ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2003, том 43, № 9, с. 1409–1413

УДК 519.633.6

ПРОТИВОПОТОЧНЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

© 2003 г. В. К. Булгаков, И. И. Потапов

(680045 Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровский гос. техн. ун-т)
e-mail: Igor@niikt.khstu.ru

Поступила в редакцию 24.01.2001 г.
Переработанный вариант 17.01.2003 г.

Предложен класс устойчивых противопоточных конечно-элементных схем для решения задачи теплопереноса. На основе численного моделирования задачи теплопереноса с сильно выраженным преобладанием конвективных членов проведен сравнительный анализ предложенных схем. Библ. 12. Фиг. 2.

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие метода конечных элементов в виде стандартных процедур Галеркина для решения задач гидромеханики сталкивается с определенными трудностями при решении уравнений с несамосопряженными операторами. Эти трудности типичны для приложений, где конвективные члены в задачах теплопереноса или инерционные члены в задачах Навье–Стокса являются преобладающими (см. [1]–[3]). Аналогичные трудности были отмечены пользователями стандартных процедур конечных разностей (см. [3], [4]) и привели к созданию противопоточных разностных схем, успешно применяемых во многих приложениях (см. [4]).

В настоящее время описаны и теоретически исследованы различные варианты противопоточных конечно-элементных аппроксимаций. Их спецификой является такое пополнение пространства пробных функций базисного пространства решений, которое приводило бы к получению устойчивых конечно-элементных схем. Известные авторам исследования по построению устойчивых противопоточных схем проводились в следующих направлениях.

1. Использование экспоненциальных [4], [5] и степенных [6] базисных функций с переменным показателем степени позволило получить устойчивые конечно-элементные схемы. Однако из-за проблемы роста показателей степени при сильном преобладании конвекции и сложностей с интегрированием сильно меняющихся функций данные схемы не получили большого распространения.

2. Множество конечно-элементных схем построено путем добавления к классическим функциям формы Лагранжа кососимметричных составляющих (bubbles function) бабл-функций (см. [1]–[3], [7]–[9]). Основным недостатком применения таких схем являлись дифференциальные методы определения коэффициентов при бабл-функциях (см. [1], [2], [7], [8]). Вследствие этого для двух- и трехмерных конечно-элементных схем наблюдалось наличие значительной схемной вязкости (см. [2], [9]).

3. Появившиеся позднее противопоточные конечно-элементные схемы [10]–[13] использовали однородные на границах конечных элементов бабл-функции, позволяющие проводить их конденсацию независимо для каждого конечного элемента. Для нахождения коэффициентов при бабл-функциях использовались различные интегральные методы конденсации: GLS – метод наименьших квадратов Галеркина [10], [11], RFB – метод произвольных дополнительных бабл-мод [12], [13]. В настоящее время данные методы успешно используются при решении большого класса задач. Однако создание гладких бабл-функций для конечных элементов высокого порядка представляет весьма непростую задачу, особенно при наличии у конечного элемента внутренних узловых точек. Применение же, подобно работе [14], кусочно-линейных бабл-функций приводит в случае элементов высокого порядка к существенному усложнению изопараметрических преобразований и требует дополнительных исследований.

4. Альтернативой схемам, построенным с использованием бабл-функций, является развитие противопоточных методов Петрова–Галеркина (SUPG) [15], [16], базирующихся на идеях метода наименьших квадратов. Использование SUPG-метода позволяет создавать конечно-элементные

схемы высоких порядков, сохраняющие положительные характеристики устойчивости, свойственные методам, получаемым с использованием бабл-функций [10, [11], [17]. К сожалению, они имеют существенный недостаток, связанный с появлением сопряженных старших производных в схемах высокого порядка [18].

В данной работе для построения противопоточных конечно-элементных схем высокого порядка предлагается модифицированный метод SUPG. При его построении предполагалось, что квадраты диссипативных членов при больших сеточных числах Пекле пренебрежимо малы, так что для получения устойчивых конечно-элементных схем достаточно учитывать квадратичный вклад только конвективной составляющей.

2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Определим модельную задачу теплопереноса: найти скалярную функцию $T(\mathbf{x})$, определенную в области Ω с границей S, для которой выполняются условия

$$u_k\nabla_k T - \lambda\nabla_k\nabla_k T = f, \quad k = \overline{1,2}, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{2.1}$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x}\in S. \tag{2.2}$$

Здесь u_k – компоненты заданного соленоидального поля скорости (т.е. $\nabla_k u_k = 0$) и $\lambda = \text{const} > 0$, $f(\mathbf{x})$ – тепловой источник (сток).

