Explorando ‘Toy Models’ do Big-Bang Baseados em Mecânica Newtoniana Clássica de N-Corpos

Exploring Big Bang toy models based on N-body classical newtonian mechanics

Octavio Augusto Potalej
Eduardo Colli (Orientador)

IME - USP

oapotalej@usp.br

Objetivos

- A evolução de sistemas gravitacionais é complexa. Simular o problema de N-corpos é uma forma de estudá-los;
- Adicionamos colisões elásticas para evitar singularidades;
- Simular numericamente tem desafios, como a precisão nos resultados e o custo de computação. Utilizaremos *Fortran* para isso;
- A *Dinâmica de Formas* é uma teoria de gravidade que, entre outras coisas, propõe setas do tempo baseadas na gravidade. Podemos visualizar estas setas com simulações.
- Precisamos de algumas condições iniciais específicas...

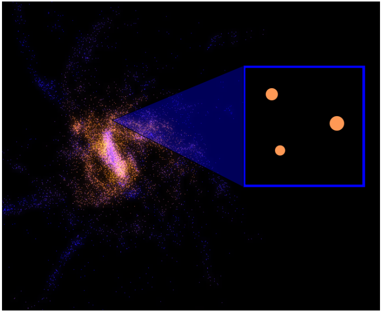

Figura: Simulação de um problema de N-corpos[1]. No final, são apenas pontos.

1

[1] Feita com o simulador de Marc Vivas: https://github.com/MarcVivas/N-body

Integrais primeiras e condições iniciais

Integrais primeiras do problema de N-corpos

O problema de N-corpos é conservativo. Isso significa que existem valores que se conservam durante toda a evolução do sistema, chamados *integrais primeiras*. São eles:

1. Energia total: $E = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \|\dot{\boldsymbol{r}}_a\|^2 + V$, onde V é o *potencial*;
2. Momento linear total: $\boldsymbol{P} = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{p}_a$;
3. Centro de massas: $\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a \boldsymbol{r}_a$, $M = \sum_{a=1}^{N} m_a$;
4. Momento angular total: $\boldsymbol{J} = \sum_{a=1}^{N} \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a$.

Consideramos o caso $E = 0$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}_{cm} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$.

Condicionando valores iniciais

- Anular E: $\dot{\boldsymbol{r}}_a \mapsto \dot{\boldsymbol{r}}_a\sqrt{-V/(E-V)}$;
- Anular $\boldsymbol{r}_{cm}$: $\boldsymbol{r}_a \mapsto \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_{cm}$;
- Anular $\boldsymbol{P}$: $\dot{\boldsymbol{r}}_a \mapsto \dot{\boldsymbol{r}}_a - \frac{1}{M}\sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\boldsymbol{r}}_a$;
- Anular $\boldsymbol{J}$: $\dot{\boldsymbol{r}}_a \mapsto \dot{\boldsymbol{r}}_a + \boldsymbol{r}_a \times \omega$, para ω solução de $\boldsymbol{I}_{tot}\omega = -\boldsymbol{J}$.

Simulação - Integradores numéricos

O problema de N-corpos é descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Para simular o sistema é preciso integrar numericamente essas equações. Métodos:

Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4)

- Método de propósito geral;
- Precisa de passo de integração pequeno para oferecer bons resultados.

Velocity Verlet (VV)

- Método simplético;
- Não precisa de passos tão pequenos para integrar sistemas conservativos.

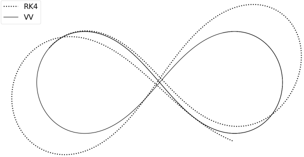

Figura: Uma das trajetórias em um problema de 3 corpos, integrado via RK4 e VV.

Simulação - Corretor numérico

Motivação: se a solução obtida com a integração numérica for suficientemente precisa, as integrais primeiras devem estar próximas de zero. Assim, a solução correta deve estar a uma projeção de distância!

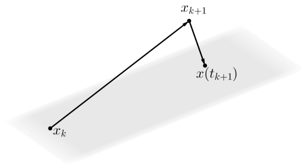

Figura: Projeção de uma aproximação x_k no plano de nível, encontrando a solução $x(t_{k+1})$.

Corretor conservativo (Formalização)

Considere um sistema conservativo $\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))$, $t \in I$ intervalo aberto, com valor inicial $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $t_0 \in I$. Seja o vetor de k integrais primeiras do sistema $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = (\psi_1(\boldsymbol{x}), ..., \psi_k(\boldsymbol{x}))$ e sua matriz jacobiana $\boldsymbol{J\Psi}(\boldsymbol{x})$. Seja $\boldsymbol{x}^\star$ uma aproximação para $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(t^\star)$, $t^\star \in I$, $t^\star \neq t_0$. Vale que

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^\star = \boldsymbol{J\Psi}(\boldsymbol{x}^\star)^T \boldsymbol{\alpha}, \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é a solução de $\boldsymbol{J\Psi}(\boldsymbol{x}^\star)\boldsymbol{J\Psi}(\boldsymbol{x}^\star)^T \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}^\star)$.

Simulação - Corretor numérico (visualização)

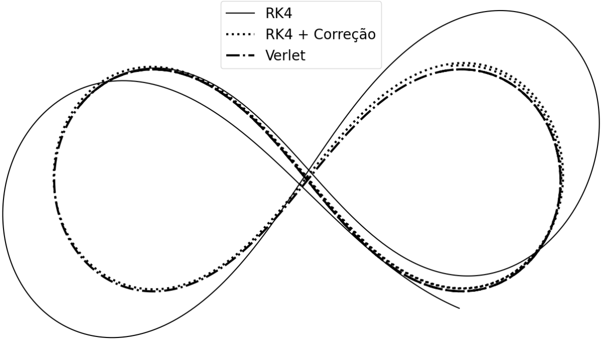

Figura: Mesmo problema de 3 corpos em forma de lemniscata, mas inclusa a trajetória com correção.

