Algebră liniară şi geometrie analitică

Stelian Corneliu Andronescu

Adrian Ţurcanu

Editura Universitătii din Pitesti

Str. Târgu din Vale, nr.1,
110040, Piteşti, jud. Argeş

tel/fax: 40348 45.31.23

Editor: lector univ. dr. Sorin FIANU

Referenţi ştiinţifici:
Prof. univ. dr. – Corneliu UDREA
Conf. univ. dr. – Costel BĂLCĂU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

ANDRONESCU, STELIAN CORNELIU

Algebră liniară şi geometrie analitică / Stelian Corneliu Andronescu, Adrian Ţurcanu. - Piteşti : Editura Universităţii din Piteşti, 2009

Bibliogr.
Index
ISBN 978-973-690-922-1

I. Ţurcanu, Adrian

Cuprins

1. Prefaţă

Cartea de faţă se adresează studenţilor din anul I din Universităţile şi Institutele de profil tehnic şi matematic. De asemenea, multe noţiuni din această lucrare pot fi utilizate de ingineri, cercetători şi cadre didactice din diferite domenii de activitate precum şi de elevii cu aptitudini deosebite în studiul matematicilor pentru lărgirea cunoştinţelor lor.

Materialul lucrării, structurat în două părţi: "Algebră liniară" şi respectiv "Geometrie analitică", cuprinde elemente de bază ale algebrei liniare şi geometriei analitice.

Cartea conţine şapte capitole. Fiecare capitol este împărţit în paragrafe care conţine exemple, exerciţii rezolvate, observaţii utile în înţelegerea sau corelarea unor fapte, aplicaţii în domenii conexe cu algebra liniară şi geometria analitică. La sfârşitul capitolelor sunt rezolvate o serie de exerciţii şi probleme, de asemenea se propun probleme şi exerciţii spre a fi rezolvate cu scopul aprofundării şi verificării cunoştinţelor deja însuşite.

Cartea este autoconţinută şi nu pretinde decât cunoaşterea noţiunilor de algebră şi geometrie elementară.

Autorii mulţumesc tuturor celor care au contribuit cu fapta, vorba sau gândul la elaborarea acestei cărţi.

Autorii
Piteşti, octombrie 2009

2. Introducere

Presupunem că avem un obiect a cărui natură concretă nu are importanţă. Vom desemna acest obiect prin 1 (ex. segmentul de dreaptă). Vrem să măsurăm sau "să comparăm" oricare alt obiect cu acest prim obiect 1. Vom obţine mai întâi obiecte "naturale":
1, 1+1, (1+1)+1,... . Vom numi aceste obiecte numere naturale şi vom nota mulţimea lor prin $\mathbb{N}$. Să observăm că în afară de obiectul 1 avem nevoie şi de o lege de compoziţie "+" (adunarea) pentru a găsi orice alt număr natural. Dacă notăm : $1+1=2$, $(1+1)+1=3$,... avem $\mathbb{N}=\{1,2,3,...,n...\}$. Cu operaţia de adunare de mai sus putem să asociem oricărei perechi (p,q) un alt număr natural, notat prin p+q=$(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{de p ori}})+(\underbrace{1+1+...+1}_{\text{de q ori}})$.

Aici am scris p=$\underbrace{1+1+...+1}_{\text{de p ori}}$ şi nu am folosit parantezele pentru ordinea de sumare, deoarece acest lucru este clar în cazul nostru, dar nu întotdeauna adevărat, dacă în locul adunării folosim scăderea, de exemplu (9-6)-2≠9-(6-2).

Proprietatea de mai sus a adunării : $(p+q)+r=p+(q+r)$, $p,q,r\in\mathbb{N}$ se numeşte asociativitate. Adunarea repetată pe $\mathbb{N}$ conduce la înmulţire: $\underbrace{p+p+...+p}_{\text{de n ori}}=np$, putând considera şi situaţia
$\underbrace{n+n+...+n}_{\text{de p ori}}=pn$.

Deoarece adunarea este ascociativă se observă că $np=pn$ adică înmulţirea este comutativă. La fel se observă că şi adunarea este comutativă pe $\mathbb{N}$. Pe $\mathbb{N}$ înmultirea nu este o operaţie independentă faţă de adunare, ea fiind dedusă din operaţia de adunare.

Prin urmare vor exista legături strânse între cele două operaţii. Înmultirea este şi ea asociativă, înmulţirea distribuie adunarea:
$n(m+p)=nm+np$, pentru orice m,n,p naturale.

Înmulţirea pe $\mathbb{N}$ are însă o proprietate pe care adunarea nu o are, există un număr natural, şi anume 1 (unu) care este element neutru faţă de înmulţire. El este unic cu această proprietate. De exemplu $1\cdot 2=2\cdot 1=2$.

În continuare vom adăuga la multimea $\mathbb{N}$ alte numere nenaturale, astfel încât cele două operaţii, de adunare şi înmulţire să se extindă şi la acele numere. Aceste "supramulţimi" ale multimii $\mathbb{N}$ cu cele două operaţii vor forma ceea ce numim structuri algebrice fundamentale: grup, inel, corp.

Multimea $\mathbb{N}$ se axiomatizează, nu se presupune dinainte cunoscută. Se construiesc prin diferite procedee mulţimea numerelor întregi
$\mathbb{Z}=\{...-n,...,-2,-1,0,1,2,...n...\}$, mulţimea numerelor raţionale

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\}$, mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$.

Considerăm mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ şi căutam să punem în evidenţă acele structuri care ne interesează şi anume structurile de natură algebrică.

Extindem pe $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Z}$ prin adăugarea elementului neutru faţă de adunare "0" şi prin adăugarea tuturor soluţiilor ecuaţiilor de tipul $x + n = m$, unde m,n sunt numere naturale, sau prin adăugarea soluţiilor ecuaţiilor de tipul $x+n = 0$, adica a numerelor $0, -1, -2, -3, ..., -n, ...$

Pe $\mathbb{Z}$ avem acum o adunare "+" şi o înmulţire "$\cdot$". Faţă de adunare, $\mathbb{Z}$, are o structura de grup, adică:

1) adunarea este asociativă;

2) $\mathbb{Z}$ poseda pe "0" ca element neutru faţa de adunare, adică $a+0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;

3) pentru orice element $b \in \mathbb{Z}$ exită un element notat cu "$-b$"$\in \mathbb{Z}$ care este simetricul lui b faţă de adunare, adică $b+(-b) = (-b)+b = 0$.

În plus , avem că grupul $(\mathbb{Z}, +)$ este comutativ.

Pe $\mathbb{Z}$ avem şi operaţia de înmulţire, dar $\mathbb{Z}$ nu este grup faţă de această operaţie, deoarece 3) nu are loc, de exemplu $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Avem însă:

5) înmulţirea este asociativa pe $\mathbb{Z}$

6) ea distribuie adunarea, şi

7) elementul neutru faţă de înmulţire, 1, aparţine lui $\mathbb{Z}$. Spunem că $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este un monoid comutativ, înmulţirea este comutativă.

Proprietăţile 1)-7) fac ca mulţimea $\mathbb{Z}$ împreună cu cele două operaţii să devină un inel comutativ. El va fi notat prin $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Extindem acum pe $(\mathbb{Z}, \cdot, +)$ la inelul $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. În plus, în $\mathbb{Q}$ avem că:

1) orice element $\neq 0$ este inversabil, adică are simetric faţă de înmulţire. O astfel de structură algebrică va fi numită corp.

Observăm că într-un corp K se pot rezolva ecuaţii de tipul $ax + b = 0$, unde $a, b \in K$, iar $a \neq 0$. Se poate trage concluzia: $\mathbb{Q}$ este structura algebrică în care putem face orice operaţie de tip aritmetic, care apare deja pe $\mathbb{N}$.

Orice mulţime în care avem două operaţii "$\cdot$" şi "+" va fi numită aritmetică sau ca având o structură aritmetică.

Se ştie că lumea în care trăim nu este modelată doar de corpul $\mathbb{Q}$, adică nu este numai de natură aritmetică. Dacă vom considera ecuaţia $x^2 = 2$, ea are soluţiile $\pm\sqrt{2}$, unde $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Numerele obţinute ca soluţii ale diferitelor ecuaţii cu coeficienţi în $\mathbb{Q}$ se numesc numere algebrice.

Dar ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ are două soluţii numere algebrice notate prin $\pm i$ (i de la imaginar), care au proprietatea că $i^2 + 1 = 0$ sau că $i^2 = -1$.

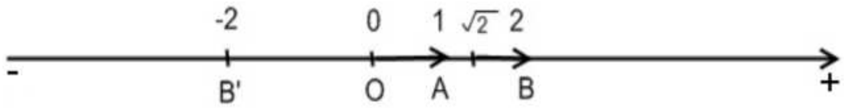
Dacă păstrăm regulile obişnuite de înmulţire definite pe $\mathbb{Q}$ şi la numerele algebrice, vom obţine o contradicţie: pătratul unui număr este negativ.

Deoarece regulile obişnuite de adunare şi înmulţire reflectă operaţii concrete din lumea reală, vom numi numărul "i" număr imaginar.

Vom numi numere reale acele numere care se obţin în urma măsurării diferitelor segmente orientate, cu un segment orientat fixat dinainte.

Dacă vom măsura lungimea unui cerc (desfăşurat de-a lungul unui drepte), cu diametrul acestuia, vom obţine acelaşi număr π, care nu mai este algebric. Numerele reale nealgebrice se numesc transcendente şi ele sunt "mai multe" decât cele algebrice.

Toate numerele reale conservă operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire şi formează aşa numitul corp al numerelor reale, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. El conţine corpul $\mathbb{Q}$ şi se poate reprezenta ca mulţimea punctelor de pe o dreaptă pe care am fixat un reper O, un sens pozitiv, şi o unitate de măsură pozitivă, adică un segment orientat pozitiv $\overrightarrow{OA}$.



Numerele pur imaginare, soluţii de ecuaţii cu coeficienţi numere reale, adică acele numere care nu sunt reale , împreună cu numerele reale formează un corp, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ numit corpul numerelor complexe.

F.Gauss a arătat că orice număr complex se poate reprezenta ca un cuplu de numere reale (a, b), notat simbolic prin $a + bi$, unde $i^2 = -1$, iar adunarea şi înmulţirea se fac după următoarele reguli:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Este clar că orice număr real a este şi un număr complex, deoarece $a = a + 0i$, operaţiile de mai sus devenind operaţiile de adunare şi înmulţire obişnuite din $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ dacă ne restrângem la numere reale.

Se pot construi şi alte corpuri, cum ar fi, de exemplu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$, unde adunare şi înmulţirea sunt acelea induse de pe $\mathbb{R}$, deoarece $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$.

Se pot construi corpuri de numere algebrice ce au o importanţă foarte mare în matematica modernă ca de exemplu corpul claselor de resturi modulo p, notat prin $\mathbb{Z}_p$, cu p număr prim; corpurile $\mathbb{Z}_p$ sunt foarte folosite în teoria informaţiei şi teoria codurilor.

În continuare vom lucra numai cu corpul $\mathbb{R}$, sau cu corpul $\mathbb{C}$. Pentru a sublinia doar informaţiile de natură aritmetică legate de adunarea şi înmulţirea cu proprietăţile 1)-8) vom lucra cu un corp oarecare $(K, +, \cdot)$, adică cu o mulţime nevidă K, care conţine cel puţin două elemente 0 şi 1, distincte şi pe care avem date două legi de compoziţie interne, adunarea "+" şi înmulţirea "·" legate prin următoarele cerinţe:

$1^{'}$) $(x+y)+z=x+(y+z)$, pentru orice $x,y,z \in K$ ("+" este asociativă);

$2^{'}$) există $0 \in K$, astfel încât pentru orice $x \in K$ să avem că:
$0+x=x+0=x$. "0" este elementul neutru faţă de adunare;

$3^{'}$) pentru orice $x \in K$ există un element notat cu $(-x) \in K$ astfel încât $x+(-x)=(-x)+x=0$; elementul (-x) se numeşte simetricul lui x faţă de adunare, sau opusul lui x.

$4^{'}$) $x+y=y+x$, pentru orice $x,y \in K$ (adunarea este comutativă);

$5^{'}$) $(xy)z=x(yz)$, pentru orice $x,y,z \in K$ (înmulţirea este asociativă);

$6^{'}$) există $1 \in K, 1 \neq 0$, astfel încât $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, pentru orice $x \in K$ (1 este element unitate sau element neutru faţă de înmulţire);

$7^{'}$) oricare ar fi $x \neq 0$, există un element $x^{-1} \in K$, numit simetricul lui x faţă de înmulţire, sau inversul elementului x, astfel încât:
$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;

$8^{'}$) $xy=yx$, oricare ar fi $x,y \in K$ (înmulţirea este comutativă);

$9^{'}$) $x(y+z)=xy+xz$, $(y+z)x=yx+zx$, oricare ar fi $x,y,z \in K$ (înmulţirea este distributivă faţă de adunare).

Se observă că $(K,+)$ şi $(K^{*},\cdot)$ sunt grupuri comutative, iar $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ, unde $K^{*}=K \backslash \{0\}$.

Structura de corp comutativ este structura cea mai adecvată pentru aritmetica uzuală; de aceea ea apare înaintea altor structuri mai complicate.

CAPITOLUL 1

Spaţii vectoriale

Experienţa mentală şi fizică ne învaţă că întreg Universul este structurat pe legi care acţionează independent de noi. O cale pentru cunoaşterea lui este aceea de a separa câteva dintre aceste legi şi de a încerca să le descifrăm proprietăţile şi modul lor de acţiune.

În disciplinele inginereşti apar frecvent mulţimi de obiecte care se pot "aduna" şi "înmulţi" cu numere; de exemplu, vectori liberi, unele transformări ale spaţiului în el însuşi, etc. Între aceste două operaţii, de "adunare" şi "multiplicare", şi operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a numerelor apar legături naturale, puse în evidenţă de experienţă. Se impune deci studiul unei astfel de mulţimi structurate cu două operaţii ca mai sus, operaţii ce sunt legate prin diferite axiome. Obţinem un obiect nou numit spaţiu vectorial (liniar). Cuvântul liniar exprimă faptul că obiectele unui spaţiu vectorial apar ca expresii de forma: $5x - 3y + 2z + \sqrt{2}u$, de exemplu, unde x, y, z, u sunt ele însele obiecte ale acestui spaţiu. Pentru că expresiile de mai sus nu conţin "puteri", "radicali", etc., la necunoscute, acestea se numesc liniare.

1. Definiţia unui spaţiu vectorial. Exemple

De la început, prin corp vom înţelege corp comutativ.

Fie K un corp. În cazul nostru $K = \mathbb{R}$, sau $\mathbb{C}$, adică corpul numerelor reale sau corpul numerelor complexe.

Notăm cu "+", respectiv "·", adunarea şi înmulţirea în K.

Definiţia 1.1. Fie V o mulţime nevidă şi K un corp. Mulţimea V înzestrată cu două legi de compoziţie: una internă notată "+" numită adunarea vectorilor, faţă de care V este un grup comutativ şi o lege de compoziţie externă notată "·": $K \times V \to V$, $(k, v) \to kv$, $k \in K, v \in V$, numită înmulţirea cu scalari, care are proprietăţile:

v1) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$;

v2) $(kl)v = k(lv), \forall k, l \in K, \forall v \in V$;

v3) $k(v + w) = kv + kw, \forall k \in K, \forall v, w \in V$;

v4) $(k + l)v = kv + lv, \forall k, l \in K, \forall v \in V$, se numeşte **spaţiu vectorial peste corpul** K sau K-**spaţiu vectorial**.

Observaţii. Pentru comoditatea scrierii am folosit tot simbolurile "+" şi "·" pentru operaţii, dar acest lucru presupune un grad sporit de atenţie pentru a se distinge între scalari şi vectori.

Spaţiul vectorial se va nota prin V sau V/K.

Dacă $K = \mathbb{R}$, un spaţiu vectorial V/K se va numi spaţiu vectorial real, iar dacă $K = \mathbb{C}$, V/K va fi numit spaţiu vectorial complex.

În continuare vom discuta câteva exemple semnificative de spaţii vectoriale ce apar în aplicaţii. Aceste exemple pot constitui pentru cititor exerciţii, în sensul verificării proprietăţilor din definiţie.

Exemplul 1.2. Dacă $V = K$, K corp, atunci K/K este spaţiu vectorial: exemplu $\mathbb{R}/\mathbb{R}$, $\mathbb{C}/\mathbb{C}$.

Exemplul 1.3. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) |\, x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}\}$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, definim legile:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ *şi*

$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

În acelaşi mod se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari din $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{C}^n$. Spaţiile vectoriale $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}$ se numesc spaţii aritmetice n-dimensionale. Vom întâlni $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$-planul, $\mathbb{R}^3$-spaţiul tridimensional, $\mathbb{R}^4$-spaţiu vectorial "spaţiul-timp", $\mathbb{R}^6$-"spaţiul-viteză", etc.

Exemplul 1.4. $\mathcal{M}_{nm}(K) = \{A = (a_{ij}) | a_{ij} \in K, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$, mulţimea matricelor nu n linii şi m coloane, a_{ij} fiind elementul de pe linia "i" şi coloana "j" în matricea A.

Definim $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, unde $B = (b_{ij})$, adică adunarea obişnuită a matricelor, iar $\alpha \circ A = (\alpha a_{ij})$, unde $\alpha \in K$.

Verificând axiomele din definiţie $(\mathcal{M}_{nm}(K), +, \circ)$ este un spaţiu vectorial peste K.

Exemplul 1.5. $V = \{0\}$ este spaţiul vectorial nul format cu un singur element 0.

Exemplul 1.6. Mulţimea vectorilor liberi din spaţiu, cu adunarea obişnuită a vectorilor liberi, şi cu înmulţirea obişnuită cu scalari reali este un spaţiu vectorial real.

Contraexemplu 1.7. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$ cu adunarea obişnuită de la Ex.1.3. şi înmulţirea cu scalari
$kx = (kx_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k \in \mathbb{R}$ verifică toate axiomele în afară de:
$(k + l)x = kx + lx$.

2. Subspaţii vectoriale. Dependenţă şi independenţă liniară

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K. Ne propunem să studiem submulţimile lui V care sunt ele însele spaţii vectoriale în raport cu operaţiile induse de cele din V.

Definiţia 2.1. O submulţime nevidă S a lui V se numeşte **subspaţiu vectorial** al lui V dacă:

(sv_1) $\forall u, v \in S$ avem $u + v \in S$;

(sv_2) $\forall k \in K, \forall u \in S$ avem $ku \in S$.

Observaţie. Condiţiile (sv_1) şi (sv_2) pot fi înlocuite prin condiţia echivalentă : $\forall u, v \in S$, $\forall k, l \in K$ avem $ku + lv \in S$.

Remarca 2.2. Deoarece adunarea şi înmulţirea cu scalari sunt restricţii la S ale operaţiilor de pe V, perechea (S, K) verifică toate axiomele spaţiului vectorial. Prin urmare S este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă S este un spaţiu vectorial peste K în raport cu operaţiile induse de cele din V.

Exemplele care urmează vor fi exerciţii pentru cititor, care va trebui să verifice axiomele din definiţia subspaţiului vectorial pentru fiecare caz în parte.

Exemplul 2.3. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K. Mulţimile $\{0\}$ şi V sunt subspaţii vectoriale ale lui V. Acestea se numesc **subspaţii improprii**, orice alt subspaţiu vectorial al lui V numindu-se propriu.

Exemplul 2.4. Mulţimea $S = \{(0, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{2, n}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 2.5. Dacă $V = \mathbb{R}^3$, atunci dreptele şi planele care conţin originea sunt subspaţii vectoriale ale acestuia.

Contraexemplu 2.6. Fie $V = \mathbb{R}^3$. Mulţimea $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |$ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ **nu** este un subspaţiu vectorial al lui V.

Exemplul 2.7. Fie spaţiul vectorial real $V = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Mulţimea $S_1 = \{f | f(7) = f(1)\}$ este un subspaţiu vectorial al lui V, dar mulţimea $S_2 = \{f | f(7) = 2 + f(1)\}$ nu este un subspaţiu vectorial al lui V.

Definiţia 2.8. Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, unde V un K-spaţiu vectorial, şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, expresia $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ se numeşte **combinaţie liniară** a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ şi este operaţia cea mai generală pe care o putem efectua în V cu vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Propoziţia 2.9. *Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu vectori dintr-o submulţime S de vectori din V formează un subspaţiu vectorial al lui V notat prin* $L(S) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \alpha_i \in K, v_i \in S, i = \overline{1, n}\}$.

Demonstraţie. Evident, suma a două combinaţii liniare de elemente din S este tot o combinaţie liniară cu elemente din S, iar produsul dintre un scalar şi o combinaţie liniară de elemente din S este tot o combinaţie liniară cu elemente din S. În consecinţă $L(S)$ verifică axiomele din definiţia subspaţiului vectorial.

Mulţimea $L(S)$ se numeşte subspaţiu generat de submulţimea S sau **acoperirea liniară a lui** S.

Exemplul 2.10. Dacă $S = \{x_0\}$, $x_0 \in V$ atunci $L(S) = \{\alpha x_0 | \alpha \in K\} \overset{\text{not}}{=} K \cdot x_0$.

Observaţii. 1. $L(S) = \{0\}$, dacă $S = \phi$.

2. Diferite submulţimi de vectori din V pot să genereze acelaşi subspaţiu. De exemplu, mulţimile $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$, $\{1, \frac{X}{1!}, \frac{X^2}{2!}, \ldots, \frac{X^n}{n!}\}$ şi $\{1, (1-X), (1-X)^2, \ldots, (1-X)^n\}$ generează spaţiul vectorial $K_n[X]/K$, unde $K_n[X] = \{f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n | a_i \in K, i = \overline{1, n}\}$.

Teorema 2.11. *Dacă S şi T sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial V/K, atunci:*

a) $S+T=\{v_1+v_2|v_1\in S, v_2\in T\}$ *este un subspaţiu vectorial al lui V (suma dintre S şi T);*

b) $S\cap T$ *este un subspaţiu vectorial al lui V;*

c) $S\cup T$ *este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă $S\subset T$ sau $T\subset S$.*

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $u,v\in S+T$, adică $u=u_1+u_2$, $v=v_1+v_2$, unde $u_1,v_1\in S$ şi $u_2,v_2\in T$. Deoarece S şi T sunt subspaţii vectoriale, $u_1+v_1\in S$ şi $u_2+v_2\in T$ de unde rezultă că $u+v=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\in S+T$.

Fie $k\in K$. Din $ku_1\in S$ şi $ku_2\in T$ rezultă $ku=(ku_1)+(ku_2)\in S+T$.

b) Fie $u,v\in S\cap T$. Atunci $u,v\in S$ şi $u,v\in T$. Deoarece S şi T sunt subspaţii vectoriale, deducem $ku+lv\in S$ şi $ku+lv\in T$, pentru orice $k,l\in K$, deci $ku+lv\in S\cap T$.

c) "$\Leftarrow$": Dacă $S\subset T\Rightarrow S\cup T=T$ care este un subspaţiu vectorial. Similar, $T\subset S\Rightarrow S\cup T=S$ care este subspaţiu vectorial.

"$\Rightarrow$": Presupunem că $S\not\subset T$ şi $T\not\subset S$.

Fie atunci $u_1\in S\backslash T$ şi $v_2\in T\backslash S$. Rezultă că $u_1+v_2\notin S$ şi $u_1+v_2\notin T$ (în caz contrar, $u_1+v_2\in S$ şi $u_1\in S\Rightarrow(u_1+v_2)-u_1=v_2\in S$ ceea ce constituie o contradicţie; similar $u_1+v_2\notin T$). Cum $u_1+v_2\notin S$ şi $u_1+v_2\notin T$ obţinem $u_1+v_2\notin S\cup T$, adică $S\cup T$ nu este un subspaţiu vectorial.

Aplicând principiul contrapoziţiei din logica matematică obţinem că: $S\cup T$ subspaţiu vectorial $\Rightarrow S\subset T$ sau $T\subset S$.

Remarca 2.12. $L(S\cup T)=S+T$, unde S şi T sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K.

Teorema 2.13. *Dacă S şi T sunt două subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K, atunci pentru orice vector $v\in S+T$, descompunerea $v=v_1+v_2$, $v_1\in S$, $v_2\in T$ este unică dacă şi numai dacă $S\cap T=\{0\}$.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Leftarrow$": Fie $v=v_1+v_2$ şi $v={v_1}'+{v_2}'$ cu $v_1,{v_1}'\in S$ şi $v_2,{v_2}'\in T$ două descompuneri ale lui $v\in S+T$. Atunci vectorul $u=v_1-{v_1}'=v_2-{v_2}'\in S\cap T$ şi, deoarece $S\cap T=\{0\}$ rezultă $v_1={v_1}'$ şi $v_2={v_2}'$, adică unicitatea descompunerii.

"$\Rightarrow$": Evident $0\in S\cap T$. Presupunând că există un vector nenul $v\in S+T$, acesta admite cel puţin două descompuneri distincte $v=v+0=0+v$ ceea ce contrazice ipoteza. Atunci $S\cap T=\{0\}$.

Definiţia 2.14. Fie S şi T două subspaţii vectoriale ale lui V. Dacă $S\cap T=\{0\}$ spunem că $S+T$ este o sumă directă. Mai mult, dacă $S+T$ este sumă directă şi $S+T=V$, spunem că T este un **sumand direct** al spaţiului S.

Vom nota o sumă directă $S+T$ prin $S\oplus T$.

Exemplul 2.15. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ subspaţiile vectoriale $S_1=\{(x_1,x_2)\ |x_1=x_2\}$ şi $S_2=\{(x_1,x_2)|x_1=-x_2\}$.

Atunci $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$, deci $S_1 + S_2$ este o sumă directă. În plus, $S_1 \oplus S_2 = \{(x_1,x_2) + (y_1,y_2) |\ (x_1,x_2) \in S_1, (y_1,y_2) \in S_2\} \Rightarrow S_1 \oplus S_2 = \{(x_2,x_2) + (-y_2,y_2) | x_2, y_2 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S_1 \oplus S_2 = \{(x_2 - y_2, x_2 + y_2) | x_2, y_2 \in \mathbb{R}\} \Rightarrow S_1 \oplus S_2 = \{(\alpha,\beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Definiţia 2.16. O submulţime S de vectori din spaţiul V/K se numeşte **liniar dependentă** dacă există vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ şi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu toţi nuli, astfel încât:
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.

În aceste condiţii, spunem că vectorii din S sunt liniar dependenţi.

Exemplul 2.16. Vectorii $(0,1,0)$ şi $(0,-3,0)$ sunt liniar dependenţi în $\mathbb{R}^3$, deoarece $3(0,1,0) + 1(0,-3,0) = (0,0,0) = 0 \in \mathbb{R}^3$.

Observații. 1. Orice supramulţime T a unei mulţimi S de vectori liniar dependentă este liniar dependentă.

2. $\{0\}$ este liniar dependentă, deoarece, de exemplu, $1 \cdot 0 = 0$ şi scalarul 1 este nenul.

3. Din primele două observaţii deducem că, dacă $S \supset \{0\}$, atunci S este liniar dependentă.

4. O submulţime de vectori S din V/K este liniar dependentă dacă şi numai dacă cel puţin un vector din S se poate scrie ca o combinaţie liniară de alţi vectori din S.

Definiţia 2.18. O submulţime S de vectori din spaţiul V/K se numeşte **liniar independentă** dacă S nu este liniar dependentă, adică dacă pentru orice $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Exemplul 2.19. Vectorii $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,0,1)$ şi $v_3 = (0,2,1)$ sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, deoarece, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow$

$$(\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$$

Observații. 1. Orice submulţime a unei mulţimi de vectori liniar independentă este liniar independentă.

2. În ambele definiţii anterioare, mulţimea S poate fi o mulţime finită sau infinită.

3. Deşi liniar dependenţa şi liniar independenţa sunt proprietăţi specifice unor mulţimi de vectori, adeseori se vorbeşte despre vectori liniar dependenţi, respectiv liniar independenţi.

3. Bază. Dimensiunea unui spaţiu vectorial

Definiţia 3.1. Fie V/K un spaţiu vectorial şi B o submuţime de vectori în V. B se numeşte **bază** de vectori în V dacă:

b1) $L(B) = V$, adică B este o mulţime de generatori pentru V şi

b2) B este liniar independentă.

Baza este o "cea mai săracă" mulţime de vectori cu care putem reface întreg spaţiul V, dacă se cunoaşte complet corpul de scalari K. Baza B este un fel de schelet pentru V, aşa cum mulţimea numerelor prime este scheletul mulţimii numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Exemplul 3.2. Fie spaţiul vectorial $V = \mathbb{R}^3$ şi vectorii $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ este o bază de vectori în $\mathbb{R}^3$ numită **baza canonică**.

Într-adevăr, $L(B) \subset \mathbb{R}^3$, iar dacă $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avem că $v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$, adică $v \in L(B)$, deci $L(B) = V = \mathbb{R}^3$; B este şi liniar independentă deoarece din $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$, adică $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Remarca 3.3. Fie $W = L\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, x_i \in V, i = \overline{1, n}$, iar mulţimea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este liniar independentă. Fie, de asemenea, $S_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}\}, y_i \in W, i = \overline{1, n+1}$, elemente oarecare în W. Atunci S_1 este liniar dependentă.

Se afirmă că în W nu vom putea găsi mai mult de n elemente liniar independente dacă avem deja o bază formată din n elemente (S este o bază în W).

Teorema 3.4. (teorema de unicitate a dimensiunii).

Oricare două baze ale unui spaţiu vectorial V/K cu număr finit de elemente (dacă există!) au acelaşi număr de vectori.

Acest număr se numeşte **dimensiunea spaţiului vectorial** V/K şi se notează cu $dim_K V$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $B_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ două baze în spaţiul vectorial V/K. Presupunem, de exemplu, că $m > n$. Folosind Remarca 3.3 cu $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ iar S_1 va fi $S' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}\}$, deoarece $m \geq n + 1$. Se găseşte că S' este liniar dependentă, lucru absurd, deoarece $S' \subset S_1$, iar S_1 a fost considerată independentă. Prin urmare nu putem avea $m > n$.

În acelaşi mod (schimbând rolurile mulţimilor) se poate arăta că nu putem avea $n > m$.

Aşadar singura posibilitate rămâne $m = n$.

În continuare postulăm o teoremă, fără a o demonstra.

Teorema 3.5. *Dacă V/K posedă o mulţime finită de generatori $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, adică $L(G) = V$, atunci V posedă şi o bază finită $G' = \{w_1, w_2, ..., w_m\} \subset G$ cu $m \leq n$.*

Un spaţiu V care posedă o mulţime finită de generatori se zice finit generat.

Exemplul 3.6. a) $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, deoarece $B = \{e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$;

b) $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$, deoarece $B = \{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$;

c) $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, deoarece $\{1, i\}$ este o bază a spaţiului $\mathbb{C}/\mathbb{R}$.

d) $dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = \{(1, 0), (i, 0), (0, i), (0, 1)\}$ este o bază a lui $\mathbb{C}^2/\mathbb{R}$.

e) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n$, deoarece (peste $\mathbb{C}$) $B = \{e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,1)\}$ este o bază în $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}$;

f) $dim_K\mathcal{M}_{nm}(K) = nm$, deoarece mulţimea matricelor

$$\left\{ e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \right\}, \ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$$ unde e_{ij} este matricea care are 1 pe poziţia (i,j) şi 0 în rest, formează o bază în $\mathcal{M}_{nm}(K)$.

g) Dacă $V = \{0\}$, atunci $dim_K V = 0$.