Определим стандартный SUPG-метод [15], [16] для задачи (2.1), (2.2), сформулированный на конечно-элементном подпространстве V^h: найти $T^h \in V^h$ такое, что

$$\begin{gathered}(u_k\nabla_k T^h, W) + (\lambda\nabla_k T^h, \nabla_k W) - (f, W) + \\ + \sum_{K\in C_h}\gamma_K(u_k\nabla_k T^h - \lambda\nabla_k\nabla_k T^h - f, u_k\nabla_k W - \lambda\nabla_k\nabla_k W) = 0 \;\forall W\in V^h,\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$V^h = \{W\in H^1_{2,0}(\Omega) \mid W_{|K}\in P^n(K), K\in C_h\};$$

здесь C_h – разбиение области Ω на регулярные подобласти. Символ $P^n(K)$ обозначает пространство полиномиальных функций n-го порядка, определенных на конечном элементе K, $H^1_{2,0}$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций и их производных в Ω, удовлетворяющих (2.2). Здесь и далее будем использовать обозначение $(u, v) = \int_\Omega uv d\Omega$. Параметр γ_K определяет разновидность SUPG-метода. В [15], [16], [19] для γ_K используется следующее определение:

$$\gamma_K = \begin{cases} h_K^2/12\lambda, & \text{Pe}_K < 3, \\ h_K/2|\mathbf{u}|, & \text{Pe}_K \ge 3, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\text{Pe}_K = |\mathbf{u}|h_K/(2\lambda)$ – сеточное число Пекле для конечного элемента K, h_K – характерный размер конечного элемента, $|\mathbf{u}|$ – модуль средней скорости на конечном элементе. Регуляризующий член в стандартном SUPG-методе вводится для подавления вредных осцилляций, появляющихся в решении при больших числах Пекле. Наличие в регуляризующем члене производных второго порядка приводит к существенному повышению вычислительных затрат, требуя в общем случае (для преобразования подынтегральных производных) обращения матрицы пятого ранга в каждой точке интегрирования [20].

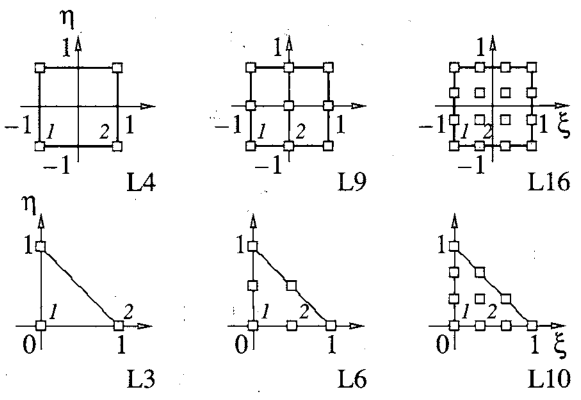
Для преодоления этого недостатка в данной работе предлагается следующая модификация метода (2.3), (2.4):

$$(u_k\nabla_k T^h, W) + (\lambda\nabla_k T^h, \nabla_k W) - (f, W) + \sum_{K\in C_h}\gamma_K(u_k\nabla_k T^h - f, u_k\nabla_k W) = 0 \;\forall W\in V^h, \tag{2.5}$$

$$\gamma_K = \begin{cases} 0, & \text{Pe}_K < 1, \\ h_K/2|\mathbf{u}|, & \text{Pe}_K \ge 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

В предложенном методе, в отличие от стандартной схемы SUPG, предполагается, что вклад диссипативных членов в подавление паразитических осцилляций при больших сеточных числах Пекле мал и при $\mathrm{Pe}_K \geq 1$ в качестве регуляризующего члена достаточно учитывать вклад только конвективной составляющей и $\gamma_K(u_k\nabla_k T^h - f, u_k\nabla_k W)$.

При малых сеточных числах Пекле ($\mathrm{Pe}_K < 1$), когда схемная ошибка от пренебрежения диссипативными членами будет максимальна, параметр γ_K надо полагать равным нулю. При этом вариационное равенство (2.5) принимает вид стандартной слабой формулировки задачи (2.1), (2.2):



Фиг. 1.

$$(u_k\nabla_k T^h, W) + (\lambda\nabla_k T^h, \nabla_k W) - (f, W) = 0 \;\; \forall W \in V^h,$$

которая, как хорошо известно (см. [1]–[4]), не дает осциллирующего решения при малых сеточных числах Пекле.

