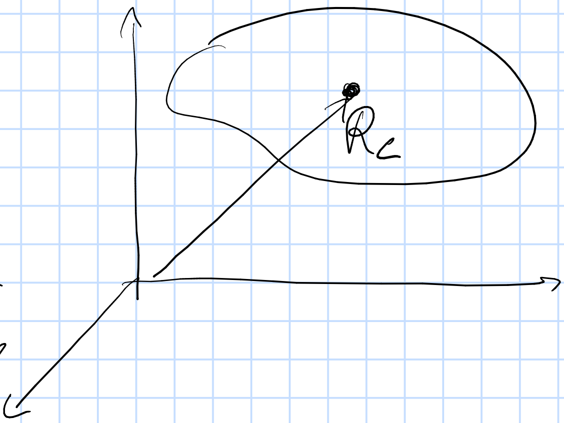
14.10.

Док-ть, что
$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = 0.$



$\vec{M_0} = 0 \iff$ своб. т
в полож. равнов.

$\delta A' = \vec{R}\vec{v_0}\,dt + \vec{M_0}\vec{\omega}\,dt$

своб. тело- $\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ склер. система, то вирт. перемещ и возм. перем. совп.

$\delta A = \delta A'$.

$\Rightarrow$: $\vec{R} = 0, \vec{M_0} = 0 \Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow$ в п.р.

$\Leftarrow$: связи идеальные $\Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow$
$\vec{R} = 0, \vec{M_0} = 0.$

14.23.

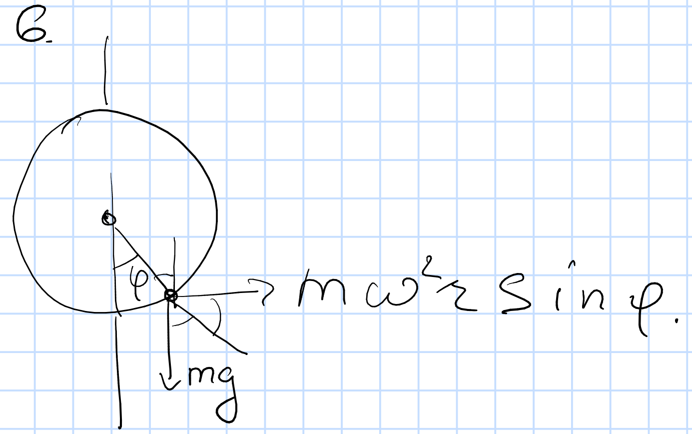
$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0; i = 1, S, \quad \Pi = \Pi(q_{s+1}, \ldots, q_n).$

$\Pi = \Pi(q_{s+1}, q^0_{s+2}, \ldots q^0_n)$ зафикс все обоб. коорд кроме одной $\Rightarrow$ рассмотрим функцию Π одной переменной q_{s+1}, тогда $Q_1 = -\frac{d\Pi}{dq_{s+1}}$, т.к. т. в П.Р. $\Rightarrow Q_1 = 0 \Rightarrow$

Положение равн. опред. экстремумом $\Pi \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0; k = (S+1, n) \Rightarrow$

$\forall q_i, i = 1, S \Rightarrow$ система в положении равновесие

14.36.



1) $mg\,\mathrm{tg}\,\varphi = m\omega^2 r\sin\varphi$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$

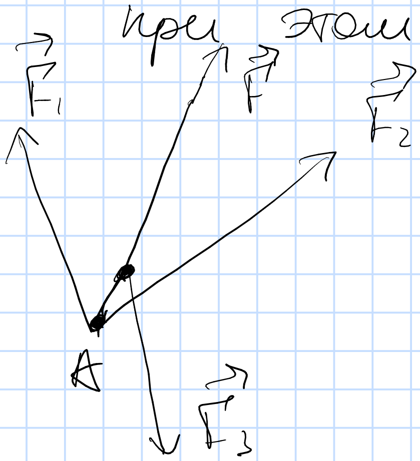
т.к. полож равн.

2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 3) $\varphi = 0$.

1) $\Rightarrow$ $\varphi = \arccos\frac{g}{\omega^2 r}$.

14.42.

① 2 силы в любом случае пересек., допустим $\vec F_1$ и $\vec F_2$ пересекались в A, тогда $\exists\ \vec F = \vec F_1 + \vec F_2$ и при этом $l_{\vec F} \neq l_{\vec F_3} \Rightarrow \exists\ M_A \neq 0 \Rightarrow$



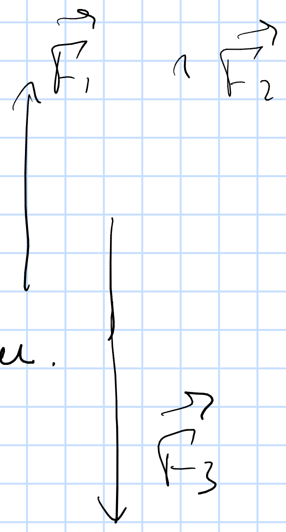
по з. 14.10 не вып. дост $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предп. неверно $\Rightarrow$

$l_{\vec F} = l_{\vec F_3}$, т.к. $A \in l_{\vec F} \Rightarrow \vec F_3 \cap \vec F = A \Rightarrow$

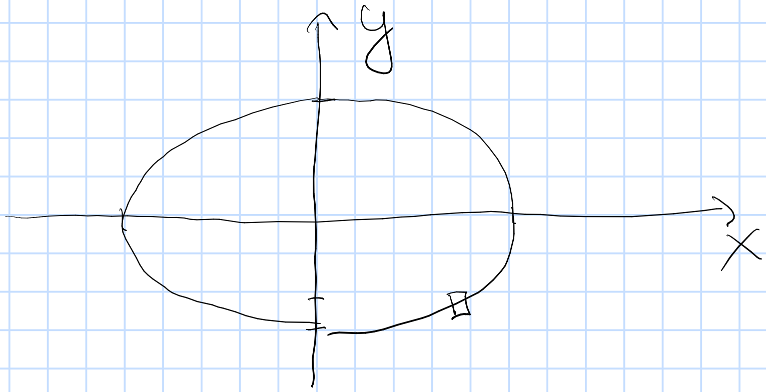
$\Rightarrow$ все три силы $\cap$ в 1 точке.

② $\vec F_1 \parallel \vec F_2$



для того, что бы не возн ненулевой мом. отн $l \perp \vec F_1 \Rightarrow \vec F_3 \parallel \vec F_1 \Rightarrow$

Такое возможно.



$$\Pi = \Pi_T + \Pi_{вр}$$

1) $\Pi_T = mgy$

2) $\Pi = -mgy$

$$\Pi_{вр} = m\omega^2 \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{б^2} y^2$$

$$+ \ \Pi = \frac{m\omega^2}{2}\left(a^2 - \frac{a^2}{б^2}\right) y^2 + mgy$$

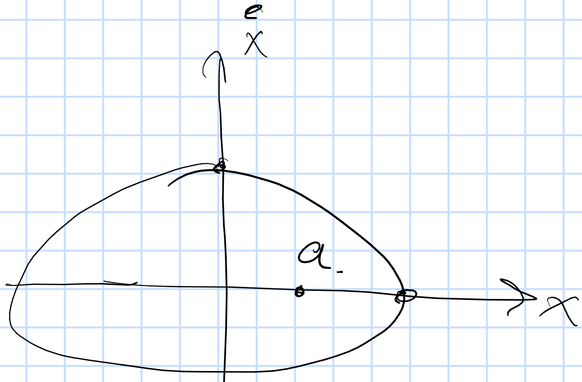
$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = mg - m\omega^2 \frac{a^2}{б^2} y = 0 \Rightarrow y = \frac{б^2}{a^2} \frac{g}{\omega^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -m\omega^2 \frac{a^2}{б^2} < 0 \Rightarrow$$ при $\Pi_T > 0$ полож равн. неуст.

2) $$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = mg + m\omega^2 \frac{a^2}{б^2} y = 0. \Rightarrow y = -\frac{б^2}{a^2} \frac{g}{\omega^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = m\omega^2 \frac{a^2}{б^2} > 0 \Rightarrow$$ пол. равн устойчиво.

15.23.



$F(x)$ – гл. функ. силы.

$$\Pi = -\int F(x)\,dx$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\right|_{a_0} = +\frac{\partial F(x)}{\partial x} = -\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{a_0} > 0.$$

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{a_0} < 0. \qquad F(a_0) = 0. = \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

15.18.

По Th Лагранжа явл-я д. усл. уст. полож р., то $\Rightarrow$ необход.

$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dot{\Theta}_k^2 \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mu_k \Theta_k^2 \Rightarrow$

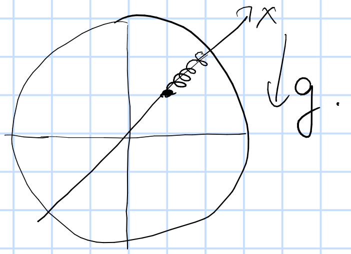
В конс. системе $\dot{E} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\ddot{\Theta}_k \dot{\Theta}_k + \mu_k \Theta_k \dot{\Theta}_k) = 0$

Если $\mu_k < 0$, то реш. дифор. ур-ие будет $\Theta_k = e^{\mu_k t} \Rightarrow$ не удовл. уст.