Un spaţiu vectorial V cu dimensiunea n se numeşte n-dimensional şi se notează V_n.

Teorema 3.7. *Pentru orice spaţiu vectorial V_n/K sunt adevărate următoarele afirmaţii:*

a) O mulţime liniar independentă din V_n este o submulţime a unei baze din V_n;

b) Orice mulţime formată din n vectori liniar independenţi este o bază a lui V_n.

DEMONSTRAŢIE. a) Dacă $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o mulţime liniar independentă din V_n, atunci sau $L(S) = V$ şi deci S este o bază, sau $L(S)$ este o submulţime proprie a lui V_n. În al doilea caz, există $v \in V_n \backslash L(S)$ şi considerăm $S' = S \cup \{v\}$.

Dacă $L(S') = V_n$, atunci S' este o bază ce conţine S, iar dacă $L(S')$ este o submulţime proprie a lui V_n, atunci se reia raţionamentul făcut pentru S. Deoarece spaţiul are dimensiunea finită, după un număr finit de paşi, ajungem la o bază ce conţine S.

b) Dacă S este o submulţime liniar independentă care conţine n vectori din V_n, prima parte a teoremei arată că S este o submulţime a unei baze B a lui V_n, dar cum baza B trebuie să aibă n elemente, deducem că $S = B$.

Teorema anterioară arată cum se completează o mulţime de vectori liniar independenţi pâna la o mulţime de vectori liniar independenţi cu un număr maxim de elemente, adică până la o bază în spaţiul vectorial V/K.

Exemplul 3.8. În spaţiul vectorial $V = \mathbb{R}^4$, mulţimea $\{s_1 = (1,1,0,0), s_2 = (0,1,1,0)\}$ este liniar independentă.

Fie $V_0 = L\{s_1, s_2\}$, adică $V_0 = \{\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, deci $V_0 = \{(\alpha, \alpha+\beta, \beta, 0) | \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

Considerăm acum un vector $s_3 \in \mathbb{R}^4 \backslash V_0$, de exemplu, $s_3 = (1,0,1,0)$.

Fie $V_1 = L\{s_1, s_2, s_3\}$, adică $V_1 = \{\alpha(1,1,0,0)_\beta(0,1,1,0) + \gamma(1,0,1,0) | \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$, de unde rezultă $V_1 = \{(\alpha+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma, 0) | \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\} \subset V$.

Vom considera în continuare, vectorul $s_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \backslash V_1$. Deoarece $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4 = 4$, rezultă că $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ este o bază în $\mathbb{R}^4$, bază case s-a obţinut din mulţimea liniar independentă $\{s_1, s_2\}$ prin completarea acesteia cu elementele s_3 şi s_4.

În continuare postulăm două propoziţii foarte utile în rezolvarea aplicaţiilor fără a le demonstra.

Propoziţia 3.9. *Fie S un subspaţiu vectorial în spaţiul V/K, considerat de dimensiune finită n. Atunci $dim_K S \leq dim_K V = n$, iar $dim_K S = n$ atunci şi numai atunci când $S = V$.*

Propoziţia 3.10.(formula dimensiunilor) *Fie S_1, S_2 două subspaţii vectoriale în spaţiul vectorial n-dimensional V. Atunci:*
dim $(S_1 + S_2)$=dim S_1 + dim S_2 - dim $(S_1 \cap S_2)$.

Menţionăm, în încheiere, că există şi spaţii vectoriale pentru a căror generare nu este suficient un sistem finit de generatori, şi care nu admit în consecinţă nici o bază finită. Un astfel de spaţiu vectorial se numeşte infinit dimensional.

4. Coordonatele unui vector într-o bază dată. Cum se schimbă acestea la schimbarea bazei?

Spaţiile vectoriale finit dimensionale beneficiază de pe urma prezenţei bazelor întrucât, în acest caz, există posibilitatea introducerii şi utilizării coordonatelor fără a ieşi din contextul combinaţiilor liniare finite specifice algebrei vectoriale. Precizăm însă că explicitarea teoriei coordonatelor impune în mod necesar ordonarea elementelor unei baze. În cele ce urmează, printr-o bază într-un spaţiu vectorial finit dimensional se va înţelege o mulţime finită, ordonată, liniar independentă, care generează spaţiul respectiv.

Fie V_n/K un spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu.

Teorema 4.1. *Orice vector $v \in V_n$ admite o unică exprimare de forma $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, cu $\alpha_i \in K, i = \overline{1,n}$ (descompunerea lui v după vectorii bazei).*

Demonstraţie. Deoarece $V_n = L(B)$, orice vector $v \in V_n$ poate fi scris ca o combinaţie liniară de vectorii bazei, adică

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in K, i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Presupunem că vectorul v ar admite şi o altă exprimare

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' e_i, \alpha_i' \in K, i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Prin scăderea membru cu membru a relaţiilor (1) şi (2) obţinem $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') e_i$. Întrucât vectorii $\{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sunt liniar independenţi, rezultă $\alpha_i - \alpha_i' = 0$, $i = \overline{1,n}$, adică $\alpha_i = \alpha_i'$, $i = \overline{1,n}$.

Numerele $\alpha_i, i = \overline{1,n}$ se numesc coordonatele vectorului v în raport cu baza B, iar bijecţia $f : V_n \to K^n$, $f(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ se numeşte sistem de coordonate pe V_n.

Exemplul 4.2. În $V = \mathbb{R}^3$, $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)$, adică $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sunt tocmai coordonatele vectorului v în baza canonică $B = \{e_1 = (1,0,0), (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

În continuare, presupunem că avem două baze $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ în V (după cum ştim ele au acelaşi număr de elemente).

Fie acum coordonatele vectorului e'_i în baza B, notate prin $c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{ni} \in K$, adică $e'_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + \ldots + c_{ni}e_n$, pentru $i = \overline{1,n}$.

Se formează astfel o matrice: $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_n(K)$, numită **matricea de trecere de la baza B la baza B'**.

Se poate arăta că matricea de trecere de la baza B' la baza B este C^{-1}. În particular $\det C \neq 0$.

Putem scrie formal: $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot C$ (4.1)

dacă ţinem seama că multiplicarea $c_{ij}e_i$ este multiplicarea vectorului e_i cu scalarul c_{ij}. De aici apare şi procedeul prin care se pot construi toate bazele din V pornind de la o bază dată $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Propoziţia 4.3. *Dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în V şi $C \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ cu $detC \neq 0$, atunci $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ obţinută prin formula (4.1) este o nouă bază şi orice altă bază în V se obţine în acest fel.*

Să vedem cum se schimbă coordonatele vectorilor corespunzătoare unei baze, dacă se schimbă această bază cu o alta.

Fie B şi B' două baze de mai sus şi vectorul $x \in V$. Descompunem vectorul x după cele două baze şi folosim formula (4.1): $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \ldots + x'_ne'_n = x'_1(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n) + x'_2(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n) + \ldots + x'_n(c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n) = (x'_1c_{11} + x'_2c_{12} + \ldots + x'_nc_{1n})e_1 + \ldots + (x'_1c_{n1} + x'_2c_{n2} + \ldots + x'_nc_{nn})e_n$

Cum coordonatele lui x în baza B sunt unic determinate găsim că:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 c_{11} + x'_2 c_{12} + \ldots + x'_n c_{1n} \\ x_2 = x'_1 c_{21} + x'_2 c_{22} + \ldots + x'_n c_{2n} \\ \vdots \\ x_n = x'_1 c_{n1} + x'_2 c_{n2} + \ldots + x'_n c_{nn} \end{cases} \quad \text{sau că}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

unde C este matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Exemplul 4.4. În $\mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ şi $B' = \{e'_1 = (1,1,1), e'_2 = (1,1,0), e'_3 = (1,0,0)\}$ sunt două baze. Matricea de trecere de la baza B la baza B' este chiar matricea obţinută punând pe coloane vectorii e'_1, e'_2, e'_3, deoarece: $\begin{cases} e'_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ e'_2 = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ e'_3 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 \end{cases}$.

Fie acum vectorul $x = (2,0,2)$ care are coordonatele $2,0,2$ în baza B. Folosind formula (4.2), găsim coorodonatele sale în baza B':

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x'_1 + x'_2 + x'_3 = 2 \\ x'_1 + x'_2 = 0 \\ x'_1 = 2 \end{cases}.$$

Sistemul are soluţia $x'_1 = 2, x'_2 = -2, x'_3 = 2$, acestea fiind coordonatele vectorului x în baza B'.

Observăm că putem găsi direct aceste coordonate din egalitatea $x = (2,0,2) = x'_1(1,1,1) + x'_2(1,1,0) + x'_3(1,0,0)$ de unde se ajunge la acelaşi sistem de ecuaţii liniare în x'_1, x'_2, x'_3.

5. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie V/K un spaţiu vectorial, $0_K \in K$ şi $0_V \in V$ elementele neutre faţă de adunare în cele două mulţimi. Atunci:

a) $0_K \cdot v = 0_V$, $\forall x \in V$;
b) $k \cdot 0_V = 0_V$, $\forall k \in K$;
c) $(-1) \cdot v = -v$, $\forall v \in V$;
d) $k \cdot (-v) = -kv$, $\forall k \in K, v \in V$;
e) $k(v - w) = kv - kw$, $\forall k \in K, v, w \in V$;
f) $(k - l)v = kv - lv$, $\forall k, l \in K, v \in V$.

Soluţie:Vom folosi în rezolvare axiomele v1)-v4) din definiţia spaţiului vectorial (Definiţia 1.1) şi subpunctele anterioare acolo unde este cazul.

a) $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$ de unde, prin simplificare, obţinem $0_K v = 0_V$.

b) $k 0_V = k(0_V + 0_V) = k0_V + k0_V$ de unde, prin simplificare, obţinem $k0_V = 0_V$.

c) Din a), $0_K v = 0_V \Rightarrow ((-1)+1)v = 0_V \Rightarrow (-1)v + v = 0_V \Rightarrow (-1)v = -v$.

d) Folosind c), $k(-v) = k((-1)v) = [k(-1)]v = [(-1)k]v = (-k)v = (-1)kv = -(kv)$.

e) $k(v-w) = k[v+(-w)] = kv + k(-w) = kv - kw$.

f) $(k-l)v = [k+(-l)]v = kv + (-l)v = kv - lv$.

2. Arătaţi că mulţimea $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi precizaţi dimesiunea acestuia.

Soluție:Putem arăta că V este spaţiu vectorial prin două metode: verificând axiomelor spaţiului vectorial din Definiţia 1.1 sau arătând că V este subspaţiu vectorial al $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Vom folosi cea de-a doua metodă, aceasta fiind mai rapidă.

Fie $v = a_1 + b_1\sqrt{2} + c_1\sqrt{3}$ şi $w = a_2 + b_2\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ două elemente din V şi $k, l \in \mathbb{Q}$. Atunci: $kv+lw = k(a_1+b_1\sqrt{2}+c_1\sqrt{3})+l(a_2+b_2\sqrt{2}+c_2\sqrt{3}) = (ka_1+la_2)+(kb_1+lb_2)\sqrt{2} + (kc_1 + lc_2)\sqrt{3} \in V$, deoarece $ka_1 + la_2, kb_1 + lb_2, kc_1 + lc_2 \in \mathbb{Q}$, fiind obţinute prin operaţii algebrice cu numere raţionale. Deci V subspaţiu vectorial al $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, adică $V/\mathbb{Q}$ este la rândul său spaţiu vectorial.

În ceea ce priveşte dimensiunea lui V, se verifică uşor că mulţimea $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ reprezintă o bază pentru V. În consecinţă $dimV = 3$.

3. Verificaţi dacă mulţimile $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$ şi $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ reprezintă subspaţii vectoriale în spaţiul $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

Soluție:Observăm că, de exemplu, $x = (7, 3, 1) \in S_1$, dar $2x = (14, 6, 2) \notin S_1$, deoarece $14 - 6 + 2 \neq 5$. În consecinţă S_1 nu este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

Considerăm apoi $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in S_2$ (adică $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ şi $y_1 + 2y_2 - 3y_3 = 0$) şi $k, l \in \mathbb{R}$. Atunci $kx + ly = (kx_1+ly_1, kx_2+ly_2, kx_3+ly_3)$ şi $(kx_1+ly_1)+2(kx_2+ly_2)-3(kx_3+ly_3) = k(x_1+2x_2-3x_3)+l(y_1+2y_2-3y_3) = k\cdot 0+l\cdot 0 = 0$, deci $kx+ly \in S_2$, adică S_2 este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

4. În spaţiul vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ considerăm mulţimea
$S = \{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

a) Scrieţi matricea $E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ ca o combinaţie liniară de elementele lui S;

b) Găsiţi o relaţie între numerele reale a, b, c, d, astfel încât matricea $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ să poată fi scrisă ca o combinaţie liniară de elementele lui S.

Soluţie:a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $E = aA + bB + cC$. Atunci $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de unde rezultă: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b-c \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Din această egalitate obţinem $a = -2, b = 3, c = 3$, deci $E = -2A + 3B + 3C$.

b) Considerăm $k, l, m \in \mathbb{R}$ astfel încât $D = kA + lB + mC \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+l+m & k+l-m \\ -l & -k \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{cases} c = -l \\ d = -k \\ a = k+l+m \\ b = k+l-m \end{cases}$.

Adunând ultimele două relaţii obţinem $a+b = 2(k+l) = -2(c+d)$. Deci, relaţia căutată este $a + b = -2(c + d)$.

5. Fie $B = \{e_1 = (2, 1, 6), e_2 = (3, 2, 5), e_3 = (2, 3, -2)\}$. Verificaţi dacă B este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ şi, în caz afirmativ, determinaţi coordonatele vectorului $v = (6, 5, 10)$ în baza B.

Soluţie:Verificăm liniar independenţa vectorilor din B.
Pentru aceasta, considerăm o combinaţie liniară: $k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = 0$, cu $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Atunci: $k_1(2, 1, 6) + k_2(3, 2, 5) + k_3(2, 3, -2) = 0 \Rightarrow$ $(2k_1 + 3k_2 + 2k_3, k_1 + 2k_2 + 3k_3, 6k_1 + 5k_2 - 2k_3) = 0$, de unde rezultă sistemul de trei ecuaţii, cu trei necunoscute: $\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 6k_1 + 5k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$.

Determinantul matricei sistemului este $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ şi, deoarece sistemul este unul omogen rezultă că acesta are soluţia unică $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. În consecinţă, B este o mulţime liniar independentă cu $cardB = 3$ în spaţiul vectorial de dimensiune 3, $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, adică B este o bază în acest spaţiu.

Pentru a determina coordonatele vectorului v în această bază, considerăm egalitatea $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ fiind coordonatele căutate. Atunci $(6, 5, 10) = v_1(2, 1, 6) + v_2(3, 2, 5) + v_3(2, 3, -2) \Rightarrow$ $(2v_1 + 3v_2 + 2v_3, v_1 + 2v_2 + 3v_3, 6v_1 + 5v_2 - 2v_3) = (6, 5, 10)$, de unde rezultă sistemul: $\begin{cases} 2v_1 + 3v_2 + 2v_3 = 6 \\ v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 5 \\ 6v_1 + 5v_2 - 2v_3 = 10 \end{cases}$.

Prin rezolvarea acestuia obţinem $v_1 = 2$, $v_2 = 0$, $v_3 = 1$, adică tocmai coordonatele lui v în baza B.

6. Arătaţi că dacă $(V_i)_{i=\overline{1,\infty}}$ este un şir crescător de subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K atunci $W = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$ este subspaţiu vectorial al lui V.

Soluţie:$(V_i)_{i=\overline{1,\infty}}$ şir crescător de mulţimi, adică $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$ sau, cu alte cuvinte, dacă $i \leq j$ atunci $V_i \subseteq V_j$.

Fie $v, w \in W$ şi $k, l \in K$. Cum $v, w \in W$ rezultă că există $i, j \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $v \in V_i$ şi $w \in V_j$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea problemei că $i \leq j$. Atunci $V_i \subseteq V_j$ de unde obţinem $v \in V_j$. Deoarece V_j subspaţiu vectorial al lui V rezultă $ku + lw \in V_j \subset W$, deci W subspaţiu vectorial al lui V.

7. În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră sistemele de vectori
$B = \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (1,0,0), e_3 = (1,2,3)\}$ şi
$B' = \{e'_1 = (1,3,3), e'_2 = (2,2,3), e'_3 = (6,7,9)\}$.

a) Arătaţi că B şi B' sunt baze şi determinaţi matricea de trecere de la B la B'.

b) Determinaţi coordonatele vectorului $v = 2e_1 + 5e_2 + 7e_3$ în baza B'.

Soluţie:Verificăm liniar independenţa vectorilor din B.

Pentru aceasta considerăm combinaţia liniară cu scalari reali,
$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,2,3) =$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3, 3\alpha_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obţinem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, de unde B sistem liniar independent în $\mathbb{R}^3$ şi $cardB = dim(\mathbb{R}^3/\mathbb{R}) = 3$, deci B bază.

Remarcăm faptul că, verificarea liniar independenţei unui astfel de sistem de vectori revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii omogen a cărui matrice are pe coloane componentele vectorilor din sistemul considerat. Atunci când această matrice este pătratică putem decide dacă sistemul de vectori este liniar independent în funcţie de valoarea determinantului matricei sistemului. Astfel, dacă valoarea determinantului este diferită de 0 sistemul de vectori este liniar independent (sistemul omogen asociat are doar soluţia banală), iar în caz contrar, sistemul de vectori este liniar dependent.

De exemplu pentru a studia liniar indendenţa lui B' calculăm determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$. Obţinem $\Delta = 3 \neq 0$, de unde deducem că B' liniar independent, deci B' bază.

Pentru a determina matricea de trecere de la B la B' găsim coordonatele vectorilor e'_1, e'_2, e'_3 în baza B.

Considerăm $e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \Rightarrow (1,3,3) = (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{11} + 2a_{31}, 3a_{31}) \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{11} + 2a_{31} = 3 \\ 3a_{31} = 3 \end{cases}$.
Rezolvând acest sistem obţinem $a_{11} = 1, a_{21} = -1, a_{31} = 1$.

Similar, $e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$ şi obţinem din nou un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute cu soluţiile $a_{12} = 0, a_{22} = 1, a_{32} = 1$, iar din egalitatea $e'_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$ obţinem $a_{13} = 1, a_{23} = 2, a_{33} = 3$.

Atunci matricea de trecere de la B la B' este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Considerăm $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ şi $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ coordonatele vectorului x relativ la baza B, respectiv la baza B'. Atunci $X = AX'$, unde A este matricea de trecere de la B la B', determinată anterior.

Din ecuaţia matriceală $X = AX'$ obţinem $X' = A^{-1}X$.

Matricea A este inversabilă, deoarece $det(A) = -1 \neq 0$. Calculând, obţinem $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Atunci $X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. În consecinţă coordonatele vectorului x în baza B' sunt $(0,1,2)$, deci $x = e'_2 + 2e'_3$.

8. În spaţiul vectorial real al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi reali, $\mathbb{R}[X]$, considerăm submulţimile $S_1 = \{p \in \mathbb{R}[X] | p(1) = 0\}$ şi $S_2 = \{p \in \mathbb{R}[X] | p(1) = 5\}$. Verificaţi dacă acestea sunt subspaţii vectoriale în spaţiul $\mathbb{R}[X]$.

Soluție:

Fie $p, q \in S_1$, adică $p(1) = 0$ şi $q(1) = 0$, şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Verificăm dacă $\alpha p + \beta q \in S_1$. Pentru aceasta calculăm $(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. În consecinţă, S_1 este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}$.

Fie acum $p, q \in S_2$, adică $p(1) = 5$ şi $q(1) = 5$, şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Verificăm dacă $\alpha p + \beta q \in S_2$. Pentru aceasta calculăm $(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha \cdot 5 + \beta \cdot 5$. De exemplu, pentru $\alpha = 1$ şi $\beta = 2$ obţinem $(\alpha p + \beta q)(1) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 15 \neq 5$, deci $p + 2q \notin S_2$. În consecinţă, S_2 nu este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}$.

9. a) Fie V', V'' spaţii vectoriale în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, cu $dimV' = 1$, $dimV'' = 2$ şi $V' \nsubseteq V''$. Arătaţi că $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

b) Fie $V' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y-z-t=0\}$ şi $V'' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-y-z+t=0\}$ subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$. Arătaţi că $V'+V'' = \mathbb{R}^4$, dar suma nu este una directă.

Soluţie:a) Folosim relaţia (1) $dim(V'+V'') = dim(V') + dim(V'') - dim(V' \cap V'')$. Adăugăm acesteia observaţia că:
$dim(V'+V'') > max\{dim(V'), dim(V'')\}$, pentru $V' \nsubseteq V''$.
Atunci $dim(V'+V'') > 2$, şi deoarece $V'+V''$ este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^3$ care are dimensiunea 3, rezultă că $dim(V'+V'') = 3$, adică $V'+V'' = \mathbb{R}^3$. În plus, din (1) rezultă şi că $dim(V' \cap V'') = 0$, deci $V' \cap V'' = \{0\}$. În consecinţă $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

b) Dacă privim relaţia $x+y-z-t=0$, care caracterizează elementele din V' ca o ecuaţie cu patru necunoscute, putem scrie $V' = \{(-y+z+t, y, z, t) | y, z, t \in \mathbb{R}\}$. Evident $dim(V') = 3$.

Similar $V'' = \{(y+z-t, y, z, t) | y, z, t \in \mathbb{R}\}$ şi $dim(V'') = 3$.

Pe de altă parte $V' \cap V'' = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \}$.

Adunând cele două ecuaţiile ale sistemului rezultat obţinem $2x-2z = 0$, de unde $x = z$. Atunci $y = t$ şi deci $V' \cap V'' = \{(x,y,x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ subspaţiu al spaţiului $\mathbb{R}^4$ cu $dim(V' \cap V'') = 2$.

Atunci, folosind relaţia $dim(V'+V'') = dim(V') + dim(V'') - dim(V' \cap V'')$ obţinem $dim(V'+V'') = 3+3-2 = 4$ şi $V'+V''$ fiind un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^4$ rezultă că $V'+V'' = \mathbb{R}^4$. Dar, din $dim(V' \cap V'') = 2$ rezultă $V' \cap V'' \neq \{0\}$, deci suma nu este una directă.

6. PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că, dacă V_1 şi V_2 sunt spaţii vectoriale peste corpul K, atunci $V = V_1 \times V_2$ este spaţiu vectorial peste K împreună cu operaţiile:

$$(x+y) + (x'+y') = (x+x', y+y'), \forall (x,y), (x',y') \in V, \text{ şi}$$

$$k(x,y) = (kx, ky), \forall k \in K, (x,y) \in V.$$

2. Fie S un sistem de vectori în spaţiul vectorial V/K. Arătaţi că:

a) dacă S este liniar independent, atunci orice subsistem $S' \subset S$ este liniar independent;

b) dacă S este liniar dependent, atunci orice mulţime de vectori $S'' \subset V$, cu $S \subset S''$ este liniar dependentă;

c) dacă $0 \in S$ atunci S este liniar dependent;

d) dacă S este liniar dependent atunci $\exists v \in S$ astfel încât v se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori din S.

3. a) Arătaţi că dacă K este un corp comutativ iar L este un subcorp al lui K, atunci K poate fi organizat ca un L spaţiu vectorial.

b) Dacă, în plus, L este subcorp propriu al lui K, atunci L nu poate fi organizat ca spaţiu vectorial peste K.

4. a) Arătaţi că $V_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$ şi $V_2 = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$ sunt subspaţii vectoriale ale $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$, dar $V_1 \cup V_2$ nu este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$.

b) Fie $V' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x - 2y = 0\}$ şi $V'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y = 0\}$ subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^2$. Arătaţi că $V' \oplus V'' = \mathbb{R}^2$.

5. Pe $\mathbb{R}_+^*$ considerăm legile de compoziţie:
$\cdot : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \to x \cdot y$ ca lege internă şi
$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $(\alpha, x) \to x^\alpha$ ca operaţie externă.
Arătaţi că $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *)$ este spaţiu vectorial real.

6. Arătaţi că $S = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a-c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} |a,b,c \in \mathbb{R}\}$ este subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial real $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi preciazaţi o bază a lui S.

7. În spaţiul vectorial real al funcţiilor continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $C_{\mathbb{R}}([a,b])$, considerăm submulţimile:

$S_1 = \{f \in C_{\mathbb{R}}([a,b]) | \int\limits_a^b f(x)dx = 0\}$ şi

$S_2 = \{f \in C_{\mathbb{R}}([a,b]) | \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2})\}$. Verificaţi dacă acestea sunt subspaţii vectoriale în $C_{\mathbb{R}}([a,b])$.

8. Studiaţi liniar independenţa sistemelor de vectori:

a) $S = \{v_1 = (3,1,2), v_2 = (-1,0,1), v_3 = (0,2,3)\}$ în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

b) $S = \{f(t) = e^{2t}, g(t) = t^2, h(t) = t\}$ în spaţiul vectorial real al funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

9. Daţi exemplu de:

a) un spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$;

b) un spaţiu vectorial infinit dimensional;

c) un spaţiu vectorial pentru care mulţimea $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ reprezintă o bază.

10. Să se arate că $B_1 = \{1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3\}$ şi $B_2 = \{1+X^2, X+X^2, 2X^2, X^2+X^3\}$ sunt baze în spaţiul vectorial real al polinoamelor cu coeficienţi reali în nedeterminata X de grad cel mult 3. Să se găsească coordonatele polinomului $p(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$ în bazele B_1, respectiv B_2.

CAPITOLUL 2

Vectori liberi

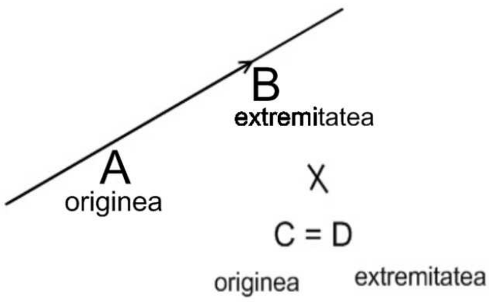
1. Segmente orientate. Vectori liberi

Fie $\mathcal{E}_3$ spaţiul tridimensional al geometriei elementare; elementele acestui spaţiu le vom numi puncte. Orice două puncte distincte vor determina o unică dreaptă.

Definiţia 1.1. Se numeşte **segment orientat**, orice pereche ordonată $(A, B) \in \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$. Punctele A şi B se vor numi originea şi respectiv, extremitatea segmentului. Segmentul orientat cu aceste extremităţi se notează şi cu $\overrightarrow{AB}$.

Dacă punctele A şi B sunt distincte, atunci acestea determină o dreaptă numită **dreapta suport** a segmentului şi notată AB.

Dacă originea şi extremitatea unui segment orientat coincid se obţine **segmentul orientat nul**, notat $\overrightarrow{0}$.



Observaţii 1. Dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată.

2. Pentru orice punct $A \in \mathcal{E}_3$, $(A, A) = \overrightarrow{0}$.

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$

Definiţia 1.2. Două drepte din $\mathcal{E}_3$ au aceeaşi direcţie dacă sunt paralele sau coincid.

Teorema 1.3. *Relaţia binară "aceeaşi direcţie" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea dreptelor din spaţiu.*

Demonstraţia se rezumă la verificarea proprietăţilor unei relaţii de echivalenţă (reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate) pentru relaţia "aceeaşi direcţie" şi o lăsăm cititorului.

Clasa de echivalenţă a unei drepte, rezultată prin factorizare pe mulţimea dreptelor din spaţiu în raport cu relaţia de "aceeaşi direcţie", se va numi **direcţia** dreptei respective.

Astfel o "direcţie" este o familie de drepte paralele, orice dreaptă din familie fiind un reprezentant al acesteia.

Definiţia 1.4. Două segmente orientate nenule au aceeşi direcţie dacă dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

Teorema 1.5. *Relaţia binară "aceeaşi direcţie" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate nenule.*

Demonstraţia se rezumă din nou la verificarea proprietăţilor relaţiei de echivalenţă.

Observaţie. Pentru segmente orientate nenule, direcţiile sunt clasele de echivalenţă ale dreptelor suport, relativ la relaţia "aceeaşi direcţie" pentru drepte.

Observaţii. 1. Oricare două segmente orientate nule au aceeaşi direcţie.

2. Direcţia unui segment orientat nul este nedeterminată.

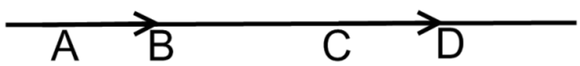
Pe o dreaptă se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurgere notate prin săgeţi.

Definiţia 1.6. Se numeşte **dreaptă orientată** o dreaptă pentru care s-a stabilit un sens de parcurgere.

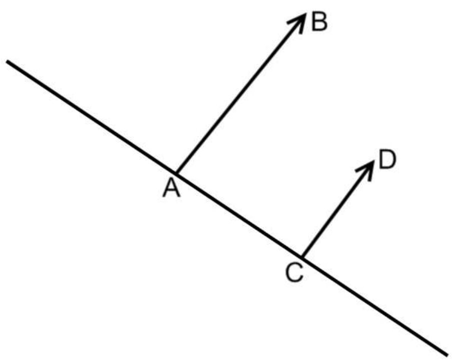
Observaţia 1.7. Orice segment orientat $\overrightarrow{AB}$ determină un sens de parcurgere al dreptei suport AB şi anume: sensul de la A către B.

Pentru segmente orientate cu aceeaşi direcţie, putem defini relaţia "acelaşi sens".

Definiţia 1.8. a) Două segmente orientate nenule cu aceeaşi dreaptă suport au acelaşi sens dacă sensurile determinate de ele pe dreapta suport coincid.



b) Două segmente orientate nenule paralele au acelaşi sens dacă, în planul determinat de dreptele suport, extremităţile lor se află în acelaşi semiplan faţă de dreapta care uneşte originile segmentelor.



Teorema 1.9. *Relaţia binară "acelaşi sens" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate nenule cu aceeaşi direcţie.*

Observaţii. 1. Relativ la relaţia “acelaşi sens” pe mulţimea segmentelor orientate cu aceeaşi direcţie, există doar două clase de echivalenţă: sensul iniţial dat de un segment orientat nenul şi opusul acestuia. O direcţie împreună cu unul din cele două sensuri posibile se numeşte **direcţie orientată**.

2. Sensul unui segment orientat nul este nedeterminat.

Definiţia 1.10. Se numeşte **lungimea (norma, modulul)** unui segment orientat $\overrightarrow{AB}$, distanţa de la punctul A la punctul B, adică lungimea segementului neorientat $[AB]$.

Vom nota lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Observaţie. Lungimea unui segment orientat este un număr real pozitiv. Un segment orientat are lungimea zero dacă şi numai dacă este segmentul nul.

Definiţia 1.11. Două segmente orientate au aceeaşi lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare lor sunt congruente.

Teorema 1.12. *Relaţia binară “aceeaşi lungime” este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate din spaţiu.*

DEMONSTRAŢIE. Din Definiţia 1.11. şi faptul că relaţia de congruenţă a segmentelor neorientate este o relaţie de echivalenţă rezultă concluzia.

Definiţie 1.13. Două segmente orientate nenule se numesc **echipolente** dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Vom nota faptul că $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu $\overrightarrow{CD}$ prin $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Teorema 1.14. Relaţia binară de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea segmentelor orientate nenule.