Конкретизируем предложенный метод (2.5), (2.6), используя в качестве базисных и пробных функций (функций формы) соответствующие полиномы Лагранжа [16], имеющие в локальной системе координат (ξ, η) (фиг. 1) следующий вид:

L4:

$$N_\alpha = \frac{1}{4}(1+\xi_\alpha\xi)(1+\eta_\alpha\eta), \quad \alpha = \overline{1,4}, \quad \xi_\alpha = [-1\ 1\ 1\ -1], \quad \eta_\alpha = [-1\ -1\ 1\ 1];$$

L3:

$$N_\alpha = (\xi, \eta) = L_{M_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1,3}, \quad M_\alpha = [1\ 2\ 3],$$

где $L_1 = 1 - \xi - \eta$, $L_2 = \xi$, $L_3 = \eta$;

L9:

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_\alpha\xi)(1+\eta_\alpha\eta)\xi_\alpha\xi\eta_\alpha\eta, \quad \alpha = 1, 3, 5, 7,$$

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_\alpha\eta)\eta_\alpha\eta, \quad \alpha = 2, 6,$$

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_\alpha\xi)\xi_\alpha\xi, \quad \alpha = 4, 8,$$

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2),$$

$$\xi_\alpha = [-1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ -1\ -1\ 0], \quad \eta_\alpha = [-1\ -1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0];$$

L6:

$$N_\alpha = L_{M_\alpha}(2L_{M_\alpha} - 1), \quad \alpha = 1, 3, 5,$$

$$N_\alpha = 4L_{H_\alpha}L_{M_\alpha}, \quad \alpha = 2, 4, 6,$$

$$M_\alpha = [1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 1], \quad H_\alpha = [0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 3];$$

L16:

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{256}(1+\xi_\alpha\xi)(9\xi^2-1)(1+\eta_\alpha\eta)(9\eta^2-1), \quad \alpha = 1, 4, 7, 10,$$

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{256}(1+\xi^2)(1+9\xi\xi_\alpha)(1+\eta_\alpha\eta)(9\eta^2-1), \quad \alpha = 2, 3, 8, 9,$$

$$N_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{256}(1-\eta^2)(1+9\eta\eta_\alpha)(1+\xi_\alpha\xi)(9\xi^2-1), \quad \alpha = 5, 6, 11, 12,$$

$$N_\alpha(\xi,\eta) = \frac{81}{256}(1-\xi^2)(1+9\xi\xi_\alpha)(1-\eta^2)(1+9\eta\eta_\alpha), \quad \alpha = 13, 14, 15, 16,$$

$$\xi_\alpha = \left[-1\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -1\ -1\ -1\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\right],$$

$$\eta_\alpha = \left[-1\ -1\ -1\ -1\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right];$$

L10:

$$N_\alpha(\xi,\eta) = L_{M_\alpha}(3L_{M_\alpha}-2)(2L_{M_\alpha}-1), \quad \alpha = 1, 4, 7,$$

$$N_\alpha(\xi,\eta) = \frac{9}{2}L_{H_\alpha}L_{M_\alpha}(3L_{M_\alpha}-1), \quad \alpha = 2, 3, 5, 6, 8, 9,$$

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3,$$

$$M_\alpha = [1\ 2\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1\ 3], \quad H_\alpha = [0\ 1\ 2\ 0\ 2\ 3\ 0\ 3\ 1].$$

Аппроксимация искомой функции для каждого из шести конечных элементов (представленных на фиг. 1) имеет вид $T^h = N_\alpha T_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N_L}$, где N_α – функция формы конечного элемента, N_L – количество узловых точек, используемых для аппроксимации искомой функции. Введенная аппроксимация дает следующий конечно-элементный алгебраический аналог задачи:

$$\bigcup_K \int_{\Omega_K} \left[(N_\alpha + \gamma_K C_\alpha)C_\beta + \lambda\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x_1}\frac{\partial N_\beta}{\partial x_1} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_2}\frac{\partial N_\beta}{\partial x_2}\right)\right] d\Omega T_\beta = \bigcup_K \int_{\Omega_K} (N_\alpha + \gamma_K C_\alpha) f(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \alpha, \beta = \overline{1, N_L};$$

