Exercícios

4.1 - *Aplicando-se o método da decomposição LU à matriz:*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \dots & \dots & 3 & \dots \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ \dots & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix} \;,$$

obteve-se as matrizes:

$$L \;=\; \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & \dots \\ 2 & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \;, \quad U \;=\; \begin{pmatrix} \dots & -1 & \dots & 5 \\ \dots & 1 & \dots & -2 \\ \dots & 0 & 3 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & 10 \end{pmatrix} \;.$$

Preecher os espaços pontilhados com valores adequados.

4.2 - *Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & -12 \\ -\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 20 \\ 2\,x_1 & - & 3\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 3 \end{cases}$$

a) *Resolva-o usando decomposição LU.*

b) *Calcule o determinante de A, usando a decomposição.*

4.3 - *Seja A, $n \times n$, decomponível em LU. Sejam A_i, $i = 1, 2, \dots, n$, os menores principais de ordem i. Mostre que:*

$$u_{ii} \;=\; \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, \quad i \;=\; 1, 2, \dots, n,$$

onde :

$$\Delta_i \;=\; det A_i, \quad \Delta_n \;=\; det A, \quad e \quad \Delta_0 \;=\; 1.$$

4.4 - *Considere a matriz A, $n \times n$, com todas as sub-matrizes principais não singulares. Exiba as fórmulas da decomposição LU, onde L é matriz triangular inferior e U é matriz triangular superior com 1 na diagonal.*

4.5 - *Resolver o sistema $Ax = b$, onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b \;=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \;,$$

usando a decomposição LU do exercício 4.4.

4.6 - *Mostre que se A satisfaz as hipóteses da decomposição LU então A se decompõe de maneira única no produto LDU, onde L e U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, ambas com 1 na diagonal, e D é matriz diagonal. Além disso, $det(A) = d_{11} d_{22} \dots d_{nn}$.*

4.7 - *Mostre que se A é uma matriz simétrica e satisfaz as hipóteses da decomposição LU então $A = LDU$ implica $U = L^t$ (transposta de L).*

4.8 - *Mostre que se A é uma matriz simétrica, positiva definida e satisfaz as hipóteses da decomposição LU então $A = LDL^t$ onde os elementos diagonais de D são todos positivos.*

Assim o método de Eliminação de Gauss nada mais é do que o método da Decomposição LU.

Observe que devemos resolver apenas o sistema $Ux = b^{(n)}$, desde que o vetor final $b^{(n)}$ é obtido de b através da equação: $b = Lb^{(n)}$. Assim, se $Ax = b$, $A = LU$, $b = Lb^{(n)}$, obtemos:

$$LUx = Lb^{(n)} \;\Rightarrow\; Ux = b^{(n)} \,,$$

pois, como já dissemos, L é não singular. Portanto, o vetor solução x é obtido resolvendo-se apenas um sistema triangular.

2) O exemplo 4.4 apresenta um sistema de equações para o qual as hipóteses do Teorema 4.1 não são satisfeitas. Entretanto, resolvemos o sistema utilizando a estratégia de troca de linhas. Para visualizar porque isso foi possível, observe que podemos construir uma matriz P, chamada **matriz de Permutação**, a qual será formada pela permutação das linhas da matriz identidade, de forma que em cada linha o único elemento não nulo é igual a 1. Se durante o processo não permutamos as linhas do sistema então P é a matriz identidade. Agora se durante o processo permutamos a linha i com a linha j então na matriz P a linha i será permutada com a linha j. No exemplo 4.4, permutamos durante o processo a linha 2 com a linha 3. Assim:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 14/3 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix} \,.$$

e a matriz P nesse caso será:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Pode ser visto facilmente que com a troca de linhas a decomposição obtida não satisfaz a igualdade $A = LU$, mas satisfaz $PA = LU$, isto é, o produto LU reproduz a matriz A com suas linhas permutadas. Assim foi possível resolver o sistema do exemplo 4.4 pois a troca de linhas na decomposição funciona como se tivéssemos efetuado troca de linhas no sistema antes de começarmos a decomposição. A estratégia de troca de linhas para resolver um sistema é extremamente útil para os métodos baseados na decomposição LU e é conhecida como pivotamento. Descreveremos mais adiante o método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

Exercícios

4.9 - *Considere o sistema:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) *Resolva-o pelo método de Eliminação de Gauss,*

b) *Calcule o determinante de A, usando a matriz triangular obtida no item* **a)**.

4.10 - *Verificar, usando o método de Eliminação de Gauss, que o sistema :*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

não tem solução.

4.11 - *Usando o método de Eliminação de Gauss, verificar que o sistema:*

$$\begin{cases} x_1 & + & 4\,x_2 & + & \alpha\,x_3 & = & 6 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & 2\,\alpha x_3 & = & 3 \\ \alpha\,x_1 & + & 3\,x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{cases}$$

a) *possui uma única solução quando* $\alpha = 0$*;*

b) *infinitas soluções quando* $\alpha = 1$ *e*

c) *não tem solução quando* $\alpha = -1$.

4.4 Método de Gauss-Compacto

Como vimos, o método de Eliminação da Gauss nada mais é do que o método da Decomposição LU: a matriz triangular superior obtida ao final da aplicação desse método é a matriz U da decomposição LU e a matriz L é a matriz formada pelos multiplicadores (as constantes $\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{k}}$ do $k^{\underline{o}}$ passo).

Descreveremos agora uma maneira prática de se obter as matrizes L e U, bem como armazená-las de uma forma compacta. Tal método recebe o nome de **método de Gauss-Compacto**. A vantagem desse método é a de economizar espaço na memória, pois ambas as matrizes L e U são armazenadas sobre a matriz original A. O único incoveniente é que a matriz A é destruída. O termo independente b, é transformado juntamente com a matriz A, como no método de Gauss simples. Esse procedimento é bastante usual e conveniente para simplificar a programação desses métodos. Ao final teremos armazenados as matrizes L, U e o termo independente modificado. A solução do sistema será obtida resolvendo-se apenas um sistema triangular superior.

Descrição do algoritmo:

Considere o sistema linear, de ordem n, dado por (4.1). Em primeiro lugar montamos a matriz, $n \times n+1$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & a_{3,n+1} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right),$$

onde $a_{i,n+1} \;=\; b_i,\; i = 1, 2, \dots, n$.

A seguir construímos a matriz, $n \times n+1$, onde os termos independentes $b_i = a_{i,n+1},\; i = 1, \dots, n$ por serem obtidos da mesma maneira que os elementos u_{ij} serão chamados $u_{i,n+1},\; i = 1, \dots, n$. Assim, sobre a matriz original armazenamos a matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & u_{1,n+1} \\ \ell_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & u_{2,n+1} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n} & u_{3,n+1} \\ \dots & \dots & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & u_{nn} & u_{n,n+1} \end{array}\right),$$

a qual é obtida através das fórmulas da decomposição LU, (fórmulas (4.7)), levando em consideração a lei de formação das mesmas, na seguinte ordem: