



ПОВЫШЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ СЛАУ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ GPU

Сычева Евгения, РК6-82

Руководитель: Берчун Ю.В.

Консультант: Киселёв И.А.

Цели и задачи

Цель: повышение производительности решения СЛАУ за счет использования GPU.

Задача:

- реализовать программный компонент для решения СЛАУ методом сопряженных градиентов, с учетом особенностей вычислений на графическом процессоре.

Характерные размерности СЛАУ: $10^3 - 10^6$

Постановка задачи

Система из n линейных алгебраических уравнений в матричном виде:

$$Ax = b,$$

где A – матрица размера $n \times n$, b и x – вектора из n элементов.

Свойства матрицы A :

- положительная определенность;
- симметричность;
- диагональное преобладание;
- разреженность.

Метод сопряженных градиентов

- $r_0 = p_0 = b - Ax_0$

Итерация алгоритма:

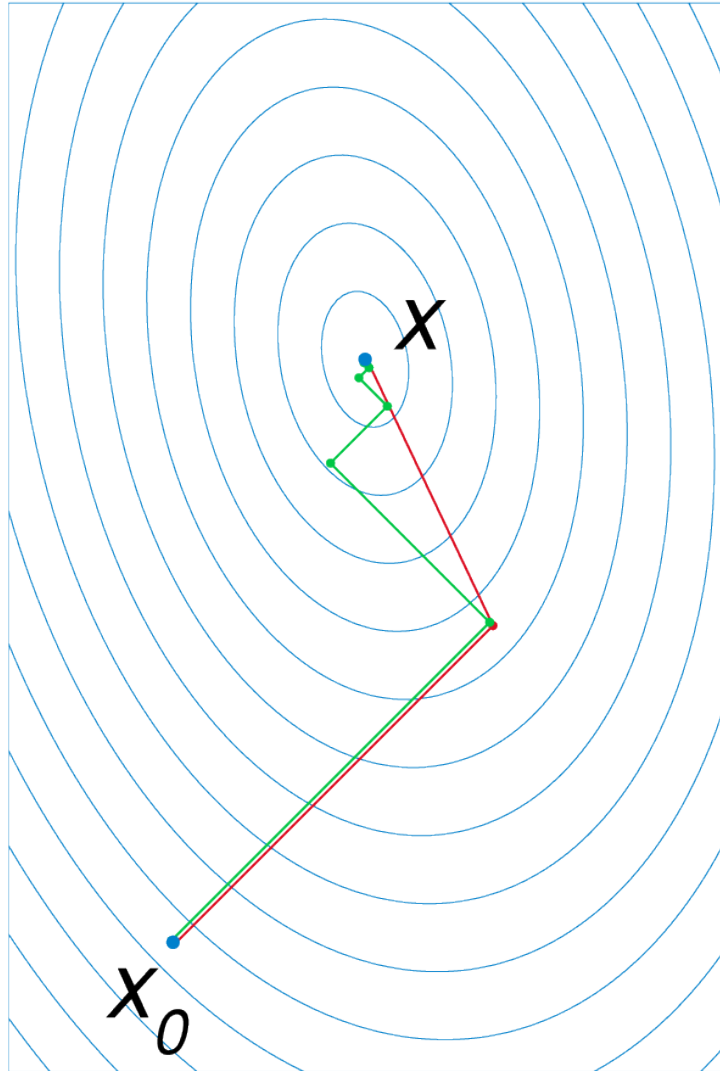
$$\alpha_i = \frac{(r_i, r_i)}{(Ap_i, p_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ap_i$$

$$\beta_i = \frac{(r_{i+1}, r_{i+1})}{(r_i, r_i)}$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_i p_i$$



Предобуславливание

○

$$Ax = b$$



$$M^{-1}Ax = M^{-1}b$$

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

$$\tilde{A} = M^{-1}A, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{b} = M^{-1}b,$$

где M – предобуславливатель.

Матрица M должна:

- быть близкой к A ;
- легко вычисляться;
- допускать быстрое решение систем вида $Mz = r$ относительно неизвестного вектора z .

Предобуславливание



Разложение Холецкого:

$$M = LL^T$$

$$Ax = b$$



$$L^{-1}Ax = L^{-1}b$$

$$(L^{-1}AL^{-T})(L^Tx) = L^{-1}b$$

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

$$\tilde{A} = L^{-1}AL^{-T}, \quad \tilde{x} = L^Tx, \quad \tilde{b} = L^{-1}b$$

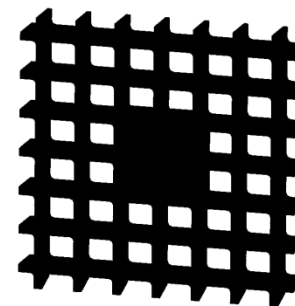
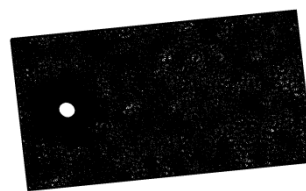
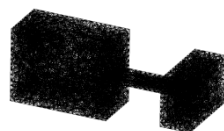
Предобуславливание: Разложение Холецкого

- $$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}$$
$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right), \text{ если } j < i$$

Для расчета предобуславливателя используется неполное разложение Холецкого (IC) видов:

- IC(0),
- IC(p).

