

Темы для зачета

7 декабря 2022 г. 15:55

1. Системы уравнений упругости первого и второго порядка

Система первого порядка

вводим скорости $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ и дифференцируем закон Гука $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \sum_{kl} C_{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t}$

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{kl} C_{ijkl} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{В целом } 3+6=9 \text{ уравнений} \\ \text{для скоростей и напряжений} \end{matrix}$$

Система второго порядка (волновое уравнение Навье)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{jl} C_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

В целом 3 уравнения для смещений

Можно продифференцировать по времени и получить уравнения для скоростей (с измененной правой частью)

2. Вязкоупругость

Общий вид локального однородного линейного оператора в «законе Гука»:

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{kl} C_{ijkl}(t) * \varepsilon_{kl}(t), \quad f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-t')g(t')dt'$$

В случае изотропной среды, т.е., для

$$\sigma = 2G\varepsilon + (K - \frac{2}{3}G)\text{tr}(\varepsilon)I$$

имеется следующая модель вязкоупругости:

$$G(t) = G_0 + \sum_{n=1}^N G_n e^{-t/\tau_n}, \quad \tau_n - \text{время релаксации}$$

$K = K_0$ (как правило)

3. Вычислительная сложность Формулы Кхиргофа у задачи Коши.

Количество ячеек памяти и арифметических операций на одну точку x , $0 < t < T$

Сетка для $S_{ct,x} [0, T]$: $N_\theta N_\varphi N_T$

$$u(t, x) = \int_0^t v(t', x) dt' + \frac{\partial}{\partial t} \left(t M\{u^0; S_{ct,x}\} \right) + t M\{u^1; S_{ct,x}\}$$

$$M\{g; S_{ct,x}\} := \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \oint_{S_{ct,x}} g(y) ds_y \quad op \sim N_\theta N_\varphi, \quad mem \sim 1$$

$$\int_0^t v(t', x) dt' = \int_0^{t-\Delta t} + \int_{t-\Delta t}^t v(t', x) dt' \quad op \sim N_\theta N_\varphi N_T, \quad mem \sim 1$$

$$v(t, x) = t M\{f|; S_{ct,x}\}$$

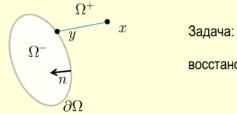
$$u(t, x) = \int_0^t v(t', x) dt' + \frac{\partial}{\partial t} \left(t M\{u^0; S_{ct,x}\} \right) + t M\{u^1; S_{ct,x}\}$$

op $\sim N_\theta N_\varphi N_T$, mem ~ 1

32

4. Формула Кхиргофа для краевой задачи с волновым уравнением

Пусть решение известно, а именно: $u, \frac{\partial u}{\partial n}$



Задача:

восстановить u в Ω^+ по его данным $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ на $\partial\Omega$

Имеется следующая формула Кирхгофа (Грина):

$$u(t, x) = c^2 \int_{\Gamma_t} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(t', y) \Phi(t-t', x-y) - u(t', y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(t-t', x-y) \right] ds_y dt'$$

$\Gamma_t \equiv \partial\Omega \times (0, t]$ $\Phi(t, x) = \frac{\theta(t)}{4\pi c |x|} \delta(ct - |x|)$

34

5. Формула Грина для уравнения упругости

Уравнения упругости

Пусть $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{jl} C_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = f_i, \quad i = 1, 2, 3$

кратко: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f$

Пусть также $\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Lv = g$

Тогда, для однородных начальных данных (формула Грина или теорема взаимности)

$$\int_{\Omega} (v * f - g * u) dx = \oint_{\partial\Omega} (T_n v * u - v * T_n u) ds$$

* - свертка по времени

T_n - оператор вычисления вектора полного напряжения

в точке на границе с нормалью n :

$$(T_n u)_i := \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) n_j \quad 40$$

