$$
\begin{aligned}
(1,1) &= \int_{-1}^{1} dx \;=\; x\Big]_{-1}^{1} \;=\; 2\ , \\
(1,x) &= \int_{-1}^{1} x\ dx \;=\; \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} \;=\; 0 \;=\; (x,1)\ , \\
\left(1,x^2\right) &= \int_{-1}^{1} x^2\ dx \;=\; \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} \;=\; \frac{2}{3} \;=\; \left(x^2,1\right) \;=\; (x,x)\ , \\
\left(x,x^2\right) &= \int_{-1}^{1} x^3 dx \;=\; \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{1} \;=\; 0 \;=\; \left(x^2,x\right)\ , \\
\left(x^2,x^2\right) &= \int_{-1}^{1} x^4 dx \;=\; \frac{x^5}{5}\Big]_{-1}^{1} \;=\; 2/5\ , \\
(f,1) &= \int_{-1}^{1} (x^4 - 5\ x)\ dx \;=\; -\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5\ x^2}{2}\right)\Big]_{-1}^{1} \;=\; -\frac{2}{5}\ , \\
(f,x) &= \int_{-1}^{1} (x^5 - 5\ x^2)\ dx \;=\; -\left(\frac{x^6}{6} - \frac{5\ x^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{1} \;=\; -\frac{10}{3}\ , \\
\left((f,x^2\right) &= \int_{-1}^{1} (x^6 - 5\ x^3)\ dx \;=\; -\left(\frac{x^7}{7} - \frac{5\ x^4}{4}\right)\Big]_{-1}^{1} \;=\; \frac{2}{7}\ .
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos:

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 2/5 \\ -10/3 \\ 2/7 \end{pmatrix}\ ,
$$

cuja solução é: $a_0 \;=\; -3/35\ ;\ a_1 = -5\ ;\ a_2 \;=\; 6/7$.

Portanto:

$$
f(x) \;\simeq\; P_2(x) \;=\; -\frac{3}{35} \;-\; 5\ x \;+\; \frac{6}{7}\ x^2. \tag{8.1}
$$

Exercícios

8.1 *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x \in [-1,1]$. *Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função* $f(x)$ *por um polinômio do* 2^o *grau.*

8.2 *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $x \in [0,1]$. *Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função* $f(x)$ *por um polinômio do tipo* $P(x) = a\ x^2 + b\ x^4$, *usando o seguinte produto escalar:*

$$
(f,g) \;=\; \int_0^1 x^2\ f(x)\ g(x)\ dx\ .
$$

Note que a base do sub-espaço neste caso é: $\{x^2, x^4\}$.

8.3 *Usando o método dos mínimos quadrados, aproximar a função* $f(x) = \left(x^3-1\right)^2$, $x \in [0,1]$,

a) *por uma reta;*

b) *por um polinômio do 2º grau.*

Observações:

a) Quem resolveu o último exercício (e quem não resolveu deve fazê-lo), pode observar que para passar de um polinômio de grau k para um polinômio de grau $k+1$ é necessário que calculemos todos os coeficientes do polinômio e não apenas o último, ou seja, devemos refazer praticamente todos os cálculos, visto que o sistema linear passa de ordem 2 para ordem 3.

b) Além disso, para m grande, $(m > 5)$, os efeitos de propagação dos erros de arredondamento, tornam-se explosivos, tornando o método tremendamente instável, ou seja, a solução do sistema linear pode ser irreal.

Vejamos então uma maneira de aumentar o grau do *polinômio aproximante* sem refazer todos os cálculos, bem como obter uma solução que realmente tenha significado.

Representação na Base Ortonormal

Veremos aqui como ajustar funções pelo método dos mínimos quadrados através de polinômios ortonormais.

Consideremos então em $K_m(x)$, uma base $\{L_0^*(x), L_1^*(x) \ldots, L_m^*(x)\}$ de polinômios ortonormais, isto é, de polinômios tais que:

$$\big(L_i^*(x), L_j^*(x)\big) \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & , \quad i = j \;, \\ 0 & , \quad i \neq j \;. \end{cases} \tag{8.2}$$

Observe que tais polinômios podem ser obtidos ortonormalizando-se a base canônica $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$ por Gram-Schmidt, (Capítulo 1).

