강의 15: 최단 경로 I: 도입

강의 개요

- 가중 그래프
- 일반적인 접근
- 음의 간선
- 최적 부분 구조

읽을 거리

CLRS, Sections 24 (Intro)

동기:

A 에서 B 로 가는 가장 짧은 거리 구글 지도의 "길 찾기"

공식화: 가중 그래프 $G(V,E)\ W: E \to R$ 의 문제

두 알고리즘: 다익스트라 $O(V \lg V + E)$ 는 음이 아닌 가중치를 가정

벨만-포드 $O(VE)$ 는 일반적인 알고리즘

적용

- 칼텍에서 MIT까지의 최단 경로 찾기
  - web.mit.edu에서 "CalTech Cannon Hack" 사진을 보세요
  - 칼텍에서 MIT까지 구글맵을 보세요
- 가중 그래프 $G(V,E), W: E \to R$ 의 모델
  - V = 정점 (도로의 교차점)
  - E = 간선 (거리, 도로); 방향 간선 (일반통행 도로)
  - $W(U,V)$ = 간선 (u,v) 의 가중치 (거리, 통행료)

$$\text{path } p = < v_0, v_1, \ldots v_k >$$
$$(v_i, v_{i+1}) \in E \quad \text{for} \quad 0 \le i < k$$
$$w(p) = \sum_{i=0}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

가중 그래프:

표기:

$v_0 \xrightarrow{p} v_k$ 는 v_0 에서 v_k 까지의 경로 p 를 의미한다. (v_0) 는 v_0 에서 v_0 까지의 가중치 0인 경로를 의미한다.

정의:

u 에서 v 까지 최단 경로의 가중치를 다음과 같이 정의한다.

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min \left\{ w(p) : u \xrightarrow{p} v \right\} & \text{if } \exists \text{ any such path} \\ \infty & \text{otherwise} \quad (v \text{ unreachable from } u) \end{cases}$$

단일 출발 최단 경로:

$G(V,E), w$ 와 시작 정점 S 가 주어져 있을 때, S 부터 각각의 $v \in V$ 까지의 $\delta(S,V)$ [와 최단 경로]를 찾아라.

자료 구조:

$$\begin{aligned} d[v] &= \text{value inside circle} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{if } v = s \\ \infty & \text{otherwise} \end{array} \right\} \Longleftarrow \quad \text{initially} \\ &= \delta(s,v) \Longleftarrow \quad \text{at end} \\ d[v] &\geq \delta(s,v) \quad \text{at all times} \end{aligned}$$

$d[v]$ 는 v 로 가는 더 좋은 경로를 찾을 때 마다 줄어든다, 그림 1을 보아라.

$\Pi[v] =$ v 로 가는 최적 경로의 선행자, $\Pi[s] = \text{NIL}$

예:

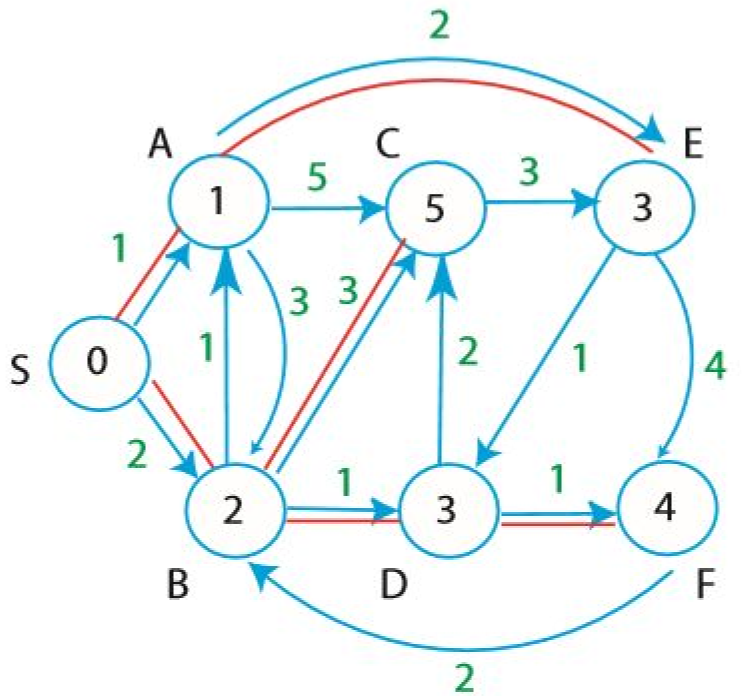

그림 1: 최단 경로 예시: 두꺼운 간선으로부터 선행 관계 Π 를 알 수 있다.