6. Обобщенная Формула Сомильяны

Фундаментальное решение

$$\rho \frac{\partial^2 \phi(t, x, y)}{\partial t^2} - L\phi(t, x, y) = \delta(x - y)\delta(t)I$$

$$\phi(t, x, y) = [\phi_{ij}(t, x, y)]_{3 \times 3}$$

Из теоремы взаимности в $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \phi_{ij} = \phi_{ji}$ Для однородной среды (симметрия сдвига) $\Rightarrow \phi(t, x, y) = \phi(t, x - y)$

Тогда, для однородных начальных данных и без источников:

$$u(t, x) = \oint_{\partial\Omega} \phi(t, x, y) * T_n u(t, y) ds_y - \oint_{\partial\Omega} [T_n \phi(t, y, x)]^\top * u(t, y) ds_y, \quad x \in \Omega^+$$

(восстановление решения в области по его данным на границе)

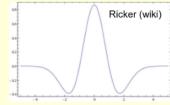
41

7. Типы источников. Тензор сейсмического момента

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{jl} C_{ikjl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = f_i, \quad i = 1, 2, 3$$

1) Компонента силы, точечный источник

$$f_1 = w(t) \delta(x - x_s) \quad \xrightarrow{x_s}$$

 $w(t)$ — импульс по времени (вейвлет), например Гаусса, Рикера, Берлаге, ...

$$w(t) = w_0(1 - 2\pi^2 f_0^2 t^2) e^{-\pi^2 f_0^2 t^2}, \quad w_0, f_0 - \text{consts}$$

49

2) Монополь, точечный взрыв

$$f = w(t) \text{grad} \delta(x - x_s)$$

График точечного взрыва показывает зависимость амплитуды от времени, имеющий форму импульса с нулевым центром.

Добавим матрицу (для обобщения):

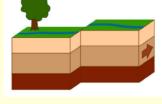
$$f = w(t) M \text{grad} \delta(x - x_s)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

50

3) Тензор сейсмического момента (описание раскрытия и сдвигов)

$$f = w(t) M \text{grad} \delta(x - x_s) \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Но нужно добавить вторую пару сил для исключения вращения: двойная пара сил



Важно: этому точечному источнику соответствуют две плоскости сдвига (неоднозначность)

(Аки и Ричардс, Количественная сейсмология: теория и методы)

Гиперболические задачи для линейных волновых процессов

51

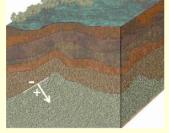
8. Условия сопряжения на границах

Вектор полного напряжения $\sigma_n = (\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}, \sigma_{n,3})$, $\sigma_{n,i} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$
к площадке с нормалью $n = (n_1, n_2, n_3)$

Камень-камень, без проскальзывания

- Непрерывность смещений
- Непрерывность напряжений

$$u_i^+ = u_i^-, \quad \sigma_{n,i}^+ = \sigma_{n,i}^-, \quad i = 1, 2, 3$$



Граница вода-камень

- Непрерывность нормального смещения
- Непрерывность нормального напряжения
- Отсутствие касательного напряжения

$$u^+ \cdot n = u^- \cdot n, \quad \sigma_n^+ \cdot n = p, \quad \sigma_n^+ \times n = 0$$

Камень-камень, с проскальзыванием

- Нет раскрытия: непрерывность смещения и напряжения по нормали, ? (скольжение, Шэнберг)
- Раскрытие: трещина с наполнением (?)

52

9. Начально-краевая задача сейсмики, формулировка, корректность

(1) Волновое уравнение Навье с точечным источником взрыва

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{jl} C_{i,jl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} = w(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(x - x_s), \quad i = 1, 2, 3$$

(2) Начальные условия

$$u_i(x, t) |_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} u_i(x, t) |_{t=0} = 0, \quad x \in D$$

(3) Краевые условия

$OBC(u) = 0$ на открытых границах

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{ij}(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{- свободная поверхность}$$

(4) Условия сопряжения на контактных границах (при необходимости)

(5) Условия совместности на пересечении границ (не рассматриваем здесь)

Корректная задача: $\exists u : \|u\|_D \leq \text{const} \|w\|, \|u\|_D \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$

