

Solução numérica de problema de valor inicial

Irineu Palhares

November 2025

Sumário

Problema de Valor Contorno

A forma mais geral dos problema de contorno aos quais nos referirremos é:

$$\begin{aligned}y'' &= f(x, y, y') \\ a_1 y(a) + b_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) &= \gamma_2\end{aligned}\tag{1}$$

onde a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , γ_1 e γ_2 são constantes reais conhecidas, tais que nem a_1 e b_1 , nem a_2 e b_2 sejam nulas ao mesmo tempo.

O método das diferenças finitas

As aproximações mais usadas para a primeira derivada no ponto x_i são:

Avançada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Atrasada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

Centrada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Aproximação para a derivada de segunda ordem

Utilizando a série de Taylor, deduziremos a aproximação mais típica para a derivada segunda, bem como a expressão do erro para ela. Para tal, usaremos a expansão nos pontos x_{i+1} e x_{i-1} :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i+1}) \quad (2)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_{i-1}) \quad (3)$$

E, agora, (2) + (3) nos fornece:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{h^4}{24} \left[y^{(iv)}(\xi_{i+1}) + y^{(iv)}(\xi_{i-1}) \right]$$

Fórmula para y''

Assim, temos a expressão para $y''(x_i)$:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

com erro da ordem de h^2 .

Exemplo: PVI linear

Example

$$\begin{aligned}y''(x) + 2y'(x) + y(x) &= x \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= -1\end{aligned}\tag{4}$$

A solução analítica desse problema é $y = 2e^{-x}(1 - x) + x - 2$.

PVC não linear

Example

$$\begin{aligned}y'' &= y \sin y + xy \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 5\end{aligned}\tag{5}$$

Exercícios

1. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned}y'' &= y' + 2y + \cos x, x \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y(0) &= -0.3, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -0.1\end{aligned}\tag{6}$$

cujas solução analítica é $y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3 \cos x)$.

2. Resolva o problema de contorno

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), 1 \leq x \leq 3 \\ y(1) &= 17, \\ y(3) &= \frac{43}{3}\end{aligned}\tag{7}$$

o qual tem solução exata $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.