Dinâmica de Formas - Dispersão e Evolução

Voltando para a teoria...
O problema de N-corpos possui dois medidores de dispersão: o *momento de inércia* I e o *potencial* V, dados por

$$I = \frac{1}{M}\sum_{a<b} m_a m_b r_{ab}^2, \quad V = -\sum_{a<b} G\frac{m_a m_b}{r_{ab}}. \tag{2}$$

A *Relação de Lagrange-Jacobi* relaciona as duas medidas:

$$\ddot{I} = 4E - 2V. \tag{3}$$

Quando $E \geq 0$, tem-se $\ddot{I} \geq 0$, $\dot{I}$ monótona crescente e I côncava para cima. A metade de $\dot{I}$ é chamada *momento de dilatação*:

$$D := \frac{1}{2}\dot{I} = \sum_{a=1}^{N} \langle \boldsymbol{r}_a, \boldsymbol{p}_a \rangle . \tag{4}$$

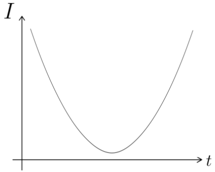

Figura: Momento de inércia

O ponto de virada (mínimo) de I é chamado *Ponto de Janus*, e coincide com $D = 0$.

Dinâmica de Formas - Complexidade e Setas do Tempo

Comprimentos

Podemos definir dois comprimentos a partir de I e V:

- Comprimento médio da raiz quadrada: $L_{rms} = \sqrt{I/M}$.
- Comprimento harmônico médio: $L_{mhl} = M^2/|V|$.

Complexidade

A razão entre L_{rms} e L_{mhl} é chamada *complexidade*:

$$C_S := \frac{L_{rms}}{L_{mhl}} = \frac{|V|\sqrt{I}}{M^{5/2}}. \tag{5}$$

As direções de crescimento de C_S caracterizam setas do tempo, que podem ser medidas por $\tau = D/D_0$.

Primeiro resultado: Simulações numéricas

As simulações numéricas em Fortran apresentaram o resultado esperado: o método RK4 é menos preciso que o de VV, que é menos preciso que com o corretor numérico. O custo com o corretor, porém, é maior. Utilizá-lo ou não depende do objetivo com a simulação!

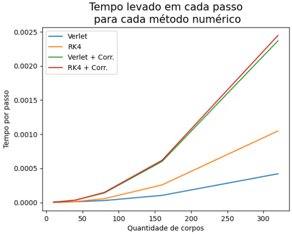

Figura: Tempo levado a cada passo de integração por quantidade de corpos em cada método.

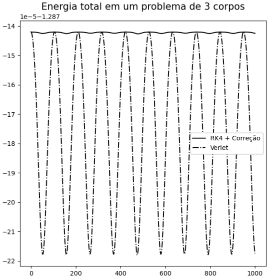

Figura: Energia total no problema de 3 corpos em forma de lemniscata.

Segundo resultado: Dinâmica de Formas

As setas do tempo previstas pela Dinâmica de Formas podem ser visualizadas com as simulações de N-corpos.

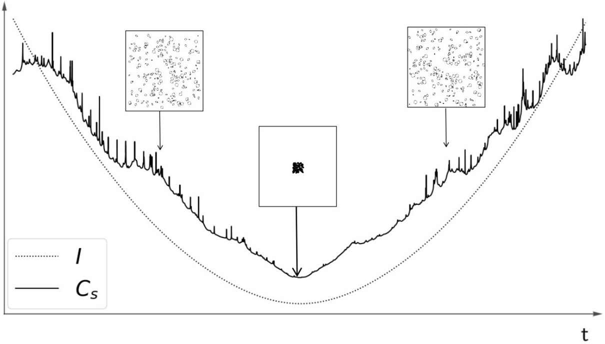

Figura: Complexidade e momento de inércia em um problema de 100 corpos.

Conclusões e pretensões

Rumos possíveis

- **Modelos mais complexos:** Os resultados da Dinâmica de Formas dependem das condições iniciais e da conservação. Pretendemos testá-los com "toy-models"mais avançados, e.g.: rotações individuais, colisões inelásticas, etc;
- **Caos:** Como ficaria o sistema com energia negativa?
- **Computação:** As simulações podem ser maiores! Computação paralela, processamento em GPU, algoritmos em árvore, etc. Cabe aprender e testar.

Referências

BARBOUR, Julian; KOSLOWSKI, Tim; MERCATI, Flavio. Identification of a Gravitational Arrow of Time. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 113, p. 181101, 18 out. 2014. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.181101. Disponível em: ¡https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.181101¿.

________. The solution to the problem of time in shape dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 31, n. 15, p. 155001, jul. 2014. DOI: 10.1088/0264-9381/31/15/155001. Disponível em: ¡https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/31/15/155001¿.

BERTSEKAS, Dmitri Panteli. *Nonlinear Programming*. 3ed. Nashua: Athena Scientific, 2016.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard; LUBICH, Christian. *Geometric Numerical Integration*: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. [S.l.]: Springer-Verlag, 2006. DOI: 10.1007/3-540-30666-8.

ROMA, Alexandre et al. *Métodos para a solução numérica de equações diferenciais ordinárias a valores iniciais*. São Paulo: Notas de aula, 2019.

VOLCHAN, Sérgio. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2007.