第 49 章　利用五点光滑法进行曲线拟合

（作者：吴杭彬，主题分类：地理信息）

曲线拟合是用适当的曲线类型拟合观测数据，是等值线绘制等过程的常用数据处理方法。五点光滑法是通过在每两个相邻离散点之间构建对应的三次多项式从而得到曲线方程，每个三次多项式共有四个未知数需要确定，故需要四个方程求解，即通过两个离散点都在曲线上以及两个点处的一阶导都是确定的这四个条件，而每个点处的一阶导是由该点自身与左右相邻的两个点共五个点确定的。

本章内容是通过读取一系列离散点数据文件，编程实现曲线拟合功能。

一、数据文件读取

编程读取“曲线拟合数据.txt”文件。数据文件格式为“ID，x，y”，每行数据为一个点的数据，从左至右依次是点的 ID，点的 x 坐标和点的 y 坐标。数据格式见表 49-1。

表 49-1　**数据文件格式**

ID，x 坐标，y 坐标
1，1.841071976，-1.724307355
2，3.96379461，-4.037030357
3，7.152611963，-5.227522169
4，10.7240874，-3.824442533
……

二、补充点

由于每个点的一阶导数需要由自身及左右两个点确定，故当一个点集 P_S 中有 n 个点时，$P_S=\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n\}$，点 p_i 的坐标为(x_i, y_i)，则 p_1，p_2，p_{n-1} 和 p_n 都会因相邻点的缺失而无法计算一阶导数，所以需要在点集两侧各补充两个点。

补充点分两种情况：

（1）当曲线首尾闭合时，只需要将 p_{n-1} 和 p_n 补充到所有点之前，再将 p_1 和 p_2 补充到所

有点之后，补充完之后的 $P_S=\{p_{n-1}, p_n, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n, p_1, p_2\}$。

(2)当曲线首尾不闭合时，需要通过增量补点的方法在点集两端各补充两个点，如图49.1所示。在点集起始端，通过 p_1，p_2 和 p_3 计算得到 A 点的坐标：

$$\begin{cases} x_A = \Delta X(p_3 - p_2) - \Delta X(p_2 - p_1) \\ y_A = \Delta Y(p_3 - p_2) - \Delta Y(p_2 - p_1) \end{cases} \tag{49-1}$$

然后同理通过 p_2，p_1 和 A 计算得到 B 点的坐标，将 B 与 A 补充到点集最前端。而在结尾端，则是通过 p_{n-2}，p_{n-1} 和 p_n 计算得到 C 点，再通过 p_{n-1}，p_n 和 C 计算得到 D 点，然后将 C 与 D 补充到点集最尾端。补充完之后的 $P_S=\{B, A, p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1}, p_n, C, D\}$。