DEMONSTRAŢIE. În condiţiile Definiţiei 1.13, concluzia rezultă din Teoremele 1.5, 1.8, 1.12.

În plus, relaţia se poate extinde la mulţimea tuturor segmentelor orientate din spaţiu, convenind că oricare două segemente orientate nule sunt echipolente. Relaţia extinsă rămâne relaţie de echivalenţă.

Definiţie 1.15. Clasele de echivalenţă ale segmentelor orientate relativ la relaţia de echipolenţă se numesc **vectori liberi**.

Un vector liber va fi caracterizat deci de direcţie, sens şi lungime, acestea fiind direcţia, sensul şi lungimea comună a segmentelor orientate reprezentative.

Vectorii liberi se notează, de obicei, cu litere mici cu bară deasupra: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$, iar în desen se reprezintă printr-un segment orientat ales ca reprezentant. Astfel vectorii liberi se mai notează şi prin $\overline{AB}$, $\overline{CD}, \ldots$., şi putem spune că $\overrightarrow{AB} \in \overline{AB}$.

Vectorul liber corespunzător clasei segmentelor orientate nule se numeşte vectorul nul şi se notează cu $\overline{0}$.

Lungimea vectorului liber $\overline{a}$ se va nota prin $\|\overline{a}\|$.

Mulţime vectorilor liberi din spaţiul tridimensional o vom nota cu V_3.

Definiţia 1.16. Se numeşte **versor** orice vector liber de lungime 1. Un versor se notează, de obicei, cu $\overline{e}$. (dar şi cu $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$).

Definiţia 1.17. Doi vectori liberi care au aceeaşi direcţie se numesc **coliniari**.

Doi vectori coliniari care au aceeaşi lungime şi sensuri opuse se numesc **vectori opuşi**.

Dacă $\overline{a}$ este un vector liber atunci opusul acestuia se noteaza $-\overline{a}$.

Doi vectori liberi sunt egali dacă reprezentanţii lor sunt echipolenţi.

Propoziţie 1.18. *Mulţimile $\mathcal{E}_3$ şi V_3 se află într-o corespondenţă bijectivă, unic determinată de fixarea unui punct $O \in \mathcal{E}_3$.*

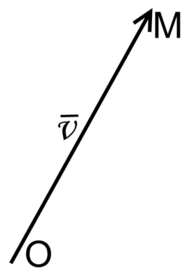
Demonstraţie. Fie $O \in \mathcal{E}_3$ un punct fixat numit origine.

Oricărui punct $M \in \mathcal{E}_3$ îi corespunde un unic vector liber $\overline{v} \in V_3$, segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ fiind un reprezentant al acestuia.

Reciproc, oricărui vector liber $\overline{v} \in V_3$ îi corespunde un unic punct $M \in \mathcal{E}_3$ astfel încât $\overrightarrow{OM}$ să fie un reprezentant al lui $\overline{v}$.

În consecinţă, corespondenţa bijectivă între mulţimile $\mathcal{E}_3$ şi V_3 este pusă în evidenţă.

Vectorul liber $\overline{v} = \overline{OM}$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului M relativ la originea O.



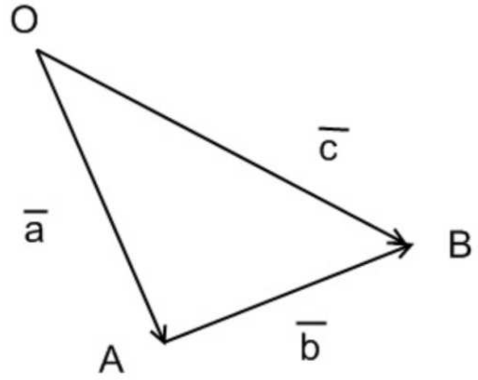
2. Operaţii cu vectori liberi

În acest paragraf vom introduce pe mulţimea vectorilor liberi din spaţiu V_3 două operaţii: adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorilor cu scalari reali şi vom arăta că V_3 este un spaţiu vectorial real în raport cu aceste operaţii.

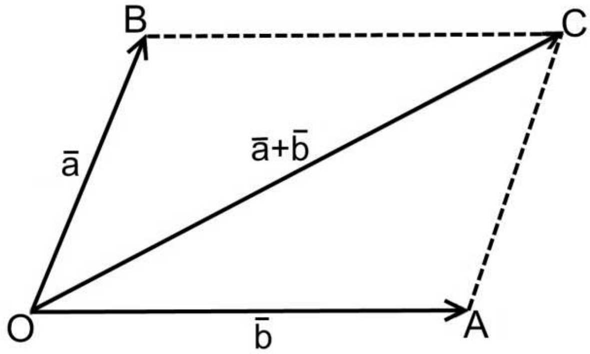
2.1. Adunarea.

Definiţia 2.1. Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori liberi. Pentru a aduna cei doi vectori putem utiliza una din următoarele două reguli echivalente:

1) **Regula triunghiului**: dacă $\overrightarrow{OA}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{b}$, vectorul liber $\overline{c}$ având ca reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$ se numeşte suma vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. În aceste condiţii putem scrie: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ sau $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.



2) **Regula paralelogramului**: dacă $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$ astfel încât segmentele orientate $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ determină un paralelogram, atunci diagonala $\overrightarrow{OC}$ a acestui paralelogram este un reprezentant al vectorului liber $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, numit suma vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.



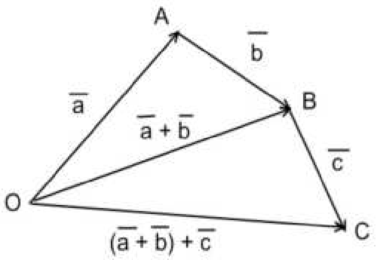
Observaţia 2.2. Adunarea vectorilor liberi $+ : V_3 \times V_3 \to V_3$, care asociază fiecărei perechi de vectori liberi $(\overline{a}, \overline{b})$, vectorul liber $\overline{a} + \overline{b}$, este lege de compoziţie internă pe V_3. Se poate arăta că vectorul liber $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ nu depinde de alegerea punctului O, deci legea este bine definită.

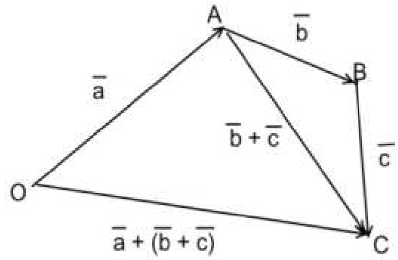
Teorema 2.3. $(V_3, +)$ *este grup comutativ.*

Demonstraţie. Vom demonstra axiomele grupului comutativ folosind definiţia de mai sus şi reprezentări geometrice sugestive.

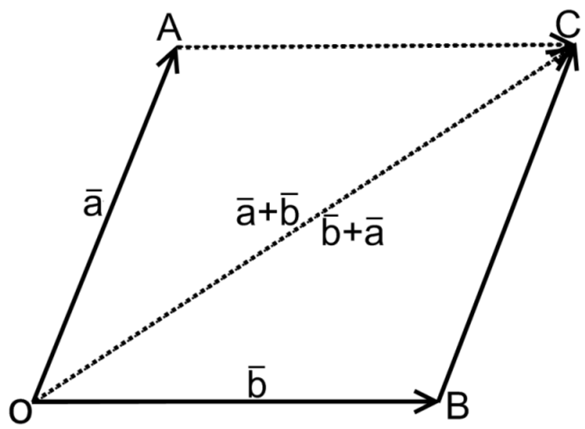
1) asociativitatea: $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$.

Alegem $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, respectiv $\overrightarrow{BC}$ ca reprezentanţi ai vectorilor liberi $\overline{a}$, $\overline{b}$, respectiv $\overline{c}$. Atunci $\overrightarrow{OC}$ este reprezentant atât pentru $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ cât şi pentru $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ aşa cum reiese şi din figurile:





2) comutativitatea: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3$. Alegând $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$ comutativitatea reiese din reprezentarea geometrică:



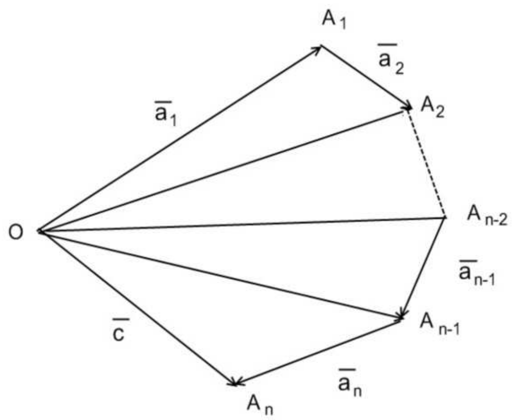
Din regula paralelogramului, $\overrightarrow{OC}$ este reprezentant pentru $\overline{a}+\overline{b}$, iar din regula triunghiului (din triunghiul OBC, ţinând cont de faptul că $\overrightarrow{BC} \in \overline{a}$), $\overrightarrow{OC}$ este un reprezentant pentru $\overline{b}+\overline{a}$.

3) Evident, $\overline{0}$ este element neutru pentru adunarea vectorilor, adică $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}, \forall \overline{a} \in V_3$.

4) Evident, orice element $\overline{a} \in V_3$ admite simetric, şi anume opusul său, $(-\overline{a}) \in V_3$, adică $\overline{a}+(-\overline{a})=(-\overline{a}+\overline{a})=\overline{0}, \forall \overline{a} \in V_3$.

Asociativitatea adunării vectorilor liberi permite generalizarea regulii triunghiului, pentru $n \geq 3$ vectori, obţinându-se **regula poligonului strâmb**.

Definiţia 2.4. Dacă $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ sunt $n \geq 3$ vectori liberi şi $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{a_1}, \overrightarrow{A_1A_2} \in a_2, \ldots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \in \overline{a_n}$, atunci suma vectorilor $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ este vectorul liber $\overline{c}$ al cărui reprezentant este $\overrightarrow{OA_n}$. În aceste condiţii, scriem $\overline{c}=\overline{a_1}+\overline{a_2}+\ldots+\overline{a_n}$ sau $\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.



Definim în cele ce urmează diferenţa vectorilor liberi ca operaţie derivată din adunare.

În grupul comutativ $(V_3, +)$, ecuaţia $\overline{b} + \overline{x} = \overline{a}$ are soluţia unică $\overline{x} = \overline{a} + (-\overline{b})$, pe care o notăm $\overline{a} - \overline{b}$ şi o numim diferenţa dintre vectorul $\overline{a}$ şi vectorul $\overline{b}$.

Astfel, dacă $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{OB} \in \overline{b}$, atunci $\overrightarrow{BA}$ este reprezentant al vectorului liber $\overline{a} - \overline{b}$.

2.1. Înmulţirea cu scalari.

Fie V_3 grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi din spaţiu.

Vom introduce o lege de compoziţie externă, adică o funcţie de la $\mathbb{R} \times V_3$ la V_3 numită **înmulţirea unui vector liber cu un scalar**, definită astfel:

Definiţia 2.5. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\overline{a} \in V$. Atunci:

a) $\alpha \cdot \overline{a} = \overline{0}$, dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$;

b) $\alpha \cdot \overline{a}$ este un vector de aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu $\overline{a}$ şi cu lungimea $\alpha \|\overline{a}\|$, dacă $\alpha > 0$;

c) $\alpha \cdot \overline{a}$ este un vector de aceeaşi direcţie dar de sens opus lui $\overline{a}$ şi cu lungimea $-\alpha \|\overline{a}\|$, dacă $\alpha < 0$.

Evident, în toate aceste situaţii $\alpha \cdot \overline{a}$ este coliniar cu $\overline{a}$ şi $\|\alpha \overline{a}\| = |\alpha| \|\overline{a}\|$.

Teorema 2.6. $(V_3, +, \cdot)$ *este spaţiu vectorial real.*

Demonstraţie. Am arătat în Teorema 2.3 că $(V_3, +)$ este grup comutativ. Justificăm în cele ce urmează celelalte axiome din definiţia spaţiului vectorial.

1) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}, \forall \overline{a} \in V_3$ este evidentă.

2) $(\alpha\beta)\overline{a} = \alpha(\beta\overline{a}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V_3$.

Se demonstrează imediat folosind definiţia de mai sus şi considerând situaţiile corespunzătoare semnelor scalarilor α şi β.

3) $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V_3$.

Este din nou imediată cu aceleaşi considerente ca mai sus.

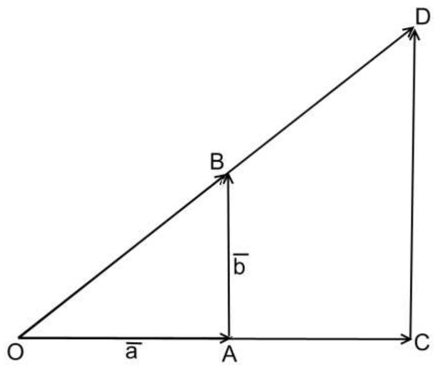
4) $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}, \forall\alpha \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V_3$.

Dacă $\alpha = 0$ egalitatea este evidentă.

Vom face demonstraţia în cazul $\alpha > 0$, cazul $\alpha < 0$ fiind similar.

Fie $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$ şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{b}$. Atunci $\overrightarrow{OB}$ este reprezentant pentru vectorul sumă $\overline{a}+\overline{b}$.

Considerăm $\overrightarrow{OC}$ reprezentant pentru $\alpha\overline{a}$ şi $\overline{OD}$ reprezentant pentru $\alpha(\overline{a}+\overline{b})$. Din reprezentarea geometrică:



rezultă asemănarea triunghiurilor OAB şi OCD (au un unghi comun, iar laturile acestuia sunt proporţionale). Atunci $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$ şi $\overline{CD} = \alpha\overline{AB}$, adică $\overline{CD}$ este reprezentant pentru $\alpha\overline{b}$. În consecinţă, $\overrightarrow{OD}$ este reprezentant şi pentru $\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$ şi astfel, demonstraţia este încheiată.

3. Coliniaritate şi coplanaritate

În acest paragraf vom particulariza noţiunile de subspaţiu vectorial, dependenţă şi independenţă liniară, bază, dimensiune şi coordonate, pentru spaţiul vectorial real al vectorilor liberi din spaţiu V_3.

Observația 3.1. Oricărui vector $\overline{a} \neq \overline{0}$ i se poate asocia un versor $\overline{a_0} = \dfrac{1}{||\overline{a}||}\overline{a}$, numit versorul lui $\overline{a}$.

Într-adevăr $||\overline{a_0}|| = ||\dfrac{1}{||a||}\overline{a}|| = \dfrac{1}{||a||}||a|| = 1$, adică a_0 este versor. În aceste condiţii putem scrie $\overline{a} = ||a||\overline{a_0}$.

Teorema 3.2. *Fie $a, b \in V_3$. Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari, $\overline{b} \neq \overline{0}$, atunci există un unic scalar real t astfel încât $\overline{b} = t\overline{a}$.*

Demonstraţie.

În baza observaţiei anterioare putem scrie $\overline{a} = ||\overline{a}||\overline{a_0}, \overline{b} = ||\overline{b}||\overline{b_0}$, unde $\overline{a_0}$ şi $\overline{b_0}$ sunt versorii asociaţi vectorilor liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Evident, aceşti versori au aceeaşi dreaptă suport, deci pot fi egali sau opuşi.

Dacă $\overline{a_0} = \overline{b_0}$ atunci $\overline{b} = ||\overline{b}||\overline{b_0} = ||\overline{b}||\overline{a_0} = ||\overline{b}||\frac{1}{||\overline{a}||}\overline{a} = \frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||}\overline{a}$, deci există $t = \frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overline{b} = t\overline{a}$.

Dacă $\overline{a_0} = -\overline{b_0}$ atunci $\overline{b} = ||\overline{b}||\overline{b_0} = -||\overline{b}||\overline{a_0} = -||\overline{b}||\frac{1}{||\overline{a}||}\overline{a} = -\frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||}\overline{a}$, deci există $t = -\frac{||\overline{b}||}{||\overline{a}||} \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overline{b} = t\overline{a}$.

Consecința 3.3. Mulţimea tuturor vectorilor coliniari cu un vector nenul fixat $\overline{a}$, $V_1 = \{\overline{b} \in V_3 | \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{b} = t\overline{a}\}$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1 în V_3.

Demonstraţie. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\overline{b_1}, \overline{b_2}$. Atunci $\alpha\overline{b_1} + \beta\overline{b_2} \in V_1$ deoarece:

$\overline{b_1} \in V_1 \Rightarrow \exists t_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{b_1} = t_1\overline{a}$

$\overline{b_2} \in V_1 \Rightarrow \exists t_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{b_2} = t_2\overline{a}$

Deci $\alpha\overline{b_1} + \beta\overline{b_2} = \underbrace{(\alpha t_1 + \beta t_2)}_{\in\mathbb{R}}\overline{a} \in V_1$.

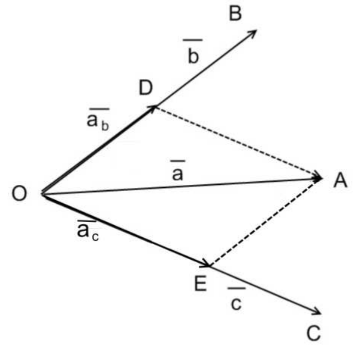
Evident $\{\overline{a}\}$ generează V_1, deci $dim(V_1) = 1$.

Să observă şi că, dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt doi vectori liberi coliniari, adică există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{b} = t\overline{a}$, atunci $\overline{b} - t\overline{a} = \overline{0}$, deci vectorii $\overline{a}$ sunt liniar dependenţi. Astfel, coliniaritatea a doi vectori liberi este echivalentă cu dependenţa liniară a acestora.

Teorema 3.4. *Vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ sunt coplanari dacă şi numai dacă sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Dacă cel puţin unul dintre cei trei vectori este nul echivalenţa este trivială, aşa că în continuare îi vom presupune nenuli.

"$\Rightarrow$": Presupunem că $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari. Atunci $\overline{a}$ poate fi descompus ca sumă de doi vectori coliniari cu $\overline{b}$, respectiv $\overline{c}$. Descompunerea se realizează alegând reprezentanţii $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}, \overrightarrow{OB} \in \overline{b}, \overrightarrow{OC} \in \overline{c}$ şi construind paralele la OC şi OB prin punctul A, care intersectează OB în D, respectiv OC în E. Segmentele orientate $\overrightarrow{OD}$ şi $\overrightarrow{OE}$ sunt reprezentanţi pentru cei doi vectori din descompunerea lui $\overline{a}$ pe care îi notăm cu $\overline{a_b}$, respectiv $\overline{a_c}$. Atunci $\overline{a} = \overline{a_b} + \overline{a_c}$.



Deoarece $\overline{b}$ şi $\overline{a_b}$ sunt coliniari din Teorema 3.1, rezultă că există $t_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{a_b} = t_1\overline{b}$. Similar, există $t_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{a_c} = t_1\overline{c}$. Atunci $\overline{a} = t_1\overline{b} + t_2\overline{c} \Rightarrow \overline{a} - t_1\overline{b} - t_2\overline{c} = \overline{0}$, deci $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt liniar dependenţi.

"$\Leftarrow$": Presupunem $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ liniar dependendeţi, adică există $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli, astfel încât $t_1\overline{a} + t_2\overline{b} + t_3\overline{c} = \overline{0}$.

Presupunem $t_1 \neq 0$. Atunci $\overline{a} = -\frac{t_2}{t_1}\overline{b} - \frac{t_3}{t_1}\overline{c}$. De aici rezultă că $\overline{a}$ este coliniar cu vectorul sumă al vectorilor $\overline{b_1} = -\frac{t_2}{t_1}\overline{b}$ şi $\overline{c_1} = \frac{t_3}{t_1}\overline{c}$. Dar $\overline{b_1}$ coliniar cu $\overline{b}$ şi $\overline{c_1}$ coliniar cu $\overline{c}$, deci $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ coplanari.

Consecința 3.5. Mulţimea tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori necoliniari $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, $V_2 = \{\overline{c} \in V_3 | \exists s, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{c} = s\overline{a} + t\overline{b}\}$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2 în V_3.

Demonstraţie. Demonstraţia este asemănătoare cu cea a Consecinţei 3.3, fiind o simplă verificare a definiţiei subspaţiului vectorial.

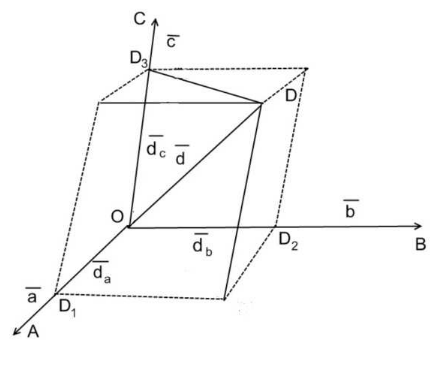
Evident $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ constituie un sistem de generatori pentru V_2 şi fiind necoliniari sunt liniar independenţi, deci formează o bază pentru V_2 şi atunci $dim(V_2) = 2$.

Deducem din cele precizate anterior şi că oricare trei vectori liberi necoplanari sunt liniar independenţi.

Teorema 3.6. *Dimensiunea spaţiului vectorial al vectorilor liberi V_3 este egală cu 3.*

Demonstraţie. Arătăm că trei vectori necoplanari $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ aleşi aleator formează o bază pentru V_3.

Fiind necoplanari cei trei vectori sunt liniar independenţi deci rămâne de demonstrat faptul că aceştia constituie un sistem de generatori pentru V_3. Pentru aceasta, considerăm un alt vector liber $\overline{d} \in V_3$ şi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$, reprezentanţi ai vectorilor $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, respectiv $\overline{d}$. Atunci vectorul $\overline{d}$ se poate descompune după direcţiile vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$ ca $\overline{d} = \overline{d_a} + \overline{d_b} + \overline{d_c}$. Descompunerea se realizează construind prin D plane paralele cu planele $(BOC), (COA), (AOB)$ care intersectează dreptele OC, OA, respectiv OB în punctele D_1, D_2, D_3. Atunci $\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{OD_2}, \overrightarrow{OD_3}$ sunt reprezentanţi pentru $\overline{d_a}, \overline{d_b}, \overline{d_c}$.



Deoarece $\overline{d_a}$ coliniar cu $\overline{a}$, $\overline{d_b}$ coliniar cu $\overline{b}$ şi $\overline{d_c}$ coliniar cu $\overline{c}$, rezultă că există $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{d_a} = d_1\overline{a}$, $\overline{d_b} = d_2\overline{b}$ şi $\overline{d_c} = d_3\overline{c}$. Atunci $\overline{d} = d_1\overline{a} + d_2\overline{b} + d_3\overline{c}$ şi demonstraţia este încheiată.

Sistemul de scalari (d_1, d_2, d_3) din demonstraţia anterioară reprezintă **coordonatele vectorului** $\overline{d}$ în baza $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. În aceste condiţii se folosesc scrierile $\overline{d} = (d_1, d_2, d_3)$ şi $\overline{d}(d_1, d_2, d_3)$.

Baza canonică în V_3 este formată din trei versori $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ care au proprietatea că dreptele suport ale reprezentanţilor acestora sunt perpendiculare două câte două. Coordonatele unui vector liber în baza canonică se numesc **coordonate euclidiene**.

Considerăm, în cele din urmă, vectorii liberi $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ şi $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, coordonatele acestora fiind exprimate într-o bază oarecare din V_3. Atunci:

1) $\overline{u} = \overline{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$;

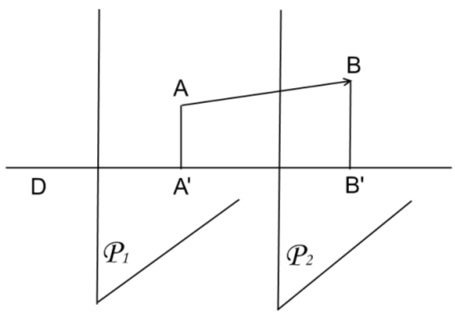
2) $\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$;

3) $\alpha\overline{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$;

4) $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă coordonatele lor sunt proporţionale.

4. Proiecţii ortogonale ale unui vector liber

Fie D o dreaptă şi $\overline{a} \in V_3$ un vector liber. Considerăm $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$ şi construim prin A şi B, planele $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ perpendiculare pe dreapta D. Notăm $\{A'\} = D \cap \mathcal{P}_1$ şi $\{B'\} = D \cap \mathcal{P}_2$.



Se poate arăta că vectorul liber $\overline{a'}$, având ca reprezentant segementul orientat $\overrightarrow{A'B'}$ nu depinde de reprezentantul ales pentru $\overline{a}$.

Vectorul liber $\overline{a'}$ se numeşte **proiecţia ortogonală** a vectorului $\overline{a}$ pe dreapta D şi se notează $\pi_D(\overline{a})$.

Se poate demonstra că dacă D_1 şi D_2 sunt două drepte paralele, iar $\overline{a}$ este un vector liber atunci $\pi_{D_1}(\overline{a}) = \pi_{D_2}(\overline{a})$. În consecinţă proiecţia ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă depinde numai de direcţia acesteia. Dacă notăm cu $\overline{u}$ vectorul liber care dă direcţia unei drepte

D, putem vorbi despre proiecţia ortogonală a lui $\overline{a}$ pe $\overline{u}$ pe care o notăm $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$.

Prezentăm proprietăţile de aditivitate şi omogenitate ale acestei proiecţii în propoziţia următoare, demonstraţia rămânând cititorului.

Propoziţia 4.1. *Dacă $\overline{u} \in V_3 \backslash \{\overline{0}\}$ este un vector liber atunci:*

a) $\pi_{\overline{u}}(\overline{a}+\overline{b}) = \pi_{\overline{u}}(\overline{a}) + \pi_{\overline{u}}(\overline{b}), \forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ *şi* $t \in \mathbb{R}$;

b) $\pi_{\overline{u}}(t\overline{a}) = t\pi_{\overline{u}}(\overline{a}), \forall \overline{a} \in V_3, t \in \mathbb{R}$.

Dacă $\overline{u_0}$ este versorul asociat lui $\overline{u}$, atunci pentru orice $\overline{a} \in V_3$, $\pi_{\overline{u}}(\overline{a})$ este coliniar cu $\overline{u_0}$, deci există un scalar real numit **mărimea algebrică a proiecţiei** şi notat $pr_{\overline{u}}\overline{a}$, astfel încât $\pi_{\overline{u}}(\overline{a}) = (pr_{\overline{u}}\overline{a})\overline{u_0}$.

Propoziţia 4.1 conduce la următorul corolar ce pune în evidenţă proprietăţi ale mărimii algebrice a proiecţiei.

Corolarul 4.2. Dacă $\overline{u} \in V_3 \backslash \{0\}$, atunci:

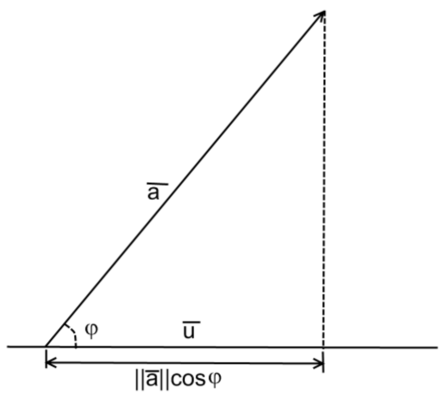
a) $pr_{\overline{u}}(\overline{a}+\overline{b}) = pr_{\overline{u}}(\overline{a}) + pr_{\overline{u}}(\overline{b}), \forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3$;

b) $pr_{\overline{u}}(t\overline{a}) = tpr_{\overline{u}}(\overline{a}), \forall t \in \mathbb{R}, \overline{a} \in V_3$.

Pentru a determina valoarea mărimii proiecţiei introducem şi noţiunea de unghi a doi vectori.

Definiţia 4.3. Se numeşte unghiul dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de doi reprezentanţi cu originea comună a celor doi vectori.

Dacă unghiul a doi vectori este de $90°$ atunci aceştia se numesc ortogonali.



În aceste condiţii, $pr_{\overline{u}}\overline{a} = \|\overline{a}\| \cos \varphi$.

Încheiem prin a preciza ce înţelegem prin proiecţia unui vector pe un plan.

Fie $(\mathcal{P})$ un plan şi $\overline{a}$ un vector liber pentru care alegem un reprezentant $\overrightarrow{AB}$. Ducem din A şi B perpendiculare pe planul $(\mathcal{P})$ şi notăm punctele de intersecţie ale acestor perpendiculare cu planul $(\mathcal{P})$ cu A' şi B'. Vectorul liber reprezentat de $\overrightarrow{A'B'}$ se numeşte proiecţia ortogonală a vectorului $\overline{a}$ pe planul $(\mathcal{P})$. Aceasta se notează cu $\pi_{\mathcal{P}}(\overline{a})$.

Nu insistăm asupra proprietăţilor acestui tip de proieçtie, rezumându-ne la a preciza că proiecţia nu depinde de reprezentantul ales pentru $\overline{a}$ şi că un vector liber are aceeaşi proieţie pe două plane paralele.

5. Produs scalar

Considerăm V_3 spaţiul vectorilor liberi.

Definiţia 6.1. Dacă $\overline{a}, \overline{b} \in V_3$ şi $\varphi \in [0, \pi]$ este unghiul dintre vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, atunci produsul scalar al acestora se notează cu $< \overline{a}, \overline{b} >$ ($\overline{a} \cdot \overline{b}$, sau $(\overline{a}, \overline{b})$) şi este egal cu:

$$< \overline{a}, \overline{b} >= \begin{cases} 0, \text{ dacă } \overline{a} = \overline{0} \text{ sau } \overline{b} = \overline{0} \\ \|\overline{a}\| \|\overline{b}\| \cos \varphi, \text{ dacă } \overline{a} \neq \overline{0} \text{ şi } \overline{b} \neq \overline{0} \end{cases} .$$

Prezentăm fără demonstraţie proprietăţile produsului scalar sub forma următoarei proproziţii.

Propoziţia 6.2 *Produsul scalar al vectorilor liberi are următoarele proprietăţi:*

a) $< \overline{a}, \overline{a} >\geq 0, \forall \overline{a} \in V_3,$ *cu egalitate dacă şi numai dacă* $\overline{a} = \overline{0}$ (strict pozitiv definit);

b) $< \alpha\overline{a}, \overline{b} >= \alpha < \overline{a}, \overline{b} >, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ (omogenitate);

c) $< \overline{a} + \overline{b}, \overline{c} >=< \overline{a}, \overline{c} > + < \overline{b}, \overline{c} >, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ (aditivitate);

d) $< \overline{a}, \overline{b} >=< \overline{b}, \overline{a} >, \forall \overline{a}, \overline{b} \in V_3$ (simetrie.)

Din proprietăţile b) şi d) rezultă şi că $< \overline{a}, \alpha\overline{b} >= \alpha < \overline{a}, \overline{b} >$, iar din c) şi d) rezultă $< \overline{a}, \overline{b} + \overline{c} >=< \overline{a}, \overline{b} > + < \overline{a}, \overline{c} >$, adică aditivitatea şi omogenitatea şi în a doua variabilă.

Observaţie: Doi vectori liberi sunt ortogonali dacă şi numai dacă produsul lor scalar este 0.

Pentru a da o metodă efectivă de calcul a produsului scalar considerăm în V_3 baza canonică $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Fie $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ şi $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$ exprimările a doi vectori liberi în baza B.