Тестирование: Исходные модели



	Малая	Средняя	Большая
Размерность СЛАУ	4 872	33 138	153 957
Объем матрицы до разложения Холецкого, байт	1 306 976	10 039 552	44 453 184
Объем матрицы после разложения Холецкого, байт	8 581 656	245 716 128	2 131 437 360
Время разложения Холецкого, с	2.14	181.208	994.927
Время на подстановки правой части, с	0.032	1.078	9.232

Тестирование: Тестовая инфраструктура

- Центральный процессор Intel(R) Core(TM) i5-3470 (3.2 ГГц).
- Видеоадаптер NVIDIA GeForce GTX 560Ti:
 - количество мультипроцессоров – 12;
 - ядер CUDA – 384.
- Оперативная память – 16 Гб.
- Программа была скомпилирована с помощью компилятора Visual Studio 2013 в режиме оптимизации /O2.
- Заданная точность метода сопряжённых градиентов – $1e-8$.

Результаты тестирования: Библиотека CUSPARSE

	Время предо- буслав- лива- ния, с	Коли- чество итера- ций	Общее время реше- ния, с	Объем предобус- лавлива- теля, байт	Объем предобус- лавливателя по отношению к объему полного разложения Холецкого, %
Малая модель (4 872 уравнений)					
CPU	0.094	111	0.906	1 309 144	15.26%
GPU	0.534	111	1.489	1 306 976	15.23%
Средняя модель (33 138 уравнений)					
CPU	0.875	610	46.222	10 047 392	4.09%
GPU	2.655	610	31.734	10 039 552	4.08%
Большая модель (153 957 уравнений)					
CPU	Нестабильная работа предобуславливателя				
GPU	Нестабильная работа предобуславливателя				

Предобуславливание: Методы стабилизации неполного разложения Холецкого

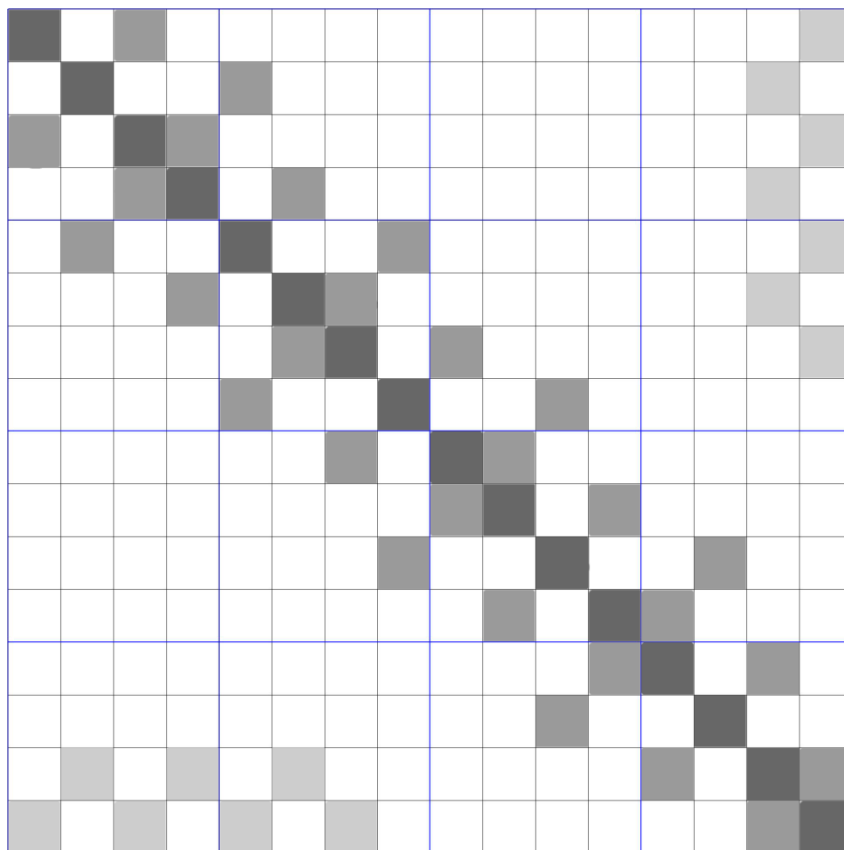
- АЖ-стабилизация

Если элемент l_{ij} удаляется, то его модуль $|l_{ij}|$ прибавляется к соответствующим диагональным элементам a_{ii} и a_{jj}

