МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра общих проблем управления

«О знаковом ранге матриц»

Выполнил:
студент 307 группы
кафедры общих проблем управления
Максимов Владислав Владимирович

Научный руководитель:
доцент кафедры
общих проблем управления
Рютин Константин Сергеевич

Москва
2025

1 Введение

В данной работе исследуется понятие знакового ранга матрицы. Все линейные пространства и матрицы мы будем рассматривать над полем вещественных чисел.

Определение
Знаковой матрицей размера $m \times n$ назовем матрицу $\Sigma = (s_{ij})$ размера $m \times n$, такую что все ее элементы $s_{ij} \in \{1, -1\}$.
Матрица $A = (a_{ij})$, не содержащая нулевых элементов, согласована со знаковой матрицей $\Sigma = (s_{ij})$, если они одинакового размера и для всех i, j выполнено равенство $sgn(a_{ij}) = s_{ij}$.
Знаковый ранг знаковой матрицы Σ – это число $sgnrk(\Sigma) = \min\{rk(A) \mid A \text{ согласована с } \Sigma\}$.

Знаковый ранг естественно возникает в большом числе математических задач, в частности, в теории коммуникационной сложности или в теории линейных классификаторов. Например, в работе [1] авторами установлена фундаментальная связь между знаковым рангом коммуникационной матрицы и задачей коммуникации с неограниченной ошибкой. По этой причине, задача алгоритмического нахождения знакового ранга активно изучается. В статье [2] приводится полиномиальный алгоритм приближенного знакового ранга.
В настоящей работе мы исследуем детерминированные алгоритмы поиска знакового ранга и возможность принципиальной дискретизации задачи. Особое внимание уделено вопросу достижения знаковой матрицей максимального знакового ранга (то есть n для матрицы $n \times n$). В частности, получен критерий, позволяющий проверить ответ на этот вопрос для конкретной матрицы в терминах детерминанта. Также получены некоторая оценка, на число знаков каждого вида у матриц, достигающих максимального знакового ранга.

2 Основные определения и утверждения

Известно, что понятие знакового ранга имеет геометрическую интерпретацию. Формулировка этого утверждения содержится в [3]. Тем не менее, мы докажем этот результат независимо (теорема 2.1).

Определение Будем говорить, что матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ вкладывается в $\mathbb{R}^d$ в смысле знакового ранга, если существует набор из $n + m$ векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^d$, такой что для всех i, j выполнено равенство $\langle x_i, y_j \rangle = a_{ij}$.

Лемма 2.1 *Пусть A – матрица, такая что $rk(A) = d$. Тогда A вкладывается в смысле знакового ранга $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство
Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$. Среди этих m строк найдем d базисных. Пусть они имеют номера $i_1, i_2, \ldots, i_d$. Далее явно построим систему векторов в $\mathbb{R}^d$, реализующих вложение. Положим $y_k = (a_{i_1k}, a_{i_2k}, \ldots a_{i_dk})^T$ для $k = 1, 2, \ldots n$. Теперь определим $x_{i_k} = (0_1, 0_2, \ldots, 0_{k-1}, 1_k, 0_{k+1}, \ldots, 0_d)^T$. Иначе говоря, $x_{i_k} = e_k$, где e_k – вектор стандартного базиса. Осталось определить только вектора x_i, где $i \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$. Для этого разложим i - ую строку по нашим d базисным строкам. Пусть $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{d} \lambda_k a_{i_kj}$ для всех j. Тогда положим $x_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)^T$.
Покажем, что это и есть искомая система векторов. Пусть $i = i_k$ для какого-то k. Тогда:

$$\langle x_i, y_j \rangle = \langle x_{i_k}, y_j \rangle = \langle e_k, y_j \rangle = a_{i_kj} = a_{ij}$$

Пусть теперь $i \neq i_k$ ни для какого k. Тогда:

$$\langle x_i, y_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{d} \lambda_k x_{i_k}, y_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \langle x_{i_k}, y_j \rangle = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k a_{i_kj} = a_{ij}$$

■

Лемма 2.2 *Пусть матрица A вкладывается в $\mathbb{R}^d$ в смысле знакового ранга. Тогда $rk(A) \leqslant d$.*