Sunt evidente relaţiile $< \overline{i}, \overline{i} >=< \overline{j}, \overline{j} >=< \overline{k}, \overline{k} >= 1$ şi $< \overline{i}, \overline{j} >=< \overline{j}, \overline{i} >=< \overline{i}, \overline{k} >=< \overline{k}, \overline{i} >=< \overline{j}, \overline{k} >=< \overline{k}, \overline{j} >= 0$.

Atunci, din proprietăţile produsului scalar obţinem:

$$< \overline{a}, \overline{b} >= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{5.1}$$

Produsul scalar permite şi calculul normei unui vector liber. Din relaţia $< \overline{a}, \overline{a} >= \|\overline{a}\|^2$ obţinem, pentru un vector $\overline{a}$ exprimat în baza B ca mai sus că:

$$\|\overline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{5.2}$$

Din formulele (5.1), (5.2) şi din definiţia produsului scalar obţinem şi o formulă pentru calculul cosinusului pentru unghiul a doi vectori nenuli:

$$\cos\varphi = \frac{<\overline{a},\overline{b}>}{||\overline{a}||||\overline{b}||} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \tag{5.3}$$

Exemplul 6.3. a) Calculaţi produsul scalar şi unghiul φ al vectorilor liberi $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

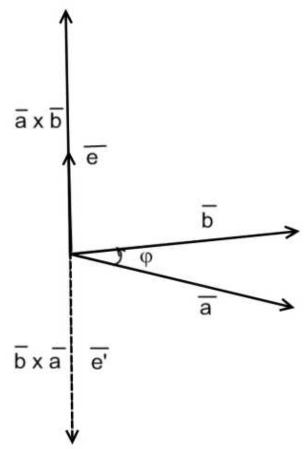
b) Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{u} = 2\overline{i} - a\overline{j} + a\overline{k}$ şi $\overline{v} = \overline{i} + 5\overline{j} + 2a\overline{k}$ să fie ortogonali.

Soluție:a) Produsul scalar al celor doi vectori este $<\overline{a},\overline{b}>= 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 5\cdot 1 = 2 - 6 + 5 = 1$, iar normele acestora sunt: $||\overline{a}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ şi $||\overline{b}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$. Atunci $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{6}}$.

b) $\overline{u}$ şi $\overline{v}$ sunt ortogonali dacă şi numai dacă $<\overline{u},\overline{v}>= 0$, adică $2 - 5a + 2a^2 = 0$, de unde obţinem $a = \frac{1}{2}$ sau $a = 2$.

6. Produs vectorial

Definiţia 7.1. Fie $\overline{a},\overline{b} \in V_3$, doi vectori liberi. Dacă $\overline{a} \neq \overline{0}$ şi $\overline{b} \neq \overline{0}$ notăm cu $\varphi \in [0,\pi]$ unghiul dintre cei doi vectori. Atunci **produsul vectorial** al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este un vector notat cu $\overline{a}\times\overline{b}$ şi definit astfel: $\overline{a}\times\overline{b} = \begin{cases} \overline{0}, \text{ dacă } \overline{a} \text{ şi } \overline{b} \text{ coliniari} \\ ||\overline{a}||||\overline{b}||\sin\varphi\overline{e}, \text{ dacă } \overline{a} \text{ şi } \overline{b} \text{ necoliniari} \end{cases}$, unde $\overline{e}$ este un versor perpendicular pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, al cărui sens este dat de regula mâinii drepte.



În continuare, punem în evidenţă principalele proprietăţi ale produsului vectorial fără a le demonstra.

Propoziţia 7.2. *Produsul vectorial al vectorilor liberi din V_3 are următoarele proprietăţi:*

a) $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}, \forall\overline{a},\overline{b} \in V_3$ (*anticomutativitate*);

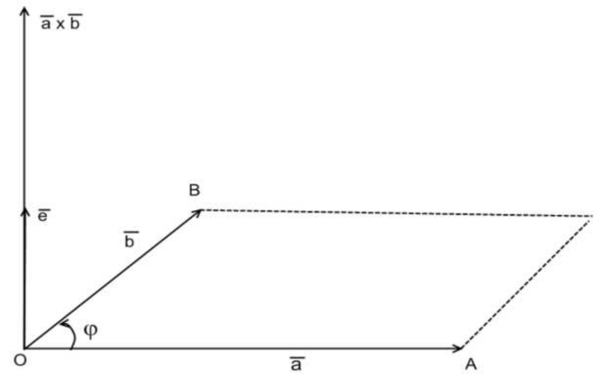
b) $\alpha(\overline{a}\times\overline{b}) = (\alpha\overline{a})\times\overline{b} = \overline{a}\times(\alpha\overline{b}), \forall\overline{a},\overline{b} \in V_3, \alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$ (*distributivitatea faţă de adunare*);

d) $\overline{a} \times \overline{0} = \overline{0} \times \overline{a} = \overline{0}$ *şi* $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}, \forall \overline{a} \in V_3$;

e) $\|\overline{a} \times \overline{b}\|^2 = \|\overline{a}\|^2 \|\overline{b}\|^2 - < \overline{a}, \overline{b} >^2$ (*identitatea lui Lagrange*);

Observația 7.3. Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt doi vectori liberi necoliniari, atunci $\|\overline{a} \times \overline{b}\|$, reprezintă aria paralelogramului ale cărui două laturi adiacente sunt reprezentanţi cu aceeaşi origine ai vectorilor liberi $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.



Urmărim în continuare să găsim o exprimare a produsului vectorial în raport cu $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, baza canonică din V_3. Acţiunea produsului vectorial asupra vectorilor acestei baze este dată de tabelul:

$\times$	$\overline{i}$	$\overline{j}$	$\overline{k}$
$\overline{i}$	0	$\overline{k}$	$-\overline{j}$
$\overline{j}$	$-\overline{k}$	0	$\overline{i}$
$\overline{k}$	$\overline{j}$	$-\overline{i}$	0

Fie $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ şi $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$ exprimările a doi vectori liberi în baza canonică $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Atunci, din proprietăţile produsului vectorial şi din tabelul de mai sus rezultă:

$\overline{a} \times \overline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\overline{i} + (b_1a_3 - a_1b_3)\overline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overline{k}$

Formula se reţine cu uşurinţă exprimând membrul drept al acesteia printr-un determinant formal. Astfel, $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, unde determinantul din membrul drept se dezvoltă după prima linie.

Exemplul 7.3 Determinaţi norma produsul vectorial al vectorilor liberi $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$.

Calculăm $\overline{a} \times \overline{b}$ folosind determinantul formal $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -13\overline{i} + 3\overline{j} + 7\overline{k}$. Atunci $\|\overline{a} \times \overline{b}\| = \sqrt{227}$.

7. Produs mixt. Dublu produs vectorial

Definiţia 8.1. Fie vectorii liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$. Produsul scalar al vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b} \times \overline{c}$, se numeşte **produsul mixt** al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ şi se notează $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >$.

Propoziţia 8.2. *Produsul mixt al vectorilor liberi din V_3 are următoarele proprietăţi:*

a) $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >=< \overline{c}, \overline{a} \times \overline{b} >=< \overline{b}, \overline{c} \times \overline{a} >, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$;

b) $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >= - < \overline{a}, \overline{c} \times \overline{b} >, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$;

c) $< \alpha\overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >=< \overline{a}, \alpha\overline{b} \times \overline{c} >=< \overline{a}, \overline{b} \times \alpha\overline{c} >, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$;

d) $< \overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b} \times \overline{c} >=< \overline{a_1}, \overline{b} \times \overline{c} > + < \overline{a_2}, \overline{b} \times \overline{c} >, \forall \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$;

e) $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >= 0$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele situaţii*:

i) *cel puţin unul din cei trei vectori este nul*;

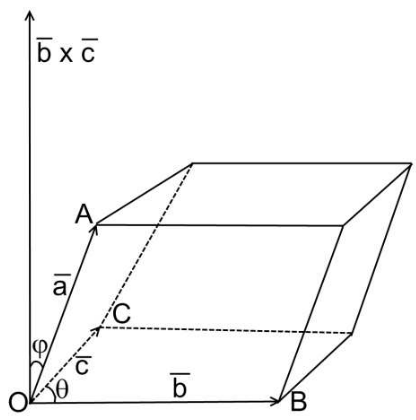
ii) *doi dintre vectori sunt coliniari*;

iii) *cei trei vectori sunt coplanari.*

f) $< \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d} >= \begin{vmatrix} < \overline{a}, \overline{c} > & < \overline{a}, \overline{d} > \\ < \overline{b}, \overline{c} > & < \overline{b}, \overline{d} > \end{vmatrix}, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V_3$

(*Identitatea lui Lagrange*).

Observaţia 8.3. Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt vectori liberi necoplanari, atunci modulul produsului mixt al acestora reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi considerând reprezentanţi cu originea comună ai celor trei vectori.



Considerând $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$, $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, $\overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}$, exprimările vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ în baza canonică din V_3, atunci avem formula de calcul a produsului mixt : $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Definiţia 8.4. Baza $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ din V_3 se numeşte **orientată pozitiv (negativ)** dacă produsul mixt $< \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} >$ este pozitiv (negativ).

Să observăm că baza canonică $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ este orientată pozitiv, deoarece $<\overline{i}, \overline{j}\times\overline{k}>= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$

Definiţia 8.5. Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt vectori liberi, se numeşte **dublul produs vectorial** al acestor, vectorul $\overline{d} = \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$.

Propoziţia 8.6. *Vectorul $\overline{d}$ definit anterior are următoarele proprietăţi:*

a) *este coplanar cu vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{c}$;*

b) $\overline{d} = <\overline{a}, \overline{c}> \overline{b} - <\overline{a}, \overline{b}> \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{b} & \overline{c} \\ <\overline{a}, \overline{b}> & <\overline{a}, \overline{c}> \end{vmatrix}$

Exemplul 8.7. Calculaţi produsul mixt şi dublul produs vectorial al vectorilor exprimaţi în baza canonică $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}$, $\overline{c} = -\overline{i} + 2\overline{k}$.

Produsul mixt $<\overline{a}, \overline{b}\times\overline{c}>= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -7.$

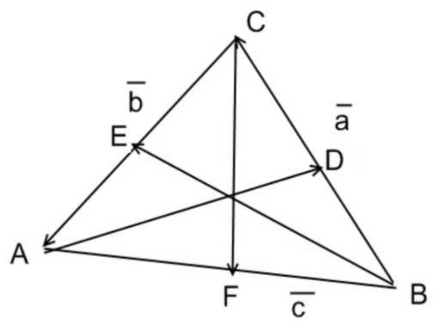
Dublul produs vectorial este dat de $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = <\overline{a}, \overline{c}> \overline{b} - <\overline{a}, \overline{b}> \overline{c} = 5\overline{b} - 11\overline{c} = 5(2\overline{i} - \overline{j} - 5\overline{k}) - 11(-\overline{i} + 2\overline{k}) = 21\overline{i} - 5\overline{j} - 47\overline{k}.$

8. PROBLEME REZOLVATE

1. a) Arătaţi că vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ închid un triunghi dacă şi numai dacă $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$.

b) Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ trei vectori care închid un triunghi. Arătaţi că medianele acestuia pot închide la rândul lor un triunghi.

Soluție:



a) Dacă $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ închid un triunghi, adică au reprezentanţii $\overrightarrow{BC} \in \overline{a}$, $\overrightarrow{CA} \in \overline{b}$ şi $\overrightarrow{AB} \in \overline{c}$, atunci, din regula triunghiului $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$, deci $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, de unde concluzia.

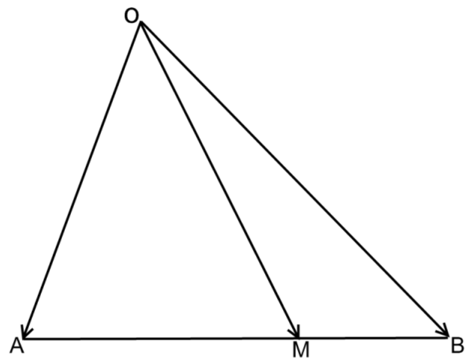
Reciproc, dacă $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$ atunci $\overline{c}=-(\overline{a}+\overline{b})$ şi alegând $\overrightarrow{BC}$, respectiv $\overrightarrow{CA}$ ca reprezentanţi pentru $\overline{a}$, respectiv $\overline{b}$, atunci $\overrightarrow{BA}\in\overline{a}+\overline{b}$, deci $\overrightarrow{AB}\in\overline{c}$, adică $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ închid un triunghi.

b) Fie ABC un triunghi închis de vectorii $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ şi D,E,F mijloacele segmentelor $[BC],[CA]$, respectiv AB. Atunci, din punctul a) $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$.

Pe de altă parte, din regula triunghiului obţinem egalităţile: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\in\overline{c}+\frac{1}{2}\overline{a}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\in\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$ şi $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}\in\overline{b}+\frac{1}{2}\overline{c}$. Atunci $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$, deci conform punctului a) al problemei, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ şi $\overline{CF}$ pot închide un triunghi.

2. Fie A,M,B trei puncte coliniare şi O un punct care nu aparţine dreptei AB. Arătaţi că, dacă $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, atunci:
$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}$. Caz particular $\lambda=1$.

Soluție:



Din regula triunghiului $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OM}$, de unde rezultă: $(1+\lambda)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$, adică $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}$. În cazul particular $\lambda=1$, M este mijlocul segmentului $[AB]$ şi $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. Aceast exerciţiu poate fi considerat ca propoziţie şi utilizat în rezolvarea altor probleme.

3. Se consideră vectorii $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-3\overline{k}$ şi $\overline{b}=-2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$. Să se determine:

a) unghiul dintre cei doi vectori;

b) proiecţia vectorului $\overline{a}$ pe direcţia lui $\overline{b}$;

c) înălţimea paralelogramului construit pe suporturile vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$, corespunzătoare bazei $\overline{b}$.

Soluție:a) Notăm cu φ unghiul dintre cei doi vectori. Atunci $\cos\varphi=\dfrac{<\overline{a},\overline{b}>}{||a||\cdot||b||}=\dfrac{-4-9-3}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}}=-\dfrac{8}{\sqrt{77}}$.

b) $\pi_{\overline{b}}(\overline{a}) = (pr_{\overline{b}}\overline{a})\overline{b_0}$, unde $\overline{b_0} = \dfrac{1}{||b||}\overline{b}$ este versorul asociat lui $\overline{b}$, iar $(pr_{\overline{b}}\overline{a}) = ||a|| \cos\varphi$ este mărimea algebrică a proiecţiei.

Atunci $\overline{b_0} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k})$, iar $(pr_{\overline{b}}\overline{a}) = \sqrt{22}\cdot(-\dfrac{8}{\sqrt{77}}) = -\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, deci $\pi_{\overline{b}}(\overline{a}) = -\dfrac{8\sqrt{14}}{7} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}) = -\dfrac{8}{7}(-2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}) = \dfrac{16}{7}\overline{i} + \dfrac{24}{7}\overline{j} - \dfrac{8}{7}\overline{k}$.

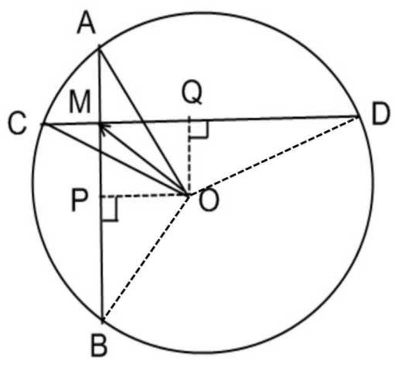
c) Notăm cu h_b înălţimea corespunzătoare bazei $\overline{b}$ a paralelogramului determinat de $\overline{a}$ şi $\overline{b}$. Aria acestui paralelogram este pe de o parte egală cu $||\overline{a}\times\overline{b}||$, iar pe de altă parte cu $h_b\cdot||\overline{b}||$. Atunci $||\overline{a}\times\overline{b}|| = h_b\cdot||\overline{b}||$, de unde $h_b = \dfrac{||\overline{a}\times\overline{b}||}{||\overline{b}||}$.

Calculăm $\overline{a}\times\overline{b}$ cu ajutorul determinantului formal $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Astfel $||\overline{a}\times\overline{b}|| = ||-6\overline{i} + 4\overline{j}|| = \sqrt{52}$, de unde $h_b = \dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{14}}$.

4. Fie $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ doi vectori ce coincid cu două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O şi $AB \cap CD = \{M\}$. Arătaţi că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

Soluție:Notăm cu P şi Q mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$.



Triunghiurile AOB şi COD sunt isoscele, având câte două laturi raze ale cercului, şi deoarece OQ şi OP sunt mediane corespunzătoare bazelor celor două triunghiuri, rezultă $OQ\perp CD$ şi $OP\perp AB$. În consecinţă $MPOQ$ este dreptunghi, deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, de unde $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Pe de altă parte $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$, şi $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD}$. Atunci $2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, de unde $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MO}$.

5. Se consideră în spaţiu punctele $A(1,-2,-1), B(-2,1,1), C(3,1,2)$. Să se determine $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB} \times \overline{AC}$ şi măsura unghiului dintre cei doi vectori.

Soluţie:În general, dacă $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ sunt două puncte în spaţiu, atunci $\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$.

Aici, $\overline{AB} = (-2-1)\overline{i} + (1+2)\overline{j} + (1+1)\overline{k} = -3\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$ şi $\overline{AC} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 3\overline{k}$.

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3\overline{i} + 13\overline{j} - 15\overline{k}.$$

$$\cos(\widehat{\overline{AB}, \overline{AC}}) = \frac{< \overline{AB}, \overline{AC} >}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{(-3)\cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{22}} = \frac{9}{22}.$$

6. Arătaţi că vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul $G = \begin{vmatrix} < \overline{a}, \overline{a} > & < \overline{a}, \overline{b} > & < \overline{a}, \overline{c} > \\ < \overline{b}, \overline{a} > & < \overline{b}, \overline{b} > & < \overline{b}, \overline{c} > \\ < \overline{c}, \overline{a} > & < \overline{c}, \overline{b} > & < \overline{c}, \overline{c} > \end{vmatrix}$ este nul.(determinatul G se numeşte determinatul Gram al vectorilor $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$).

Soluţie:Dacă notăm cu V, volumul paralelipipedului determinat de $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{c}$, atunci $V = | < \overline{a}, \overline{b} \times \overline{c} > |$.

Considerăm $a = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$, $b = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, $c = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}$ exprimările celor trei vectori în baza canonică. Atunci, pentru a calcula V, calculăm determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

Pe de altă parte $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} < \overline{a}, \overline{a} > & < \overline{a}, \overline{b} > & < \overline{a}, \overline{c} > \\ < \overline{b}, \overline{a} > & < \overline{b}, \overline{b} > & < \overline{b}, \overline{c} > \\ < \overline{c}, \overline{a} > & < \overline{c}, \overline{b} > & < \overline{c}, \overline{c} > \end{pmatrix}$. Astfel $det(A \cdot A^t) = G$. Dar $det(A) = det(A^t)$, deci $G = (det(A))^2$, sau $G = V^2$.

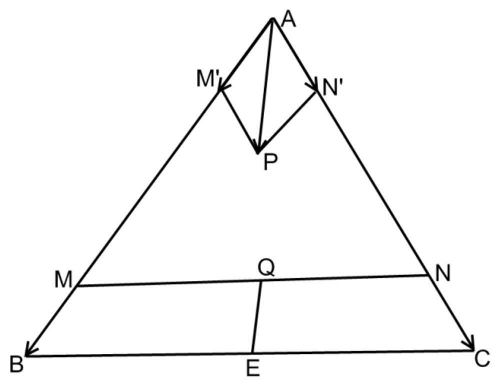
Atunci, dacă cei trei vectori sunt coplanari $V = 0$, deci $G = 0$, iar dacă $G = 0$, atunci $V = 0$, deci cei trei vectori sunt coplanari. Astfel echivalenţa este demonstrată.

7. Fie ABC un triunghi oarecare. Se consideră punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$ şi se notează cu E, respectiv Q

mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[MN]$. Arătaţi că dreapta QE are aceeaşi direcţie cu dreapta suport a bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$.

Soluție:Vom da o demonstraţie vectorială a problemei.

Considerăm punctele $M' \in (AB)$ şi $N' \in (AC)$ astfel încât $AM' = AN' = BM = CN$. Construim prin M', respectiv N' paralele la dreptele AC, respectiv AB şi notăm punctul de intersecţie al acestora cu P.



Calculăm suma vectorilor liberi $\overline{MB}$ şi $\overline{NC}$ în două moduri.

Alegem mai întâi ca reprezentanţi $\overrightarrow{AM'} \in \overline{MB}$ şi $\overrightarrow{AN'} \in \overline{NC}$. Patrulaterul $AM'PN'$ este paralelogram având laturile opuse două câte două paralele, deci $\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AN'} = \overrightarrow{AP}$, adică $\overrightarrow{AP}$ este un reprezentant pentru $\overline{MB} + \overline{NC}$. În plus, $AM'PN'$ este romb, fiind un paralelogram cu două laturi conseuctive egale, deci $[AP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Pe de altă parte $\overrightarrow{MB} \in \overline{MB}$ şi $\overrightarrow{NC} \in \overline{NC}$. Atunci $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QE} + \overrightarrow{EC})$, iar $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{0}$ şi $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$, deci $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{QE}$, adică $2\overrightarrow{QE}$ este la rândul său un reprezentant pentru $\overline{MB} + \overline{NC}$.

În consecinţă $\overrightarrow{AP} \sim 2\overrightarrow{QE}$, deci AP şi QE au aceeaşi direcţie.

9. PROBLEME PROPUSE

1. Fie ABC un triunghi şi D, E, F mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$ şi $[AB]$. Arătaţi că:

a) Pentru orice punct O din spaţiu avem:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CF}$;

b) Există un unic punct G, numit centrul de greutate al tringhiului astfel încât $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$;

c) Să se arate că pentru orice punct O din spaţiu are loc relaţia: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

2. Se dau punctele A, B, C, prin vectorii de poziţie $\overrightarrow{OA} = 14\overline{i} - 7\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\overline{i} + 2\overline{j} - 7\overline{k}$, $\overrightarrow{OA} = -2\overline{i} + 7\overline{j} - 2\overline{k}$. Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic şi triunghiul BOC este isoscel, şi să se calculeze ariile acestora.

3. Se dau vectorii $\overline{a} = \overline{i} + 2\lambda\overline{j} - (\lambda - 1)\overline{k}$ şi $\overline{b} = (3 - \lambda)\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinaţi:

a) valoarea lui λ astfel încât $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ să fie ortogonali;

b) mărimea algebrică a proiecţiei vectorului $\overline{a}$ pe $\overline{a} + \overline{b}$, în situaţia în care $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt ortogonali;

c) vectorul ortogonal simultan pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

4. Verificaţi, folosind exprimări ale vectorilor liberi $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ şi $\overline{d}$ în baza canonică din V_3, formulele lui Lagrange:

a) $||\overline{a} \times \overline{b}||^2 = ||\overline{a}||^2 ||\overline{b}||^2 - <\overline{a}, \overline{b}>^2$.

b) $<\overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{b}> = \begin{vmatrix} <\overline{a}, \overline{c}> & <\overline{a}, \overline{d}> \\ <\overline{b}, \overline{c}> & <\overline{b}, \overline{c}> \end{vmatrix}$.

5. Determinaţi valorile lui $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{a} = \overline{i} - \alpha\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{b} = \alpha\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{c} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ să fie coplanari.

6. Arătaţi că punctele A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă pentru orice punct O din spaţiu există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1\overrightarrow{OA_1} + \alpha_2\overrightarrow{OA_2} + \alpha_3\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{0}$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

7. Fie $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ doi vectori liberi din spaţiu astfel încât $||\overline{a}|| = 4$, $||\overline{b}|| = 3$ şi unghiul dintre cei doi vectori are măsura de $60°$. Calculaţi $s = ||\overline{a} + \overline{b}||$ şi $d = ||\overline{a} - \overline{b}||$.

CAPITOLUL 3

Aplicaţii liniare

Corespondenţele între diferite mulţimi de obiecte sunt foarte des întâlnite în practica descrierii fenomenelor naturii.

Pentru a putea fi studiate mai usor, fenomenele se aproximează "local" cu fenomene "liniare". Apar astfel, în mod natural, aşa-numitele aplicaţii liniare.

Un concept de bază al algebrei liniare îl constituie cel de aplicaţie liniară ca "purtătorul" de informaţie de la un spaţiu vectorial la altul.

1. Definiţia unei aplicaţii liniare. Exemple

Definiţia 1.1 Fie V_1 şi V_2 două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K şi $f : V_1 \to V_2$ o aplicaţie (funcţie) de la V_1 la V_2. f se numeşte **aplicaţie liniară** dacă sunt îndeplinite condiţiile:

(L1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$. $\forall x, y \in V_1$;

(L2) $f(kx) = kf(x)$, $\forall k \in K, x \in V_1$.

Prescurtat, (L1) şi (L2) sunt echivalente cu:

(L3) $f(kx + ly) = kf(x) + lf(y)$, $\forall k, l \in K$, $\forall x, y \in V_1$.

Observaţie. Dacă $f : V_1 \to V_2$ este liniară, atunci:

a) pentru $k = 0$ în (L2) obţinem $f(0) = 0$;

b) similar, pentru $k = -1$, obţinem $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in V_1$;

c) $f(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i f(x_i)$, $\forall x_i \in V, i = \overline{1, n}$.

În cazul în care $V_1 = V_2 \overset{not}{=} V$, aplicaţia liniară $f : V \to V$ se numeşte **endomorfism**.

Exemplul 1.2. Dacă V este un spaţiu vectorial, aplicaţia $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$ se numeşte identitatea pe V.

Dacă W este un alt spaţiu vectorial peste K: $0_{V,W} : V \to W$, $0_{V,W}(x) = 0_W$, $\forall x \in V$ se numeşte aplicaţia nulă. Ambele aplicaţii sunt liniare.

Exemplul 1.3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ proiecţia pe planul xOy: $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. f este o aplicaţie liniară, deoarece:

Pentru $v = (a, b, c)$ şi $w = (a', b', c')$ avem $f(v + w) = f(a + a', b + b', c + c') = (a + a', b + b', 0) = (a, b, 0) + (a', b', 0) = f(v) + f(w)$.

Pentru $k \in \mathbb{R}$, $f(kv) = f(ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kf(v)$.

Exemplul 1.4. Aplicaţia $\mathcal{F} : C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]}$, $\mathcal{F}(f) = f'$, pentru orice $f \in C^1_{[a,b]}$ este o aplicaţie liniară.

Exemplul 1.5. Fie aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + 1, y + 2)$.

Se observă că $f(0) = f(0, 0) = (1, 2)$, adică $f(0) \neq 0$. Aici vectorul zero nu este aplicat în vectorul 0, prin urmare f nu este liniară.

Notăm cu $\mathcal{L}_K(V_1, V_2) = \{f : V_1 \to V_2 | f \text{ -aplicaţie liniară }\}$.

Se poate arăta că $\mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ are o structură de K-spaţiu vectorial, demonstraţie pe care o lăsăm pe seama cititorului.

Definiţia 1.6.

1. $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ injectivă se numeşte **monomorfism**.
2. $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ surjectivă se numeşte **epimorfism**.
3. $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ monomorfism şi epimorfism se numeşte **izomorfism** de spaţii vectoriale. În acestă situaţie, spaţiile vectoriale V_1 şi V_2 se numesc spaţii vectoriale izomorfe.
4. Dacă $V_1 = V_2 \stackrel{not}{=} V$, $f \in \mathcal{L}_K(V, V)$ se numeşte **endomorfism**. Mulţimea endomorfismelor spaţiului vectorial V se notează cu $\mathcal{L}_K(V)$.
5. $f \in \mathcal{L}_K(V)$ bijectivă se numeşte **automorfism**.

Exemplul 1.7. Monomorfism care nu este epimorfism: aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, 0)$ este liniară şi injectivă, dar nu este surjectivă.

Exemplul 1.8. Epimorfism care nu este monomorfism: pentru $i = \overline{1, p}$, aplicaţiile $p_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x_i$ (numite şi proiecţiile canonice) sunt aplicaţii liniare surjective şi neinjective.

2. Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare. Izomorfisme de spaţii vectoriale

Fie $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ o aplicaţie liniară.

Definiţia 2.1. Nucleul aplicaţiei liniare f este mulţimea $Kerf = \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$, iar imaginea acesteia este mulţimea $Imf = \{y \in V_2 | \exists x \in V_1 \text{ astfel încât } y = f(x)\}$.

Propoziţia 2.2 *Fie $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$. Atunci:*

1. *$Kerf$ este un subspaţiu vectorial al lui V_1, iar Imf este un subspaţiu vectorial al lui V_2;*
2. *f este injectivă $\Leftrightarrow$ $Kerf = \{0\}$;*
3. *f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $Imf = V_2$.*

DEMONSTRAŢIE.

1. Pentru orice $x, y \in Kerf$ avem $f(x + y) = f(x) + f(y)$, adică $f(x + y) = 0 \Rightarrow x + y \in Kerf$, iar pentru orice $k \in K$ şi $x \in Kerf$ avem $f(kx) = kf(x)$, adică $f(kx) = 0 \Rightarrow kx \in Kerf$. Am arătat astfel că $Kerf$ subspaţiu vectorial al lui V_1.

2. Admitem $Kerf = \{0\}$. Fie $x, y \in V_1$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in Kerf \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ şi deci f injectivă.

Reciproc, admitem f injectivă şi $x \in Kerf$ arbitrar $\Rightarrow f(x) = 0$ şi $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Kerf = \{0\}$.

3. Dacă $Imf = V_2 \Rightarrow \forall y \in V_2 = Imf$, $\exists x \in V_1$ astfel încât $y = f(x) \Rightarrow f$ surjectivă. Reciproca este evidentă.

Exemplul 2.3. Aplicaţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x,y,0)$ are $Imf = \{(a,b,0)|a,b \in \mathbb{R}\}$ şi $Kerf = \{(0,0,c)|c \in \mathbb{R}\}$ (axa Oz).

Exemplul 2.4. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_3)$. Să se determine $Kerf$ şi Imf.

Soluție:Folosind definiţia $Kerf = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3|f(x) = 0\}$. Ecuaţia $f(x) = 0$ se reduce la ecuaţia $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ cu soluţia
$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -(\alpha+\beta) \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$ Prin urmare:
$Kerf = \{(\alpha, \beta, -\alpha-\beta)|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Din definiţia spaţiului Imf deducem că orice vector din Imf are coordonatele egale, aşa încât oricare doi vectori din această mulţime sunt liniar dependenţi: $Imf = \{\gamma(1,1,1)|\gamma \in \mathbb{R}\}$.

Fie $f \in \mathcal{L}_K(V_1, V_2)$ un izomorfism. Vom nota că spaţiile vectoriale V_1 şi V_2 sunt izomorfe astfel: $V_1 \cong V_2$.

Exemplul 2.5. Dacă $V_1 = \mathbb{R}^2$ şi $V_2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3|x,y \in \mathbb{R}\}$, $f : V_1 \to V_2$, $f(x,y) = (x,y,0)$ este un izomorfism care arată un mod de "scufundare" a planului $\mathbb{R}^2$ în întreg spaţiul $\mathbb{R}^3$.

În continuare considerăm rezultate teoretice cu referire la noţiunea de izomorfism.