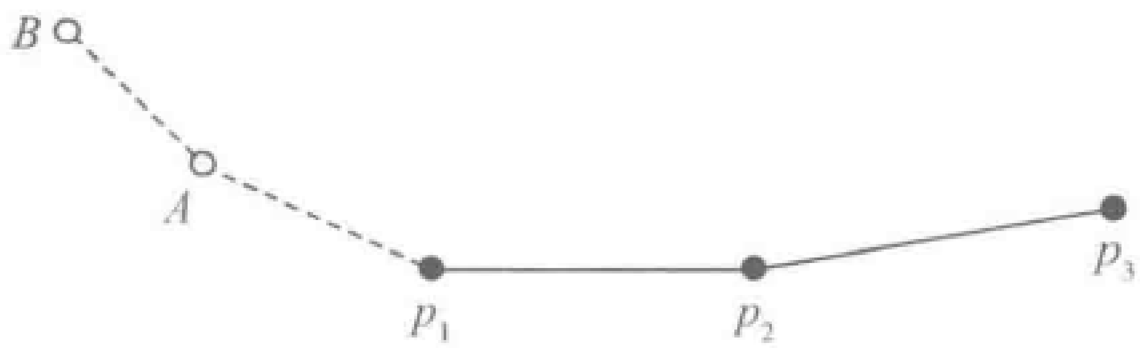


图49.1　增量补点示意图

三、计算各点 x 方向与 y 方向的梯度

如图49.2所示，点 p_i 为是待一阶求导的点，AB 为曲线的切线，由AKIMA条件可得：

$$\frac{p_{i-1}A}{AC} = \frac{p_{i+1}B}{BD} \tag{49-2}$$

则可由此计算得到点 p_i 在 x 方向与 y 方向的梯度 $\cos\theta_i$ 与 $\sin\theta_i$：

$$\begin{cases} \cos\theta_i = \dfrac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \\ \sin\theta_i = \dfrac{b_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2}} \end{cases} \tag{49-3}$$

式中，a_0，b_0 为：

$$\begin{cases} a_0 = w_2 a_2 + w_3 a_3 \quad , \ b_0 = w_2 b_2 + w_3 b_3 \\ w_2 = |a_3 b_4 - a_4 b_3|, \ w_3 = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \\ a_1 = x_{i-1} - x_{i-2} \quad , \ b_1 = y_{i-1} - y_{i-2} \\ a_2 = x_i - x_{i-1} \quad , \ b_2 = y_i - y_{i-1} \\ a_3 = x_{i+1} - x_i \quad , \ b_3 = y_{i+1} - y_i \\ b_4 = x_{i+2} - x_{i+1} \quad , \ b_4 = y_{i+2} - y_{i+1} \end{cases} \tag{49-4}$$

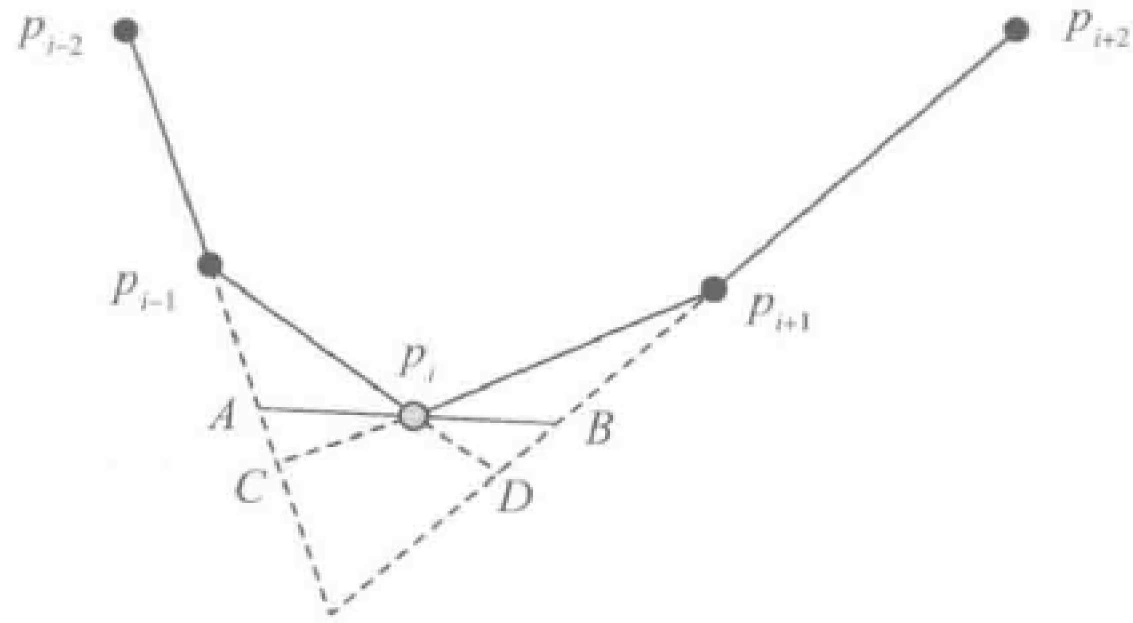


图 49.2　梯度计算示意图

四、计算曲线参数

设两点 p_i 与 p_{i+1} 的三次曲线方程为：

$$\begin{cases} x = E_0 + E_1 z + E_2 z^2 + E_3 z^3 \\ y = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 \end{cases} \tag{49-5}$$