Доказательство
Мы покажем, что если матрица вкладывается в $\mathbb{R}^d$ в смысле знакового ранга, то можно найти $r \leqslant d$ строк в матрице, линейная оболочка которых содержит все остальные строки. Ясно, что этого будет достаточно. Итак, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^d$. Выберем среди векторов $x_1, \ldots, x_m$ максимальный набор линейно независимых векторов. Пусть это вектора $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, где $r \leqslant d$, поскольку все эти вектора лежат в $\mathbb{R}^d$. Теперь рассмотрим строку с номером $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Разложим вектор x_i по векторам $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$. Получим $x_i = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k x_{i_k}$.

Отсюда следует, что $\forall j$:

$$a_{ij} = \langle x_i, y_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_{i_k}, y_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \langle x_{i_k}, y_j \rangle = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_{i_k j}$$

Мы получили, что строка с произвольным номером i является линейной комбинацией строк с номерами $i_1, \dots, i_r$. Это мы и хотели показать. ■

Теперь мы можем сформулировать и доказать результат о геометрической интерпретации знакового ранга.

Определение Будем говорить, что знаковая матрица $\Sigma = (s_{ij})$ размера $m \times n$ реализуется в $\mathbb{R}^d$, если существует набор из $n+m$ векторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$, такой что для всех i, j выполнено равенство $sgn(\langle x_i, y_j \rangle) = s_{ij}$.

Теорема 2.1 *Пусть Σ – знаковая матрица, $d = sgnrk(\Sigma)$. Тогда $d = min\{k \mid \Sigma$ реализуется в $\mathbb{R}^k\}$. Более того, если имеется реализация Σ в $\mathbb{R}^d$ векторами $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$, то матрица $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \langle x_i, y_j \rangle$ имеет ранг d и она согласована с Σ.*

Доказательство

Итак, обозначим $r = min\{k \mid \Sigma$ реализуется в $\mathbb{R}^k\}$. Пусть знаковый ранг достигается на матрице A. Тогда по лемме 2.1 эта матрица вкладывается в смысле знакового ранга некоторым набором векторов в $\mathbb{R}^d$, но тогда этот же набор векторов задает реализацию нашей знаковой матрицы. Отсюда получаем, что $r \leqslant d$.
Пусть теперь мы реализовали сигнатуру в $\mathbb{R}^r$. Тогда матрица A, которая будет получаться из скалярных произведений в этой реализации будет согласована с Σ, поэтому ее $rk(A) \geqslant d$. Но в то же время по лемме 2.2 $rk(A) \leqslant r$. Отсюда получается, что $d \leqslant r$. Итого $d = r$ и первая часть теоремы доказана. Но тогда автоматически получается и вторая часть, поскольку $d \leqslant rk(A) \leqslant r$ и $d = r$ ■

Далее мы увидим, как эту теорему можно применить для изучения знакового ранга.

3 Дискретизация задачи

Предположим, что у нас есть конкретная знаковая матрица Σ и мы хотим посчитать ее знаковый ранг. Формально, для этого нам нужно перебрать всевозможные согласованные с Σ матрицы $m \times n$ с вещественными коэффициентами. Естественными кажутся следующие вопросы. Можно ли перебирать не по всем матрицам, а только какому-то конкретному типу матриц? Можно ли перебирать по конечному числу матриц, может быть, зависящему от их размерности или иных параметров? Отметим, что вообще говоря из определения это совершенно непонятно, поскольку ранг матрицы не является устойчивой функцией. Тем не менее, некоторый результат удается получить, используя технику из первой части этой работы.