Propoziţia 2.6. 1.*Dacă $f : V_1 \to V_2$ este un izomorfism, atunci $f^{-1} : V_2 \to V_1$ este de asemenea un izomorfism.*

2. *Dacă $f : V_1 \to V_2$ şi $g : V_2 \to V_3$ sunt izomorfisme, atunci $g \circ f : V_1 \to V_3$ este tot un izomorfism.*

DEMONSTRAŢIE. 1. Cum f este bijectivă şi $f^{-1} : V_2 \to V_1$ este tot bijectivă. În plus f^{-1} este aplicaţie liniară. Pentru aceasta, trebuie arătat că $\forall u, v \in V_2$ şi $\forall k, l \in K$, avem $f^{-1}(ku + lv) = kf^{-1}(u) + lf^{-1}(v)$.

Considerăm relaţia

$$f(f^{-1}(ku + lv)) = f(kf^{-1}(u) + lf^{-1}(v)) \tag{2.1}$$

Ţinând cont de faptul că $f \circ f^{-1}$ este o aplicaţie identică şi că f este o aplicaţie liniară (2.1) este echivalentă cu $(f \circ f^{-1})(ku + lv) = k(f \circ f^{-1})(u) + l(f \circ f^{-1})(v)$ sau $ku + lv = ku + lv$, egalitate adevărată.

Cum f este injectivă, din (2.1) $\Rightarrow f^{-1}(ku+lv) = kf^{-1}(u)+lf^{-1}(v)$, adică f^{-1} este a aplicaţie liniară. În concluzie f^{-1} este tot un izomorfism.

2. $\forall k, l \in K$ şi $u, v \in V_1$ avem:

$(g \circ f)(ku + lv) = g(f(ku + lv)) = g(f(ku) + f(lv)) = kg(f(u)) + lg(f(v)) = k(g \circ f)(u) + l(g \circ f)(v)$ şi deci $g \circ f$ este o aplicaţie liniară. În concluzie $g \circ f$ este un izomorfism.

Remarca 2.7. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în V_1 şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o mulţime oarecare de vectori din V_2, atunci există o unică aplicaţie liniară $f : V \to W$, astfel încât $f(e_i) = f_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Putem considera $f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n)$ şi verificarea o lăsăm pe seama cititorului.

Propoziţia 2.8. *O aplicaţie liniară $f : V_1 \to V_2$ injectivă, duce elementele liniar independente $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din V_1 tot în elemente liniar independente $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ din V_2. Un izomorfism $f : V_1 \to V_2$ duce o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a spaţiului vectorial V_1 tot într-o bază $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ a spaţiului vectorial V_2.*

Demonstraţie. Dacă avem $\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = 0$, din liniaritatea aplicaţiei f rezultă că $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0$ şi deci $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, deoarece f este injectivă; prin urmare $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ din faptul că $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sunt liniar independenţi.

Dacă, în plus, f este un izomorfism, pentru orice $y \in V_2$, $y = f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n)$, adică $y \in L(\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\})$, deci $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ este o mulţime de generatori în V_2, adică o bază în V_2.

Teorema 2.9. *Două spaţii vectoriale finit generate V_1/K şi V_2/K sunt izomorfe $\Leftrightarrow$ $dimV_1 = dimV_2$. În particular, dacă $dimV_1 = n$, atunci $V_1 \cong K^n$. Se spune că avem un unic model de spaţiu vectorial peste K, de dimensiune n.*

Demonstraţie. Fie $f : V_1 \to V_2$ un izomorfism. Acesta duce o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din V_1 tot într-o bază $\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ din V_2. Prin urmare $dimV_1 = dimV_2$.

Invers, dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în V_1 şi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o bază în V_2 (ele au acelaşi număr de elemente din ipoteza $dimV_1 = dimV_2$), definim aplicaţia: $f : V_1 \to V_2, f(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Se arată uşor că f este un izomorfism.

Ultima afirmaţie a teoremei rezultă imediat din faptul că în $K^n = K \times K \times \ldots \times K$, $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$ este o bază, adică $dimK^n = n$.

3. Teorema rang-defect. Aplicaţii

Teorema 3.1. **(Teorema rang-defect)** *Fie $f : V_1 \to V_2$ o aplicaţie liniară cu $dimV_1 = n$. Atunci $dimImf < +\infty$ şi putem scrie $dimKerf + dimImf$=n.*

Numărul natural $dimKerf$ se numeşte **defectul aplicaţiei** f, iar numărul $dimImf$ se numeşte **rangul aplicaţiei** f.

Demonstraţie. Fie $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ o bază în $Kerf (k \leq n)$. Completăm această bază până la o bază în V_1: $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Vom arăta că $\{f(e_{k+1}), f(e_{k+2}), \ldots, f(e_n))\}$ este o bază în Imf şi atunci totul ar fi dovedit, deoarece $n = dimV_1 = k + (n-k) = dimKerf + dimImf$.

1) $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ sunt liniar independente, deoarece din $\alpha_1 f(e_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = 0 \Rightarrow f(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = 0$ şi deci,

$\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in Kerf$, prin urmare $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k$, adică $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_k e_k + (-\alpha_{k+1})e_{k+1} + \ldots + (\alpha_n)e_n = 0$. Cum F este o bază în $V_1 \Rightarrow \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ şi $\beta_i = 0, i = \overline{1,k}$.

2) Fie $y \in Imf$, deci $\exists x \in V_1$ astfel încât $f(x) = y$. Cum f este o bază în V_1, $x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_k e_k + \gamma_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \gamma_n e_n$, prin urmare $f(x) = \gamma_{k+1}f(e_{k+1}) + \ldots + \gamma_n f(e_n)$, deoarece $f(e_i) = 0$, pentru $i = \overline{1,k}$. Deci $\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$ este o mulţime de generatori pentru Imf şi demonstraţia este încheiată.

Observația 3.2. Teorema rang-defect afirmă de fapt, că spaţiile vectoriale $V/Kerf$ şi Imf sunt izomorfe.

În continuare vom prezenta câteva aplicaţii ale acestei teoreme.

Exemplul 3.3. Aplicaţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+z, y, x+z)$ este liniară.

$Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z) = 0\} \Rightarrow Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+z = 0, y = 0\} \Rightarrow Kerf = \{a(1,0,-1) | a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow Kerf = L\{(1,0,-1)\} \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}Kerf = 1$.

$Imf = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ astfel încât $f(x,y,z) = (u,v,w)\} \Rightarrow Imf = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | (u,v,w) = (x+z, y, x+z)\} \Rightarrow Imf = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | (u,v,w) = (x+z)(1,0,1) + y(0,1,0)\} \Rightarrow Imf = L\{(1,0,1),(0,1,0)\} \Rightarrow dim_{\mathbb{R}}Imf = 2$.

Exemplul 3.4. Fie $V_1 = \mathbb{R}^m$ şi $V_2 = \mathbb{R}^n$, iar $A \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Fie aplicaţia $F_A : V_1 \to V_2$, definită prin $F_A(X) = AX$, unde X este un vector coloană din $\mathbb{R}^m$. Aici $KerF_A$ este mulţimea soluţiilor sistemului omogen $AX = 0$, deci $dimKerF_A = m - r$, unde r este rangul matricei A. Dar, din teorema rang-defect, rezultă că $r = dimImF_A$, adică putem afirma că rangul matricei A este chiar dimensiunea imaginii aplicaţiei F_A.

Remarca 3.5. Dacă $f : V \to V$ este o aplicaţie liniară şi $dimV = n$, atunci f injectivă $\Leftrightarrow$ f surjectivă.

Într-adevăr, f injectivă $\Leftrightarrow Kerf = 0 \Leftrightarrow dimImf = n \Leftrightarrow Imf = V \Leftrightarrow f$ surjectivă.

4. Matricea asociată unei aplicaţii liniare

Fie V_1/K şi V_2/K spaţii vectoriale şi aplicaţia liniară $F : V_1 \to V_2$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bază în V_1 şi $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ o bază în bază V_2. F este complet determinată dacă precizăm acţiunea ei pe elementele bazei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, deci vom scrie:

$$\begin{cases} F(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \ldots + a_{m1}g_m \\ \vdots \\ F(e_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \ldots + a_{mn}g_m \end{cases}, \tag{4.1}$$

unde $a_{ij} \in K$.

Matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ se numeşte **matricea asociată aplicaţiei F în bazele E şi respectiv G.**

Notăm $A = m_{E,G}(F)$.

Dacă $F \in \mathcal{L}_K(V)$, atunci se poate lucra cu aceeaşi bază E în V, matricea A obţinută fiind notată şi cu $m_E(F)$.

Exemplu 4.1. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1, x_2)$.

Considerând E şi G bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$, avem: $F(1,0) = (1,1,0)$ şi $F(0,1) = (-1,0,1)$, de unde rezultă $m_{E,G}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se observă că, această matrice se construieşte uşor, aşezând pe prima coloană coeficienţii lui x_1 din cele trei componente ale lui $F(x_1, x_2)$ în $\mathbb{R}^3$ şi respectiv coeficienţii lui x_2 din $F(x_1, x_2)$, pe a doua coloană a matricei $A = m_{E,G}(F)$.

Fie acum, $x \in V_1$, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $F(x) = y_1 g_1 + y_2 g_2 + \ldots + y_m g_m$, exprimarea vectorilor x şi $y = F(x)$ în bazele E, respectiv G.

Vom scrie $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m$.

Dacă E şi G sunt fixate x şi y sunt complet determinate de coordonatele lor în aceste baze şi:

$y = F(x) = F(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i F(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} g_j =$

$= \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right) g_j$ şi deci $y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$, prin urmare s-a obţinut următoarea relaţie:

$$A\overline{x} = \overline{y}, \text{ unde } A = m_{E,G}(F). \tag{4.2}$$

Deci F este complet determinată de $F_A : K^n \to K^m$, $F_A(x) = Ax$. Fie $E' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ altă bază în V_1 şi C matricea de trecere de la E la E', iar $G' = \{g'_1, g'_2, \ldots, g'_m\}$ o altă bază în V_2 şi D matricea de trecere de la G la G'.

Fie $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ coordonatele lui x în E' şi $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ coordonatele lui $y = F(x)$ în baza G'.

Ştim deja că

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Dacă B este matricea aplicaţiei liniare în bazele E' şi G', adică $B = m_{E',G'}(F)$, atunci ştim de mai sus că:

$$B\overline{x'} = \overline{y'}, \text{ unde } \overline{x'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \ \overline{y'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Se înlocuiesc în (4.2) valorile lui $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ din (4.3) şi se găseşte că $AC\overline{x'} = D\overline{y'}$, sau $D^{-1}AC\overline{x'} = \overline{y'}$, deci $B = D^{-1}AC$.

Dacă $V_1 = V_2 \overset{not}{=} V$ şi $E = G$, atunci $D = C$ şi rezultă că:

$$B = C^{-1}AC \tag{4.5}$$

Formula (4.5) este numită formula de schimbare a matricei transformării liniare la schimbarea bazei spaţiului vectorial V.

Definiţia 4.2. Două matrice A şi $B \in \mathcal{M}_n(K)$ legate printr-o relaţie de tipul (4.5) se numesc asemenea sau similare.

Se obţine următoarea propoziţie:

Propoziţia 4.3. *Matricele asociate unei transformări liniare $F : V \to V$, în diferite baze ale spaţiului vectorial V, cu $dimV < +\infty$ sunt asemenea între ele; ele au acelaşi rang, egal cu rangul transformării liniare F.*

Demonstraţie. Ultima parte rezultă din Exemplul 3.4 şi din formula (4.2).

Exemplul 4.4. Fie $\mathbb{R}_2[X]-$spaţiu vectorial real al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienţi reali şi fie $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, definită prin $f(p) = p'(p'$ derivata lui $p)$, $\forall p \in \mathbb{R}_2[X]$.

Determinăm matricea asociată lui f în raport cu perechea de baze $B = \{1, 1 - X + X^2, 2X + X^2\} \subset \mathbb{R}_2[X]$ şi respectiv $B' = \{1, X\} \subset \mathbb{R}_1[X]$.

Avem $(f(p))(X) = p'(X)$, unde $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ un polinom oarecare de grad cel mult 2. Fie $e_1 = 1, e_2 = 1 - X + X^2, e_3 = 2X + X^2$ şi $g_1 = 1, g_2 = X$. Deoarece $f(e_1) = 0 = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2$, $f(e_2) = -1 + 2X = -1 \cdot g_1 + 2 \cdot g_2$, $f(e_3) = 2 + 2X = 2g_1 + 2g_2$.

Am obţinut $m_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Transformări liniare şi matrice

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K cu $dimV < +\infty$ şi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în V. Fie $m_E(T) = A$, matricea asociată transformării $T : V \to V$ relativă la baza E. Obţinem astfel pentru orice transformare liniară T o matrice $m_E(T) \in \mathcal{M}_n(K)$.

Pentru E bază fixată se obţine o aplicaţie $m : \mathcal{L}_K(V) \to \mathcal{M}_n(K)$, definită prin $m(T) = m_E(T)$.

Observaţie. $\mathcal{L}_K(V)$ este un spaţiu vectorial peste K cu operaţiile:

$(T+U)(x) = T(x) + U(x)$, pentru orice $x \in V$, $T, U \in \mathcal{L}_K(V)$,
$(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$, pentru orice $x \in V$ şi $\alpha \in K$.

Dacă $T, U \in \mathcal{L}_K(V)$ considerăm operaţia de compunere $T \circ U \in \mathcal{L}_K(V)$, definită prin $(T \circ U)(x) = T(U(x))$.

Se observă uşor că $\mathcal{L}_K(V)$ împreună cu adunarea definită mai sus şi cu operaţia de compunere devine un inel necomutativ cu unitatea $1_V : V \to V, 1_V(x) = x$ ce joacă rol de element neutru faţă de compunere.

În continuare prezentăm un rezultat, care arată că putem lucra cu matrice în locul transformărilor liniare.

Teorema 5.1. *Aplicaţia $m : \mathcal{L}_K(V) \to \mathcal{M}_n(K)$, definită prin $m(T) = m_E(T)$ este o aplicaţie liniară, iar $m(T \circ U) = m(T) \cdot m(U)$. În plus, $m(1_V) = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Prin urmare, m este un izomorfism de spaţii vectoriale şi inele unitare necomutative.*
În particular, dacă T este inversabilă şi T^{-1} este inversa ei, rezultă $m(T^{-1}) = m(T)^{-1}$.

Demonstraţie. Înainte de a trece la demonstraţie, să precizăm că $\mathcal{M}_n(K)$ are o structură obişnuită de spaţiu vectorial faţă de adunarea şi înmulţirea cu scalari reali, şi de inel necomutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor.

1) Să arătăm că $m(T+U) = m(T) + m(U)$.

Vom scrie $m(T) = A = (a_{ij})$, $m(U) = B = (b_{ij})$ şi $m(T+U) = C = (c_{ij})$. Din definiţia matricei asociate găsim că $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, $U(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} e_j$, de unde $(T+U)(e_i) = T(e_i) + U(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ji} + b_{ji}) e_j$, deci $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1,n}$, adică $C = A + B$ sau $m(T+U) = m(T) + m(U)$.

2) Să arătăm că $m(\alpha T) = \alpha \cdot m(T)$, pentru orice $\alpha \in K$.

Fie $D = m(\alpha T)$, $D = (d_{ij})$.

$(\alpha T)(e_i) = \alpha T(e_i) = \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum\limits_{j=1}^{n} (\alpha a_{ji}) e_j$, deci $D = \alpha A$, adică $m(\alpha T) = \alpha m(T)$.

3) Vom arăta în continuare că $m(T \circ U) = m(T) \cdot m(U)$.

Fie $H = m(T \circ U)$, $H = (h_{ji})$, deci:

$(T \circ U)(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_{ji} e_j$.

Dar $(T\circ U)(e_i) = T(U(e_i)) = T(\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}T(e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}$ $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}e_j = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki})e_j$, adică $h_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$, sau $H = AB$, adică $m(T\circ U) = m(T)\cdot m(U)$.

4) Vom arăta că $Ker\, m = 0$ şi că m este surjectivă. Fie $T \in \mathcal{L}_K(V)$ cu $m(T) = 0$, deci $T(e_i) = 0, \forall i = \overline{1,n}$.

T este prin urmare nulă pe elementele bazei E, deci $T(x) = 0$, $\forall x \in V$, deoarece $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ şi $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i T(e_i) = 0$.

Rezultă că $T = 0_V$, unde 0_V este aplicaţia nulă de la V la V.

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definim unica transformare $T : V \to V$ prin formula $T(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$, unde $A = (a_{ji}), \forall i = \overline{1,n}$.

Este clar că $m_E(T) = A$, de aici rezultă că m este un izomorfism.

5) Dacă T este inversabilă avem $1_V = T\circ T^{-1}$, deci $I_n = m(T)m(T^{-1})$, adică $m(T^{-1}) = (m(T))^{-1}$.

Remarca 5.2. Această teoremă este foarte utilă în calcule concrete cu transformări liniare, deoarece permite lucrul cu matrice în locul transformărilor liniare şi invers.

Lema 5.3. *Orice relaţie de forma $T(x) = \alpha y$, unde $\alpha \in K$, $x, y \in V$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ este echivalentă cu relaţia matricială:*

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ unde } A = m_E(T). \tag{5.1}$$

Demonstraţie. $T(x) = T(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}e_j = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)e_j$, iar $\alpha y = \alpha\sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha y_j e_j$, deci egalitatea $T(x) = \alpha y$ este echivalentă cu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \alpha y_j$, adică cu relaţia (5.1)

Exemplul 5.4. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ care în baza canonică $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ are matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Să se determine $KerT^3$ ($T^3 = T\circ T\circ T$).

$KerT^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | T^3(x) = 0\} = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Dar $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prin urmare $KerT^3 = \mathbb{R}^3$.

Dacă nu foloseam Lema 5.3, ar fi trebuit să găsim efectiv modul în care acţionează T^3, lucru mai dificil decât calculul lui A^3.

6. Vectori şi valori proprii

Fie $T : V \to V$ o transformare liniară şi $x \neq 0$ un vector din V astfel încât $T(x)$ şi x să fie liniar dependenţi, adică $T(x) = \alpha x$, cu $\alpha \in K$. Se mai spune că $T(x)$ şi x "au aceeaşi direcţie".

În aceste condiţii, x se numeşte **vector propriu** pentru T, iar α se numeşte **valoare proprie** corespunzătoare vectorului propriu x.

Observaţie. α este unic determinată de x, deoarece $T(x) = \alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$, pentru $x \neq 0$.

Invers, dacă α este o valoare proprie dată, mulţimea vectorilor proprii care au ca valoare proprie pe α formează un subspaţiu vectorial L_α în V, dacă îi adăugăm pe 0 din V.

L_α poate fi "oricât de mare". De exemplu, dacă $T = 1_V$ şi $\alpha = 1$, atunci $L_\alpha = V$.

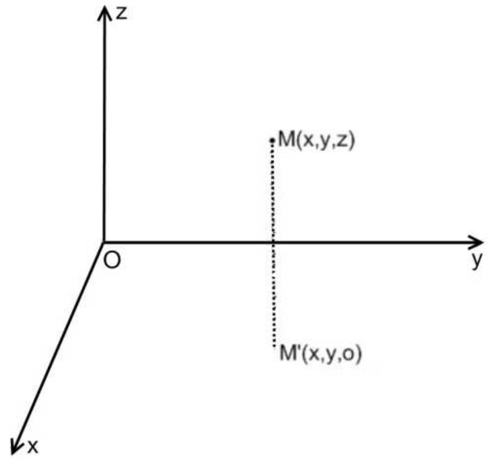
Observăm şi că $dimL_\alpha \geq 1$, dacă α este o valoare proprie pentru T.

Orice bază $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ în L_α furnizează k direcţii proprii, corespunzătoare valorii proprii α.

Exemplul 6.1. Fie $T = pr_{xOy} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0) = \alpha(x, y, z)$, deci suntem în una din situaţiile:

1. $z = 0$ şi $\alpha = 1$, caz în care se obţin două direcţii proprii liniar independente, sau

2. $z \neq 0, \alpha = 0, x = 0, y = 0$, caz în care axa Oz este direcţie proprie.



În continuare vom presupune că există k vectori proprii $v_1, v_2, \ldots, v_k$ liniar independenţi în V, corespunzători valorilor proprii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ şi că $dimV = n$, $n \geq k$. Completăm $v_1, v_2, \ldots, v_k$ până la o bază în V, $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ şi notăm cu A matricea $m_E(T)$.

Calculăm acum matricea A:

$T(v_1) = \alpha_1 v_1$

$T(v_2) = \quad \alpha_2 v_2$

$\vdots$

$T(v_k) = \qquad \alpha_k v_k$

$T(e_{k+1}) = a_{1,k+1}v_1 + \ldots + a_{n,k+1}e_n$

$\vdots$

$T(e_n) = a_{1n}v_1 + \ldots + a_{nn}e_n.$

De aici putem scrie că:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & | & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 & | & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_k & | & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ -- & -- & -- & -- & -- & -|- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & | & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & | & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Această matrice este foarte convenabilă, deoarece ea "se apropie" de o matrice diagonală, adică de o matrice de forma:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

Dacă în (6.1) $k = n$, A este o matrice diagonală având pe diagonala principală valorile proprii ale transfomării T.

Am obţinut astfel următorul rezultat:

Dacă $T : V \to V$ are $n = dimV$ vectori proprii liniar independenţi $v_1, v_2, \ldots, v_n$, atunci în baza $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ matricea transformării T devine diagonală.

Folosim în continuare Lema 5.3 pentru a găsi un procedeu efectiv de calcul al valorilor şi vectorilor proprii în cazul în care $dimV = n$.

Fie $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V şi $A = m_E(T)$.

Scalarul α este valoare proprie pentru T, dacă $T(x) = \alpha x$, pentru un vector $x \neq 0$. Din lema amintită rezultă că α este valoare proprie şi $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ este vector propriu corespunzător dacă şi numai dacă: $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, adică $(A - \alpha I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sau dacă $det(A - \alpha I_n) = 0$, adică atunci şi numai atunci când când α este rădăcină în K pentru polinomul de grad n: $P(\alpha) = det(A - \alpha I_n)$.

Definiţia 6.2. Polinomul $P(\alpha) = det(A - \alpha I_n)$ se numeşte **polinomul caracteristic al matricei** A sau al transformării T.

Teorema 6.3. *Polinomul caracteristic* $P(\alpha) = det(A - \alpha I_n)$ *nu depinde de alegerea bazei* E *a spaţiului vectorial, adică nu depinde de matricea* $A = m_T(E)$*, ci numai de transformarea* T.

DEMONSTRAŢIE. Fie F o altă bază în V şi C matricea de trecere de la baza E la baza F. Fie $B = m_F(T)$.

Se ştie că $B = C^{-1}AC$, deci $det(B - \alpha I_n) = det(C^{-1}AC - \alpha I_n) = det(C^{-1}) \cdot det(A - \alpha I_n) \cdot detC = det(A - \alpha I_n)$, fapt care arată că $P(\alpha) = det(A - \alpha I_n) = det(B - \alpha I_n)$, adică $P(\alpha)$ nu depinde de A.

Observația 6.4. Rădăcinile α_i ale ecuaţiei $P(\alpha) = 0$ sunt chiar valorile proprii, iar pentru $\alpha = \alpha_i$, o rădăcină fixată în K a lui $P(\alpha) = 0$, vectorii proprii se găsesc rezolvând sistemul:

$$(A - \alpha_i I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 6.5. Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$. Să se determine valorile şi vectorii proprii pentru T.

Soluție:În baza canonică $m_E(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic asociat este: $P(\alpha) = det(A - \alpha I_3) \Rightarrow$

$$P(\alpha) = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} \Rightarrow P(\alpha) = (1 - \alpha)(\alpha^2 - 1).$$

Valorile proprii sunt $\alpha_1 = -1$ cu subspaţiul propriu corespunzător $L_{-1} = \{a(1,0,-1)|a \in \mathbb{R}\}$ şi $\lambda_{2,3} = 1$ cu $L_1 = \{(b,c,b)|b,c \in \mathbb{R}\}$.

7. Diagonalizarea matricelor

Propoziţia 7.1. *Fie V/K un spaţiu vectorial finit dimensional şi $T \in \mathcal{L}_K(V)$, iar λ_0 o valoare proprie de multiplicitate $m \in \mathbb{N}^*$, adică $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$, $Q(\lambda_0) \neq 0$, $P(\lambda)$ fiind polinomul caracteristic al transformării T. Atunci $dim L_{\lambda_0} \leq m$, unde am notat cu $L_{\lambda_0} = \{x \in V|T(x) = \lambda_0 x\}$, subspaţiul propriu corespunzător valorii proprii λ_0.*

Demonstraţie. Fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ o bază în L_{λ_0}. Completăm baza $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ până la o bază în V şi găsim că matricea transformării T în baza astfel construită este de forma:

$$A = \{ \text{ k linii } \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix} \} \tag{7.1}$$

Atunci $P(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_0)^k P_1(\lambda)$ şi deci trebuie să avem $k \leq m$.

Propoziţia 7.2. *Fie $T \in \mathcal{L}_K(V)$. Presupunem că $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt n valori proprii distincte două câte două şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt vectori proprii corespunzători acestor valori. Atunci $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt liniar independenţi şi dacă, în plus, $dimV = n$, atunci $m_E(T) = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, unde $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ devine chiar bază în spaţiul vectorial V.*

Demonstraţie. Folosim raţionamentul inductiv după dimensiunea n.

Pentru $n = 1$ este evident.

Presupunem că $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $k < n$, sunt liniar independenţi. Vrem să arătăm că $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ sunt liniar independenţi. Fie

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{7.2}$$

Aplicând T găsim că:

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0. \tag{7.3}$$

Înmulţind (7.2) cu λ_{k+1} şi scăzând din (7.3) relaţia obţinută, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, deoarece $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0$, pentru $i \neq k+1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ şi demonstraţia este încheiată.

Propoziţia 7.3.(Criteriul diagonalizării) *Fie $T \in \mathcal{L}_K(V)$ o tranformare liniară a spaţiului vectorial finit dimensional V, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in K$ valori proprii diferite două câte două, de multiplicităţi $n_1, n_2, \ldots, n_p$ şi $\sum_{i=1}^{p} n_i$, unde $n = dimV$. Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) *T se poate diagonaliza, adică există o bază a spaţiului vectorial V faţă de care matricea transformării T este diagonală.*

2)$dimL_{\lambda_i} = n_i, \forall i = \overline{1,p}$.

DEMONSTRAŢIE. 1) $\Rightarrow$ 2) Dacă T se poate diagonaliza în baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, atunci $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt vectori proprii pentru T. Ei se pot repartiza astfel încât $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\} \subset L_{\lambda_1}$, $\{v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_2}\} \subset L_{\lambda_2}, \ldots, \{v_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1}, \ldots, v_{n_1+n_2+\ldots+n_p=n}\} \subset L_{\lambda_p}$.

Prin urmare, folosind şi Propoziţia 7.1, avem că $n_i \leq dimL_{\lambda_i} \leq n_i$, deci $dimL_{\lambda_i} = n_i$, $\forall i = \overline{1,p}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $\{e_{11}, \ldots, e_{1n_1}\}$ bază în $L_{\lambda_1}, \ldots, \{e_{p_1}, \ldots, e_{pn_p}\}$ bază în L_{λ_p}. Considerăm o combinaţie liniară a reuniunii e_{ij}-urilor: $\alpha_{11}e_{11} + \ldots + \alpha_{1n_1}e_{1n_1} + \ldots + \alpha_{p1}e_{p1} + \ldots + \alpha_{pn_p}e_{pn_p} = 0$. Notăm cu
$y_1 = \alpha_{11}e_{11} + \ldots + \alpha_{1n_1}e_{1n_1}, \ldots, y_p = \alpha_{p1}e_{p1} + \ldots + \alpha_{pn_p}e_{pn_p}$ şi avem că:

$$y_1 + \ldots + y_p = 0. \tag{7.4}$$

$y_1, \ldots, y_p$ sunt vectori proprii în $L_{\lambda_1}, \ldots, L_{\lambda_p}$.

Presupunem că o parte dintre aceştia sunt diferiţi de zero. Atunci sunt liniar independenţi, deoarece corespund unor valori proprii distincte (am folosit Propoziţia 7.2 şi Propoziţia 7.4) ceea ce conduce la o absurditate. Rezultă că $y_i = 0, \forall i = \overline{1,p}$.

Cum e_{ij} care apar în expresia lui y_i sunt liniar independenţi, rezultă că $\alpha_{ij} = 0$, pentru i fixat şi $\forall j = \overline{1,n}$.

Deci, în final, toţi α_{ij} sunt zero. Deoarece $\sum n_i = n$, mulţimea de vectori proprii $\{e_{11}, \ldots, e_{1n_1}, \ldots, e_{p1}, \ldots, e_{pn_p}\}$ formează o bază în V şi, prin urmare, T se poate diagonaliza.

Exemplul 7.4. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1+2x_2-6x_3, 2x_1+2x_2-5x_3, 2x_1+x_2-4x_3)$.

f are în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Cum $P_A(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ şi $dimL_1 = 1$ (L_1 este subspaţiul propriu corespunzător lui $\lambda = 1$), iar $n_1 = 2$, rezultă că f nu poate fi diagonalizat.

Observaţia 7.5. Dacă avem de rezolvat un sistem liniar $Ax = b$ şi A se poate diagonaliza în baza $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, baza formată din vectorii proprii, atunci $C^{-1}AC = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt toate valorile proprii ale matricei A în corpul K, iar C este matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor proprii. Atunci $C^{-1}Ax = C^{-1}b$, iar dacă $x = Cy$, $C^{-1}x = y$, sistemul este echivalent cu două sisteme, $C^{-1}ACy = C^{-1}b$ şi $x = Cy$; după ce determinăm y uşor, deoarece $C^{-1}AC = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, vom găsi apoi x din relaţia $x = Cy$.

Contraexemplul 7.6. Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu poate fi diagonalizată. În caz contrar, ar exista C astfel încât $C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$, sau $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C$, fapt absurd, deoarece C este inversabilă şi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aici $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, iar $dim L_1 = 1 < 2$.

8. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o aplicaţie definită prin
$f(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Arătaţi că f este liniară.

b) Construiţi matricea asociată aplicaţiei f în baza
$B = \left\{ I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Soluţie:a) Pentru a verifica liniaritatea aplicaţiei f considerăm $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$f(aX + bY) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (aX + bY) + (aX + bY) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = a \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right) + b \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y + Y \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right) = af(X) + bf(Y)$, deci aplicaţia f este liniară.

b) Baza B este considerată atât în domeniul cât şi în codomeniul aplicaţiei f.

$f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4$.

$f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -4 \cdot I_1 + 3 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4$.

$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - 3 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4$.

$f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 + 1 \cdot I_4$. În consecinţă matricea asociată aplicaţiei f în baza B este: $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Fie aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$.

a) Să se determine nucleul, imaginea, defectul şi rangul aplicaţiei f

b) Verificaţi dacă f este inversabilă şi, în caz afirmativ, determinaţi f^{-1}.

Soluție:a) Pentru a determina $Kerf$, nucleul aplicaţiei f, rezolvăm în $\mathbb{R}^3$ ecuaţia $f(x) = 0$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Atunci $(x_1+x_2-x_3, 2x_2+x_3, x_1-x_3) = 0 \to \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$. Rezolvând sistemul obţinem $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deci $x = 0$. În consecinţă $Kerf = \{0\}$.

