Solução numérica de problema de valor inicial

Irineu Palhares

November 2025

Sumário

Problema de Valor Inicial (PVI)

Um problema de valor inicial (PVI) é um problema de evolução, no qual a informação inicial (conhecida), é propagada para o interior do domínio pela equação diferencial. Matematicamente, o problema de valor inicial é definido como

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(a) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. A função $y = y(x)$ $(x \geq a)$ é a solução e y_0 é o valor inicial em a.

Existência e unicidade de soluções

Um ponto fundamental na resolução de uma equação diferencial, diz respeito à existência e unicidade de soluções. Por princípio, só tem sentido a solução numérica de um problema quando este tem solução. O teorema garante a existência e unicidade de um PVI.

Theorem (Existência e Unicidade de solução do PVI - Picardi)

Suponha que $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ *e que* $f(x, y)$ *seja contínua em* D*. Se* f *satisfizer a uma condição de Lipschitz em* D *na variável* y*, então o problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y),\ a \leq x \leq b, \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

tem *uma* **única** *solução* $y(x)$ *para* $a \leq x \leq b$

Exemplo

Example

Considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 + x\sin(xy),\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = 0.$$

Verifique se a função f satisfaz a condição de Lipschitz e, caso satisfaça, determine a constante L.

Discretizações

Uma propriedade importante dos métodos computacionais para a solução de um PVI é a discretização, que consiste em obter a solução aproximada do PVI não num intervalo contínuo $a \leq x \leq b$, mas sim num conjunto discreto de pontos $\{x_i | i = 0, 1, \dots, N\}$.
A sequência de pontos $\{x_i\}$ é definida por

$$x_i = x_0 + ih; \;\; i = 0, 1, \dots, N,$$

onde $x_0 = a$, $x_N = b$ e $N = \frac{b-a}{h}$.

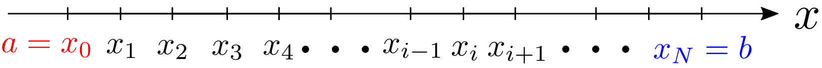

Figure: Discretização do domínio.

Dizemos que o comprimento do intervalo, h, é o tamanho do passo, os pontos x_i são os pontos da malha e N é o número de passos.

Notação

Denotaremos por y_n uma aproximação para a solução teórica em x_n, isto é: $y_n \approx y(x_n)$ e por $f_n = f(x_n, y_n)$.
Nosso objetivo é então determinar aproximações y_n da solução verdadeira $y(x_n)$ nos pontos da malha. Portanto, a solução numérica será uma tabela de valores dos pares (x_n, y_n).
Existem vários métodos numéricos para determinação (aproximada) da soluçãoo do PVI. Descreveremos a seguir alguns desses métodos, discutindo vantagens e desvantagens.

Método de Euler explícito

Euler em 1768, usando diferenças progressivas, desenvolveu uma aproximação para o PVI. Esse método é hoje conhecido como *Método de Euler*. Aproximamos a equação diferencial por

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

ou,

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Este é o método de Euler que é um método explícito. Note que o valor de y_{i+1} é calculado explicitamente em função de y_i, mesmo quando a função f é não linear.

Método de Euler implícito

Se no lugar de Δ fosse usado ∇ teríamos a versão implícita do Método de Euler:

$$\nabla y_i = \frac{y_i - y_{i+1}}{h} = f(x_i, y_i), \; i = 1, 2, \ldots, N,$$

ou,

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \; i = 0, 1, \ldots, N-1$$

.

Note que no caso em que f é não linear, a equação acima define o vetor y_{i+1} implicitamente e portanto seu cálculo exige a utilização de métodos para a solução de sistemas de equações algébricas não lineares, como por exemplo, o método das aproximações sucessivas ou o método de Newton.

Exemplo

Example

Considere o PVI,

$$\begin{aligned} & y' = -y + x, \ 0 \leq x \leq 1, \\ & y(0) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Determine aproximações para o PVI usando os métodos de Euler explícito e implícito, tomando $h = 0.1$.