10. Решение уравнения анизотропной упругости в виде плоских волн

Плоская волна: $u = fw(ct - nx)$

f – амплитуда (вектор), w – импульс (скаляр), $n = (n_1, n_2, n_3)$ – нормаль фронта волны

Найти f, c из $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{k,l} C_{ikl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad i = 1, 2, 3$

После подстановки получаем: $\rho c^2 f_i - \sum_{k,l} C_{ikl} n_k n_l f_j = 0$

Обозначим $\Gamma_{ij} = \frac{1}{\rho} \sum_{k,l} C_{ikl} n_k n_l$, $\{\Gamma_{ij}\}$ – матрица Кристоффеля, симметричная, > 0

$\sum_j \Gamma_{ij} f_j - c^2 f_i = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \Gamma_{11} - c^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - c^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - c^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(характеристическое уравнение)}$

Получаем $c_1 > c_2 \geq c_3$; им соответствуют три собственных вектора f

Три плоские волны (Кристоффель): одна продольная и две поперечные

11. Апроксимация, устойчивость, сходимость

Численные эксперименты (1D)

1. ЦРС второго порядка точности

a) устойчивость, число Куранта

$$\text{Для явных схем: } \tau = C \frac{h}{c}, \quad C \leq 1$$

Теорема Рябеньского-Филиппова-Лакса

Кратко: Из устойчивости и аппроксимации следует сходимость

Задача1: реализовать рассмотренную 1D разностную схему для \mathbb{R}^3 ($\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$) и построить графики решения до $T=3$ (с анимацией)

b) сеточная сходимость

Порядок точности:

$$u_h(t, x) = u(t, x) + O(h^2 + \tau^2) = u(t, x) + h^2 R_1(t, x) + \tau^2 R_2(t, x) + O(h^4 + \tau^4)$$

$$\text{Позому: } u_h - u_{\alpha h} \approx (1 - \alpha^2)(h^2 R_1 + \tau^2 R_2) \quad (\tau / h = \text{const})$$

$$\Rightarrow \|u_h - u_{\alpha h}\| \approx (1 - \alpha^2) \|h^2 R_1 + \tau^2 R_2\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|u_h - u_{\alpha h}\|}{\|u_{\alpha h} - u_{\alpha^2 h}\|} \approx \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (= 4 \text{ при } \alpha = 0.5)$$

Нормы по пространству:

$$\|u_h(t, x)\|_{C(\Omega_h)} = \max_{x \in \Omega_h} |u_h(t, x)| \quad \|u_h(t, x)\|_{L_2(\Omega_h)} = \sqrt{\sum_{x \in \Omega_h \subset \mathbb{R}^d} h^d |u_h(t, x)|^2}$$

Норма по времени: C

12

b) сеточная сходимость

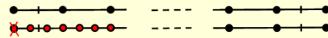
Таким образом, на последовательности измельчающихся сеток надо смотреть на отношение

$$\frac{\|u_h - u_{\alpha h}\|}{\|u_{\alpha h} - u_{\alpha^2 h}\|} \approx \frac{1}{\alpha^2}$$

Обычно берут три сетки: $h, 0.5h, 0.25h$ с общими узлами грубой сетки.

Нужно добиться, чтобы отношение норм примерно равнялось 4 (выходило на асимптотику)

Для сетки с полуцелыми узлами (как наша) лучше уменьшать шаг в три раза, чтобы были общие узлы



13

12. Численная дисперсия и анизотропия

Численная дисперсия

Подставим теперь эту волну $u_j^n = e^{i(\omega n\tau - k_j h)}$ в разностное уравнение:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - c_{h,\tau}^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} =$$

$$= \left(\frac{e^{i\omega\tau} - 2 + e^{-i\omega\tau}}{\tau^2} - c_{h,\tau}^2 \frac{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}}{h^2} \right) u_j^n$$

Требуя, чтобы волна $e^{i(\omega n\tau - k_j h)}$ было его решением, получаем значение скорости:

$$c_{h,\tau}^2 = \frac{h^2}{\tau^2} \frac{e^{i\omega\tau} - 2 + e^{-i\omega\tau}}{e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}} = \frac{h^2}{\tau^2} \frac{\cos \omega\tau - 1}{\cos kh - 1} = c^2 \left(1 + O(h^2) - O(\omega^2\tau^2) \right)$$

20

ПОРИДУЧИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Зависимость

$$c_{h,\tau}^2 = c^2 \left(1 - O(h^2) - O(\omega^2\tau^2) \right)$$

означает проявление численной дисперсии

Длина волны $\lambda = 2\pi / k$ Пусть K - число точек сетки на длину волны. Тогда

$$h = \lambda / K \Rightarrow kh = 2\pi / K$$

Например, $kh \approx 0.5$ при $K = 12$ (обычно полагают $K \geq 25$ достаточным для О22)

Есть много модификаций КРС для уменьшения численной дисперсии на высоких частотах, т.е. подбор коэффициентов КРС из условия

$$|c_{h,\tau} - c| \rightarrow \min, \quad kh < 0.5$$

21

ПОРИДУЧИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Численная анизотропия - зависимость скорости (и численной дисперсии) от направления распространения монохроматической волны в многомерном случае

Волновой вектор

$$kx = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3, \quad n = k / \|k\| - \text{направление волны}$$

Тогда для монохроматической волны можно вывести

$$c_{h,\tau}^2 = c^2 \left(1 - f(n, kh, \omega\tau) \right)$$

Для разностных схем порядка $O(h^p) + O(\tau^q)$ обычно

$$c_{h,\tau}^2 = c^2 \left(1 + f_1(n)O(h^p) - f_2(n)O(\omega^q\tau^q) \right)$$

Можно посмотреть: A. Sescu, Numerical anisotropy in finite differencing. A review in *Advances in Difference Equations* (2015:9)

22

13 Понятие эффективности численного метода на примере разностных схем

б) Эффективность центральных разностей высокого порядка

Рассмотрим центральные разности от 2-го до 8-го порядка для вычисления $u''(x_i)$ Задана равномерная сетка на отрезке $[0; 1]$:

$$x_j = jh, \quad h = \frac{1}{J}, \quad j = 0 \dots J \quad (\text{гр. усл. периодичности})$$

$$u''|_j = h^{-2} \sum_{k=0}^p a_{p,k} (u_{j-k} + u_{j+k}) + O(h^{2p}), \quad p = 1, 2, 3, 4$$

$$a_{1,0} = -1, \quad a_{1,1} = 1$$

$$a_{2,0} = -\frac{5}{4}, \quad a_{2,1} = \frac{4}{3}, \quad a_{2,2} = -\frac{1}{12}$$

$$a_{3,0} = -\frac{49}{36}, \quad a_{3,1} = \frac{3}{2}, \quad a_{3,2} = -\frac{3}{20}, \quad a_{3,3} = \frac{1}{90}$$

$$a_{4,0} = -\frac{205}{144}, \quad a_{4,1} = \frac{8}{5}, \quad a_{4,2} = -\frac{1}{5}, \quad a_{4,3} = \frac{8}{315}, \quad a_{4,4} = -\frac{1}{560}$$

32

Точность аппроксимации и число операций

$$u''|_j = h^{-2} \sum_{k=0}^p a_{p,k} (u_{j-k} + u_{j+k}) + R_{2p} h^{2p}, \quad p = 1, 2, 3, 4$$

$$R_2 = \frac{2}{4!} \max |u^{(4)}|, \quad n_{op} = 4 \quad (\text{на одну точку сетки})$$

$$R_4 = \frac{8}{6!} \max |u^{(6)}|, \quad n_{op} = 7$$

$$R_6 = \frac{72}{8!} \max |u^{(8)}|, \quad n_{op} = 10$$

$$R_8 = \frac{1152}{10!} \max |u^{(10)}|, \quad n_{op} = 13$$

$$N_{op}(\varepsilon) \approx n_{op} J(\varepsilon) \quad (\text{на } J \text{ точек сетки}, h = \frac{1}{J})$$

33

Оценим величину $J(\varepsilon)$ на примере конкретной функцииРассмотрим функцию $u = \sin(kx)$

Тогда

$$\varepsilon = h^{2p} R_{2p} = h^{2p} C_{2p} \max |u^{(2p+2)}| = h^{2p} C_{2p} k^{2p+2}$$

$$\Rightarrow J_{2p}(\varepsilon) = h^{-1} = \left(\frac{C_{2p} k^{2p+2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2p}}$$

34

Пусть $\varepsilon = 10^{-4}$; $k = 100$ (примерно 16 волн на единичном отрезке)

$J_2 = 288675$	$N_{op}^{(2)} = 1154700$
$J_4 = 3247$	$N_{op}^{(4)} = 22730$, $N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(4)} = 51$
$J_6 = 750$	$N_{op}^{(6)} = 7500$, $N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(6)} = 153$
$J_8 = 365$	$N_{op}^{(8)} = 4750$, $N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(8)} = 243$

Для $\varepsilon = 10^{-4}$; $k = 30$:

$J_2 = 25981$, $J_4 = 533$, $J_6 = 151$, $J_8 = 81$

$N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(4)} = 27$, $N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(6)} = 68$, $N_{op}^{(2)} / N_{op}^{(8)} = 98$

Вывод: Эффективность методов с ЦРС 6-го или 8-го порядка точности может быть на два порядка лучше, чем с ЦРС 2-го порядка точности

35

Компактные схемы

Аппроксимация второй производной (ЦРС):

$$u''_j = h^{-2} \sum_{k=0}^p a_k (u_{j-k} + u_{j+k}) + O(h^{2p})$$

Компактная схема (КС):

$$u''_j + \alpha(u''_{j-1} + u''_{j+1}) = h^{-2} \sum_{k=0}^{p-1} b_k (u_{j-k} + u_{j+k}) + O(h^{2p})$$

Чтобы найти производную, нужно обратить трехдиагональный оператор (прогонкой)

ЦРС O4 : $a_0 = -\frac{5}{4}$, $a_1 = \frac{4}{3}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$
 КС O4 : $b_0 = -\frac{6}{5}$, $b_1 = \frac{6}{5}$, $\alpha = \frac{1}{10}$

КС O6 : $b_0 = -\frac{51}{44}$, $b_1 = \frac{12}{11}$, $b_2 = \frac{3}{44}$, $\alpha = \frac{2}{11}$
 КС O8 : $b_0 = -\frac{751}{684}$, $b_1 = \frac{147}{152}$, $b_2 = \frac{51}{380}$, $b_3 = -\frac{23}{6840}$, $\alpha = \frac{9}{38}$

36

Сравнение эффективности КС и ЦРС, О8

Точность: ЦРС: $\varepsilon = h^8 \frac{1152}{10!} \max |u^{(10)}|$

КС: $\varepsilon = h^8 \frac{110}{10!} \max |u^{(10)}|$

Т.е., на одинаковой сетке точность лучше в 10.5 раз!

Но $\frac{h_{KC}}{h} = 10.5^{1/8} = 1.34$

С учетом дополнительных затрат на прогонку получаем, что при одинаковой точности

$N_{op} / N_{op}^{KC} = 1.16$

Вывод: компактные схемы не дают существенного повышения эффективности сеточного метода по сравнению с ЦРС

Подробный анализ: Довгилович Л.Е., Софронов И.Л. О применении компактных схем для решения волнового уравнения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006, на сайте <http://www.keldish.ru/>

37

Подход SBP для построения разностных схем

Поставим цель построить **самосопряженные операторы высокого порядка точности** с односторонними конечными разностями на концах отрезка

Требования к дискретному пространственному оператору:

- 1) Высокий порядок аппроксимации (\Rightarrow точность метода)
- 2) Симметричность оператора (\Rightarrow устойчивость)
- 3) Аппроксимация вторых и смешанных производных последовательным применением оператора первой производной (\Rightarrow производительность)
- 4) Отсутствие осцилляций в решении (\Rightarrow робастность)

Рассматриваем дискретные функции $\bar{u} = \{u_j\}$ на сетке

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad h = 1/J$$

Они образуют евклидово пространство R^{J+1} со скалярным произведением

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v}^\top \bar{u}$$

9

Операторы D+, D-, Н ограничение на порядок схемы

a) Аппроксимация оператора первой производной

Введем скалярное произведение с весом:

$$(\bar{u}, \bar{v})_H = \bar{v}^\top H \bar{u}, \quad \text{где } H > 0 \text{ - диагональная матрица}$$

Определение SBP оператора

Введем два сеточных оператора D^+ , D^- (матрицы) такие, что они

1) аппроксимируют первую производную $\frac{\partial}{\partial x}$ во всех точках сетки

2) удовлетворяют SBP условию $\forall \bar{u}, \bar{v} \in R^{J+1}$:

$$(\bar{u}, D^+ \bar{v})_H + (D^- \bar{u}, \bar{v})_H = -u_0 v_0 + u_J v_J$$

Условие 2) - аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^1 u \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_0^1 v \frac{\partial u}{\partial x} dx = -uv|_{x=0} + uv|_{x=1}$$

10

Поэтому, для $p = 2, 3, 4$ мы получаем коэффициенты матрицы H и коэффициенты матриц

$$D^+ = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} D_l^+ & D_e^+ & 0 \\ 0 & D_e^+ & 0 \\ 0 & D_{re}^+ & D_r^+ \end{pmatrix} \quad D^- = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} D_l^- & D_e^- & 0 \\ 0 & D_e^- & 0 \\ 0 & D_{re}^- & D_r^- \end{pmatrix}$$

Следовательно существуют SBP схемы порядков

О4, О6, О8 внутри отрезка и
О2, О3, О4 на границах отрезка, соответственно

Пример для О4/О2:

$$H = \text{diag} \left(\frac{49}{144}, \frac{61}{48}, \frac{41}{48}, \frac{149}{144}, 1, \dots, 1, \frac{149}{144}, \frac{41}{48}, \frac{61}{48}, \frac{49}{144} \right) h$$

20

Таким образом,

$2p \times 2(p_a + 1)$ — количество линейных уравнений из условия аппроксимации

$2p \times 2p = 4p^2$ — количество неизвестных: D_l^+

$2p$ — количество параметров: μ_1, \dots, μ_{2p}

Система переопределена даже при $p_a = p$:

$$4p \times (p + 1) - 4p^2 - 2p = 2p$$

Найдутся ли $\mu_1, \dots, \mu_{2p} > 0$ такие, что система разрешима?

Непосредственные вычисления показывают, что

1) Только для $p = 2, 3, 4$ можно найти $\mu_1, \dots, \mu_{2p} > 0$ такие, что система разрешима

2) При $p_a > p$ такие $\mu_1, \dots, \mu_{2p} > 0$ не существуют

19

Симметризация SBP в схеме

Сетка: граничные узлы находятся на границах отрезка

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad h = 1 / J$$

Рассмотрим аппроксимацию по пространству. Обозначим

$$\bar{u} = \{u_j(t)\}$$

$$G = \text{diag}(\{g(x_j)\}), \quad S = \text{diag}(\{s(x_j)\})$$

Тогда для аппроксимации уравнения

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0$$

можно предложить полудискретную разностную схему

$$G\bar{u}_{tt} - D^- S D^+ \bar{u} = \bar{f}$$

Но матрица оператора $D^- S D^+$ несимметрична 😞

22

Симметризация пространственного оператора в разностной схеме

Воспользуемся SBP условием $HD^- = -(D^+)^T H + Q$

Получаем

$$HD^- S D^+ = -(D^+)^T H S D^+ + Q S D^+$$

Отсюда видно, что

$$\tilde{L} \equiv HD^- S D^+ - Q S D^+ = (\tilde{L})^T$$

Оператор \tilde{L} совпадает с $HD^- S D^+$ во внутренних точках,

т.к. $Q = \text{diag}(-1, 0, \dots, 0, 1)$. Поэтому для уравнения

$$g \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0$$

используем полудискретную разностную схему

$$H G \bar{u}_{tt} - \tilde{L} \bar{u} = H \bar{f}$$



23

Условия Робина и Дирихле

Учет граничных условий

Условия Дирихле

$$lu \equiv u = a \quad (u|_{x=0} = a_L, u|_{x=1} = a_R)$$

Разложим решение дифференциальной задачи на сумму двух функций: значения во внутренних и в граничных точках

$$\bar{u} = \bar{u}^0 + \bar{a},$$

$$\bar{u}^0 = \{0, u_1, \dots, u_{J-1}, 0\}, \quad \bar{a} = \{a_L, 0, \dots, 0, a_R\}$$

Тогда из равенства

$$H G \bar{u}_{tt} - \tilde{L}(\bar{u}^0 + \bar{a}) = H \bar{f} + \varepsilon_{app}$$

получаем полудискретное уравнение для разностного решения \bar{v}^0 :

$$H G \bar{u}_{tt} - \tilde{L} \bar{v}^0 = (H \bar{f} + \tilde{L} \bar{a})^0$$

$(\bar{f})^0$ означает обнуление в граничных точках

Учет граничных условий

Условия Робина

$$lu \equiv \partial_x u + b_{L,R} u = a, \quad b_L(t) \leq 0, \quad b_R(t) \geq 0$$

Обозначим

$$B = \text{diag}(b_L, 0, \dots, 0, b_R)$$

Для следа на сетке решения \bar{u} имеем $D^+ \bar{u} + B \bar{u} \approx \bar{a}$.

Поэтому

$$\tilde{L} \bar{u} = HD^- S D^+ \bar{u} - Q S D^+ \bar{u} \approx HD^- S D^+ \bar{u} - Q S (\bar{a} - B \bar{u}) \approx$$

$$\approx H G \bar{u}_{tt} - H \bar{f} - Q S \bar{a} + Q S B \bar{u}$$

Таким образом получаем полудискретное уравнение \bar{v} для разностного решения \bar{v} :

$$H G \bar{u}_{tt} - (\tilde{L} - Q S B) \bar{v} = H \bar{f} + Q S \bar{a}$$

24

Лемма об устойчивости

Лемма об устойчивости

Пусть для $\bar{u}(t), \bar{f}(t) \in R^N$, $t \geq 0$ с $\bar{u}(0) = \bar{u}_0(0) = 0$ в задаче

$$C\bar{u}_{tt} + P\bar{u}_t + A\bar{u} = \bar{f},$$

операторы: $A = A^T > 0$, диагональный $C = C^T > 0$ и диагональный $P \geq 0$

Рассмотрим соответствующую явную схему для $\bar{u}^k = \bar{u}(k\tau)$:

$$C \frac{\bar{u}^{k+1} - 2\bar{u}^k + \bar{u}^{k-1}}{\tau^2} + P \frac{\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^{k-1}}{2\tau} + A\bar{u}^k = \bar{f}^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Тогда схема устойчива при любом $0 < \tau \leq \sqrt{2 / \lambda_{\max}}$, $\lambda_{\max} = \max \frac{(A\bar{v}, \bar{v})}{(C\bar{v}, \bar{v})}$

и справедлива оценка $\|\bar{u}^{k+1}\|_C \leq \frac{\text{const}}{\lambda_{\min}} \sum_{i=1}^k \tau \|\bar{f}^i\|_C$, $\lambda_{\min} = \min \frac{(A\bar{v}, \bar{v})}{(C\bar{v}, \bar{v})}$

Следует непосредственно из Теоремы 9, Гл. 6, параграф 3, (стр. 372)