Теорема 3.1 *Знаковый ранг достигается на целочисленной матрице.*

Доказательство

Пусть Σ – знаковая матрица, $d = sgnrk(\Sigma)$. По теореме существует ее реализация в $\mathbb{R}^d$ помощью векторов $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$. Заметим, что функция $(x, y) \mapsto sgn(\langle x, y \rangle)$ непрерывна и постоянна в некоторой окрестности точек (x_i, y_j), поскольку $\langle x_i, y_j \rangle \neq 0$, а значит $\langle x_i, y_j \rangle > 0$ или $\langle x_i, y_j \rangle < 0$ в некоторой окрестности. Отсюда следует, что найдется $\varepsilon > 0$, такое что если $\|x_i - \hat{x_i}\| < \varepsilon$, $\|y_j \mapsto \hat{y_j}\| < \varepsilon$, то набор векторов $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \dots, \hat{x_{m-1}}, \hat{x_m}, \hat{y_1}, \hat{y_2}, \dots, \hat{y_n} \in \mathbb{R}^d$ также является реализацией Σ. В силу того, что $\mathbb{Q}^d$ плотно в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать вектора так, чтобы $\forall i, j$ $\hat{x_i}, \hat{y_j}$ имели рациональные координаты. Воспользовавшись теоремой 2.1, получим, что знаковый ранг достигается на матрице их скалярных произведений векторов с рациональными координатами, то есть на матрице из рациональных чисел. Умножив все строки на НОК их знаменателей, получим искомое утверждение. ■

В связи с этой теоремой, интересно узнать насколько большими можно брать числа. Если бы мы знали оценку сверху, то мы могли очевидно получили бы алгоритм, который за конечное время находит знаковый ранг матрицы. В связи с этим введем следующее определение.

Определение Пусть Σ_{mn} – множество всех знаковых матриц размера $m \times n$.
Пусть $M(m, n) = min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall\ \Sigma \in \Sigma_{mn}\ \ sgnrk(\Sigma)$ реализуется на целочисленной матрице $A = (a_{ij})$, где $|a_{ij}| \leqslant k\}$.

Ясно, что $M(m, n)$ корректно определено, поскольку знаковых матриц фиксированного размера конечное число и по теореме 3.1 каждая из них имеет целочисленную реализацию.

Вопрос По причинам описаным выше, важным видется задача об оценке $M(n, m)$ сверху некоторой известной функцией $\Phi(m, n)$

4 Проблема алгоритмического поиска сигнум-ранга

Если бы мы знали $\Phi(m,n)$, то мы могли бы находить точное значение знакового ранга за конечное время. Тем не менее, ответить на вопрос когда знаковая матрица размера $n \times n$ имеет знаковый ранг n можно не используя полный перебор. А именно, была получена следующая теорема:

Теорема 4.1 *Пусть* $\Sigma = (s_{ij})$ *– знаковая матрица* $n\times n$. *Тогда* $sgnrk(\Sigma) = n$ *если и только если* $sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)}$ *не зависит от* $\sigma \in S_n$

Доказательство

Пусть $sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)}$ не зависит от $\sigma \in S_n$. Тогда рассмотрим $det(X) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)}$ Очевидно, что для всякой матрицы, согласованной с Σ все слагаемые будт одного знака, а значит определитель не равен нулю и матрица имеет максимальный знаковый ранг.
Предположим, что эти слагаемые зависят от перестановки. Рассмотрим следующие множества:

$$A_+ = \{\sigma \in S_n, \mid sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)} = 1\}$$

$$A_- = \{\sigma \in S_n, \mid sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)} = -1\}$$

Проанализируем несколько случаев:
1) Если $|A_+| = |A_-|$, то $det(\Sigma) = 0$, поскольку в определителе будет одинаковое число положительных и отрицательных слагаемых, равных единице. То есть знаковый ранг $< n$.
2) Пусть теперь $|A_+| \neq |A_-|$. Без ограничения общности можно считать, что $|A_+| > |A_-|$. Тогда $det(\Sigma) > 0$. Возьмем произвольную $\sigma \in A_-$. Рассмотрим функцию $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, где $f(\lambda) = det(A_\lambda), A_\lambda = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda s_{ij},\ i = \sigma(i) \\ s_{ij}, j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

Осталось заметить, что f – непрерывная функция, $f(1) = det(\Sigma) > 0,\ f(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$. А значит, по теореме Вейерштрасса найдется положительное $\hat{\lambda}$, такое что $A_{\hat{\lambda}}$ вырожденная матрица. В силу того, что матрица $A_{\hat{\lambda}}$ согласована с Σ получим, что знаковый ранг исходной знаковой матрицы не является полным. ∎

Покажем, как это теорема может быть применена для исследования знаковых матриц малых размерностей.