Método dos Trapézios

Em vista dos resultados obtidos do exemplo anterior, é natural, portanto, considerarmos a combinação linear dos métodos de Euler explícito e implícito, com o objetivo de que os erros se cancelem e possamos obter uma melhor aproximação. Por exemplo, uma combinação linear é a média aritmética, que fornece o Método dos Trapézios, também conhecido como Regra dos Trapézios:

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right), \ \ i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Obtido a partir da integração numérica

O método do trapézio pode ser obtido também a partir da integração do PVI:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx.$$

Agora, desde que o lado esquerdo pode ser integrado exatamente, obtemos que a solução exata do PVI satisfaz a identidade:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

para quaisquer dos pontos x_n e x_{n+1} em $[a, b]$.

Regra do trapézio

Aplicando a regra do Trapézio para integração numérica em

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx,$$

resulta em

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\right].$$

Substituindo $y(x_n)$ e $y(x_{n+1})$ por y_n e y_{n+1}, respectivamente, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f_{n+1}\right].$$

Representação geométrica da regra do Trapézio

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f_{n+1}\right].$$

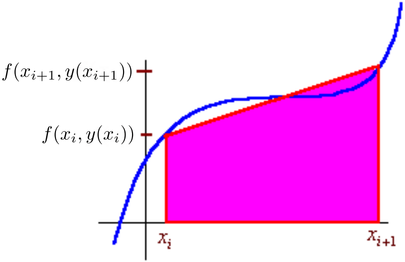

Figure: Regra do Trapézio.

Observe que o método dos Trapézios é um método impícito para y_{n+1}, uma vez que y_{n+1} aparece como argumento no segundo membro. Se $f(x, y)$ for uma função não linear, não teremos, em geral, condições de resolver a aproximação em relação a y_{n+1} de forma exata.

Método de Taylor de ordem q

O método de Taylor, que é de aplicabilidade quase geral, pode ser usado em combinação com outros métodos e servirá de introdução para outras técnicas que estudaremos.
A expansão em série de Taylor para $y(x_n + h)$ em torno do ponto x_n é, dada por:

$$y(x_n+h) = y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}h''(x_n)+\ldots+\frac{h^q}{q!}y^q(x_n)+\frac{h^{q+1}}{(q+1)!}y^{(q+1)}(\xi_n), x_n < \xi_n < x_n+h,$$

onde o último termo é o erro de truncamento local.
As derivadas na expansão não são conhecidas explicitamente, uma vez que a solução exata não é conhecida. Contudo, se f é suficientemente derivável, elas podem ser obtidas considerando-se a derivada total de $y' = f(x,y)$ com respeito a x, tendo em mente que y é função de x.

Exemplo do cálculo das derivadas de y

Assim, obtemos para as primeiras derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y'' &= f' = f_x + f_y f, \\ y''' &= f'' = \text{atividade para os alunos} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

Continuando desta maneira, podemos expressar qualquer derivada de y em termos de $f(x,y)$ e de suas derivadas parciais. Contudo, é claro que, a menos que $f(x,y)$ seja uma função muito simples, as derivadas totais de ordem mais elevada tornam-se cada vez mais complexas. Por razões práticas, deve-se então, limitar o número de termos na expansão.

Método de Taylor de ordem q

Truncando a expansão em Taylor, após $(q+1)$ termos, obtemos:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \cdots + \frac{h^q}{q!} f(q-1)(x_{n,y(x_n)})$$

.

Esta equação pode ser interpretada como uma relação aproximada entre valores exatos da solução do PVI. Uma relação exata entre valores aproximados da solução do PVI pode ser obtida subtsituindo-se $y(x_n)$ por y_n e $f^j(x_n, y(x_n))$ por f_n^j, $j = 0, 1, \ldots, q-1$. Fazendo isso, obtemos:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f_n' + \ldots + \frac{h^q}{q!} f_n^{(q-1)},$$

que é chamado Método de Taylor de ordem q.

Método de Taylor

Observe que, para calcular uma aproximação para a solução no ponto x_{n+1}, o método de Taylor requer informação apenas sobre o último ponto calculado, isto é, sobre x_n. Métodos com esta característica são chamados de Métodos de 1-passo. Além disso, o esquema numérico é uma equação explícita para y_{n+1}, uma vez que os termos do lado direito dependem apenas de y_n, e por este motivo são chamados de métodos explícitos.

Exemplo

Example

Resolver o pvi:

$$\begin{aligned} y' &= -y + x + 2, \\ y(0) &= 2,\ \ x \in [0, 0.3],\ \ h = 0.1, \end{aligned} \tag{5}$$

usando o método de Taylor de ordem 3.