음의 가중치 간선:

- 몇몇 적용에는 자연스럽다 (예, 가중치로 로그가 쓰이는 경우)
- 몇몇 알고리즘은 음의 가중치를 갖는 간선을 허용하지 않는다. (예, 다익스트라)
- 음의 가중치를 갖는 간선이 있으면, 음의 사이클이 있을 수도 있다.
  ⇒ 최단 경로가 없을 수도 있다!

예:

그림 2를 보자

$B \to D \to C \to B$ (원점)은 $-6+2+3=-1<0$ 의 가중치를 갖는다! 최단 경로 $S \to C$ (또는 B, D, E)는 정의되지 않는다. $B \to D \to C$ 를 원하는 만큼 반복할 수 있기 때문이다.

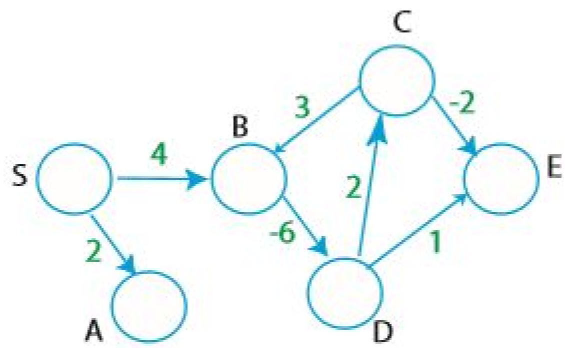

그림 2: 음의 가중치를 갖는 간선.

최단 경로 $S \to A$ 는 정의되고 가중치 2를 갖는다

음의 간선이 있는 경우, 최단 경로 알고리즘은 음의 사이클을 찾을 수 있어야 한다. (예, 벨만-포드)

최단 경로 알고리즘의 일반적인 구조 (음의 사이클이 없는 경우)

Initialize:	for $v \in V$: $d[v] \leftarrow \infty$; $\Pi[v] \leftarrow$ NIL
	$d[S] \leftarrow 0$
Main:	repeat
	select edge (u,v) [somehow]
"Relax" edge (u,v)	if $d[v] > d[u] + w(u,v)$:
	$d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$
	$\pi[v] \leftarrow u$
	until all edges have $d[v] \le d[u] + w(u,v)$

복잡도:

종료 조건? (음의 사이클이 없다고 해도 보여야 한다)
간선을 잘못 선택하는 경우 지수 시간이 될 수 있다.