Если $\mu_k = 0$, то $\Theta_k = C_1 t + C_2 \Rightarrow$ не удовл. уст.

Если $\mu_k > 0 \Rightarrow \Pi$ - строго полож. опр. кв. форма. и имеет строгий минимум в нуле $\Rightarrow$ вып. усл. Т. об уст. полож равн.

15.21.



Введем обоб. коорд. x и φ. $\Rightarrow$

$\Pi = mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(R - x - \frac{R}{2}\right)^2 =$

$= mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(\frac{R}{2} - x\right)^2$

$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\sin\varphi + cx - c\frac{R}{2} = 0.$

$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgx\cos\varphi = 0.$

1) $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0; \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mg\left(\frac{R}{2} - \frac{mg}{c}\right) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R > \frac{2mg}{c} \Rightarrow$ неуст; $R < \frac{2mg}{c}$ - уст.

2) $\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = c > 0; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = mg\left(\frac{R}{2} + \frac{mc}{2}\right) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ полож устойчиво.

3) $x=0$ $\qquad \varphi = \arcsin \frac{cR}{2mg}$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi = 0; \Rightarrow$ неуст.

15.15. $\quad z = \alpha x^2 + \beta y^2 \qquad \omega = const$

$(0,0,0)$ – П.Р.

$\Pi = mg(\alpha x^2 + \beta y^2) - \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2}$

По т. Лагранжа.

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = mg\alpha - m\omega^2$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 2mg\beta - m\omega^2 \quad \hookrightarrow C = \begin{pmatrix} 2mg\alpha - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 2mg\beta - m\omega^2 \end{pmatrix}$

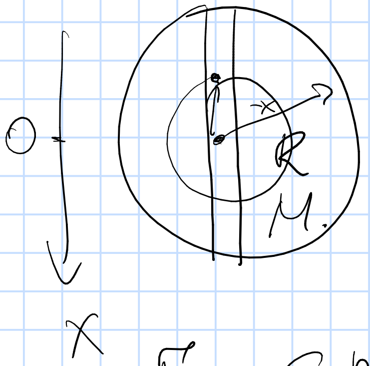
$\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial y} = 0.$

$\Delta_1 = 2mg\alpha - m\omega^2 > 0 \quad \hookrightarrow \omega^2 < 2g\alpha.$

$\Delta_2 = (2mg\alpha - m\omega^2)(2mg\beta - m\omega^2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^2 < 2mg \min(\alpha, \beta).$

16.11



$$m\ddot{x} = F.$$

$$G\frac{M}{R^2} = g.$$

$$F = -G\frac{m\rho_з V}{x^2} = -G\frac{mM}{R^3}x.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3. \qquad \rho_з = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

$$\ddot{x} = -\left(G\frac{M}{R^3}\right)x \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R}. \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \Rightarrow$$

T - период. гарм. колеб. в поле g с дл. м. R.

16.107.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \Rightarrow A = (a_{ik})_{k,i=1}^{n}$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k \Rightarrow B = (b_{ik})_{i,k=1}^{n} - \text{кососим.}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_i$$

16.1

$T = \frac{1}{2} \sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k > 0$

$\Pi = \frac{1}{2} \sum c_{ik} q_i q_k > 0$

Лин. комб гл. колеб. - реш.

$q_i = \sum u_{ie} C_e \sin(\omega_e t + \alpha_e) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} \sum a_{ik} x_i x_k > 0$

$F_2 = \frac{1}{2} \sum c_{ik} x_i x_k > 0.$

$x_e = \sum u_{ej} y_j, \det(u_{ej}) \neq 0.$

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2} \sum y_j^2 > 0 \\ F_2 = \frac{1}{2} \sum \tau_j y_j^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall \tau_j > 0.$$

x_e - чебобоб коорд.

$y_j = \Theta_i$ - нов перем.

$q_e = \sum u_{ej} \Theta_j \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \sum \tau_j \Theta_j^2 \Rightarrow \tau_j > 0$

$x_e = \dot{q}_e, y_j = \dot{\Theta}_j$

$\dot{q}_e = \sum u_{ej} \dot{\Theta}_j$

$T = \frac{1}{2} \sum \dot{\Theta}_j^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{\Theta}_j + \tau_j \Theta_j = 0 \Rightarrow \Theta_j = C_j \sin(\sqrt{\tau_j}\, t + \alpha_j)$

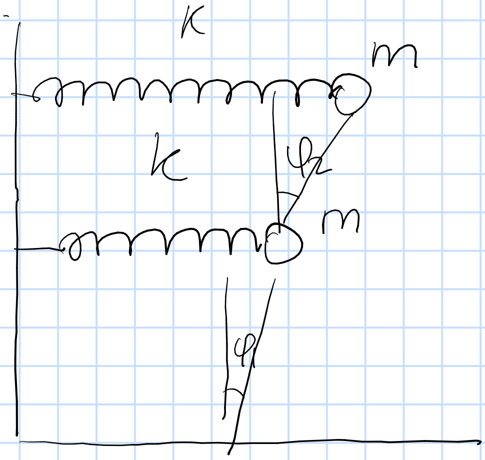
$C_j\ \alpha_j$ - произв. пост.

$q_e = \sum u_{ej} C_j \sin(\sqrt{\tau_j}\, t + \alpha_j)$

при переходе к исх коорд.

$\tau_j = \rho_j = \omega_j^2 \Rightarrow$ част. совп. $\Rightarrow$ переход не влияет.

16.47.



$$\Pi = mgl\left(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + \frac{k}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left((l\dot\varphi_1)^2 + (l\dot\varphi_2)^2 + 2l^2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right) + \frac{m}{2}(l\dot\varphi_1)^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2mgl + 2kl^2 & kl^2 \\ kl^2 & -mgl + kl^2 \end{pmatrix}$$

$$(C - \lambda A) = \begin{pmatrix} -2mgl + 2kl^2 - \lambda 2ml^2 & kl^2 - ml^2 \\ kl^2 - ml^2 & -mgl + kl^2 - \lambda ml^2 \end{pmatrix}$$

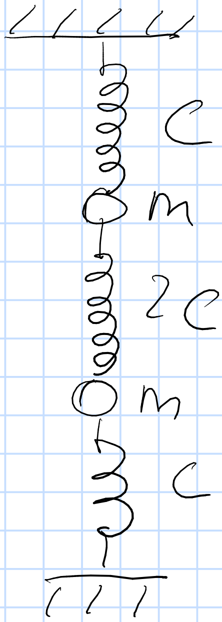
$$\det(C - \lambda A) = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\left(mgl - kl^2 + \lambda l^2 m\right)\right)^2 = (kl^2 - ml^2)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{kl(1+\sqrt{2}) + ml - \sqrt{2}mg}{\sqrt{2}\,lm} \\ \lambda_2 = \dfrac{kl(\sqrt{2}-1) - ml + \sqrt{2}mg}{\sqrt{2}\,lm} \end{array}\right. \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}\,t+\alpha_1\right) + A_2\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\lambda_2}\,t+\alpha_2\right).$$

16.33.



$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2\right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(k x_1^2 + k(x_2-x_1)^2 + k x_2^2\right) - mgx_1 - mgx_2$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + cx_1 + 2c(x_1-x_2) - mg = 0 \\ m\ddot{x}_2 + cx_2 - 2c(x_1-x_2) - mg = 0 \end{cases}$$

$$x_i = u_i \sin(\omega t+\alpha)$$

$$\dot{x}_i = \omega u_i \cos(\omega t+\alpha)$$

$$\ddot{x}_i = -\omega^2 u_i \sin(\omega t+\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1(3c - m\omega^2) - 2cu_2 = mg \\ -2cu_1 + u_2(3c - m\omega^2) = mg \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{5c}{m} \qquad u_{11} = 1$$

$$\omega_2^2 = \frac{c}{m} \qquad u_{12} = -1$$

$$u_{21} = 1$$

$$u_{22} = 1.$$

17.11(a)

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+x-\alpha y=0\\ \ddot{y}+\dot{y}-\beta x+y=0\end{cases}$$

$\dot{x}=p,\ \dot{y}=q$

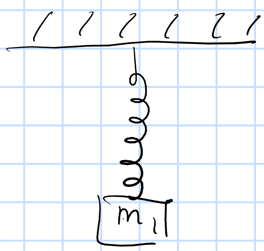
$$\begin{cases}\dot{p}=-p-x+\alpha y\\ \dot{q}=-q+\beta x+y\\ \dot{x}=p\\ \dot{y}=q\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\\ \dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & -1 & \beta & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\\ x\\ y\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=0$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & -1 & \alpha\\ 0 & 1-\lambda & \beta & 1\\ 1 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left[(-1-\lambda)\lambda^2\right]-\left[(1+\lambda)(-\lambda)-1\right]-\alpha\left[(1+\lambda)\cdot 0+\beta\right]=$$

$$=(1+\lambda)^2\lambda^2+(1+\lambda)\lambda+1-\alpha\beta(1+\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+1-\alpha\beta-\alpha\beta\lambda=0 \Rightarrow \text{Н.У. } 1-\alpha\beta>0 \Rightarrow \alpha\beta<1$$

№ 17.8.



n ст. св.

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i\dot{x}_i^2,\quad П=\frac{1}{2}c_1x_1^2+\frac{1}{2}\sum c_i(x_i-x_{i-1})^2+\sum m_i g x_i$$

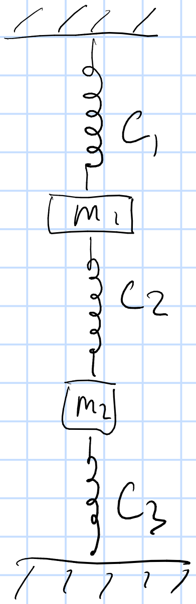
$$\dot{E}=\frac{d(T+П)}{dt}=-\beta\dot{x}_n^2$$

Мн-во точек ф.п. системы $\dot{E}=0$ опр.: $\dot{x}_n=0$

При $t>0$, $\Rightarrow$ если $\dot{x}_n(t)=0$, то $x_n=const$

$\Rightarrow$ вся сист. будет в равн.

17.2.



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_2 \end{pmatrix}.$$

$$\Pi = mgx_1 + mgx_2 + \frac{c_3(x_2 - l_2)^2}{2} + \frac{c_2(x_2 - l_2 - x_1 + l_1)^2}{2} + \frac{c_1(x_1 - l)^2}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} &= c_1 + c_2 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} &= -c_2 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} &= c_2 + c_3 \end{aligned}\right| \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -\frac{1}{2} c_2 \\ -\frac{1}{2} c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A\lambda^2 + B^*\lambda + C| = 0$$

$$\lambda^4 \frac{1}{4} m_1 m_2 + \lambda^3 \frac{1}{2} \beta m_2 + \lambda^2 \frac{1}{2}\left(m_1(c_2 + c_3) + m_2(c_1 + c_2)\right) +$$

$$+ \lambda \beta (c_2 + c_3)^2 + (c_1 + c_2)(c_2 + c_3) - \frac{1}{4} c_2^2 = 0.$$

$a_i > 0 \quad \forall i$

17.20. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{ik} \ddot{q}^k + b_{ik} \dot{q}^k + c_{ik} q^k) = 0$

$A = (a_{ik})$; $B = (b_{ik})$; $C = (c_{ik})$ – сим. полож. опр. матрицы.

$V = T + \Pi \Rightarrow V = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} + \frac{1}{2} q^T C q > 0 \Rightarrow$

$\frac{dV}{dt} = -\dot{q}^T B \dot{q} < 0 \Rightarrow$ по т. Ляпунова

17.28. $\dot{x}_1 = \alpha_1 (x_2 - x_1)$, $\dot{x}_2 = \alpha_2 (x_3 - x_2)$, …, $\dot{x}_n = \alpha_n (x_1 - x_n)$

$\alpha_i > 0.$

Рассмотрим функ-ю Ляпунова:

$$V(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\alpha_1}(x_1-a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2-a)^2 + \dots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n-a)^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\alpha_1}\cdot 2(x_1-a)\dot{x} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} 2(x_n-a)\alpha_n(x_1-x) =$$

$$= -(x_1-x_2)^2 - (x_2-x_3)^2 - \dots - (x_n-x_1)^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = a = x_2 = \dots = x_n$ – асс. устойчивое п.р,

a – зависит от начальных условий.

17.25.

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$

Найти: $V(x,\dot{x})$: $\dfrac{dV(x,\dot{x})}{dt} = -\dfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) = -E.$

$V(x,\dot{x}) = ax^2 + bx\dot{x} + d\dot{x}^2$

$\dfrac{dV}{dt} = a\cdot 2x\dot{x} + b\dot{x}^2 + bx\ddot{x} + d\cdot 2\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}^2\left(b - \dfrac{2d\beta}{m}\right) +$

$+ x^2\left(-\dfrac{bc}{m}\right) + x\dot{x}\left(2a - \dfrac{b\beta}{m} - \dfrac{2dc}{m}\right) = -\dfrac{1}{2}(m\dot{x}^2 + cx^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow b - \dfrac{2d\beta}{m} = -\dfrac{1}{2}m \Rightarrow d = \dfrac{m^2}{2\beta}$

$-\dfrac{bc}{m} = -\dfrac{c}{2} \Rightarrow b = \dfrac{m}{2},\ a = \dfrac{b\beta + 2dc}{2m}.$

T_1 $\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y)$ $\dot{y} = f_3(x) - f_4(y).$

$V(x,y) = \int_0^x f_3(z)\,dz + \int_0^y f_2(z)\,dz.$

$(0,0)$ — П.Р. $\Rightarrow V(0,0) = 0.$

Пусть $\varepsilon(0,0) = \{-h \le x \le h,\ -h \le y \le h;\ \forall (x,y) \in \varepsilon\}$

1) $\forall x \in [-h,h] \hookrightarrow \int_0^x f_3(z)\,dz > 0$ (при $x \in [0,h]$)

или $-\int_x^0 f_3(z)\,dz > 0$ (при $x \in [-h,0]$)

2) для y — аналог. $\Rightarrow V(x,y) > 0$

3) $\dfrac{dV}{dt} = f_3(x)\dot{x} + f_2(y)\dot{y} = f_3(x)(-f_1(x) - f_2(y)) +$

$+ f_2(y)(f_3(x) - f_4(y)) = -(f_1(x)f_3(x) + f_2(y)f_4(y)) <$

$\Rightarrow$ По Th Ляпун. об асс. уст. $(0,0)$ — а. уст.

№2 $\dot{x} = 2y^3 - x^5$, $\dot{y} = -x - y^3 + y^5$

т. $(0,0)$ – п. р.

Поищем ф-ю Ляпунова в виде: $V(x,y) = x^2 + y^4 \ge$

$(x,y) \ne (0,0)$.

$$\frac{dV}{dt} = 2x\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 2x(2y^3 - x^5) + y^3(-x - y^3 + y^5) =$$

$$= -2x^6 - 4y^6(1 - y^2)$$

$\forall x \in R$, $\forall y \in [-1,1] \Leftrightarrow \dot{V} < 0 \Rightarrow$

$\exists\, \mathcal{E}(0,0) : \{-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1; \forall (x,y) \in \mathcal{E}\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V(x,y) > 0$, $\dot{V} < 0 \Rightarrow (0,0)$ – а. у. п. р.

№3 $\dot{x} = xy - x^3 + y^3$ $\dot{y} = x^2 - y^2$

т. $(0,0)$ – п. р.

$V(x,y) = xy$.

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}y + x\dot{y} = xy^2 - x^3y + y^4 + x^3 - xy^2 =$$

$$= y^4 + x^3(1 - y).$$

$\exists\, \mathcal{E}(0,0) : \{-1 < y < 1, 0 < x < 1, \forall (x,y) \in \mathcal{E}\} \Leftrightarrow$

$V(x,y) > 0$, $\dot{V}(x,y) > 0 \Rightarrow$ п. р. неуст.

№4. $(\alpha, \beta > 0)$; $\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2)$

$\dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2)$

$(0,0)$ – п. р.

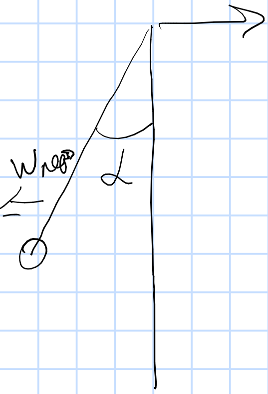
$$V(x,y) = \frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} > 0, \ (x,y) \ne (0,0).$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha x\dot{x} + \beta y\dot{y} = \alpha x(\beta y - x)(1 - ax^2 - by^2) + \beta y(-y - \alpha x) \times$$

$$\times (1 - ax^2 - by^2) = (-\alpha x^2 - \beta y^2)(1 - ax^2 - by^2).$$

$$\mathcal{E}(0,0) = \left\{ -\frac{1}{2a} \le x \le \frac{1}{2a},\ -\frac{1}{2b} \le y \le \frac{1}{2b};\ \forall (x,y) \in \mathcal{E} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V(x,y) > 0;\ \dot{V}(x,y) < 0.$$



$$s = \frac{1}{2}at^2 + A\sin(\omega t)$$

в сист. отсчета $S = \frac{1}{2}at^2$ движ.-маятник

$$mg = T\cos\alpha$$
$$mW_{пер} = T\sin\alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\frac{W}{g}$$

Пот. энергия: $\Pi = m\sqrt{g^2+W^2}\,l(1-\cos\beta)$

$$\Pi \approx m\sqrt{g^2+W^2}\,l\frac{\beta^2}{2}$$

$$T = \frac{m(l\dot\beta)^2}{2} \qquad A = (ml^2) \quad C = (ml\sqrt{g^2+W^2}).$$

$$Q = -mA\omega^2\sin\omega t\; l\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot\beta + \frac{\sqrt{g^2+W^2}}{l}\beta = -\frac{mA}{l}\omega^2\sin\omega t\cos\alpha.$$