A projeção ortogonal de $f \in C[a, b]$ sobre $K_m(x)$ será então dada por:

$$P_m(x) \;=\; a_0\; L_0^*(x) \;+\; a_1\; L_1^*(x) + \ldots + a_m\; L_m^*(x),$$

onde os $a_i,\; i = 0, 1, \ldots, m$, são obtidos resolvendo-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} (L_0^*, L_0^*) & (L_1^*, L_0^*) & \ldots & (L_m^*, L_0^*) \\ (L_0^*, L_1^*) & (L_1^*, L_1^*) & \ldots & (L_m^*, L_1^*) \\ \ldots\ldots & & & \\ (L_0^*, L_m^*) & (L_1^*, L_m^*) & \ldots & (L_m^*, L_m^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, L_0^*) \\ (f, L_1^*) \\ \vdots \\ (f, L_m^*) \end{pmatrix} . \tag{8.3}$$

Mas, em vista de (8.2), (8.3) se reduz a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, L_0^*) \\ (f, L_1^*) \\ \vdots \\ (f, L_m^*) \end{pmatrix} . \tag{8.4}$$

Obtemos então o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 28 \end{pmatrix} ,$$

cuja solução é: $a_0 = -\frac{8}{5}$; $a_1 = \frac{1}{5}$; $a_2 = 2$.

Portanto a parábola que melhor aproxima a função tabelada é:

$$P_2(x) = -\frac{8}{5} + \frac{1}{5}\,x + 2\,x^2 .$$

Exercícios

8.6 - *Determinar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta mais próxima dos pontos (x_i, y_i) para a função $y = f(x)$ tabelada:*

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	-1	0	7

8.7 - *Determinar a parábola mais próxima dos pontos (x_i, y_i) para a função $y = f(x)$ tabelada:*

x	-3	-1	1	2	3
y	-1	0	1	1	-1

usando o método dos mínimos quadrados.

8.8 - *Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função dada pela tabela:*

x	0	1	2	3	4	5
y	-1	0	3	8	15	24

por um polinômio do tipo: $P(x) = a + b\,x^3$, *usando o produto escalar:*

$$(x, y) = \sum_{i=0}^{n} (i+1)\,x_i\,y_i .$$

8.2.3 Erro de Truncamento

O erro de truncamento no método dos mínimos quadrados é dado por **Q**.

Assim temos:

a) caso contínuo:

$$Q = \| f - P_m \|^2 = \int_a^b \left(f(x) - P_m(x)\right)^2 \, dx .$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 30 & 220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1352 \\ 0.7748 \end{pmatrix} ,$$

cuja solução é: $a_0 = 0.0155 = a$ e $a_1 = 0.0014 = b$. Portanto:

$$f(x) \simeq \frac{1}{0.0155 + 0.0014\ x} + 20$$

Novamente minimizamos o quadrado da diferença entre a função $F(x)$ e a reta $a_0 + a_1\ x$.

Exercícios

8.12 - *Deseja-se aproximar uma função f definida em um intervalo $[a, b]$ por uma função*

$$g(x) = x^2\ ln \left(\frac{x^3}{a + b\ x^2} \right) ,$$

usando o método dos minímos quadrados.

a) *Qual é a função a ser minimizada?*

b) *Qual é o sistema linear a ser resolvido?*

8.13 - *Sejam $f(x)$ e $g(x)$, funções reais distintas não identicamente nulas. Suponha que, usando o método dos minímos quadrados, aproximamos $f(x)$ em $[a, b]$ por:*

$$F(x) = a_0\ f(x) + a_1\ g(x) .$$

a) *Quais os valores que devem ser atibuídos para a_0 e a_1?*

b) *Qual será o erro?*

8.14 - *É possível aproximar diretamente uma função $f(x)$ tabelada, por uma função do tipo:*

$$g(x) = \left(\frac{a}{1 + b\ \cos\ x} \right) ,$$

usando o método dos minímos quadrados? Se não for possível, qual é a transformação que deve ser feita?

8.15 - *Considere a função dada por:*

x	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.1	3.2	4.4	5.8

a) *Ajuste os pontos acima por uma função do tipo $\sqrt{a + bx}$, usando o método dos mínimos quadrados.*

b) *Qual função foi minimizada?*

8.16 - *Ajustar os valores da tabela:*

x	2	5	8	11	14	17	27	31	41	44
$f(x)$	94.8	89.7	81.3	74.9	68.7	64.0	49.3	44.0	39.1	31.6

através de uma das famílias de funções:

$$a\ e^{bx}\ , \qquad \frac{1}{a+bx}\ , \qquad \frac{x}{a+bx}\ .$$

Use o teste de alinhamento para decidir qual das funções melhor resolve o problema.