其中 z 为 p_i 与 p_{i+1} 两点之间的弦长变量，$0 \leqslant z \leqslant 1$。式中，

$$\begin{cases} E_0 = x_i,\ E_2 = 3(x_{i+1} - x_i) - r(\cos\theta_{i+1} + 2\cos\theta_i) \\ E_1 = r\cos\theta_i,\ E_3 = -2(x_{i+1} - x_i) + r(\cos\theta_{i+1} + \cos\theta_i) \\ F_0 = y_i,\ F_2 = 3(y_{i+1} - y_i) - r(\sin\theta_{i+1} + 2\sin\theta_i) \\ F_1 = r\sin\theta_i,\ F_3 = -2(y_{i+1} - y_i) + r(\sin\theta_{i+1} + \sin\theta_i) \end{cases} \tag{49-6}$$

其中，r 为 p_i 与 p_{i+1} 两点之间的弦长，$r = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$。

五、生成曲线段

在两点 p_i 与 p_{i+1} 之间，曲线参数既已求得，则根据三次多项式值绘制折线段来逼近曲线。取弦长 z 为 0~1，间隔为 i，每个 z 代入三次多项式算得一个对应的点坐标，这样便在 p_i 与 p_{i+1} 之间插入了 m 个点，$m = \frac{1}{i}$。依次用直线段连接这 m 个点，则逼近出 p_i 与 p_{i+1} 两点之间的曲线，i 越小，逼近得越准确。

六、用户界面设计与开发文档撰写

1. 人机交互界面设计与实现

要求：(1)设计包括菜单、工具条、表格、图形(显示、放大、缩小)、文本等功能；

(2)功能正确，可正常运行，布局合理、美观大方、人性化。

2. 计算报告的显示与保存

要求：在用户界面中显示相关统计信息、计算报告，并保存为文本文件(＊.txt)。

3. 图形绘制和保存

(1)图形绘制要求：绘制给出数据文件的平面点，并绘制生成的曲线。
(2)图形文件保存要求：通过编程实现“图形绘制”的图形保存为DXF格式的文件。

4. 开发文档与报告

内容包括：(1)程序功能简介；(2)算法设计与流程图；(3)主要函数和变量说明；(4)主要程序运行界面；(5)使用说明。

七、参考源程序

在“https://github.com/ybli/bookcode/tree/master/Part3-ch16”目录下包含了源程序、可执行文件、样例数据等相关文件。