Утверждение Не существует знаковой матрицы Σ размера 3×3, такой что $sgnrk(\Sigma) = 3$

Доказательство

Доказательство основано на предыдущей теореме. Рассмотрим $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$. Выпишем явно определитель.

$$detX = x_1x_5x_9 + x_2x_6x_7 + x_3x_4x_8 - x_3x_5x_7 - x_1x_6x_8 - x_2x_4x_9$$

Пусть $x_i \in \{\pm 1\}$, то есть X – это конкретная знаковая матрица. Обозначим через N число -1 в ней. Допустим, что $sgnrk(\Sigma) = 3$. Тогда по прошлой теореме в каждом слагаемом вида $x_1x_5x_9, x_2x_6x_7, x_3x_4x_8$ будет четное число -1, а значит N – четно (сумма трех четных чисел). По аналогии в каждом слагаемом вида $x_3x_5x_3, x_1x_6x_8, x_2x_4x_9$ будет нечетное число -1. Отсюда получается, что N – нечетно. Это и дает нам противоречие. ∎

Похожим образом можно получить оценку на число -1 для произвольного n. А именно верно следующее утверждение:

Утверждение Пусть $\Sigma = (s_{ij})$ – знаковая матрица размера $n \times n$, $sgnrk(\Sigma) = n$, N – число -1 в ней, $n \geqslant 4$. Тогда верно следующее неравенство:

$$n \leqslant N \leqslant n^2 - n$$

Доказательство

Достаточно доказать неравенство $n \leqslant N$, поскольку неравенство $N \leqslant n^2 - n$ сводится к нему домножением матрицы на -1. Докажем от противного. Предположим, что $N < n$. Тогда по принципу Дирихле существуют строка $\hat{i}$ и столбец $\hat{j}$, состоящие только из 1. Суммарно в них находится $2n-1$ элемент. Покажем, что в матрице найдется еще одна единица. Если это не так, то тогда в матрице не более чем $(2n-1)+(n-1) = 3n-2 < n^2$ при $n \geqslant 4$. Значит, в нашей матрице имеется единица (не лежащая в строке $\hat{i}$ или столбце $\hat{j}$). Обозначим i_0, j_0 – индексы этого элемента. Рассмотрим теперь перестановку $\sigma \in S_n$, такую что $\sigma(i_0) = j_0, \sigma(\hat{i}) = \hat{j}$, которая существует, поскольку $i_0 \neq \hat{i}, j_0 \neq \hat{j}$. Пусть $\tau = (j_0\ \hat{j})\sigma$. Осталось заметить, что слагаемые $sgn(\sigma)s_{1\sigma(1)}s_{2\sigma(2)}\dots s_{n\sigma(n)}$ и $sgn(\tau)s_{1\tau(1)}s_{2\tau(2)}\dots s_{n\tau(n)}$ различны. В самом деле, $sgn(\tau) = -sgn(\sigma)$, поскольку τ отличается от σ умножением на транспозицию, но при этом $s_{i\tau(i)} = s_{i\sigma(i)}$

для каждого i в силу того, что $s_{\hat{i}\hat{j}} = s_{\hat{i}j_0} = s_{i_0\hat{j}} = s_{i_0j_0} = 1$ по построению. Из теоремы 4.1 теперь и следует наше утверждение. ■

Надо отметить, что при этом автору неизвестно, существуют ли для больших n знаковые матрицы Σ с $sgnrk(\Sigma) = n$.

Список литературы

[1] *Ramamohan Paturi, Janos Simon*
Probabilistic communication complexity,
Journal of Computer and System Sciences,
Volume 33, Issue 1, 1986, Pages 106-123

[2] *Н. Алон, Ш. Моран, А. Ягудаев*
Знаковый ранг и размерность Вапника–Червоненкиса,
Математический сборник, 208:12 (2017), 4–41

[3] *Satyanarayana V. Lokam*
Complexity Lower Bounds using Linear Algebra,
Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science:
Vol. 4: No. 1–2, pp 1-155