Exemplo

Example

Resolver o pvi:

$$\begin{aligned} y' &= y^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) &= 0,\ \ x \in [0, 0.3],\ \ h = 0.1, \end{aligned} \tag{6}$$

usando o método de Taylor de ordem 3.

Regra do ponto médio

Considere agora o desenvolvimento de $y(x_n + h)$ e $y(x_n - h)$ em série de Taylor em torno do ponto x_n:

Fazer na lousa

Calculando $y(x_n + h) - y(x_n - h)$, obtemos:

$$y(x_n + h) - y(x_n - h) = 2hy'(x_n) + \frac{h^3}{3}y'''(x_n) + \dots$$

Considerando apenas o primeiro termo do lado direito desta expansão, substituindo $y(x_n + h)$ por y_{n+1}, $y(x_n - h)$ por y_{n-1} e $y'(x_n)$ por f_n, obtemos:

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n.$$

Esta fórmula pode ser colocada na forma:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1},$$

que é um método explícito de 2-passos chamado Regra do Ponto Médio.

Observação

Observe que, para resolver um pvi usando um método explícito de 2-passos, como é o caso da regra do ponto médio, devemos ter disponível, além do valor de y_0, o valor de y_1. Assim, o valor de y_1 deve ser obtido de alguma outra forma, por exemplo, usando método numérico de 1-passo.

Método de Simpson

Da mesma forma como feito para o método dos trapézios, podemos integrar o pvi, porém, agora, aproximando a integral do lado direito pela regra 1/3 de Simpson, ou seja,

$$\int_{x_n}^{x_{n+2}} y' dx = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y) dx$$

$$y(x_{n+2}) = y(x_n) + \frac{h}{3}\left[f(x_n, y(x_n) + 4f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f(x_{n+2}, y(x_{n+2}))\right]$$

e, como no caso do método do trapézio, obtemos:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right],$$

que é um método implícito de 2-passos chamado Método de Simpson.

Método de Adams-Moulton

Se ao invés de usarmos as fórmulas de Newton-Cotes do tipo fechado, usarmos do tipo aberto, obteremos outras equações de diferenças. Por exemplo, seja $P(x)$ o polinômio de interpolação da função $f(x, y)$ sobre os pontos:

$$(x_n.f_n),\ (x_{n+1}, f_{n+1}),\ (x_{n+2}, f_{n+2}).$$

Mas, ao invés de integrar o polinômio $P(x)$ entre x_n e x_{n+2}, integramos entre x_{n+1} e x_{n+2}, resultando na seguinte formula de diferenças:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{12}\left[-f_n + 8f_{n+1} + 5f_{n+2}\right],$$

que é um método implícito de 2-passos chamado Método de Adams-Moulton.

Método de Adams-Bashforth

De maneira semelhante ao método anterior, se aproximarmos $f(x, y(x))$ por um polinômio de interpolação sobre os pontos (x_n, f_n), (x_{n+1}, f_{n+1}), isto é, por um polinômio do primeiro grau, e integrarmos a equação diferencial de primeira ordem do PVI, de x_{n+1} até x_{n+2}, obtemos:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left[-f_n + 3f_{n+1}\right],$$

que é um método explícito de 2-passos chamado Método de Adams-Bashforth. Como na regra do ponto médio, para aplicar este método devemos obter, inicialmente, o valor de y_1 por método de 1-passo.

Erro de truncamento local

Agora, podemos definir formalmente o erro de truncamento local de um método linear de passo múltiplo.

Definition

Definimos o Erro de Truncamento Local, em x_{n+k} do método linear de passo múltiplo, definido por $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$, por:

$$\tau_{n+k} = \sum_{j=0}^{k} \left[\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j y'(x_{n+j}) \right],$$

onde $y(x)$ é a solução exata do PVI.

Observações

Observe que o erro de truncamento é chamado local, pois supomos que nenhum erro foi cometido anteriormente, isto é, impomos:

$$y_{n+j} = y(x_{n+j}),\ j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

e então só consideramos o erro em y_{n+k}.
No livro do Suli and Mayers o erro de truncamento local é definido como:

$$\tau_n = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi(x_n, y(x_n); h),$$

onde $\Phi(.,.;.)$ é uma função contínua em suas variáveis. Além disso, Φ é usada para definir métodos de 1-passo:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h),\ n = 0, 1, \ldots, N-1,\ y(x_0) = y_0.$$

Exemplo

Example

O erro de truncamento do método de Euler explícito é dado por:

$$\tau = \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \text{ onde } x_n < \xi < x_{n+1},$$

isto é, o erro de truncamento local é da $O(h^2)$.