图49.3是图形显示界面，显示散点图以及拟合曲线。图49.4是计算报告界面，给出了基本信息、计算结果等内容。

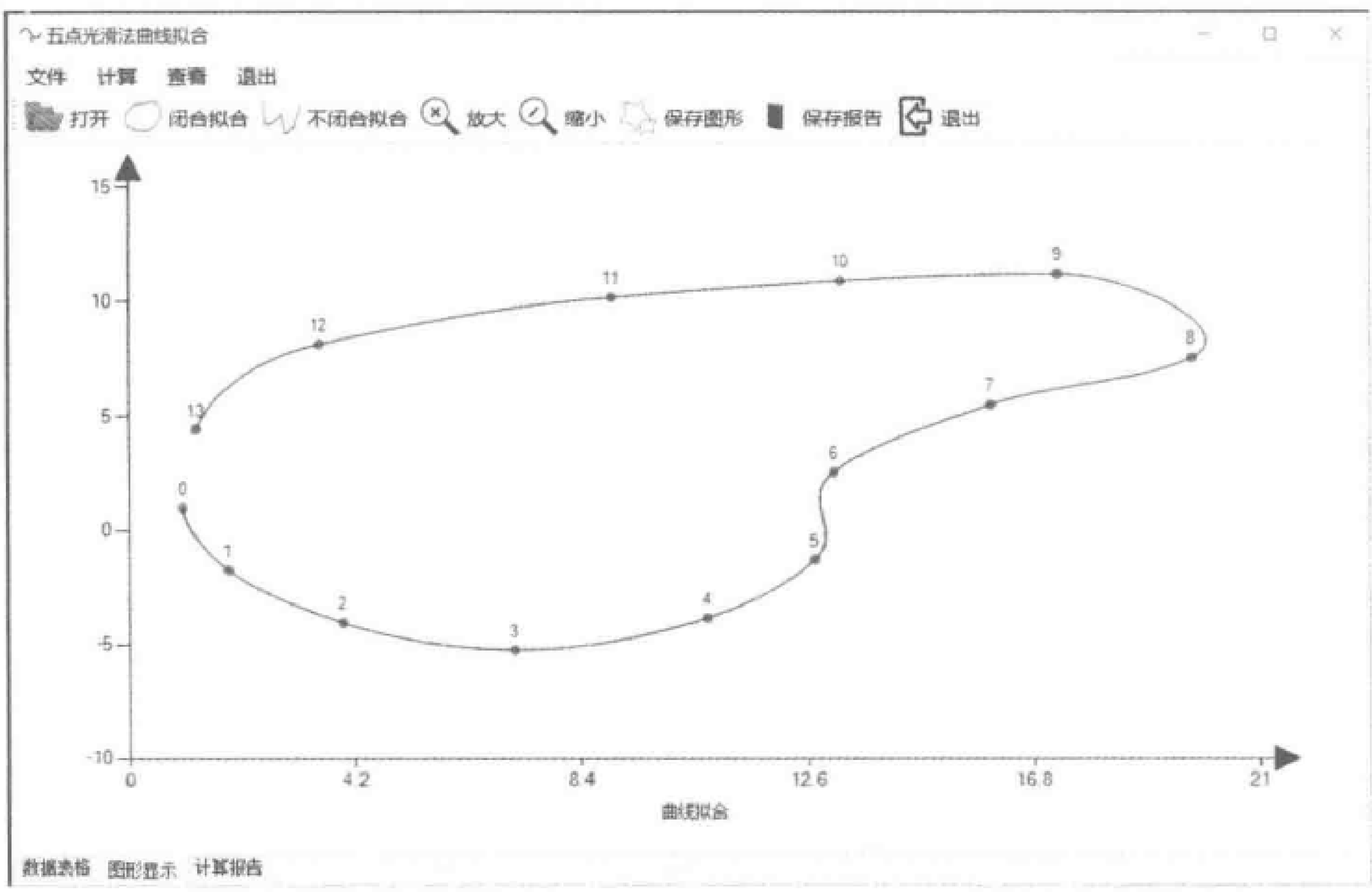
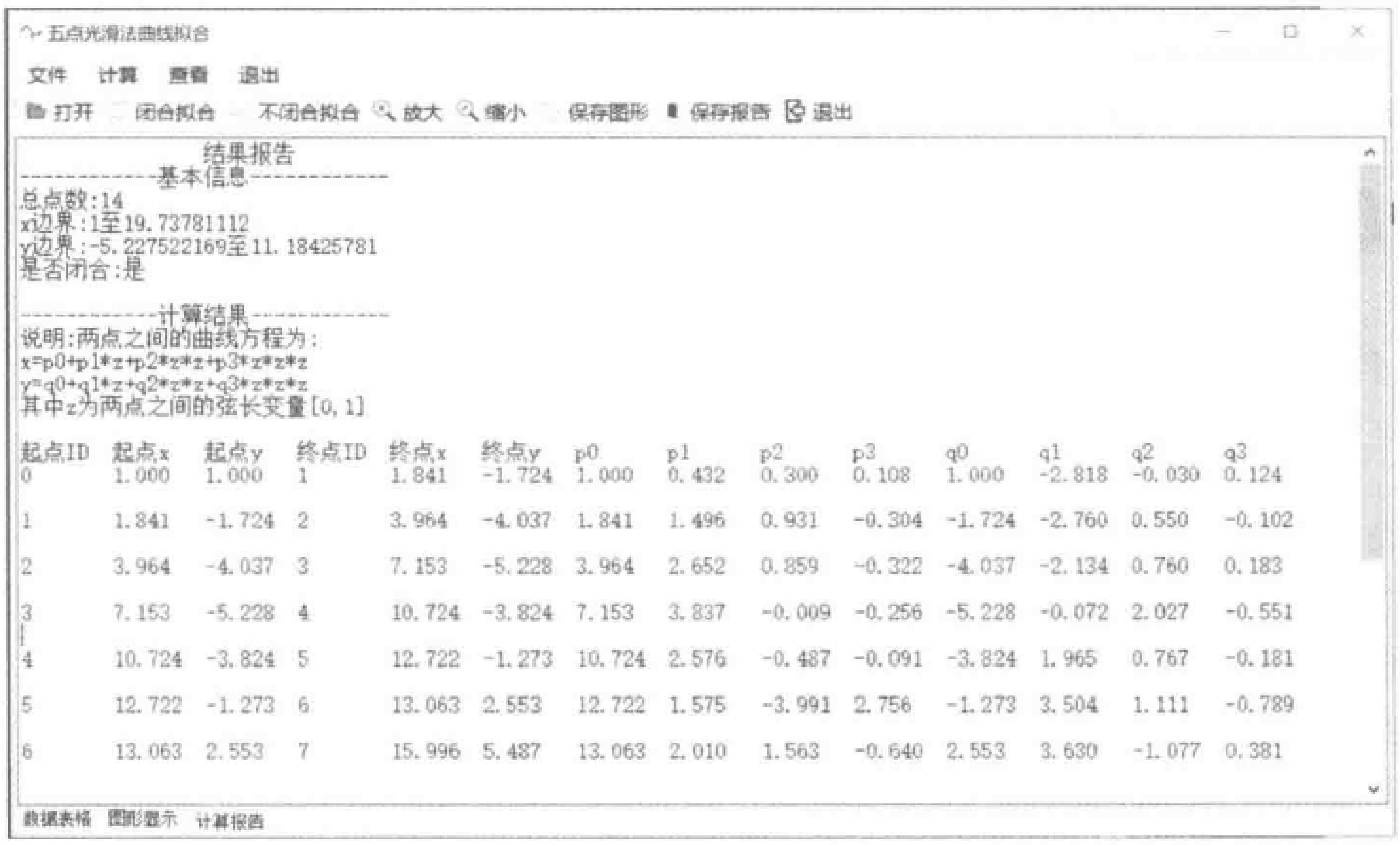


