

1. Resolva numericamente o problema:

$$y' = y - x^2 + 1, \quad y(0) = 0.5$$

utilizando o método de Runge–Kutta de segunda ordem com $h = 0.1$ até $x = 0.5$. Compare o valor obtido com a solução analítica:

$$y(x) = (x + 1)^2 - 0.5e^x.$$

2. Um corpo com uma massa inicial de 200 kg é acelerado por uma força constante de 200 N . A massa decresce a uma taxa de 1 kg/s . Além disso, o corpo está sujeito a uma resistência do ar igual a duas vezes a velocidade. Sabe-se que a equação diferencial é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2000 - 2v}{200 - t}.$$

Se o corpo está em repouso em $t = 0$, a solução exata é $v = 1000 - e^{\ln(1999/40000)(200-t)^2}$. Resolva o problema numericamente usando um método de Runge–Kutta de ordem 4.

3. Verifique a zero-estabilidade e consistência dos seguintes métodos, analisando as raízes do polinômio característico:

- (a) $y_{n+2} - y_{n+1} = 0$
- (b) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$

Usando o teorema de Lax, determine se os métodos acima são convergentes.

4. Resolva numericamente o PVI com $h_1 = 0.1$ e $h_2 = 0.05$:

$$y' = -2xy^2, \quad y(0) = 1,$$

no intervalo $[0, 2]$ utilizando:

- Euler explícito,
- Runge–Kutta de 2^a ordem,
- Runge–Kutta de 4^a ordem.

Calcule o erro global em $x = 2$ e verifique empiricamente a ordem de convergência de cada método.

A ordem de convergência empírica é dada por:

$$p = \frac{\log \left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}} \right)}{\log \left(\frac{h_1}{h_2} \right)}.$$