Exemplo

Example

O erro de truncamento local do método do trapézio é dado por:

$$\tau = -\frac{h^3}{12}y'''(\xi), \text{ onde } x_n < \xi < x_{n+1},$$

isto é, o erro de truncamento local é da $O(h^3)$, o que representa um aperfeiçoamento sobre o método de Euler.
Pedir para que os alunos verifiquem.

Exercícios

1. Utilizando a linguagem de programação python, resolva o PVI abaixo pelo método do ponto médio, Euler explícito, implícito e regra dos trapézios, no intervalo $[0, 2]$, usando $h = 0.1$.

$$y' = 5y - 1, \ \ y(0) = 1.2.$$

   Explique o comportamento de cada um desses métodos à luz das propriedades discutidas neste capítulo. Solução exata: $y(x) = exp(5x) + 0.2$. Pedir para os alunos fazerem.
2. Determine o erro de truncamento local para:
   a) regra do ponto médio,
   b) método de Simpson,
   c) método de Adams-Moulton,
   d) método de Adams-Bashforth,
   e) método $\frac{3}{8}$ de Simpson.

Erro global

Definition

O erro global no ponto x_n é definido por:

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

A análise do erro global nos permite estabelecer a convergência de um método. Esta é uma propriedade muito desejável para um método numérico, pois ela irá nos garantir que ao refinarmos a malha o resultado numérico se torna mais próximo do resultado exato.

Convergência

Definition

Dizemos que um método numérico é convergente se o erro global e_n converge para zero quando n tende para infinito de maneira que o ponto x_n permaneça fixo.

Isto quer dizer que a convergência está sendo analisada no ponto $x_n = a + nh$ e para que este ponto permanexa fixo, a quantidade nh deve permanecer fixa, portanto se n tende para infinito, necessariamente, h deve tender a zero, ou seja, a malha está sendo refiniada para cada novo valor de n da sequência.

Relação entre erro global e de truncamento

Theorem

Considre o método de 1-passo na sua forma geral, isto é, $y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)$. *Estamos assumindo que* Φ *satisfaça a condição de Lipschitz com respeito ao seu segundo argumento, ou seja, existe a constante* $L_\Phi > 0$ *tal que, para* $0 \leq h \leq h_0$ *e para todo* (x, u) *e* (x, v) *no retângulo*

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, |y - y_0| \leq C\},$$

temos que

$$|\Phi(x, u; h) - \Phi(x, v; h)| \leq L_\Phi |u - v|.$$

Nesta condições, temos a seguinte desigualdade:

$$|e_n| \leq \frac{\tau}{L_\Phi}\left(e^{L_\Phi(b-a)} - 1\right), \; n = 0, 1, \ldots, N,$$

onde $\tau = max_{0 \leq n \leq N-1} |\tau_n|$.

Prova do teorema: erro global vs erro de truncamento

Proof.

Fazer prova na lousa. $\square$

Exemplo

Example

Considere o problema de valor inicial: $y' = \tan^{-1} y$, $y(0) = y_0$, onde y_0 é um valor dado. De modo a determinar o limitante do erro $e_n = y(x_n) - y_n$, onde y_n é aproximado pelo método de Euler, precisamos determinar os valores de L e M_2.

Pedir aos alunos para determinarem L e M_2.

Exemplos

Example

Aplicar o teorema ao método de Euler:

$$|e_n| \leq \frac{1}{2} M_2 \left[\frac{e^{L(x_n - a)} - 1}{L} \right] h, \;\; n = 0, 1, \ldots, N.$$

Exemplo

Example

Verificar que para o método dos trapézios temos a seguinte desigualdade:

$$|e_n| \leq \frac{h^2 M}{L}\left(e^{(x_n-a)\left(\frac{L}{1-\frac{hL}{2}}\right)} - 1\right),$$

onde M é um limitante de $|y'''(x)|$, isto é,

$$|y'''(x)| \leq 12M.$$

Pedir para os alunos fazerem.