Atunci $defect(f) = dim(Kerf) = 0$ şi din teorema rang-defect, fiind într-un spaţiu vectorial de dimensiune 3, obţinem $rang(f) = 3$, adică $dim(Imf) = 3$. Cum Imf este subspaţiu vectorial al $\mathbb{R}^3$, deducem $Imf = \mathbb{R}^3$.

b) Deoarece $Kerf = 0$, obţinem că f este injectivă, iar din faptul că $Imf = \mathbb{R}^3$, deducem că f este surjectivă. În consecinţă f bijectivă, deci f inversabilă. Pentru a determina $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rezolvăm ecuaţia $f(x) = y$, unde $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, unde necunscuta este x. Obţinem sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases}$ cu soluţia: $\begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_1 - y_3 \\ x_3 = -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$. Atunci $f^{-1}(y) = (-2y_1 + y_2 + 3y_3, y_1 - y_3, -2y_1 + y_2 + 2y_3)$.

3. Se consideră aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ astfel încât $f(e_1) = (1,1,1), f(e_2) = (0,1,0), f(e_3) = (0,1,0)$, unde $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

a) Să se calculeze $f(v)$, unde $v = (2,4,1)$;

b) Să se determine matricea lui f în baza $B' = \{e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (1,1,0), e'_3 = (1,1,1)\}$.

Soluție: a) $v = (2,4,1) = 2e_1+4e_2+e_3$. Atunci $f(v) = f(2e_1+4e_2+e_3) = 2f(e_1)+4f(e_2)+f(e_3) = 2(1,1,1)+4(0,1,0)+(0,1,0) = (2,7,2)$.

b) Pentru orice $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) = x_1(1,1,1) + x_2(0,1,0) + x_3(0,1,0) = (x_1, x_1 + x_2 + x_3, x_1)$. Atunci $f(e'_1) = (1,1,1) = e'_3$, $f(e'_2) = (1,2,1) = -e'_1 + e'_2 + e'_3$ şi $f(e'_3) = (1,3,1) = -2e'_1 + 2e'_2 + e'_3$.

Atunci $m_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Fie aplicaţiile liniare $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, date prin $f(x,y,z) = (x + 2y, y + 2z)$, $g(x,y,z) = (x - y - z, z)$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $af + bg = 0$.

Soluție:$af+bg=0 \Leftrightarrow (af+bg)(v)=0, \forall v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow af(v)+bg(v)=0, \forall v\in\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow a(x+2y,y+2z)+b(x-y-z,z)=0 \Leftrightarrow (ax+2ay+bx-by-bz, ay+2az+bz)=0, \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\begin{cases}(a+b)x+(2a-b)y-bz=0\\ ay+(2a+b)z=0\end{cases}$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Considerând, de exemplu $x=0, y=0, z=1$ obţinem $b=0$ şi $a=0$.

5. Fie U,V spaţii vectoriale peste K şi $f:U\to V$ o aplicaţie liniară. Arătaţi că:

a) $f(0)=0$ şi $f(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

b) $f(-x)=-f(x)$ şi $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

Soluție:a) Ştim că, pentru o aplicaţie liniară $f(\alpha x)=\alpha f(x), \forall\alpha\in K, x\in U$. Pentru $\alpha=0$ şi $x=0$ obţinem $f(0)=0$.

Cea de-a doua egalitate se demonstrează prin inducţie după $n\in\mathbb{N}^*$:

Pentru $n=1$, egalitatea rezultă din omogenitatea aplicaţiei liniare.

Pentru $n=2$, egalitatea este din nou evidentă din proprietăţile aplicaţiei liniare.

Presupunem $f(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)$ şi arătăm că $f(\sum\limits_{i=1}^{n+1}k_ix_i)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}k_if(x_i)$.

Într-adevăr $f(\sum\limits_{i=1}^{n+1}k_ix_i)=f(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i+k_{n+1}x_{n+1})=f(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ix_i)+f(k_{n+1}x_{n+1})=\sum\limits_{i=1}^{n}k_if(x_i)+k_{n+1}f(x_{n+1})=\sum\limits_{i=1}^{n+1}k_if(x_i)$ şi demonstraţia este încheiată.

b) Considerăm din nou relaţia $f(\alpha x)=\alpha f(x), \forall\alpha\in K, x\in U$. Pentru $\alpha=-1$ obţinem $f(-x)=-f(x)$.

Apoi, $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)$, unde la ultima egalitate am folosit relaţia demonstrată anterior.

6. Determinaţi nucleul, imaginea, defectul şi rangul pentru aplicaţia liniară $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+x_3+2x_4, x_1+x_4, x_2+x_4, x_3)$.

Soluție:$Ker g=\{x\in\mathbb{R}^4 | g(x)=0\}$.

Considerăm ecuaţia $g(x)=0, x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$. Obţinem $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\ x_1+x_4=0\\ x_2+x_4=0\\ x_3=0\end{cases}$ sistem compatibil simplu nedeterminat cu soluţia $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases}$, unde $t \in \mathbb{R}$ este un parametru real. În consecinţă $Kerg = \{(-t, -t, 0, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Evident $(-t, -t, 0, t) = t(-1, -1, 0, 1)$, deci $(-1, -1, 0, 1)$ este generator pentru $Kerg$ şi fiind nenul constituie chiar o bază pentru acesta. În consecinţă $defect(g) = dim(Kerg) = 1$. Atunci, din teorema rang-defect $rang(g) = 3$.

$Img = \{y \in \mathbb{R}^4 | \exists x \in \mathbb{R}^4$ astfel încât $g(x) = y\}$.

Considerăm $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ şi ecuaţia $g(x) = y$. Atunci $(x_1+x_2+x_3+2x_4, x_1+x_4, x_2+x_4, x_3) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = y_1 \\ x_1 + x_4 = y_2 \\ x_2 + x_4 = y_3 \\ x_3 = y_4 \end{cases}$. Înlocuind $x_1 = y_2 - x_4, x_2 = y_3 - x_4, x_3 = y_4$ în prima ecuaţie a sistemului obţinem condiţia de compatibilitate a acestuia, şi anume $y_1 = y_2 + y_3 + y_4$. În consecinţă $Img = \{(y_2 + y_3 + y_4, y_2, y_3, y_4) | y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}\}$. Am justificat deja că $rang(g) = dim(Img) = 3$, o bază pentru Img fiind $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

7. Studiaţi posibilitatea reducerii la forma diagonală pentru matricele: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluţie:Determinăm valorile proprii asociate matricei A, din ecuaţia $det(A - \lambda I_3) = 0$. Atunci $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, de unde se obţine efectuând calculele $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda + 14) = 0$ cu soluţiile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 7$, acestea fiind valorile proprii asociate matricei A, fiecare cu multiplicitatea algebrică 1.

Determinăm pentru fiecare valoare proprie subspaţiul vectorilor proprii.

Pentru $\lambda_1 = 0$, vectorii proprii corespunzători sunt soluţii ale ecuaţiei $(A - \lambda_1 I_3) \cdot v = 0$, adică $Av = 0$, unde $v = (v_1, v_2, v_3)$. Atunci $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} 5v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \\ 3v_1 + v_3 = 0 \end{cases}$.

Acest sistem este compatibil simplu nederminat şi are soluţiile $(v_1, v_2, v_3) = (t, 2t, -3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Atunci subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii λ_1 este $V_{\lambda_1} = \{(t, 2t, -3t) | t \in \mathbb{R}\}$. Evident $dim(V_{\lambda_1}) = 1$, $\{e_1 = (1, 2, -3)\}$ fiind o bază pentru V_{λ_1}.

Pentru $\lambda_2 = -2$, vectorii proprii corespunzători sunt soluţii ale ecuaţiei $(A - \lambda_2 I_3) \cdot v = 0$, adică $(A + 2I_3)v = 0$, unde $v = (v_1, v_2, v_3)$.
Atunci $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} 7v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \\ 3v_1 + 3v_3 = 0 \end{cases}$
Acest sistem este compatibil simplu nederminat şi are soluţiile $(v_1, v_2, v_3) = (t, -2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$. Atunci subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii λ_2 este $V_{\lambda_2} = \{(t, -2t, -t) | t \in \mathbb{R}\}$. Evident $dim(V_{\lambda_2}) = 1$, $\{e_2 = (1, -2, -1)\}$ fiind o bază pentru V_{λ_2}.

Pentru $\lambda_3 = 7$, vectorii proprii corespunzători sunt soluţii ale ecuaţiei $(A - \lambda_3 I_3) \cdot v = 0$, adică $(A - 7I_3)v = 0$, unde $v = (v_1, v_2, v_3)$. Atunci
$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_1 - 8v_2 = 0 \\ 3v_1 - 6v_3 = 0 \end{cases}$
sistem compatibil simplu nederminat cu soluţiile $(v_1, v_2, v_3) = (4t, t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Atunci subspaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii λ_3 este $V_{\lambda_3} = \{(4t, t, 2t) | t \in \mathbb{R}\}$. Evident $dim(V_{\lambda_3}) = 1$, $\{e_3 = (4, 1, 2)\}$ fiind o bază pentru V_{λ_3}.

Deoarece în fiecare caz $dim(V_{\lambda_i})$ coincide cu multiplicitatea algebrică a valorii λ_i, $i = \overline{1, 3}$, A este diagonalizabilă, iar forma ei diagonală este $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Baza în care matricea A are forma diagonală este reuniunea bazelor spaţiilor vectorilor proprii, adică $\{e_1 = (1, 2, -3), e_2 = (1, -2, -1), e_3 = (4, 1, 2)\}$.

Pentru matricea B procedăm similar. Determinăm valorile proprii din ecuaţia $det(B - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$
$(2-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^3 = 0$. Valorile proprii sunt deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, adică $\lambda_1 = 2$ are multiplicitatea algebrică $n_1 = 3$.

Determinăm subspaţiul vectorilor proprii corespunzători acestei valori din ecuaţia $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$, unde $v = (v_1, v_2, v_3)$. Se obţine
$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $\begin{cases} -2v_1 + v_2 = 0 \\ -4v_1 + 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$, sistem compatibil dublu nederminat cu soluţiile $(v_1, v_2, v_3) = (t, 2t, z)$, $t, z \in \mathbb{R}$. Atunci spaţiul vectorilor proprii corespunzători valorii $\lambda_1 = 2$ este $V_{\lambda_1} = \{(t, 2t, z) | t, z \in \mathbb{R}\}$. Evident $dim(V_{\lambda_1}) = 2$, $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ fiind o bază pentru V_{λ_1}.

Deoarece $dim(V_{\lambda_1}) \neq n_1$ rezultă că matricea B nu este diagonalizabilă.

8. Fie aplicaţia liniară $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x)=(x_1-x_2+x_3,x_2,x_2)$, unde $x=(x_1,x_2,x_3)$. Arătaţi că:

a) $f\circ f=f$;

b) $Imf\oplus Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)=\mathbb{R}^3$.

Soluție:a) Pentru orice $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $(f\circ f)(x)=$ $=f(f(x_1,x_2,x_3))=f(x_1-x_2+x_3,x_2,x_2)=(x_1-x_2+x_3-x_2+x_2,x_2,x_2)=(x_1-x_2+x_3,x_2,x_2)=f(x)$, deci $f\circ f=f$.

b) $Imf=\{y\in\mathbb{R}^3|\exists x\in\mathbb{R}^3$ astfel încât $f(x)=y\}$. Ecuaţia $f(x)=y$, cu $x=(x_1,x_2,x_3)$ şi $y=(y_1,y_2,y_3)$ conduce la $(x_1-x_2+x_3,x_2,x_2)=(y_1,y_2,y_3)$, de unde $\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_2\end{cases}$, deci $Imf=\{(a,b,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$. Astfel $dim(Imf)=2$.

$(1_{\mathbb{R}^3}-f)(x)=1_{\mathbb{R}^3}(x)-f(x)=(x_1,x_2,x_3)-(x_1-x_2+x_3,x_2,x_2)=(x_2-x_3,0,x_3-x_2)$.

$Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)=\{y\in\mathbb{R}^3|\exists x\in\mathbb{R}^3$ astfel încât $(1_{\mathbb{R}^3}-f)(x)=y\}$. Din $(1_{\mathbb{R}^3}-f)(x)=y$ obţinem $(x_2-x_3,0,x_3-x_2)=(y_1,y_2,y_3)$, de unde $\begin{cases}y_1=x_2-x_3\\ y_2=0\\ y_3=x_3-x_2\end{cases}$, deci $Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)=\{(c,0,-c)|c\in\mathbb{R}\}$. Astfel $dim(1_{\mathbb{R}^3}-f)=1$.

Determinăm elementele comune celor două imagini.

Fie $y\in Imf\cap Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)$. Atunci $y\in Imf$, deci $\exists a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $y=(a,b,b)$ şi $y\in Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)$, deci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $y=(c,0,-c)$. Atunci $(a,b,b)=(c,0,-c)$, de unde $a=b=c=0$. Atunci $Imf\cap Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)=\{0\}$, de unde obţinem că $Imf+Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)$ este o sumă directă.

În plus, $dim(Imf+Im(1_{\mathbb{R}^3}-f))=dim(Imf)+dim(1_{\mathbb{R}^3}-f)-dim(Imf\cap Im(1_{\mathbb{R}^3}-f))=2+1-0=3=dim(\mathbb{R}^3)$, deci $Imf\oplus Im(1_{\mathbb{R}^3}-f)=\mathbb{R}$.

9. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1&0&-3\\3&2&3\\-3&0&-1\end{pmatrix}$. Să se calculeze, pentru $n\in\mathbb{N}^*$, A^n.

Soluție:Determinăm valorile proprii ale matricei A din ecuaţia $det(A-\lambda I_3)=0$. Atunci $\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&-3\\3&2-\lambda&3\\-3&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-1-\lambda)^2(2-\lambda)-9(2-\lambda)=0\Rightarrow(2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8)=0$. Se obţin astfel valorile proprii $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=\lambda_3=2$, adică $\lambda_2=2$ are multiplicitatea algebrică 2.

Determinăm vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda_1 = -4$, din ecuaţia $(A - \lambda_1 I_3)u = 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$. De aici rezulă ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 - 3u_3 = 0 \\ 3u_1 + 6u_2 + 3u_3 = 0 \\ -3u_1 + 3u_3 = 0 \end{cases}$, de unde obţinem $\begin{cases} u_1 = u_3 = \alpha \\ u_2 = -\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $V_{\lambda_1} = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ şi $dim(V_{\lambda_1}) = 1$ care coincide cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_1.

Determinăm vectorii proprii corespunzători valorii $\lambda_2 = 2$, din ecuaţia $(A - \lambda_2 I_3)u = 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$. De aici rezulă ecuaţia matricială $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3u_1 - 3u_3 = 0 \\ 3u_1 + 3u_3 = 0 \\ -3u_1 - 3u_3 = 0 \end{cases}$, de unde obţinem $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_2 = \beta \\ u_3 = -\alpha \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci $V_{\lambda_2} = \{(\alpha, \beta, -\alpha) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ şi $dim(V_{\lambda_2}) = 2$ care coincide cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_2.

În consecinţă A este diagonalizabilă, iar forma diagonală a acesteia $A' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se obţine în baza $B' = \{(1, -1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ (această bază se obţine reunind bazele din V_{λ_1} şi V_{λ_2} şi evident nu este unică).

Matricea de trecere de la baza canonică B din $\mathbb{R}^3$ la baza B' este $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $A^n = S(A')^n S^{-1}$. Determinăm inversa matricei S: $detS = 2$, $S^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, iar $(A')^n = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Atunci $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, de unde obţinem: $A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-4)^n + 2^{n-1} & 0 & \frac{1}{2}(-4)^n - 2^{n-1} \\ -\frac{1}{2}(-4)^n + 2^{n-1} & 2^n & -\frac{1}{2}(-4)^n + 2^{n-1} \\ \frac{1}{2}(-4)^n - 2^{n-1} & 0 & \frac{1}{2}(-4)^n + 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

9. PROBLEME PROPUSE

1. Verificaţi dacă următoarele aplicaţii sunt liniare:
a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, x + y, yz)$.
b) $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$, unde $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

2. Fie $f \in \mathcal{L}(V, V)$ un endomorfism pentru care $f^2 - f + 1_V = 0_V$. Arătaţi că f este inversabil. (S-a notat cu f^2, compusa funcţiei f cu ea înseşi $f \circ f$, cu 1_V aplicaţia identică a mulţimii V şi cu 0_V aplicaţia nulă pe V).

3. Determinaţi nucleul, imaginea, defectul şi rangul pentru aplicaţia liniară: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y + z, x + y + 2z)$.

4. Precizaţi care din următoarele aplicaţii sunt liniare:
a) $F : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $F(p(x)) = p(x + 2) - p(x), \forall x \in \mathbb{R}$;
b) $G : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $G(p(x)) = xp(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Determinaţi valorile şi vectorii proprii pentru matricele
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie liniară dată prin $f(1, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1) = (0, 1, 1)$.
a) Să se determine $f(x)$, pentru un $x \in \mathbb{R}^2$ oarecare;
b) Să se găsească matricea lui f în raport cu bazele canonice din domeniu şi codomeniu;
c) Să se determine $Kerf$ şi Imf.

7. Arătaţi că aplicaţia $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = XA - AX$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, este liniară şi determinaţi defectul şi rangul acesteia.

8. Determinaţi matricele aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 - x_3)$, relativ la baza canonică şi apoi relativ la baza $B' = \{e'_1 = (1, 1, 1), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (0, 0, 1)\}$ din $\mathbb{R}^3$. Studiaţi posibiliatatea diagonalizării acestora.

9. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice şi P_A polinomul caracteristic asociat acesteia astfel încât $P_A(0) \neq 0$. Arătaţi că A este inversabilă şi că polinomul caracteristic asociat matricei A^{-1} este dat de relaţia: $P_{A^{-1}}(\lambda) = \dfrac{(-1)^n \lambda^n}{P_A(0)} P\left(\dfrac{1}{\lambda}\right), \lambda \neq 0$.

10. Verificaţi dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ este diagonalizabilă şi în caz afirmativ găsiţi forma diagonală a acesteia precum şi baza în care se obţine.

CAPITOLUL 4

Spaţii euclidiene

1. Produse scalare şi ortogonalitate

Spaţiile vectoriale considerate în capitolele anterioare au fost privite numai din punct de vedere aritmetic, adică am lucrat cu operaţiile obişnuite. În continuare, vom introduce un element nou, şi anume, o structură geometrică pe un spaţiu vectorial real sau complex. Această structură va permite măsurarea "distanţei dintre două elemente " şi a "unghiului dintre ele". Acest lucru se poate realiza simultan, prin introducerea unei funcţii *produs scalar*, pe un spaţiu vectorial real sau complex.

Definiţia 1.1. Fie $V/\mathbb{C}$ un spaţiu vectorial complex. Asociem oricărei perechi de vectori $x, y \in V$ un unic număr complex notat cu $< x, y >$ astfel încât să fie îndeplinite condiţiile:

1. $< y, x >= \overline{< x, y >}$, pentru orice $x, y \in V$;
2. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$, pentru orice $x, y, z \in V$;
3. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}, x, y, z \in V$;
4. $< x, x >\in \mathbb{R}$, $< x, x >\geq 0$, iar din $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$ (produsul scalar este pozitiv definit).

Observaţia 1.2. Putem omite, în general, din 4. implicaţia $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$.

Funcţia $(x, y) \rightarrow< x, y >$ care verifică proprietăţile 1-4 de mai sus se numeşte **produs scalar complex** definit pe V.

Spaţiul vectorial complex V împreună cu un produs scalar se numeşte **spaţiu euclidian complex** sau spaţiu unitar.

Din Definiţia 1.1 rezultă consecinţele:

1. $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$;
2. $< x, \alpha y >= \overline{\alpha} < x, y >$;
3. $< 0, y >= 0 =< x, 0 >$, unde $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exemplul 1.3. Fie $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n), w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Atunci putem defini produsul scalar complex $< z, w >= \sum\limits_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$, unde $\overline{w_i}$ este conjugatul complex al lui w_i.

Definiţia 1.4. Dacă $V/\mathbb{R}$ este un spaţiu vectorial real, atunci o asociere de forma $(x, y) \rightarrow< x, y >\in \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1. $< x, y >=< y, x >$;
2. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$;
3. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$;

4. $< x, x > \geq 0$, iar dacă $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in V$ se numeşte **produs scalar real**.

Un spaţiu vectorial real împreună cu un produs scalar se numeşte **spaţiu euclidian**.

Exemplul 1.5. Spaţiul vectorial al vectorilor aritmetici $\mathbb{R}^n$, împreună cu produsul scalar $< (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ este un spaţiu euclidian de dimensiune n.

Teorema 1.6(inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwartz). Fie $(V/\mathbb{R}, < , >)$ un spaţiu euclidian real. Atunci are loc inegalitatea: $| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in V$, unde prin $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ am notat norma vectorului x.

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ o variabilă oarecare şi relaţia $0 \leq < x + \lambda y, x + \lambda y >= \lambda^2 < y, y > +2\lambda < x, y > + < x, x >, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, deci $\Delta = 4 < x, y >^2 -4 < x, x >< y, y > \leq 0$, sau $| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Observaţia 1.7. $(V, \|\cdot\|)$ este un spaţiu topologic normat. Verificarea celor trei proprietăţi ale normei le lăsăm cititorului.

Consecinţa 1.8. Definim cosinusul unghiului a doi vectori nenuli $x, y \in V$, prin formula $\cos(x, y) \stackrel{def}{=} \dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$.

Această formulă defineşte în mod unic unghiul a doi vectori nenuli x şi y: $\alpha = \arccos \dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [0, \pi]$.

Scriem $x \perp y$ (x este ortogonal sau perpendicular pe y) dacă $< x, y >= 0$.

Pentru $y \neq 0$ definim proiecţia vectorului x de-a lungul direcţiei vectorului y prin formula: $pr_y x = \dfrac{< x, y >}{\|y\|}$.

Dacă $S \subset V$ este un subspaţiu vectorial în V, notăm cu $S^\perp = \{x \in V | x \perp y, \forall y \in S\}$.

$S^\perp$ se numeşte subspaţiul din V ortogonal pe S.

Se poate arăta că $S \oplus S^\perp = V$, de aceea $S^\perp$ se mai numeşte şi **complementul ortogonal** al subspaţiului S în V.

Teorema 1.9(Teorema lui Pitagora). *Fie x, y vectori în spaţiul euclidian $(V, < , >)$. Atunci:*

$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Demonstraţie. $< x + y, x + y >=< x, x > + < y, y > +2 < x, y >$. Prin urmare, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow < x, y >= 0$.

Teorema 1.10(Teorema paralelogramului). *Fie x, y vectori în spaţiul euclidian $(V, < , >)$. Atunci:*

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Demonstraţie. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 =< x + y, x + y > + < x - y, x - y >= 2 < x, x > +2 < y, y >= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Exemplul 1.11. Considerăm $V = \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ şi $< A, B >= \sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$, unde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Scriem $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, deci $(V, \|\cdot\|)$ devine spaţiu normat (şi metric în particular).

Deoarece $V \cong \mathbb{R}^{nm}$, izomorfismul f definit între cele două spaţii fiind chiar de spaţii metrice($x_n \to x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ în $\mathbb{R}^{nm}$) rezultă că V este un spaţiu Hilbert (euclidian complet).

Definiţia 1.12. Un sistem de vectori nenuli $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ se numeşte **ortogonal** dacă $x_i \perp x_j, \forall i \neq j$. Sistemul se zice **ortonormat** dacă, în plus faţă de ortogonalitate avem $\|x_i\| = 1, \forall i = \overline{1, n}$.

Exemplul 1.13. $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ în $\mathbb{R}^3$ este ortogonal faţă de produsul scalar introdus în Ex. 1.3.

Propoziţia 1.14. *Orice sistem de vectori ortogonali $S = \{x_1, x_2, ..\}$ este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ o combinaţie liniară de vectori din S cu scalari din K. Pentru orice $i = \overline{1, n}$, rezultă că $< \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_n x_n, x_i >= 0 = \alpha_i < x_i, x_i >$, deci $\alpha_i = 0$. Prin urmare S liniar independent.

Fie $W = L\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, unde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ este ortonormat. Pentru $x \in W$, notăm cu $\alpha_j =< x, x_j >$; α_j se numeşte **coeficientul Fourier** al elementului x la componenta x_j.

Exemplul 1.15. $x = (1, 2, 3) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$; $1, 2, 3$ sunt coeficienţii Fourier ai elementului $x \in \mathbb{R}^3$.

Propoziţia 1.16. Orice spaţiu vectorial real finit-dimensional V admite o structură de spaţiu euclidian.

Demonstraţie. Se ştie că $V \cong \mathbb{R}^n$, unde $n = dimV$.

Fie $f : V \to \mathbb{R}^n$ acest izomorfism. Definim $< x, y >=< f(x), f(y) >$, pentru orice $x, y \in V$. Se arată uşor că $(V, < , >)$ este un spaţiu euclidian. Spunem că structura euclidiană pe V este aceea indusă de $\mathbb{R}^n$ prin izomorfismul f.

Definiţia 1.17. O bază $E = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ se numeşte ortogonală (ortonormată) dacă E este o mulţime de vectori ortogonală (ortonormată).

Propoziţia 1.18. *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu vectorial real sau complex şi $E = \{e_i\}_{i \in I}$ o bază oarecare ortonormată în V. Considerăm $x \in V$, $x = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \ldots + \alpha_n e_{i_n}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K(\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C})$. Atunci relaţia $\|x\| = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}$, furnizează un mod de calcul efectiv al lungimii vectorilor dintr-un spaţiu euclidian.*

Demonstraţie. Într-adevăr, $\|x\| = \sqrt{< x, x >} =$
$\sqrt{< \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \ldots + \alpha_n e_{i_n}, \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \ldots + \alpha_n e_{i_n} >} =$
$\sqrt{\alpha_1 \overline{\alpha_1} < e_{i_1}, e_{i_1} > + \alpha_2 \overline{\alpha_2} < e_{i_2}, e_{i_2} > + \ldots + \alpha_n \overline{\alpha_n} < e_{i_n}, e_{i_n} >} =$
$\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2}$, deoarece $< e_{i_1}, e_{i_1} >= \ldots =< e_{i_n}, e_{i_n} >= 1$, iar $< e_{i_j}, e_{i_k} >= 0$, pentru $j \neq k$.

Propoziţia 1.19. *Fie* $(V, <,>)$ *şi* $(V', <,>')$ *două spaţii euclidiene peste corpul* K*(*$K = \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{C}$*) şi* $T : V \to V'$ *o aplicaţie liniară care duce o bază ortonormată* $\{e_i\}_{i\in I}$ *din* V *într-o bază ortonormată* $\{T(e_i)\}_{i\in I}$ *din* V'*. Atunci:*

$$< x, y >=< T(x), T(y) >' \tag{1.1}$$

şi

$$\|x\| = \|T(x)\|' = \sqrt{|\alpha_{i_1}|^2 + |\alpha_{i_2}|^2 + \ldots + |\alpha_{i_m}|^2}, \tag{1.2}$$

unde $x = \alpha_{i_1}e_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_m}e_{i_m}$ *şi* $y \in V$*, aleşi arbitrar.*

Demonstraţie. Fie $y \in V$, $y = \beta_{i_1}e_{i_1} + \ldots + \beta_{i_m}e_{i_m}$, unde vom presupune că s-a luat pentru x şi y o mulţime suficient de mare de indici $i_1, i_2, \ldots, i_m$, care apar atât în exprimarea lui x, cât şi în exprimarea lui y.

$< T(x), T(y) >'= \alpha_{i_1}\beta_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_m}\beta_{i_m} =< x, y >$, deoarece cele două baze $\{e_i\}$ şi $\{T(e_i)\}$ sunt ortonormate.

Spunem că, o aplicaţie liniară cu proprietatea (1.1) este o **izometrie** sau că V şi V' sunt izometrice.

Corolarul 1.20. Orice spaţiu euclidian real de dimensiune n este izometric cu $\mathbb{R}^n$ şi orice spaţiu euclidian complex (spaţiu unitar) de dimensiune n este izometric cu $\mathbb{C}^n$.

Demonstraţie. Fie $(V, < , >)$ un spaţiu euclidian peste corpul K($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), de dimensiune n şi $E' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ o bază ortonormată în V. Notăm cu $E = \{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$ baza ortonormată în K^n.

Definim aplicaţia liniară $T : V \to K^n$ prin formulele $T(e'_i) = e_i, i = \overline{1, n}$. Cum cele două baze sunt ortonormate, din Propoziţia 1.19 rezultă că T este o izometrie.

Observaţia 1.21. Două spaţii euclidiene sunt izometrice dacă sunt izomorfe şi izomorfismul T dintre ele invariază produsele scalare, adică avem (1.1).

2. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Teorema 2.1(Teorema de ortogonalizare Gram-Schmidt). *Orice spaţiu euclidian* V *care admite o bază numărabilă* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *admite şi o bază ortonormată* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$*. Mai mult, această bază se poate construi astfel încât* $L\{f_1, f_2, \ldots, f_i\} = L\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$*,* $\forall i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$*.*

Demonstraţie. Este suficient să găsim o bază ortogonală cu proprietatea de mai sus, deoarece orice vector $v \neq 0$ se poate norma prin înmulţirea lui cu $\frac{1}{\|v\|}$. Restul proprietăţilor cerute nu se vor altera prin această operaţie de normare.

Vom considera $e'_1 = f_1$; apoi căutăm $\alpha_{21} \in K (K = \mathbb{R}$ sau $C)$, astfel încât vectorul $e'_2 = f_2 + \alpha_{21} e'_1$ să fie perpendicular pe e'_1, adică $< e'_2, e'_1 >= 0 =< f_2, e'_1 > +\alpha_{21} < e'_1, e'_1 >$, de unde $\alpha_{21} = -\dfrac{< f_2, e'_1 >}{< e'_1, e'_1 >}$.

Se caută în continuare e'_3 de forma $e'_3 = f_3 + \alpha_{31} e'_1 + \alpha_{32} e'_2$, astfel încât $e'_3 \perp e'_1$ şi $e'_3 \perp e'_2$.

Vom găsi $\alpha_{31} = \dfrac{- < f_3, e'_1 >}{< e'_1, e'_1 >}$ şi $\alpha_{32} = -\dfrac{< f_3, e'_2 >}{< e'_2, e'_2 >}$

Se continuă procedeul în acest fel. La pasul k se caută e'_k astfel încât $e'_k \perp e'_1, e'_k \perp e'_2, \ldots, e'_k \perp e'_{k-1}$, iar $e'_k = f_k + \alpha_{k1} e'_1 + \ldots + \alpha_{k,k-1} e'_{k-1}$. Se găseşte prin "înmulţire scalară" succesivă cu $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k-1}$ că:
$\alpha_{k1} = -\dfrac{< f_k, e'_1 >}{< e'_1, e'_1 >}, \alpha_{k2} = -\dfrac{< f_k, e'_2 >}{< e'_2, e'_2 >}, \ldots, \alpha_{k,k-1} = -\dfrac{< f_k, e'_{k-1} >}{< e'_{k-1}, e'_{k-1} >}$.

Pentru i fixat, matricea de trecere de la $\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$ la $\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ este de forma: $C_i = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, deci $det C_i = 1$, C_i este inversabilă şi inversa ei este de aceeaşi formă triunghiulară, cu 1 pe diagonala principală.

