{\partial c_j} \int_a^b \left[(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial c_j} \left[(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b 2 \left[(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right] \cdot x^j \, dx =$$

Algumas considerações

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)x^j \ dx - \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b x^{k+j} \ dx = 0$$

Então,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b x^{k+j} \ dx \right) c_k = \int_a^b f(x)x^j \ dx$$

$$\sum_{k=0}^{n} M_{jk} c_k = b_j \ dx \quad \boxed{Mc = b}$$

$b_j =< f, x^j >$ e $M_{jk} =< x^k, x^j >$.

Algumas considerações

$$M_{jk} = \int_a^b x^{k+j}\,dx = \left.\frac{x^{k+j+1}}{k+j+1}\right|_a^b = (b^{k+j+1} - a^{k+j+1})\frac{1}{k+j+1}\ .$$

Para $a = 0$ e $b = 1$, então $M_{jk} = \dfrac{1}{k+j+1}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+2) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/(n+1) & 1/(n+2) & 1/(n+3) & \cdots & 1/(2n+1) \end{pmatrix}$$

M é a matriz de Hilbert, que é uma matriz mal condicionada.

Recomenda-se resolver o sistema $Mc = b$ nos casos em que n seja suficientemente baixo.

Para contornar o problema

Polinômios Ortogonais

Definição: Dado uma função peso w, contínua, positiva e integrável em (a, b), diz-se que a sequência de polinômios φ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, é um sistema de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com respeito a w, se cada φ_j for exatamente de grau j, e se

$< \varphi_k, \varphi_j >= \displaystyle\int_a^b w(x)\varphi_k(x)\varphi_j(x)\ dx = 0$ sempre que $k \neq j$.

Teorema 9.2

Dado $f \in L^2_w(a,b)$.
Existe um **único** polinômio $p_n \in P_n$, tal que

$$||f - p_n||_2 = \min_{q \in P_n} ||f - q||_2 \ .$$

Demonstração

• Considerando a base canonica $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$
• Podemos ortogonalizar essa base e obter uma base de polinômios ortogonais $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.
Lembrando o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:
$\varphi_0 = 1$ e para $k \geq 1$,

$$\varphi_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{< x^k, \varphi_j >}{< \varphi_j, \varphi_j >} \varphi_j(x) \ .$$

• Normalizando essa base: $\psi_j(x) = \dfrac{\varphi_j(x)}{||\varphi_j||_2}$
obtemos uma base ortonormal: $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$

Demonstração

- Seja $q \in P_n$, então existem β_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, tais que

$$q(x) = \beta_0\psi_0(x) + \beta_1\psi_1(x) + \cdots + \beta_n\psi_n(x)$$

- Queremos q tal que $||f - q||_2$ seja mínimo em P_n.

Vamos minimizar $E(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = ||f - q||_2^2$.

Demonstração

$$E(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = ||f - q||_2^2 =< f - q, f - q >=$$

$$=< f, f > -2 < f, q > + < q, q >$$

$$= ||f||_2^2 - 2 < f, \sum_{j=0}^{n} \beta_j \psi_j(x) > + < \sum_{k=0}^{n} \beta_k \psi_k(x), \sum_{j=0}^{n} \beta_j \psi_j(x) >$$

$$= ||f||_2^2 - 2 \sum_{j=0}^{n} \beta_j < f, \psi_j(x) > + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \beta_k \beta_j < \psi_k(x), \psi_j(x) >$$

Demonstração

$$E(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) = ||f||_2^2 - 2\sum_{j=0}^{n} \beta_j < f, \psi_j(x) > + \sum_{j=0}^{n} (\beta_j)^2 =$$

$$= ||f||_2^2 + \sum_{j=0}^{n} (\beta_j - < f, \psi_j(x) >)^2 - \sum_{j=0}^{n} | < f, \psi_j(x) > |^2.$$

$$E(\beta) = \sum_{j=0}^{n} (\beta_j - < f, \psi_j(x) >)^2 + ||f||_2^2 - \sum_{j=0}^{n} | < f, \psi_j(x) > |^2.$$

Como $\sum_{j=0}^{n} (\beta_j - < f, \psi_j(x) >)^2 \geq 0$, $E(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ assume o menor valor possível **se e só se** $\beta_j = < f, \psi_j(x) >$.

Demonstração

Portanto,

$$q(x) = < f, \psi_0(x) > \psi_0(x) + \cdots + < f, \psi_n(x) > \psi_n(x)$$

é o único polinômio em P_n "mais próximo" da função $f \in L^2_w(a,b)$.

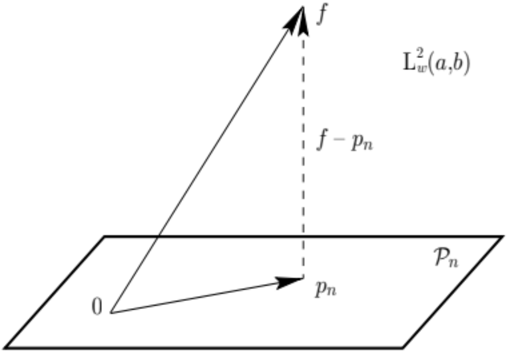
— —

Este Teorema 9.2. fornece um método simples para determinar o polinômio p_n que melhor se aproxima de $f \in L^2_w(a,b)$, na norma-2.

— —

Teorema 9.3

Um polinômio $p_n \in P_n$ é a melhor aproximação de grau n da função $f \in C[a,b]$, na norma-2, se e somente se diferença $f - p_n$ for ortogonal a todo elemento de P_n, ou seja, $< f - p_n, q >= 0 \; \forall q \in P_n$.



Fonte: Suli & Mayers

Exemplo

Exemplo 9.8:
Construa a melhor aproximação polinomial de grau 2, na norma-2, para a função $f(x) = e^x$ sobre $(0, 1)$ e com função peso $w(x) = 1$.