图49.3 图形显示



五点光滑法曲线拟合

文件　计算　查看　退出

打开　闭合拟合　不闭合拟合　放大　缩小　保存图形　保存报告　退出

结果报告

------------基本信息------------

总点数:14

x边界:1至19.73781112

y边界:-5.227522169至11.18425781

是否闭合:是

------------计算结果------------

说明:两点之间的曲线方程为:

x=p0+p1*z+p2*z*z+p3*z*z*z

y=q0+q1*z+q2*z*z+q3*z*z*z

其中z为两点之间的弦长变量[0,1]

起点ID	起点x	起点y	终点ID	终点x	终点y	p0	p1	p2	p3	q0	q1	q2	q3
0	1.000	1.000	1	1.841	-1.724	1.000	0.432	0.300	0.108	1.000	-2.818	-0.030	0.124
1	1.841	-1.724	2	3.964	-4.037	1.841	1.496	0.931	-0.304	-1.724	-2.760	0.550	-0.102
2	3.964	-4.037	3	7.153	-5.228	3.964	2.652	0.859	-0.322	-4.037	-2.134	0.760	0.183
3	7.153	-5.228	4	10.724	-3.824	7.153	3.837	-0.009	-0.256	-5.228	-0.072	2.027	-0.551
4	10.724	-3.824	5	12.722	-1.273	10.724	2.576	-0.487	-0.091	-3.824	1.965	0.767	-0.181
5	12.722	-1.273	6	13.063	2.553	12.722	1.575	-3.991	2.756	-1.273	3.504	1.111	-0.789
6	13.063	2.553	7	15.996	5.487	13.063	2.010	1.563	-0.640	2.553	3.630	-1.077	0.381

数据表格　图形显示　计算报告

图 49.4　计算报告