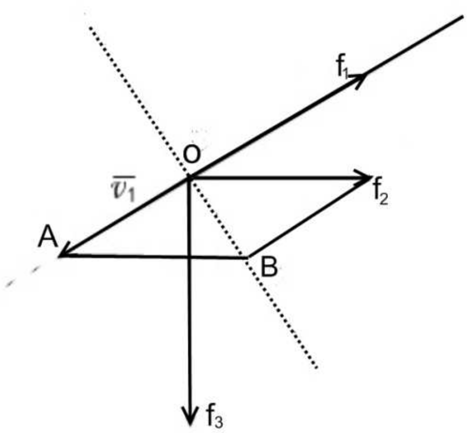
Prin urmare:
$f_1 = e'_1$
$f_2 = e'_2 + \alpha'_{21} e'_1$
$f_3 = e'_3 + \alpha'_{31} + \alpha'_{32} e'_2$
$\vdots$
$f_i = e'_i + \alpha'_{i1} e'_1 + \ldots + \alpha'_{i,i-1} e'_{i-1}$

De aici rezultă că $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, \ldots\}$ este o bază ortogonală în V, iar $L\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_i\} = L\{f_1, f_2, \ldots, f_i\}$, pentru $i = 1, 2, \ldots$.

Spunem că am ortogonalizat baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ prin procedeul Gram-Schmidt şi am obţinut baza ortogonală $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, \ldots\}$.

Notăm acum cu $e_k = \dfrac{e'_k}{\|e'_k\|}$ şi găsim o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ astfel încât $L\{e_1, \ldots, e_i\} = L\{f_1, \ldots, f_i\}$, pentru $i = 1, 2, \ldots$.

Remarca 2.2. Ideea procedeului Gram-Schimdt este următoarea:



Considerăm $e_1' = f_1$ şi direcţia $\overline{OB} \perp f_1$, în planul (f_1, f_2); se construieşte B astfel încât $\overline{OB} = f_2 + \overline{OA}$, unde $\overline{OA}$ are aceeaşi direcţie cu f_1; se caută un vector $v_1 \in L\{f_1\}$ astfel încât $(f_2 + \overline{v}_1) \perp f_1$, iar $\overline{v_1} = \overline{OA}$. Se scrie $e_2' = f_2 + \overline{v}_1$. Se caută apoi un vector $\overline{v}_2 \in L\{f_1, f_2\} = L\{e_1', e_2'\}$, astfel încât $(f_3 + \overline{v}_2) \perp f_1, f_2$, adică $\perp$ pe $L\{f_1, f_2\} = L\{e_1', e_2'\}$, sau $(f_3 + \overline{v}_2) \perp e_1', e_2'$, etc. La pasul k, sunt deja construiţi vectorii $e_1', e_2', \ldots, e_{k-1}'$. Se caută un vector $\overline{v}_{k-1} \in L\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ astfel încât $(f_k + \overline{v}_{k-1}) \in L\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}^\perp$. Deci se pot înlocui în raţionament $e_1', e_2', \ldots, e_{k-1}'$ cu $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$.

Exemplul 2.3. Fie $V = \mathbb{R}^3$ ca spaţiu euclidian în raport cu produsul scalar canonic şi $B = \{f_1 = (1, -2, 2), f_2 = (-1, 0, -1), f_3 = (5, -3, -7)\}$ o bază fixată. Să se determine o bază ortonormată.

Soluție:Avem $e_1 = f_1 = (1, -2, 2)$, $e_2 = f_2 - \dfrac{< f_2, e_1 >}{\|e_1\|^2} \cdot e_1$, $e_3 = f_3 - \dfrac{< f_3, e_1 >}{\|e_1\|^2} \cdot e_1 - \dfrac{< f_3, e_2 >}{\|e_2\|^2} \cdot e_2$ şi cum $\dfrac{< f_2, e_1 >}{\|e_1\|^2} = \dfrac{-1 + 0 - 2}{9} = -\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{< f_3, e_1 >}{\|e_1\|^2} = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{< f_3, e_2 >}{\|e_2\|^2} = 1$ obţinem:

$$e_2 = (-1, 0, -1) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) \Rightarrow e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$e_3 = (5, -3, -7) + \frac{1}{3}(1, -2, 2) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow e_3 = (6, -3, -6)$$

Atunci baza ortonormată este:

$B^* = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \frac{e_2}{\|e_2\|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \frac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}$

Corolarul 2.4. Orice mulţime de elemente ortogonale $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ poate fi completată până la o bază ortogonală $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ în V, unde s-a presupus că $dimV = n$. În plus, dacă $S = L\{e_1, \ldots, e_k\}$, unde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ este o bază ortogonală în S, atunci $S^\perp = L\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$.

Demonstraţie. Se cunoaşte faptul că $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ este liniar independetă, deci se poate completa până la o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ în V. Acum vom continua procesul de ortogonalizare de la pasul $k+1$, adică vom căuta $e_{k+1} = f_{k+1} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k$ astfel încât $e_{k+1} \perp e_1$, $e_{k+1} \perp e_2, \ldots, e_{k+1} \perp e_k$. Găsim: $\alpha_1 = -\dfrac{< f_{k+1}, e_1 >}{< e_1, e_1 >}$, $\alpha_2 = -\dfrac{< f_{k+1}, e_2 >}{< e_2, e_2 >}, \ldots \alpha_k = -\dfrac{< f_{k+1}, e_k >}{< e_k, e_k >}$. Se caută e_{k+2} în acelaşi mod, ş.a.m.d.

Restul afirmaţiilor le lăsăm ca exerciţiu pentru cititor.

3. Transformări ortogonale. Aplicaţii

Fie $(V, < , >)$ un spaţiu euclidian real sau complex ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

Definiţia 3.1. O transformare liniară $T : V \to V$ care păstrează invariante lungimile vectorilor ($\|T(x)\| = \|x\|, \forall x \in V$) şi mărimile unghiurilor dintre vectori nenuli ($(\widehat{x, y}) = (\widehat{T(x), T(y)}), \forall x, y \in V$) se numeşte **transformare ortogonală**.

În continuare vom găsi câteva proprietăţi importante ale transformărilor ortogonale şi le vom determina chiar structura.

Exemplul 3.2. Simetria faţă de axa Ox este o transformare ortogonală a planului.

Într-adevăr, faţă de un reper cartezian xOy, simetria faţă de axa Ox se poate scrie sub forma: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, -y)$, adică $T(M) = M'$, unde $M(x, y)$, iar $M'(x, -y)$.

La fel, simetria faţă de axa Oy este o transformare ortogonală $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $U(x, y) = (-x, y)$.

Este evident că T şi U păstrează lungimile vectorilor şi mărimea unghiurilor, dacă nu ţinem seama de sensul lor.

Exemplul 3.3. Fie $(\mathcal{P})$ un plan şi xOy un reper cartezian drept în acest plan. Fixăm un unghi $\theta \in [0, 2\pi]$ şi asociem vectorului $\overline{OM} \neq \overline{0}$, vectorul rotit cu θ grade în sensul "de la Ox la Oy" (direct trigonometric), OM'.

Asocierea $\overline{OM} \to \overline{OM'}$ furnizează o aplicaţie de la spaţiul vectorilor liberi din planul $(\mathcal{P})$ în el însuşi. Aceasă transformare se numeşte rotaţia de unghi θ şi se notează cu R_θ.

Este clar că R_θ este liniară şi chiar ortogonală.

Propoziţia 3.4. *O transformare liniară $T : V \to V$ este ortogonală dacă şi numai dacă $< T(x), T(y) >=< x, y >$ pentru oricare vectori $x, y \in V$.*

Demonstraţie. Presupunem că $T : V \to V$ este ortogonală. Atunci $\|T(x)\| = \|x\|$, pentru orice $x \in V$ şi $(\widehat{x, y}) = (\widehat{T(x), T(y)})$, pentru orice $x, y \in V$.

Dacă $x = 0$, sau $y = 0$ atunci este clar. Presupunem $x \neq 0, y \neq 0$. Folosind egalitatea:

$cos(\widehat{x,y}) = cos(\widehat{T(x),T(y)}), \forall x,y \in V$ găsim că: $\dfrac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{<T(x),T(y)>}{\|T(x)\| \cdot \|T(y)\|}$. Cum $\|x\| = \|T(x)\|$ şi $\|y\| = \|T(y)\|$ rezulă $<T(x),T(y)> = <x,y>$.

Reciproc, presupunem $<T(x),T(y)> = <x,y>$, pentru orice $x,y \in V$.

În particular, $<T(x),T(x)> = <x,x>$, sau $\|T(x)\| = \|x\|$, pentru orice $x \in V$. Din $<T(x),T(y)> = <x,y>$, $\|T(x)\| = \|x\|$ şi $\|T(y)\| = \|y\|$ rezultă:

$$cos(\widehat{x,y}) = \frac{<x,y>}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{<T(x),T(y)>}{\|T(x)\| \cdot \|T(y)\|} = cos(\widehat{T(x),T(y)}).$$

Prin urmare, T este ortogonaă conform Definiţiei 3.1, deoarece orice unghi $\theta \in [0,\pi]$ este complet determinat de cosinusul său.

Observația 3.5. Fie $T \in \mathcal{L}_K(V)$, care păstrează lungimile vectorilor. Atunci T este ortogonală, adică păstrează şi unghiurile dintre vectori nenuli. Cititorul poate considera această observaţie ca exerciţiu demonstrând separat pentru $K = \mathbb{R}$ şi $K = \mathbb{C}$.

Exemplul 3.6. Fie $\alpha \neq 0, \pm 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $g(x) = \alpha x$. Transformarea liniară g păstrează mărimea unghiurilor (în acest caz există numai două unghiuri $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$), dar în mod clar g nu păstrează lungimile vectorilor (de exemplu, $g(3) = 3\alpha$ şi $|3\alpha| \neq 3$, pentru $\alpha \neq \pm 1$).

Prin urmare g nu este ortogonală dacă $\alpha \neq \pm 1$.

Corolarul 3.7. Transformările ortogonale sunt aplicaţii injective, iar dacă $dimV = n < \infty$, atunci ele sunt izomorfisme (automorfisme).

Demonstraţie. Fie $T : V \to V$ ortogonală şi $T(x) = 0$. Cum $\|T(x)\| = \|x\|$, rezultă $x = 0$, deci $KerT = \{0\}$, de unde obţinem injectivitatea aplicaţiei T.

Dacă $dimV = n < \infty$, din teorema rang-defect rezultă $dimImT = n$, adică T este şi surjectivă.

Un izomorfism care păstrează lungimile vectorilor se numeşte **izometrie**.

Exemplul 3.8. Simetriile şi rotaţiile sunt izometrii.

Fie $a_0 \neq 0$, $a_0 \in \mathbb{R}^3$ şi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o funcţie definită prin formula $f(x) = a_0 + x$. Este clar că f nu este o aplicaţie liniară. Totuşi f păstrează lungimile vectorilor, deoarece $\|(a_0 + x) - (a_0 + y)\| = \|x - y\|$. Aplicaţia f se numeşte **translaţie**.

Compunerile dintre translaţii, simetrii (faţă de diferite plane) şi rotaţii (în jurul dreptelor din spaţiul intuitiv) formează deplasările în spaţiul intuitiv.

Deplasările formează un grup numit grupul deplasărilor.

Se poate demonstra că deplasările sunt singurele aplicaţii continue care nu deformează figurile. Acest rezultat este folosit în mecanică.

Propoziţia 3.9. *O transformare liniară $T : V \to V$ este ortogonală atunci şi numai atunci când duce orice versor tot într-un versor.*

Demonstraţie. Este clar că, dacă $\|x\| = 1$ şi T este ortogonală, atunci $\|T(x)\| = \|x\| = 1$.

Reciproc, fie $T : V \to V$ o aplicaţie liniară care duce orice versor $u \in V$ tot într-un versor $T(u)$ şi $y \in V, y \neq 0$ un vector oarecare.

Atunci $\dfrac{y}{\|y\|}$ este un versor şi din ipoteză avem $\|T\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right)\| = 1$. Dar T este liniară, prin urmare $1 = \|T(\dfrac{y}{\|y\|})\| = \|\dfrac{T(y)}{\|y\|}\| = \dfrac{\|T(y)\|}{\|y\|}$, deci $\|T(y)\| = \|y\|$. De aici rezulă că T conservă lungimile vectorilor şi deci este ortogonală.

Corolarul 3.10. Fie $(V, < \, , \, >)$ un spaţiu euclidian real sau complex şi $T : V \to V$, o transformare liniară. Considerăm în V o bază ortonormată oarecare $E = \{e_i\}_{i \in I}$. Atunci T este ortogonală dacă şi numai dacă $E' = \{T(e_i)\}_{i \in I}$ este o bază ortonormată în V.

Demonstraţie. Dacă T este ortogonală este clar că ea duce o bază ortonormată tot într-o bază ortonormată, deoarece conservă lungimile vectorilor şi unghiurile dintre ei. Vom arăta acum că este suficient ca T să ducă o singură bază ortonormată tot într-o bază ortonormată pentru ca T să fie ortogonală.

Fie $x \in V$, $x \neq 0$ şi $x = \alpha_1 e_{i_1} + \alpha_2 e_{i_2} + \ldots + \alpha_n e_{i_n}$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt elemente în $K (K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C})$. Calculăm:

$\|T(x)\| = \|\alpha_1 T(e_{i_1}) + \alpha_2 T(e_{i_2}) + \ldots + \alpha_n T(e_{i_n})\| =$
$\sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^n} = \|x\|$, deci T este ortogonală deoarece nu schimbă lungimile vectorilor.

Pe scurt, putem spune că T este ortogonală dacă şi numai dacă duce baze ortonormate tot în baze ortonormate.

Remarca 3.11. Folosind Propoziţia 1.16 şi Corolarul 3.11 se poate arăta că oricare două spaţii euclidiene reale sau complexe de aceeaşi dimensiune sunt izometrice. Altfel spus, există un singur tip de spaţii euclidiene reale (sau complexe) de dimensiune n, şi anume $\mathbb{R}^n$ (sau $\mathbb{C}^n$).

În continuare vom analiza matricea unei transformări ortogonale relativ la o bază ortonormată. Vom posta următoarea propoziţie fără a o demonstra.

Propoziţia 3.12. *Fie $T : V \to V$ o transformare ortogonală, unde $dim V = n$, iar $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în V. Notăm cu $A = m_E(T)$. Atunci $A \cdot \overline{A}^t = \overline{A}^t \cdot A = I_n$, unde $\overline{A}$ este conjugata matricei A, iar $\overline{A}^t$ este transpusa matricei $\overline{A}$. Altfel spus, coloanele(liniile) matricei A sunt vectori de normă 1, ortogonali între ei. În particular, $|detA| = 1$ şi $A^{-1} = \overline{A}^t$. Dacă $K = \mathbb{R}$, atunci $detA = \pm 1$ şi $A^{-1} = A^t$.*

Definiţia 3.13. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, pentru care $A^{-1} = \overline{A}^t$ se numeşte **matrice ortogonală** sau unitară.

În particular, o matrice reală A este ortogonală dacă şi numai dacă inversa ei A^{-1} este chiar transpusa A^t.

Din Propoziţia 3.12 rezultă că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este ortogonală dacă şi numai dacă coloanele (sau liniile) ei sunt vectori ortonormaţi faţă de produsul scalar corespunzător din K^n. Amintim că în cazul $K = \mathbb{R}$, acest produs scalar este dat de formula:
$< (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, iar în cazul în care $K = \mathbb{C}$ produsul scalar este definit prin formula:
$< (z_1, z_2, \ldots, z_n), (w_1, w_2, \ldots, w_n) >= z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \ldots + z_n\overline{w_n}$, unde $\overline{w_i}$ este conjugatul complex al numărului complex w_i, pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Exemplul 3.14. Fie $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ un reper cartezian drept în spaţiul intuitiv. Considerând produsul scalar obişnuit între vectori şi baza ortonormată $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, matricele asociate simetriilor faţă de planele de coordonate sunt matrice de forma: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ unde -1 apare într-un singur loc. Acestea sunt în mod clar matrice ortogonale.

De exemplu, simetria faţă de planul xOy se descrie prin aplicaţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, -z)$. În baza canonică $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ sau în baza corespunzătoare din $\mathbb{R}^3$, $E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ avem $m_E(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Din cele de mai sus rezultă următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.15. *Fie $V = L\{e_1, \ldots, e_n\}$ unde $E = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază ortonormată în spaţiul euclidian real sau complex V, iar $T : V \to V$ o aplicaţie liniară cu matricea $A = m_E(T)$. Aplicaţia liniară T este ortogonală atunci şi numai atunci când matricea A este o matrice ortogonală.*

Propoziţia 3.16. *Singurele valori proprii reale ale unei transformări ortogonale T (sau ale unei matrice ortogonale A) sunt 1 sau -1.*

Demonstraţie. Fie λ o valoare proprie reală a transformării ortogonale T şi $x \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $T(x) = \lambda x$. De aici rezultă că $< T(x), T(x) >= \lambda^2 < x, x >=< x, x >$. Cum $x \neq 0$, $< x, x >\neq 0$, de unde $\lambda^2 = 1$ şi deci $\lambda = 1$ sau $\lambda = -1$.

Propoziţia 3.17. *Pe $\mathbb{R}$ avem numai două transformări liniare ortogonale: identitatea $T(x) = x$ şi simetria faţă de origine, $T(x) = -x$.*

Demonstraţie. Fie T o transformare liniară ortogonală pe $\mathbb{R}$ şi $x_0 > 0$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = \alpha x_0$.

Deoarece T este liniară se poate scrie că $T(x) = \alpha T(x_0)$.

Dar T ortogonală, prin urmare $\|T(x_0)\| = |T(x_0)| = |x_0| = x_0$, deci $T(x_0) = \pm x_0$.

Prin urmare, rezultă că $T(x) = \pm\alpha x_0 = \pm x$, adică $T(x) = x$, sau $T(x) = -x$.

Exemplul 3.18. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $f : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, D un domeniu complex, iar f este analitică în z_0 cu $f'(z_0) \neq 0$.

Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, unde $z = x + yi$. Matricea lui Jacobi în z_0 este :$J_{z_0}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$.

Datorită condiţiilor Cauchy-Riemann în $z_0 = x_0 + iy_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ şi folosind formula $|f'(z_0)| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2}_{|(x_0,y_0)}$ rezultă că matricea $J_{z_0}(u,v)/|f'(z_0)|^2$ este ortogonală.

Teorema 3.19 (teorema de structură a transformărilor ortogonale pe spaţii bidimensionale). *Dacă identificăm punctele unui plan $(\mathcal{P})$ în care am considerat un reper cartezian drept xOy şi o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, cu coordonatele lor faţă de acest reper, adică cu spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^2$, atunci orice transformare ortogonală a planului $\mathbb{R}^2$ este o rotaţie, sau o simetrie faţă de o dreaptă care trece prin origine.*

Mai general, orice transformare ortogonală a unui spaţiu euclidian bidimensional V are ca matrice asociată într-o anumită bază ortonormată, fie o matrice de rotaţie de forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *fie o matrice de simetrie de forma:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Demonstraţie. Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o transformare ortogonală şi $T(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$, $T(e_2) = \gamma e_1 + \delta e_2$, unde $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Prin urmare, matricea transformării în baza ortonormată $E = \{e_1, e_2\}$ este o matrice ortogonală.

Fie $m_E(T) = A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$.

Distingem doă cazuri:

1) $detA = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$

Atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, adică rezultă $\alpha = \delta$ şi $\gamma = -\beta$. Din ipoteza $detA = 1$, rezultă $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Prin urmare matricea A devine: $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} & \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{pmatrix}$

Există deci un unghi unic $\theta \in [0, 2\pi)$, astfel încât $\alpha = \cos\theta$ şi $\beta = \sin\theta$. În acest caz matricea A este: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ şi deci T este o rotaţie de unghi θ.

2) $detA = \alpha\delta - \beta\gamma = -1$

Atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\delta & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de unde rezultă că $\alpha = -\delta$ şi $\beta = \gamma$.

Din ipoteză $detA = -1$ avem relaţia $-\alpha^2 - \beta^2 = -1$, sau $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, iar A devine: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, iar vectorii proprii normaţi corespunzători îi notăm cu e'_1 şi e'_2. Aceşti vectori pot fi aleşi astfel încât baza $\{e'_1, e'_2\}$ să aibă aceeaşi orientare cu baza $\{e_1, e_2\}$. Acest lucru se realizează inversând ordinea elementelor e'_1, e'_2 în baza $\{e'_1, e'_2\}$.

În această bază nouă matrice A devine $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, adică $T(e'_1) = e'_1$ şi $T(e'_2) = -e'_2$. Este clar că, în acest caz, transformarea T este chiar simetria faţă de dreapta care trece prin originea axelor şi are ca direcţie direcţia vectorului e'_1.

Teorema 3.19 oferă exact structura tuturor transformărilor ortogonale în plan, precum şi structura matricelor ortogonale pătratice (orice astfel de matrice este asemenea cu o matrice de rotaţie, sau cu o matrice de simetrie).

Ultima afirmaţie din teorema de mai sus se demonstrează la fel, cu condiţia ca $\{e_1, e_2\}$ să fie considerată o bază ortonormată oarecare în V.

V este izometric cu $\mathbb{R}^2$ şi orice consideraţie de tip euclidian din $\mathbb{R}^2$ este valabilă în V.

Teorema 3.20 (teorema de structură a transformărilor ortogonale pe spaţii tridimensionale). *Fie* $T : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ *o transformare liniară ortogonală. Atunci există o bază ortonormată* $E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ *orientată direct faţă de baza canonică* $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *astfel încât matricea transformării* T *în noua bază* E' *să aibă una din formele:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, unde $\varphi \in [0, 2\pi)$.

În primul caz, T reprezintă rotaţia de unghi φ în planul determinat de vectorii e'_2 şi e'_3, iar în al doilea, T reprezintă compunerea dintre rotaţia de unghi φ în planul determinat de e'_2 şi e'_3 şi simetria faţă de

acelaşi plan, deoarece, în al doilea caz, matricea este produsul matricial:
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Demonstraţie. Polinomul catacteristic al transformării T are gradul trei, deci el are cel puţin o rădăcină reală λ_1.

Din Propoziţia 3.16, rezulă $\lambda_1 = 1$ sau $\lambda_1 = -1$.

Fie e_1' un vector propriu de normă 1 corespunzător valorii proprii λ_1. Notăm cu $M_1 = L\{e_1'\}$ şi cu $M_1' = M_1^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid < x, y >= 0,$ pentru orice $y \in M_1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid < x, e_1' >= 0\}$.

Deoarece $T(e_1') = \pm e_1' \Rightarrow T(M_1) \subset M_1$ şi $T(M_1') \subset M_1'$.

Într-adevăr, dacă $x \in M_1'$ rezultă $< x, e_1' >= 0 =< T(x), \pm e_1' >$, deci $T(x) \in M_1'$. Pentru că $M_1 \cap M_1' = \{0\}$ şi $M_1 + M_1' = \mathbb{R}^3$, T invariază subspaţiile M_1 şi M_1', deci pentru orice bază B a subspaţiului M_1' matricea transformării T în baza $\{e_1', B\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ va avea forma: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, unde A_1 este matricea restricţiei transformării T la subspaţiul M_1' în baza B.

Acest subspaţiu este bidimensional şi putem aplica Teorema 3.19 pentru a construi o bază $\{e_2', e_3'\}$ în M_1', bază faţă de care
$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ sau $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

În continuare, considerăm baza ortonormată $\{e_1', e_2', e_3'\}$ în $\mathbb{R}^3$, bază în care matricea transformării T devine: $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, după cum A_1 este o matrice de rotaţie sau o matrice de simetrie.

Putem să schimbăm ordinea elementelor bazei $\{e_1', e_2', e_3'\}$ astfel încât ultima matrice să devină $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

În ambele situaţii matricele sunt de forma dată în enunţul teoremei pentru cazurile $\varphi = 0$ sau $\varphi = \pi$.

Pentru ca baza $E' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ să aibă aceeaşi orientare cu baza canonică $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ schimbăm eventual vectorul e_1' cu $-e_1'$.

Observaţia 3.21. Fie V un subspaţiu euclidian real tridimensional şi T o transformare ortogonală pe V. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1', e_2', e_3'\}$ în V astfel încât matricea transformării T faţă de această bază să aibă una din formele date în teorema anterioară.

4. PROBLEME REZOLVATE

1. În spaţiul euclidian $(\mathbb{R}, < , >)$, unde $< , >$ este produsul scalar uzual, se consideră vectorii $x = (3, 1, 2)$ şi $y = (1, -5, 1)$. Să se arate că aceştia sunt ortogonali şi să se determine vectorul $z \in \mathbb{R}^3$, astfel încât $\{x, y, z\}$ să constrituie o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

Soluţie:Deoarece $< x, y >= 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 = 3 - 5 + 2 = 0$ rezultă că vectorii x şi y sunt ortogonali, deci liniar independenţi. În consecinţă $\{x, y\}$ poate fi completată până la o bază, cu un vector $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $z \neq 0$. Din condiţia ca această bază să fie ortogonală, rezultă $< x, z >= 0$ şi $< y, z >= 0$. Se obţine sistemul: $\begin{cases} 3z_1 + z_2 + 2z_3 = 0 \\ z_1 - 5z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$, cu soluţiile $(z_1, z_2, z_3) = (-11t, t, 16t), t \in \mathbb{R}^*$. Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{R}^*$, $\{x, y, z = (-11t, t, 16t)\}$ constituie o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

2. a) Determinaţi unghiul vectorilor: $x = (2, -1, 3)$ şi $y = (-2, 4, 1)$, în $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar uzual $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

b) Determinaţi produsul scalar şi lungimile vectorilor $x = (1 + i, 2 - 3i)$ şi $y = (3 - i, 2 + i)$, în $\mathbb{C}^2$ cu produsul scalar uzual $< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$.

Soluţie:a) Calculăm valoarea cosinusului acestui unghi, care îl determină unic în intervalul $[0, \pi]$:

$$\cos(x, y) = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow \cos(x, y) = -\frac{5\sqrt{6}}{42}.$$

b) $< x, y >= (1+i)(3+i)+(2-3i)(2-i) = 3+i^2+4i+4+3i^2-8i = 3 - 4i$.

$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{(1 + i)(1 - i) + (2 - 3i)(2 + 3i)} = \sqrt{2 + 13} = \sqrt{15}$

$\|y\| = \sqrt{< y, y >} = \sqrt{|3 - i|^2 + |2 + i|^2} = \sqrt{10 + 5} = \sqrt{15}$

3. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se ortogonalizeze sistemul de vectori din $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$, $S = \{x_1 = (1, 1, 0, -1), x_2 = (-1, 0, 1, -1), x_3 = (0, -1, 0, 1)\}$.

Soluţie:Verificăm mai întâi liniar independenţa sistemului S. Pentru aceasta considerăm combinaţia liniară cu scalari reali $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = 0$. Atunci $\alpha_1(1, 1, 0, -1) + \alpha_2(-1, 0, 1, -1) + \alpha_3(0, -1, 0, 1) = 0 \Rightarrow (\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3, \alpha_2, -\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$,

de unde obţinem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci liniar independenţa lui S.

Pentru a determina $S^{\perp} = \{y_1, y_2, y_3\}$ considerăm:

$y_1 = x_1 \Rightarrow y_1 = (1, 1, 0, -1)$

$y_2 = x_2 + ay_1$, unde $a = -\dfrac{< x_2, y_1 >}{< y_1, y_1 >} = -\dfrac{-1+0+0+1}{1+1+0+1} = 0$, deci $y_2 = x_2$, adică $y_2 = (-1, 0, 1, -1)$.

$y_3 = x_3 + b_1 y_1 + b_2 y_2$, unde $b_1 = -\dfrac{< x_3, y_1 >}{< y_1, y_1 >} = -\dfrac{0-1+0-1}{1+1+0+1} = \dfrac{2}{3}$, iar $b_2 = -\dfrac{< x_3, y_2 >}{< y_2, y_2 >} = -\dfrac{0+0+0-1}{1+1+0+1} = \dfrac{1}{3}$, deci $y_3 = x_3 + \dfrac{2}{3}y_1 + \dfrac{1}{3}y_2$, adică $y_3 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$.

În concluzie, $S^{\perp} = \{y_1 = (1, 1, 0, -1), y_2 = (-1, 0, 1, -1), y_3 = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)\}$

4. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $x = (1, 0, 1)$, $y = (-1, 2, 1)$ şi $z = (1, 2, 3)$. Să se determine subspaţiul ortogonal subspaţiului generat de $\{x, y, z\}$ şi să se descompună vectorul $v = (8, 5, 10)$ după cele două subspaţii.

Soluție:Verificăm liniar independenţa vectorilor x, y, z calculând determinantul $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Deci cei trei vectori sunt liniar dependenţi. Observăm că $z = 2x + y$, deci, subspaţiu generat de x, y, z este $S = L(\{x, y, z\}) = L(\{x, y\}) = \{ax + by | a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a - b, 2b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. Ortogonalul acestui subspaţiu va avea dimensiunea 1, deci va fi generat de un vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea că $\begin{cases} < x, u >= 0 \\ < y, u >= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = -u_1 \\ u_2 = u_1 \end{cases}$. Atunci $S^{\perp} = \{(c, c, -c) | c \in \mathbb{R}\} = \{c(1, 1, -1) | c \in \mathbb{R}\}$.

Descompunerea vectorului v în raport cu cele două subspaţii, care va fi unică deoarece $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}^3$ se obţine scriind $(8, 5, 10) = (a - b, 2b, a + b) + (c, c, -c) \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 8 \\ 2b + c = 5 \\ a + b - c = 10 \end{cases}$, de unde obţinem $a = 9, b = 2, c = 1$. Astfel $v = (8, 5, 10) = (7, 4, 11) + (1, 1, -1)$ reprezintă descompunerea lui v după cele două subspaţii.

5. a) Să se arate că transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = \left(\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, este ortogonală în raport cu produsul scalar uzual.

b) Să se determine parametrul real t astfel încât transformarea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (tx_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{1}{3}x_1 + tx_2)$ să fie ortogonală.

Soluție:a) Arătăm că T păstrează lungimile versorilor. Astfel, fie $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ un versor, adică $\|u\| = 1$. Atunci

$\|T(u)\| = \|\left(\frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3, \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3, -\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3\right)\| =$
$\sqrt{(\frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3)^2 + (\frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3)^2 + (-\frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2 + \frac{2}{3}u_3)^2} =$
$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \|u\| = 1$. Deci T este ortogonală.

b) Este necesar ca matricea transformării T să fie ortogonală, adică $A \cdot A^t = I_2$, unde $A = \begin{pmatrix} t & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & t \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix} t & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde obţinem $\begin{pmatrix} t^2 + \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & t^2 + \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $t^2 + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow t = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Pentru ambele valori ale lui t se obţin aplicaţii ortogonale.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătaţi că există o matrice ortogonală $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $S \neq I_2$ astfel încât $A = S^t \cdot A \cdot S$.

Soluție:Fie $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $S^t \cdot A \cdot S = A$. Atunci $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & -a \\ d & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & bc - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de unde obţinem $ad - bc = 1$, adică $detS = 1$. Atunci adjuncta matricei S, $S^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ şi deoarece $detS = 1$, obţinem $S^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Matricea S este ortogonală dacă $S^t = S^{-1}$, adică $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, de unde $d = a$ şi $c = -b$. Din relaţia $ad - bc = 1$, rezultă atunci $a^2 + b^2 = 1$. Putem alege $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi atunci $S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ este o matrice cu proprietăţile din enunţ.

7. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive. Să se arate că: $(a^3 + b^3 + c^3)(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}) \geq (a + b + c)^2$, folosind produsul scalar uzual din $\mathbb{R}^3$.

Soluție:Considerăm în $\mathbb{R}^3$ vectorii $x = (a\sqrt{a}, b\sqrt{b}, c\sqrt{c})$ şi
$y = (\dfrac{1}{\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{b}}, \dfrac{1}{\sqrt{c}})$.