Од.Р: $\beta_{од} = C\cos\frac{\sqrt{g^2+W^2}}{l}t + D\sin\frac{\sqrt{g^2+W^2}}{l}t.$

Ч.Р. $W = (-\omega^2 A + i\omega B + C)^{-1} = \frac{1}{ml(\sqrt{g^2+W^2} - \omega^2 l)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta_{част} = -\frac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2\cdot|\omega_0^2-\omega^2|}$$

Об.Р: $\beta = C\cos\frac{\sqrt{g^2+W^2}}{l}t + D\sin\frac{\sqrt{g^2+W^2}}{l}t - \frac{A\omega^2 g\sin\omega t}{l^2\omega_0^2|\omega_0^2-\omega^2|}$

Резонанс - решение в виде:

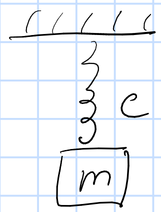
$$\beta' = bt\cos\omega_0 t - 2b\omega_0\sin\omega_0 t = -\frac{A\omega_0^2\sin\omega_0 t\cos\alpha}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{Ag}{2\omega_0 l^2}$$

$$\beta = C_1'\cos\omega_0 t + C_2'\sin\omega_0 t + \frac{Agt\cos(\omega_0 t)}{2\omega_0 l^2}.$$

$\varphi = \alpha + \beta$. - резонанс

18.17.



$$F = -\beta\dot x$$
$$Q(t) = \sum_k A_k\sin(k\omega t)$$

а) $\beta \neq 0$, б) $\beta = 0,\ k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$, в) $\beta = 0,\ k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

$\Pi = \frac{cx^2}{2} - mgx$

Ур-е Лагранжа.

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = \sum_k A_k \sin(k\omega t)$ (*).

$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0$, $\lambda = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}$

$2h = \frac{\beta}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m} \Rightarrow \lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$.

Рассм. неск. случаев.:

1) $\omega_n^2 = h^2 - \omega_0^2 > 0$

$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$

$x_1 = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}$

2) $\omega_n^2 = h^2 - \omega_0^2 = 0$; $\lambda = -h$.

$x_1 = (C_3 t + C_4) e^{-ht}$

3) $\omega_n^2 = h^2 - \omega_0^2 < 0 \hookrightarrow \lambda = -h \pm i\omega_n$

$x_1 = e^{-ht}(C_5 \cos(\omega_n t) + C_6 \sin(\omega_n t))$

Теперь ищем ч. р. неодн. ур-я в нерезон. случае.

$x_2 = \sum_k A_k |W_k| \sin(k\omega t + \varphi_k)$;

$W_k = (-mk^2\omega^2 + i\beta k\omega + c)^{-1} = \frac{c - mk^2\omega^2 - i\beta k\omega}{(c - mk^2\omega^2)^2 + \beta^2 (k\omega)^2}$

$\varphi_k = \arg W_k = -\operatorname{arctg} \frac{\beta k\omega}{c - mk^2\omega^2}$

$|W_k| = \frac{1}{\sqrt{(c - mk^2\omega^2) + \beta^2 k^2\omega^2}} = \frac{((\omega_0^2 - k^2\omega^2)^2 + (2hk\omega)^2)^{-1/2}}{m}$.

Переобозн. $|W_k| = \frac{\mu_k}{m}$.

$X = X_1 + X_2$

2) $\beta = 0 \Rightarrow h = 0$, $k\omega \neq \sqrt{\frac{c}{m}}$

$x_1 = C_5' \cos\omega_0 t + C_6' \sin\omega_0 t$

$x_2 = \sum_k A_k \sin(k\omega t) \cdot \dfrac{1}{m(\omega_0^2 - k^2\omega^2)} \qquad \varphi_k = 0.$

в) $\beta = 0,\ k\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – Случай резонанса

$x_3 = bt\cos(\omega_0 t),\ \varphi_k = 0.$

$m(-b\omega_0^2 \cos\omega_0 t + -2\omega_0 b \sin\omega_0 t) +$

$+ c\,bt\cos\omega_0 t = A_k \sin k\omega t$, т.к. $C = mk^2\omega^2 = m\omega_0^2$

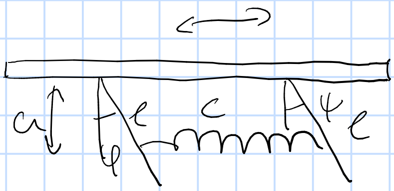
$b = -\dfrac{A_k}{2m\omega_0}$

$x_3 = -\dfrac{A_k t \cos\omega_0 t}{2m\omega_0}$

Соот-но $x_1 = C_5'' \cos\omega_0 t + C_6'' \sin\omega_0 t$

$x = x_1 + x_3 + \sum_{k \neq \frac{\omega_0}{\omega}} \dfrac{A_k}{m} \dfrac{\sin k\omega t}{|\omega_0^2 - k^2\omega^2|}.$

18.37.