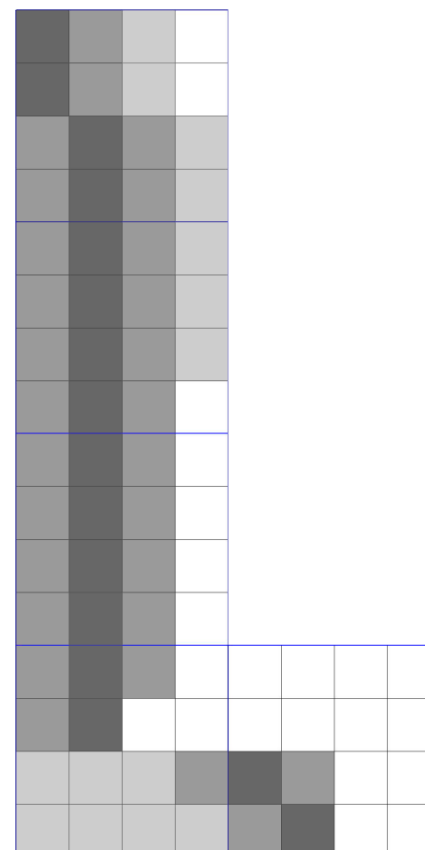
- DCR-стабилизация

До вычисления неполного разложения все положительные недиагональные элементы прибавляются к соответствующим диагональным и обращаются в ноль

Умножение разреженной матрицы на плотный столбец



16 блоков



5 блоков

Результаты тестирования

Малая модель

Малая модель (размерность – 4 872)	Время предобуславливания, с	Количество итераций	Время решения, с	Объем предобуславливателя, байт	Объем предобуславливателя по отношению к объему полного разложения Холецкого (8 581 656 байт), %
CPU					
IC(0)	0.094	111	0.812	1 309 144	15.26%
IC(0) + AJ	0.234	175	0.985	1 309 144	15.26%
IC(0) + DCR	0.109	839	3.594	1 309 144	15.26%
IC(1) + AJ	2.141	50	0.656	4 482 952	52.24%
IC(2) + AJ	2.063	16	0.437	6 843 184	79.74%
IC(3) + AJ	2.031	8	0.375	7 078 696	82.49%
GPU					
IC(0)	0.534	111	0.955 0.922	1 306 976	15.23%
IC(0) + AJ	0.234	175	2.283 2.218	1 306 976	15.23%
IC(0) + DCR	0.109	839	7.34 7.263	1 306 976	15.23%
IC(1) + AJ	2.141	50	2.571 2.558	6 743 896	78.58%
IC(2) + AJ	2.063	16	1.328 1.314	10 284 244	119.83%
IC(3) + AJ	2.031	8	0.688 0.684	10 637 512	123.96%

Время, требуемое на получение полного разложения Холецкого - 2.14 с.

Время, требуемое на подстановку правой части - 0.032 с.

Результаты тестирования

Средняя модель

Средняя модель (размерность – 33 138)	Время предобуславливания, с	Количество итераций	Время решения, с	Объем предобуславливателя, байт	Объем предобуславливателя по отношению к объему полного разложения Холецкого (245 716 128 байт), %
CPU					
IC(0)	0.875	610	45.347	10 047 392	4.09%
IC(0) + AJ	6.5	1 000	55.704	10 047 392	4.09%
IC(0) + DCR	0.954	5 953	188.99	10 047 392	4.09%
IC(1) + AJ	154.185	278	68.688	126 031 976	51.29%
IC(2) + AJ	136.589	37	29.391	233 106 664	94.87%
IC(3) + AJ	135.011	11	23.110	236 362 864	96.19%
GPU					
IC(0)	2.655	610	29.079 28.386	10 039 552	4.08%
IC(0) + AJ	6.5	1 000	51.286 50.414	10 039 552	4.08%
IC(0) + DCR	0.954	5 953	232.962 231.186	10 039 552	4.08%
IC(1) + AJ	154.185	278	382.845 379.517	189 180 520	76.99%
IC(2) + AJ	136.589	37	-	349 792 516	142.36%
IC(3) + AJ	135.011	11	-	354 676 816	144.34%

Время, требуемое на получение полного разложения Холецкого – 181.208 с.

Время, требуемое на подстановку правой части - 1.078 с.

Результаты тестирования

Большая модель

Большая модель (размерность – 153 957)	Время предобуславливания, с	Количество итераций	Время решения, с	Объем предобуславливателя, байт	Объем предобуславливателя по отношению к объему полного разложения Холецкого (2 131 437 360 байт), %
CPU					
IC(0)	Нестабильная работа предобуславливателя				
IC(0) + AJ	46.173	2 757	873.512	44 456 660	2.09%
IC(0) + DCR	-				
IC(1) + AJ	-				
IC(2) + AJ	-				
IC(3) + AJ	-				
GPU					
IC(0)	Нестабильная работа предобуславливателя				
IC(0) + AJ	46.173	2757	376.656 370.176	44 453 184	2.08%
IC(0) + DCR	-				
IC(1) + AJ	-				
IC(2) + AJ	-				
IC(3) + AJ	-				

Время, требуемое на получение полного разложения Холецкого - 994.927 с.

Время, требуемое на подстановку правой части - 9.232 с.