O método dos mínimos quadrados se aplica também à determinação da melhor solução de sistemas lineares incompatíveis. Assim, passamos a descrever

8.5 Sistemas Lineares Incompatíveis

Ocorre frequentemente na prática problema da natureza seguinte: temos que determinar uma função y que depende linearmente de certas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_m$, isto é,

$$y \ = \ c_1 x_1 \ + \ c_2 x_2 \ + \ldots + \ c_m x_m \ ,$$

onde os $c_i, \ i = 1, 2, \ldots, m$, são coeficientes desconhecidos fixados.

Na maioria dos casos os c_i são determinados experimentalmente, perfazendo-se um certo número de medidas das grandezas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e y. Se designarmos por $x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm}, y_j$ os resultados correspondentes à j-ésima medida, tentamos determinar $c_1, c_2, \ldots, c_m$ a partir do sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11}c_1 \ + \ x_{12}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{1m}c_m \ = \ y_1 \\ x_{21}c_1 \ + \ x_{22}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{2m}c_m \ = \ y_2 \\ \ldots \ \ldots \\ x_{n1}c_1 \ + \ x_{n2}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{nm}c_m \ = \ y_n \end{array} \right. \tag{8.16}$$

Em geral, o número n de medidas é maior que o número m de incógnitas e devido aos erros experimentais o sistema (8.16) resulta ser incompatível e sua solução só pode ser obtida aproximadamente. O problema que precisa, então, ser resolvido é o da determinação dos $c_1, c_2, \ldots, c_m$ de modo que o lado esquerdo das equações (8.16) forneça resultados tão "**próximos**" quanto possível dos correspondentes resultados do lado direito. Resta-nos apenas, para a solução do problema, precisarmos o conceito de proximidade. Como medida dessa proximidade adotaremos o quadrado da distância euclidiana entre y e z do $I\!R^n$, onde:

$$y \ = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ , \ z \ = \ \begin{pmatrix} x_{11}c_1 \ + \ x_{12}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{1m}c_m \\ x_{21}c_1 \ + \ x_{22}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{2m}c_m \\ \ldots \ \ldots \\ x_{n1}c_1 \ + \ x_{n2}c_2 \ + \ \ldots \ + \ x_{nm}c_m \end{pmatrix} \ .$$

Assim:

$$Q \ = \| \ z - y \ \|^2 = \ \sum_{i=1}^{n} (x_{i1}c_1 \ + \ x_{i2}c_2 \ + \ldots + \ x_{im}c_m \ - \ y_i)^2 \ .$$

8.6 Exercícios Complementares

8.19 - *De uma tabela são extraídos os valores:*

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	-1	2	4

Usando o método dos mínimos quadrados ajuste os dados acima por polinômio de grau adequado.
Sugestão: use gráfico.

8.20 - *Considere a tabela:*

x	-2	-1	1	2
y	1	-3	1	9

a) *Pelo método dos mínimos quadrados, ajuste à tabela as funções:*

$$g_1(x) = ax^2 + bx; \qquad g_2(x) = cx^2 + d \ .$$

b) *Qual das funções fornece o melhor ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados? Justifique.*

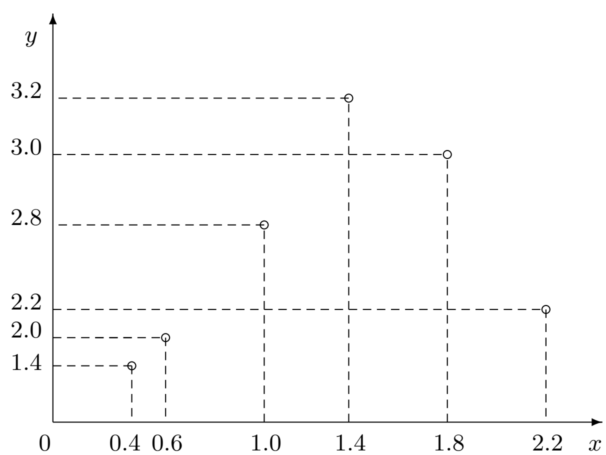
8.21 - *Achar aproximação mínimos quadrados da forma:*

$$g(x) = ae^x + be^{-x} \ ,$$

correspondente aos dados:

x_i	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y_i	5.02	5.21	6.49	9.54	16.02	24.53

8.22 - *Um dispositivo tem uma certa característica y que é função de uma variável x. Através de várias experiências foi obtido o gráfico:*



Deseja-se conhecer o valor de y para $x = 0.5$. Da teoria sabe-se que a função que descreve y tem a forma aproximada de uma curva do tipo $a\ x^2 + b\ x$. Obtenha valores aproximados para a e b, usando todas as observações, e então estime o valor para y quando $x = 0.5$.