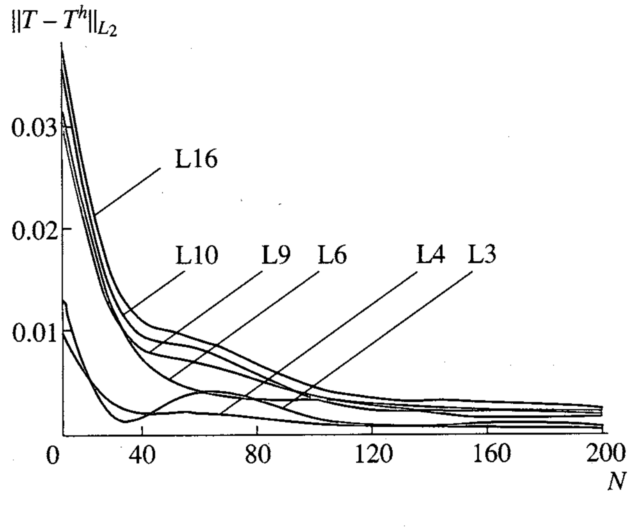
здесь $C_\alpha = u_1 \partial N_\alpha/\partial x_1 + u_2 \partial N_\alpha/\partial x_2$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве примера, демонстрирующего эффективность метода (2.5), (2.6), рассматривалось решение задачи теплопереноса, имеющей точное решение

$$T = \left(x_1 - \frac{\exp(p_1x_1)-1}{\exp(p_1)-1}\right)\left(x_2 - \frac{\exp(p_2x_2)-1}{\exp(p_2)-1}\right), \quad p_i = \frac{u_i}{\lambda},$$

в прямоугольной области $0 \le x_i \le 1$. Исследовался процесс изменения ошибки $\|T - T^h\|_{L_2}$ при сгущении конечно-элементной сетки в пределах от 10×10 до 200×200 узлов. Расчеты проводились с шагом ~10 узлов. Для анализа использовались шесть различных конечных элементов, пред-



Фиг. 2.

ставленных на фиг. 1. Задача решалась для следующей правой части:

$$f = p_1\left(x_2 - \frac{\exp(p_2x_2)-1}{\exp(p_2)-1}\right) + p_2\left(x_1 - \frac{\exp(p_1x_1)-1}{\exp(p_1)-1}\right) \text{ при } p_i = \{10^4, 10^4\}.$$

Зависимости ошибки $\|T - T^h\|_{L_2}$ от степени сгущения конечно-элементной сетки приведены на фиг. 2 (кривые получены путем бикубической сплайн-аппроксимации). Анализ результатов показывает следующее:

1) наилучшее приближение на сетках с различным шагом получено для конечно-элементных схем, использующих для аппроксимации решения функции первого порядка; такой результат вполне закономерен, поскольку искомое решение является сильно изменяющейся функцией;

2) все исследуемые схемы имеют сравнимую точность;

3) предложенная в данной работе модификация SUPG-метода является эффективной для построения конечно-элементных схем высокого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.
2. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 1.
3. *Роуч П.Д.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
4. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Мир, 1984.
5. *Barrett J.W., Morton K.W.* Optimal finite element approximation for diffusion-convection problems // Conf. Math. Finite Elements Trends and Appl. Brunel Univ., May, 1981.
6. *Bulgakov V.K., Chekhonin K.A., Potapov I.I.* Optimal coordination coefficients selection in upwind finite-element schemes // Fourth Internat. Symp. Advances Sci. and Technol. Far East. February 10–15. Harbin, China, 1995.
7. *Griffiths D.F., Mitchell A.R.* Finite elements for convection dominated flows / By ed. T.J. Hughes. New York: AMD 34, 1979. P. 91–104.
8. *Zeinkiewicz O.C.* The finite element method. 2rd end. London: McGraw-Hill, 1977.
9. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2.
10. *Baiocchi C., Brezzi F., Franca L.P.* Virtual bublees and Galerkin-least-squares method // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1993. V. 105. P. 125–141.
11. *Hughes T.J.R., Franca L.P., Hulbert G.M.* A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1989. V. 73. P. 173–189.
12. *Brezzi F., Bristeau M.O., Franca L.P. et al.* A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1992. V. 96. P. 117–129.
13. *Brezzi F., Franca L.P., Hughes T.J.R., Russo A.* $b = \int g$ // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1997. V. 145. P. 329–339.
14. *Brezzi F., Marini D., Russo A.* Application of the pseudo-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1998. V. 166. P. 51–64.
15. *Brooks A.N., Hughes T.J.R.* Streamline upwind Petrov – Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stockes equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1982. V. 32. P. 199–259.
16. *Franca L.P., Frey S.L., Hughes T.J.R.* Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1992. V. 95. P. 253–276.
17. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. Сахарова А.С., Альтенбаха И. Киев, 1982.
18. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
19. *Franca L.P., Michel L., Charbel F.* Unusual stabilized finite element methods for second order linear differential equations // Proc. IXth Internat. Conf. on Finite Elements in Fluids – New Trends and Applic. Venezia, Italy, 15–21 October, 1995.
20. *Булгаков В.К., Потапов И.И.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики. Хабаровск: Изд-во ХГТУ, 1999.