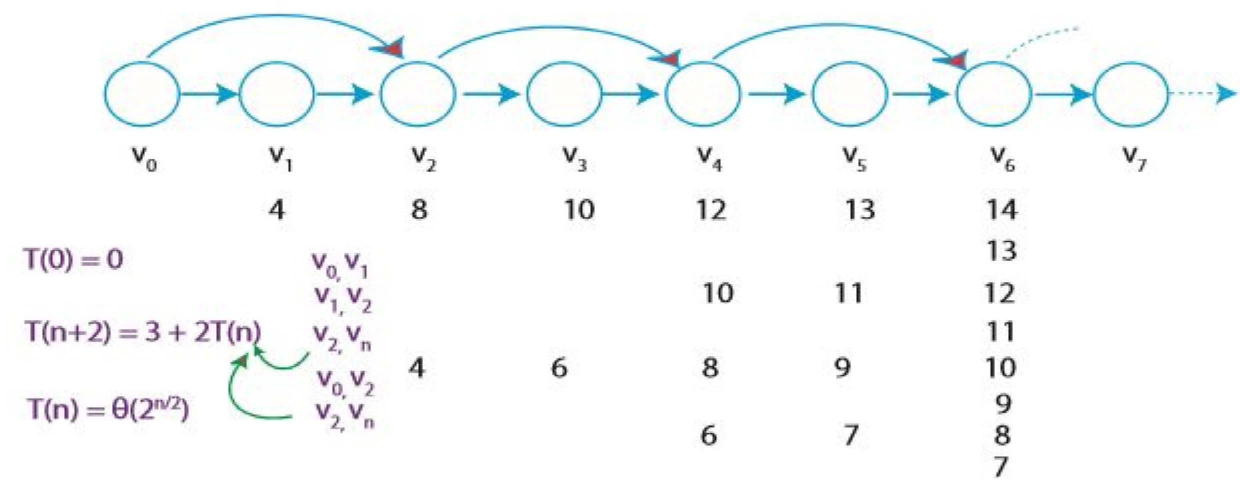

그림 3: 일반적인 알고리즘의 실행 과정. v_0 과 v_1 에서 나가는 간선들은 4, v_2 와 v_3 에서 나가는 간선들은 2, v_4 와 v_5 에서 나가는 간선들은 1의 가중치를 갖는다.

그림 3의 예에서 더 일반화하면, n개의 간선이 있고 첫 세 개의 간선이 $2^{n/2}$ 의 가중치를 갖고, 두 번째 간선들은 $2^{\frac{n}{2}-1}$ 의 가중치를 갖는 식으로 된다. 경로적으로 간선을 선택하면 $d(v_{n-1})$ 의 첫 값이 $(2^{n/2}+2^{(n/2)-1}+...+4+2+1)$ 이 될 것이다. 이 순서로, v_{n-3} 과 v_{n-1} 을 연결하는 가중치가 1인 간선을 완화할 수 있을 것이다. 그러면, $d(v_{n-1})$ 는 1이 줄어들 것이다. 그리고 v_{n-5} 와 v_{n-3} 을 연결하는 가중치 2인 간선에 대해 완화하면, $d(v_{n-2})$ 가 2만큼 줄어들 것이다. 그 후로, $d(v_{n-1})$ 을 1만큼 줄이기 위해 간선 (v_{n-3},v_{n-2}) 와 (v_{n-2},v_{n-1}) 에 대해 완화할 수 있다. 그리고, 또 간선 (v_{n-3},v_{n-1}) 에 대해 완화한다. 이런 식으로, $d(v_{n-1})$ 를 한 번 완화할 때마다 1씩 줄이면서 $2^{n/2}+2^{(n/2)-1}+...+4+2+1$ 까지 줄일 수 있을 것이다. 이는 $O(2^{n/2})$ 시간이 걸린다.

최적 부분 구조:

정리: 최단 경로의 부분 경로는 최단 경로이다.

$p =< v_0, v_1, ..., v_k >$ 를 최단 경로라고 하고
$p_{ij} =< v_0, v_{i+1}, ..., v_j >$ $0 \le i \le j \le k$ 라고 하면

p_{ij} 는 최단 경로이다.

Proof: $p = \begin{array}{ccccccc} v_0 & \xrightarrow{p_{0,i}} & v_i & \xrightarrow{p_{ij}} & v_j & \xrightarrow{p_{jk}} & v_k \\ & & & \xrightarrow[p'_{ij}]{} & & & \end{array}$

만약 p_{ij}' 가 p_{ij} 보다 작다고 하면, p_{ij} 대신 p_{ij}' 를 사용하게 되면 p 보다 작아진다. 모순.

삼각 부등식:

정리: 모든 $u, v, x \in X$ 에 대해,

$$\delta(u, v) \le \delta(u, x) + \delta(x, v)$$

이다.

증명:

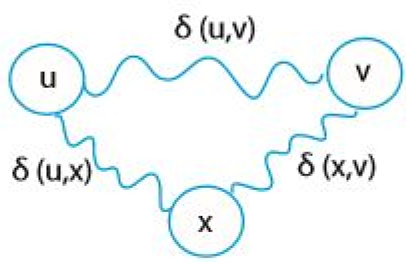

그림 4: 삼각 부등식