$A\sin(pt)$

$T_{отн} = \frac{I}{2}(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2) = \frac{ml^2}{6}(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2)$

$\Pi = \frac{c}{2}(a\sin\varphi - a\sin\psi)^2 + mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) +$

$+ mg\frac{l}{2}(1-\cos\psi) \approx \frac{mgl}{4}(\varphi^2 + \psi^2) + \frac{ca^2}{2}(\varphi - \psi)^2 =$

$= \frac{\varphi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) + \frac{\psi^2}{2}\left(mg\frac{l}{2} + ca^2\right) - ca^2\varphi\cdot\psi.$

$A = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} mg\frac{l}{2} + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & mg\frac{l}{2} + ca^2 \end{pmatrix}.$

Обоб. силы равны соотв. моментам.

$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{l}{2} \cdot (-mW) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{l}{2} p^2 m A \sin pt$

Амплит. вектора: $\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$$\omega_1^2 = \frac{u_1^T C u_1}{u_1^T A u_1} = \frac{mgl}{2m\, l^2/3} = \frac{3g}{2l}$$

$$\omega_2^2 = \frac{u_2^T C u_2}{u_2^T A u_2} = \frac{3g}{2l} + \frac{6ca^2}{ml^2}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} C_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Для поиска ч.р. перейдем к норм. коорд.

Отнормируем $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$

$$u_1^T A u_1 = 1$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \frac{ml^2}{3} = 1$$

$$\frac{2}{3} \alpha^2 m l^2 = 1 \iff \alpha = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}$$

т.е. новое $\vec{u}_1 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\bar{\Theta}^{\text{ин}} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2)^T \bar{Q}^{\text{ин}} = A m p^2 \sqrt{\frac{3}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin pt$$

В норм. коорд. Ур-я Лагранжа:

$$\begin{cases} \ddot{\Theta}_1 + \omega_1^2 \Theta_1 = A p^2 \sin pt \sqrt{\frac{3m}{2}} \\ \ddot{\Theta}_2 + \omega_2^2 \Theta_2 = 0. \end{cases}$$

част. реш. $\Theta_1(t) = b \sin pt$

$$-b p^2 \sin pt + \omega_1^2 b \sin pt = A \sqrt{\frac{3m}{2}} p^2 \sin pt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{p^2 A}{\omega_1^2 - p^2} \sqrt{\frac{3m}{2}} \Rightarrow \alpha_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2ml^2}} \begin{pmatrix} b \sin pt \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3Ap^2}{3g - 2lp^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin pt$$

№ 18.62.

$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j$ $\quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{n} c_{ij} q_i q_j$

$\omega_1, \vec{u}_1(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1})$ $\quad Q_i = a_{ij} u_{j1} f_0 \sin(\omega t)$.

$\omega_{рез}$ - ?

матрица $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$A\ddot{\bar{q}} + \underbrace{B}_{0} + C\bar{q} = Q$

Рез $\Leftrightarrow \bar{q}(t) \to \infty$, $t \to \infty$

$\ddot{\Theta}_i + \omega_i^2 \Theta_i = \bar{u}_i^T Q$, где $Q = f_0 A \vec{u}_1 \sin\omega t$

Во всех случаях при $i \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}_i^T \bar{Q} = \underbrace{u_i^T A \bar{u}_1}_{\to 0} f_0 \sin\omega t$

$\ddot{\Theta}_i + \omega^2 \Theta_i = 0$ - част. решение

для $i=1$ - получим

$\ddot{\Theta}_1 + \omega^2 \Theta_1 = \bar{u}_1^T A \bar{u}_1 f_0 \sin\omega t = f_0 \sin\omega t$

ч.р. $\quad \Theta = b \sin\omega t$

$-b\omega^2 \sin\omega t + \omega_1^2 b \sin\omega t = f_0 \sin\omega t$

$b = \frac{f_0}{\omega_1^2 - \omega^2} \Rightarrow \Theta = \frac{f_0 \sin\omega t}{\omega_1^2 - \omega^2} \Rightarrow$

$q_{част.} = u_1 \frac{f_0 \sin\omega t}{\omega_1^2 - \omega^2} \to \infty$, $\omega_1 = \omega \Rightarrow$ рез.