Atunci $< x, y >= a\sqrt{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{b}} + c\sqrt{c} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{c}} = a + b + c$, iar
$\|x\| = \sqrt{(a\sqrt{a})^2 + (b\sqrt{b})^2 + (c\sqrt{c})^2} = \sqrt{a^3 + b^3 + c^3}$ şi
$\|y\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{a}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{b}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{c}})^2} = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

Particularizând inegalitatea lui Cauchy, $| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$, pentru aceste valori obţinem $a + b + c \leq (a^3 + b^3 + c^3)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$.

5. PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că $< f, g >= \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$, constituie un produs scalar în spaţiul funcţiilor reale continue pe intervalul $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $C([a, b])$. Să se justifice apoi relaţia $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{1/2} \cdot (\int_a^b g^2(x)dx)^{1/2}$.

2. În $\mathbb{R}^3$ cu produsul scalar uzual se consideră subspaţiile $S_1 = \{(a, 0, a) | a \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{-1}\}$. Să se determine un subspaţiu S_3 ortogonal pe S_1 şi S_2. Să se justifice apoi că $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \mathbb{R}^3$.

3. În $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se consideră sistemul de vectori $S = \{x_1 = (-1, 1, 0), x_2 = (0, -2, 3), x_3 = (0, 0, 1)\}$. Arătaţi că S este liniar independent şi să se determine ortogonalul şi ortonormalul lui S.

4. Determinaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $x = (3, -2, 4)$ şi $y = (2, 1, \alpha)$ din $\mathbb{R}^3$ să fie ortogonali în raport cu produsul scalar uzual. Să se completeze apoi $\{x, y\}$ până la o bază ortogonală a spaţiului $\mathbb{R}^3$.

5. Arătaţi, folosind produsul scalar uzual din $\mathbb{R}^2$, că pentru orice $a, b \in [-1, 1]$, are loc inegalitatea $\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq 2\sqrt{1 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2}$

6. În spaţiul vectorial real al funcţiilor reale continue definite pe $[0, 1]$, $C([0, 1])$, se consideră sistemul liniar independent de funcţii $S = \{f(t) = t, g(t) = t^2, h(t) = t^3\}$. Să se ortogonalizeze acest sistem în raport cu produsul scalar $< f, g >= \int_0^1 tf(t)g(t)dt$.

7.Să se arate că transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = \left(-\frac{3}{7}x_1 + \frac{6}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3, -\frac{2}{7}x_1 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_3, \frac{6}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3\right)$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, este ortogonală în raport cu produsul scalar uzual. Să se calculeze apoi T^{-1} şi să se verifice dacă şi această transformare este ortogonală.

CAPITOLUL 5

Forme liniare, forme biliniare şi forme pătratice

1. Forme liniare

Fie K un corp şi V un spaţiu vectorial peste corpul K.

Definiţia 1.1. O aplicaţie liniară $F : V \to K$, unde K este privit ca spaţiu vectorial peste el însuşi, se numeşte **formă liniară** pe V sau $1-$formă liniară, sau $K-$formă liniară pe V, dacă lucrăm mereu cu acelaşi corp K.

Exemplul 1.2. $V = Int[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}|$f integrabilă Riemann pe [a,b]$\}$, $F : Int[a,b] \to \mathbb{R}$, $F(f) = \int\limits_a^b f(t)dt$, este o formă liniară pe $Int[a,b]$, numită formă integrală.

În continuare, ne propunem să găsim structura tuturor formelor liniare pe un spaţiu vectorial finit dimensional V/K, cu $dimV = n$. O formă liniară F pe V este complet determinată dacă se cunosc scalarii $F(f_1), F(f_2), \ldots, F(f_n)$, adică dacă ştim cum acţionează pe elementele bazei $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$.

Într-adevăr, dacă $x \in V$ şi $x = x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n$, cu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, rezultă că: $F(x) = x_1F(f_1) + x_2F(f_2) + \ldots + x_nF(f_n) =< (x_1, x_2, \ldots, x_n), (F(f_1), F(f_2), \ldots, F(f_n)) >$, unde produsul scalar este considerat pe K^n.

În continuare vom nota cu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vectorul aritmetic format din coordonatele vectorului x relativ la baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ şi cu $\widetilde{F} = (F(f_1), F(f_2), \ldots, F(f_n))$. Cu noile notaţii, putem scrie: $F(x) =< X, \widetilde{F} >= X \cdot \widetilde{F}^t = \widetilde{F} \cdot X^t$.

Este clar că dacă definim $F_i : V \to K$ prin $F_i(f_i) = 1$ şi $F_i(f_j) = 0$, pentru $j \neq i$, vom avea că $F_i(x) = x_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. De aici rezultă că: $F(x) = F(f_1)F_1(x) + \ldots + F(f_n)F_n(x)$, adică
$F = F(f_1)F_1 + \ldots + F(f_n)F_n$.

S-a obţinut astfel un sistem de generatori $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ pentru spaţiul vectorial al tuturor formelor liniare definite pe V.

Vom nota cu V^* acest spaţiu vectorial şi cu ${f_i}^* = F_i$, pentru $i = \overline{1,n}$. În continuare vom arăta că $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\}$ este o bază în V^*, numită baza duală a bazei $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ din V^*.
Spaţiul V^* se numeşte **dualul spaţiului vectorial** V/K.

Fie combinaţia liniară nulă $\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^* + \ldots + \alpha_n f_n^* = 0$, adică $\alpha_1 f_1^*(x) + \alpha_2 f_2^*(x) + \ldots + \alpha_n f_n^*(x) = 0, \forall x \in V$.

Vom da lui x succesiv valorile din baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Pentru $x = f_1$, $\alpha_1 = 0$; pentru $x = f_2$, $\alpha_2 = 0, \ldots$, pentru $x = f_n, \alpha_n = 0$. Prin urmare, $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*\}$ este o mulţime liniar independentă, adică o bază în V^*. De aici rezultă că $dimV^* = n = dimV$.

Obsrvația 1.3. Orice formă liniară $F : V \to K$ este un polinom omogen liniar de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coordonatele lui x, adică: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, unde $\alpha_1 = F(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_2 = F(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \alpha_n = F(0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Exemplul 1.4. În spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2, $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 | a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, 2}\}$, considerăm baza $\{1, 1-t, t^2\}$. Să se afle coordonatele formei integrale $F : P_2 \to \mathbb{R}$, definită prin formula $F(P(t)) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)dt$, în baza duală.

Să notăm cu $p_0 = 1$, $p_1 = 1 - t$, $p_2 = t^2$.

$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = (a_0 + a_1) - a_1(1 - t) + a_2 t^2$.

Este clar atunci că $p_0^*(P(t)) = a_0 + a_1$, $p_1^*(P(t)) = -a_1$, $p_2^*(P(t)) = a_2$. Să calculăm $F(P(t)) = \int\limits_{-1}^{1} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)dt = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 = 2(a_0 + a_1) - 2a_1 + \frac{2}{3}a_2 = 2p_0^*(P(t)) + 2p_1^*(P(t)) + \frac{2}{3}p_2^*(P(t))$, deci $F = 2p_0^* + 2p_1^* + \frac{2}{3}p_2^*$, adică coordonatele formei F în baza duală $\{p_0^*, p_1^*, p_2^*\}$ sunt $(2, 2, \dfrac{2}{3})$.

2. Forme multiliniare. Noţiuni despre tensori

Noţiunea de formă liniară se poate generaliza la noţiunea de formă multiliniară. O formă (aplicaţie) $m-$liniară este o aplicaţie (funcţie) $F : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \to K$, unde $V_1, V_2, \ldots, V_m$ sunt spaţii vectoriale peste corpul K, astfel încât pentru orice $i = \overline{1, m}$, şi pentru oricare elemente fixate $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m$, aplicaţia $F_i : V_i \to K$, definită prin $F_i(x) = F(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_m)$ este liniară. Spre exemplu, aplicaţia produs scalar real este o aplicaţie $2-$liniară (sau biliniară).

Exemplul 2.1. Considerăm spaţiile vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_m/K$ şi pe fiecare din ele câte o aplicaţie liniară $G_i : V_i \to K$, atunci aplicaţia produs $G : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_m \to K$, definită prin $G(x_1, x_2, \ldots, x_m) = G_1(x_1) \cdot G_2(x_2) \cdot \ldots \cdot G_m(x_m)$ este o aplicaţie $m-$liniară, adică G este un exemplu de aplicaţie multiliniară.

Propoziţia 2.2. *Fie V/K şi V'/K spaţii vectoriale în care avem bazele $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, respectiv $E' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$. Atunci, orice aplicaţie biliniară $F : V \times V' \to K$ este complet determinată de matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ unde $a_{ij} = F(e_i, e'_j)$. În plus, dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j e'_j$, iar $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, *atunci* $F(x,y) = XAY^t = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = \sum\limits_{i,j} x_i a_{ij} y_j$

Dacă C este matricea de trecere de la baza E la baza $\widetilde{E} = \{\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e_n}\}$, iar D este matricea de trecere de la baza E' la baza $\widetilde{E'} = \{\widetilde{e'_1}, \ldots, \widetilde{e'_m}\}$, atunci matricea A devine C^tAD; în cazul în care $V' = V$, matricea A devine C^tAC.

Matricea A se numeşte matricea formei biliniare F, relativă la bazele E şi E'.

Demonstraţie. $F(x,y) = F(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{m} y_j e'_j) = \sum\limits_{i,j} x_i a_{ij} y_j = XAY^t$.

Se ştie că, la o schimbare a bazei, coordonatele se schimbă după formulele: $X^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = CX'^t$ şi $Y^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = DY'^t$. Rezultă că $F(x,y) = X'C^tADY'^t$, unde $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$, iar $Y' = (y'_1, \ldots, y'_m)$. Prin urmare, în coordonatele $x'_1, x'_2 \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_m$, matricea formei F devine C^tAD.

Observaţia 2.3. O formă liniară $F : V \to K$ poate fi dată numai prin vectorul $(F(e_1), \ldots, F(e_n)) \in K^n$, adică prin precizarea a n mărimi $a_1 = F(e_1), \ldots, a_n = F(e_n)$, dacă fixăm o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în V.

Dacă se schimbă baza E cu o alta, $E' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, coordonatele unui vector $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, se schimbă după formula:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

unde C este matricea de trecere de la baza E la baza E'.

Deoarece $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i F(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i = X^tA$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, iar $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, avem că $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i F(e'_i) = X'^tA'$, unde $A' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$, $a'_i = F(e'_i), i = \overline{1,n}$, iar $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

Dar $X^tA = X'^tC^tA$, deci:

$$A' = C^tA \tag{2.2}$$

Se observă că există o diferenţă între formula (2.1) şi formula (2.2). Formula (2.1) spune că $X = CX'$, pe când formula (2.2) furnizează A' în funcţie de A. În continuare vom scrie formal că:

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = C^t \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

formulă care defineşte legătura dintre cele două baze.

Matricea unei forme biliniare se schimbă după formula:

$$A' = C^t AD, \tag{2.4}$$

forma fiind determinată de nişte cantităţi $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ care la schimbarea bazei se modifică după formula (2.4).

Se ajunge astfel la a defini mulţimi de elemente din K care se modifică la schimbarea bazei după anumite reguli. Astfel apare noţiunea extrem de folosită în aplicaţii numită **tensor**.

Pentru aplicaţiile din mecanică şi elasticitate se folosesc numai transformări ortogonale ale bazei, adică matricea C de trecere va fi considerată ortogonală.

Spre exemplu, se pot defini tensorul deformărilor în mecanica mediilor continue sau tensorul moment de inerţie.

Observaţia 2.4. Noţiunea de tensor se poate defini independent de bazele spaţiilor vectoriale. De exemplu, dacă V şi W sunt spaţii vectoriale peste corpul K, construim un nou spaţiu vectorial $V \bigotimes W/K$ după cum urmează.

Fie mulţimea $V \times W = \{(x,y) | x \in V \text{ şi } y \in W\}$. Aici $V \times W$ este spaţiu vectorial peste K. Considerăm în $V \times W$ subspaţiul vectorial: $N = L\{(x+y,z) - (x,z) - (y,z); (x,y+z) - (x,y) - (x,z); (\alpha x, y) - \alpha(x,y); (x, \beta y) - \beta(x,y)\}$, apoi definim spaţiul vectorial cât $V \times W/N$ ca fiind $V \bigotimes W$.

Vom numi tensor un element $x \otimes y$ din $V \bigotimes W$. Dacă $V = W$, $x \otimes y$ este un tensor 2-**contravariant**; dacă $W = V^*$, $x \otimes y$ este un tensor 1-**contravariant şi** 1-**covariant**. Dacă, în continuare se fixează o bază în V, $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază în W, vom putea scrie: $x \otimes y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \bigotimes \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j f_j = \sum\limits_{i,j} \alpha_i \beta_j e_i \otimes f_j$.

Vom asocia tensorului $x \otimes y$, matricea $\{\alpha_i \beta_j \overset{not}{=} a_{ij}\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$. Astfel, va fi regăsită noţiunea de tensor introdusă mai sus.

3. Forme pătratice

Se ştie din paragraful anterior că o formă biliniară $F : V \times V \to K$, unde V este un spaţiu vectorial peste corpul K ($K = \mathbb{R}$, sau $\mathbb{C}$) dă naştere la o funcţie $g : V \to K$, definită prin $g(x) = F(x,x)$. Vom numi această funcţie **forma pătratică** ataşată formei biliniare G.

Amintim că F are următoarele proprietăţi:

1. F este liniară în ambele variabile separat, adică avem relaţiile: $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z)$ şi $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$, pentru orice $x, y, z \in V$ şi $\alpha, \beta \in K$.

2. Vom cere în continuare ca F să fie simetrică, adică să avem că $F(x, y) = F(y, x)$, pentru orice $x, y \in V$.

Legătura dintre F şi g este foarte simplă. Fiind dată o funcţie $g : V \to K$, funcţia de două variabile definită prin relaţia:

$$G(x, y) = \frac{1}{2}[g(x + y) - g(x) - g(y)], \tag{3.1}$$

este chiar forma biliniară F, din care provine g, dacă cerem ca $g(\alpha x) = \alpha^2 g(x)$ şi ca $G(x, y)$ să fie ea însăşi biliniară şi simetrică. Putem formula astfel următoarea definiţie

Definiţia 3.1. O funcţie $g : V \to K$ $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ se numeşte formă pătratică pe V dacă aplicaţia $G : V \times V \to K$, definită prin formula (3.1) este o formă biliniară simetrică pe V şi $g(\alpha x) = \alpha^2 g(x)$, oricare ar fi $x, y \in V$ şi $\alpha \in K$.

Această definiţie a formei pătratice este intrinsecă, ea nedepinzând decât de spaţiul vectorial V/K.

În continuare ne propunem să vedem care este mecanismul concret prin care se pot construi forme pătratice.

Fie $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V şi $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ scrierea lui x în baza E.

Fie $g : V \to K$, o formă pătratică şi $G(x, y)$ forma biliniară simetrică din care provine g. Notăm cu $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = m_E(G)$, matricea formei biliniare simetrice G în baza E, adică $a_{ij} = G(e_i, e_j)$.

Să notăm cu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ şi cu $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, unde $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$.

Vom avea deci că:

$G(x, y) = G(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = X^t A Y$, produsul fiind unul obişnuit de matrice. Prin urmare, orice formă pătratică g este complet determinată de o matrice simetrică $A \in \mathcal{M}_n(K)$, relativ la o bază fixată $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în V, şi anume, $g(x) = g(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} \stackrel{not}{=} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, pentru orice $x \in V$.

Se observă că g poate fi interpretată ca o funcţie de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definită pe K^n cu valori în K, anume: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^t A X$, cu notaţiile de mai sus.

Problema fundamentală a formelor pătratice este aceea de a găsi o bază $E' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ în V, astfel încât matricea formei g în această bază, $m_E(g)$, să fie o matrice diagonală.

Se spune, în acest caz, că g este o sumă de pătrate, sau că are forma diagonală.

Fie C matricea de trecere de la baza E la baza E'. Datorită izomorfismului $\varphi : V \to K^n$ definit de egalităţile $\varphi(e_1) = (1, 0, 0, \ldots, 0), \ldots,$ $\varphi(e_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, putem considera în continuare $V = K^n$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$-baza canonică în K^n, adică $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ şi deci, $C = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, unde $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ sunt consideraţi vectori coloană în K^n.

Problema de mai sus se pune deci în două moduri echivalente:

1) Să se găsească o matrice nesingulară C astfel încât C^tAC să fie diagonală (am scris C^tAC deoarece aceasta este matricea formei pătratice biliniare G în baza E'. Spunem că C^tAC este matricea formei pătratice g relativ la baza E').

2) Să se găsească o schimbare liniară a variabilelor $x_1, \ldots, x_n$ de forma:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n \\ x_2 = c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2n}x'_n \\ \vdots x_n = c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \ldots + c_{nn}x'_n \end{cases} \tag{3.2}$$

sau $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{not}{=} X = CX'$, unde $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in K^n$, iar $detC \neq 0$.

Formularea 1) a problemei ne conduce la:

Teorema 3.2. *Orice formă pătratică g de n variabile cu coeficienţi în corpul K($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), se poate aduce la o formă canonică printr-o transformare ortogonală a variabilelor (adică matricea C de mai sus să fie ortogonală).*

Demonstraţie. Matricea $m_E(g)$ este simetrică. Prin urmare va exista o bază $E' = \{f_1, \ldots, f_n\}$, formată din vectori proprii ortogonali şi de normă 1, astfel încât $m_{E'}(g)$ să fie $diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt toate valorilor proprii corespunzătoare vectorilor proprii $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Este evident că dacă matricea C este $(f_1 \ldots f_n)$, unde $f_1, \ldots, f_n$ sunt priviţi ca vectori coloană în K^n, după o transformare ortogonală de tipul (3.2), vom avea: $g(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \ldots + \lambda_n(x'_n)^2$, deoarece $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= X^tAX = (X')^tC^tACX' = (X')^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} X' =$$

$$= g(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Prin abuz de scriere notăm noua funcţie $\widetilde{g}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) =$ $g(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}x_i, \ldots, \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}x_i)$, unde $B = (b_{ij}) = C^{-1}$, tot cu $g(x'_1, \ldots, x'_n)$.

Am folosit această notaţie pentru uşurarea exprimării.

Exemplul 3.3. Se dă forma pătratică $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$. Să se aducă la forma canonică printr-o transformare ortogonală.

Deoarece $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2$, matricea $m_E(g) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $E = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ este baza canonică în $\mathbb{R}^2$.

Valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 0$, cu $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, un vector propriu normat corespunzător şi $\lambda_2 = 2$, cu $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Aici există patru posibilităţi pentru f_1, f_2, deoarece pentru fiecare valoare proprie λ_i există doi vectori proprii normaţi corespunzători, anume $\pm f_i$.

Alegem semnele astfel încât matricea $C = (f_1\ f_2)$ să aibă determinantul egal cu 1, adică să fie o rotaţie.

Vom scrie $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Scrimbarea (3.2) devine

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dacă se înlocuiesc x_1 şi x_2 în $g(x_1, x_2)$ găsim: $\widetilde{g}(x'_1, x'_2) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2)^2 + 2(-\frac{1}{2}(x'_1)^2 + \frac{1}{2}(x'_2)^2) + (-\frac{1}{\sqrt{2}}x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x'_2)^2 = 2(x'_2)^2$.

Aceste calcule sunt superflue deoarece se cunoaşte din Teorema 3.1 care va fi forma canonică a formei pătratice g, anume: $g(x'_1, x'_2) = \lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 = 2(x'_2)^2$.

Schimbarea (3.3) corespunde la schimbarea axelor în $\mathbb{R}^2$.

Observaţia 3.4. Metoda expusă mai sus stă la baza studiului conicelor şi cuadricelor în geometria analitică.

Dezavantajul metodei aducerii la forma canonică a unei forme pătratice cu ajutorul transformărilor ortogonale constă în faptul că nu se pot afla întotdeauna exact valorile proprii ale unei matrice.

În continuare vom prezenta o metodă simplă prin care succesiv se va găsi o schimbare de variabilă de tipul (3.2), neortogonală în general, astfel încât, în noile variabile $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, forma pătratică g să fie o sumă de pătrate. Discutăm, de fapt, despre metoda Gauss-Lagrange.

Fie forma pătratică $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$.

Presupunem că $a_{11} \neq 0$, în caz contrar renumerotând variabilele astfel încât un $a_{ii} \neq 0$ să devină $a_{11} \neq 0$. Dacă toţi a_{ii} sunt 0, atunci efectuăm în prealabil o schimbare de variabilă de tipul:

$$\begin{cases} x_i = y_i - y_j \\ x_j = y_i + y_j \end{cases} \tag{3.4}$$

dacă coeficientul $a_{ij} \neq 0$ şi vom fi din nou în cazul $a_{ii} \neq 0$.

După ce am obţinut, prin eventuale transformări, $a_{11} \neq 0$ putem scrie:

$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j =$ $a_{11}(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n) + g_2(x_2, \ldots, x_n)$, unde $g_2(x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Formăm în paranteză un pătrat perfect şi obţinem: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 - \ldots - \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2 -$ $2\frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}x_2x_3 - \ldots - 2\frac{a_{1,n-1}a_{1n}}{a_{11}}x_{n-1}x_n + g_2(x_2, \ldots, x_n) = a_{11}(x_1')^2 +$ $g_2'(x_2, x_3, \ldots, x_n)$,unde g_2' este o formă pătratică în $n-1$ variabile căreia îi aplicăm acelaşi algoritm ca şi formei g, iar $x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$.

În final, g este adusă la o formă pătratică printr-o schimbare de variabile de tipul

$$\begin{cases} x_1' = d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = d_{n1}x_1 + \ldots + d_{nn}x_n \end{cases} \tag{3.5}$$

Matricea $D = (d_{ij})$ este matricea transformării care duce la obţinerea formei canonice.

Încheiem cu prezentarea celei mai simple metode de aducere la forma canonică, cunoscută şi ca metoda lui Jacobi.

Fie $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ o formă pătratică. Notăm cu $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea acesteia şi considerăm determinanţii:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = det(A).$$

Dacă pentru orice $i = \overline{1,n}$, $\Delta_i \neq 0$, atunci există o bază în care g se scrie de forma: $\widetilde{g}(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \frac{\Delta_1}{1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}(x_2')^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}(x_n')^2$.

Dezavantajele metodei sunt acelea că matricea transformării este mai dificil de găsit, precum şi restricţia ca toţi determinanţii diagonali $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ să fie nenuli.

4. PROBLEME REZOLVATE

1. a) Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixate, este o formă liniară.

b) Să se determine forma f, ştiind că $f(1, -1, 1) = 5$, $f(1, 0, 1) = 6$ şi $f(-1, 0, 1) = 2$.

Soluţie:a) Verificăm dacă $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ şi $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in \mathbb{R}^3$.

$f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)=a(\alpha x_1+\beta y_1)+b(\alpha x_2+\beta y_2)+c(\alpha x_3+\beta y_3)=\alpha(ax_1+bx_2+cx_3)+\beta(ay_1+by_2+cy_3)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, deci f este o formă liniară.

b) Pentru a determina coeficienţii $a,b,c\in\mathbb{R}$ ai formei f considerăm sistemul $\begin{cases} f(1,-1,1)=5 \\ f(1,0,1)=6 \\ f(-1,0,1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b+c=5 \\ a+c=6 \\ -a+c=2 \end{cases}$.

Soluţiile sistemului sunt $a=2, b=1, c=4$, deci $f(x)=2x_1+x_2+4x_3$.

2. Fie forma liniară $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x_1+x_2-3x_3$.

a) Scrieţi matricea asociată acesteia considerând în $\mathbb{R}^3$ baza $B=\{e_1=(2,0,1), e_2=(1,1,0), e_3=(3,1,2)\}$.

b) Determinaţi $Kerf$ şi $dim(Kerf)$.

Soluţie:a) $f(e_1)=3\cdot 2+0-3\cdot 1=3$, $f(e_2)=2\cdot 1+1-3\cdot 0=3$, $f(e_3)=3\cdot 3+1-3\cdot 2=4$, deci matricea asociată formei f în baza B este $A=(3\ \ 3\ \ 4)$.

b) $Kerf=\{x\in\mathbb{R}^3 | f(x)=0\}$. Ecuaţia $f(x)=0\Rightarrow 3x_1+x_2-3x_3=0$ poate fi privită ca o ecuaţie cu trei necunoscute. Fixând arbitrar $x_1=a\in\mathbb{R}$ şi $x_3=b\in\mathbb{R}$ obţinem $x_2=3b-3a$, deci $Kerf=\{(a,3b-3a,b) | a,b\in\mathbb{R}\}$.

Orice element din $Kerf$, se poate scrie $(a,3b-3a,b)=(1,-3,0)a+(0,3,1)b$, deci $B=\{(1,-3,0),(0,3,1)\}$ generează $Kerf$. Este evident că B este şi liniar independent, deci $dim(Kerf)=2$.

3. Pe $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se consideră funcţionala pătratică $g(x)=2x_1^2-2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3$, unde $x=(x_1,x_2,x_3)$. Fie subspaţiile vectoriale $V_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1-2x_2=0\}$ şi $V_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1+x_2=0 \text{ şi } x_1-x_3=0\}$. Arătaţi că $g(x)\geq 0, \forall x\in V_1$ şi $g(x)\leq 0, \forall x\in V_2$.

Soluţie:Pentru $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_1$, avem $x_1=2x_2$ şi atunci $g(x)=8x_2^2-2x_2^2+x_3^2+16x_2^2-4x_2x_3=22x_2^2+x_3^2-4x_2x_3=(2x_2-x_3)^2+18x_2^2\geq 0$, deci $g(x)\geq 0, \forall x\in V_1$.

Pentru $x=(x_1,x_2,x_3)\in V_2$, avem $x_2=-x_1$ şi $x_3=x_1$. Atunci $g(x)=2x_1^2-2x_1^2+x_1^2-8x_1^2-2x_1^2=-9x_1^2\leq 0$, deci $g(x)\leq 0, \forall x\in V_2$.

4. Arătaţi că forma $G:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $G(x,y)=x_1y_2+5x_2y_1$ este biliniară, unde $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Este G simetrică?

Soluţie:Vom arăta că $\forall \alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\mathbb{R}$ şi $\forall x,x',y,y'\in\mathbb{R}^2$ avem $G(\alpha x+\alpha' x', \beta y+\beta' y')=\alpha\beta G(x,y)+\alpha\beta' G(x,y')+\alpha'\beta G(x',y)+\alpha'\beta' G(x',y')$. Într-adevăr:

$G(\alpha x+\alpha' x', \beta y+\beta' y')=G((\alpha x_1+\alpha' x_1', \alpha x_2+\alpha' x_2'),(\beta y_1+\beta' y_1', \beta y_2+\beta' y_2'))=(\alpha x_1+\alpha' x_1')(\beta y_2+\beta' y_2')+5(\alpha x_2+\alpha' x_2')(\beta y_1+\beta' y_1')=\alpha\beta x_1y_2+\alpha\beta' x_1y_2'+\alpha'\beta x_1'y_2+\alpha'\beta' x_1'y_2'+5\alpha\beta x_2y_1+5\alpha\beta' x_2y_1'+5\alpha'\beta x_2'y_2+5\alpha'\beta' x_2'y_1'=\alpha\beta G(x,y)+\alpha\beta' G(x,y')+\alpha'\beta G(x',y)+\alpha'\beta' G(x',y')$, deci G este formă biliniară.

G nu este simetrică. Considerăm drept contraexemplu $x=(1,2)$ şi $y=(0,1)$. Atunci $G(x,y)=1$, iar $G(y,x)=5$.

5. Se consideră forma pătratică $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x_1^2-4x_1x_2-6x_1x_3+3x_2^2+10x_2x_3-x_3^2$

a) Să se aducă f la forma canonică;

b) Să se determine forma biliniară din care provine g.

Soluţie:

a) Matricea asociată formei g este $A=\begin{pmatrix}2&-2&-3\\-2&3&5\\-3&5&-1\end{pmatrix}$.

Determinanţii diagonali ai acesteia sunt $\Delta_1=2$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&3\end{vmatrix}=2$ şi $\Delta_3=det(A)=-19$. Putem folosi atunci metoda lui Jordan de aducere la forma canonică şi obţinem $g(x_1',x_2',x_3')=\frac{\Delta_1}{1}(x_1')^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}(x_2')^2+\frac{\Delta_3}{\Delta_2}(x_3')^2=2(x_1')^2+(x_2')^2-\frac{19}{2}(x_3')^2$.

b) Forma biliniară $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, din care provine forma pătratică g se obţine folosind relaţia $G(x,y)=\frac{1}{2}[g(x+y)-g(x)-g(y)]$. Atunci $G(x,y)=\frac{1}{2}[2(x_1+y_1)^2-4(x_1+y_1)(x_2+y_2)-6(x_1+y_1)(x_3+y_3)+3(x_2+y_2)^2+10(x_2+y_2)(x_3+y_3)-(x_3+y_3)^2-2x_1^2+4x_1x_2+6x_1x_3-3x_2^2-10x_2x_3+x_3^2-2y_1^2+4y_1y_2+6y_1y_3-3y_2^2-10y_2y_3+y_3^2]=2x_1y_1-2x_1y_2-3x_1y_3-2x_2y_1+3x_2y_2+5x_2y_3-3x_3y_1+5x_3y_2-x_3y_3$.

6. Fie forma biliniară $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $G(x,y)=x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2$.

a) Arătaţi că G defineşte o formă pătratică g şi determinaţi expresia acesteia.

b) Aduceţi forma pătratică g la forma canonică precizând şi matricea transformării care duce la obţinerea formei canonice.

Soluţie:a) G defineşte o formă pătratică dacă este simetrică. Întradevăr, $G(y,x)=y_1x_2+y_2x_1+y_1x_3+y_3x_1+y_2x_3+y_3x_2=G(x,y)$, deci G este simetrică. Forma pătratică determinată de G, este $g(x)=G(x,x)=x_1x_2+x_2x_1+x_1x_3+x_3x_1+x_2x_3+x_3x_2=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

b) Matricea asociată formei g este $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Observăm că $a_{ii}=0,\forall i=\overline{1,3}$. În consecinţă facem transformarea $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ (1).

Atunci $g(y)=2(y_1-y_2)(y_1+y_2)+2y_3(y_1-y_2)+2y_3(y_1+y_2)=2y_1^2-2y_2^2+4y_1y_3$. Vom folosi în cele ce urmează metoda lui Gauss, formând pătrate.

Astfel $g(y)=2(y_1^2+2y_1y_3)-2y_2^2=2(y_1+y_3)^2-2y_3^2-2y_2^2$. Atunci cu notaţiile: $\begin{cases} y'_1 = y_1 + y_3 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_3 = y_3 \end{cases}$ obţinem forma canonică $g(y'_1, y'_2, y'_3) = 2(y'_1)^2 - 2(y'_2)^2 - 2(y'_3)^2$. Din relaţiile (1), obţinem $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

şi de aici $\begin{cases} y'_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ y'_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ y'_3 = x_3 \end{cases}$.

Astfel matricea transformării este: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. PROBLEME PROPUSE

1. Verificaţi dacă următoarele aplicaţii sunt forme liniare:
a) $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $f(z) = Re(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$, unde $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ este un element din $\mathbb{C}^n$;
b) $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = detA$.

2. Să se studieze care din următoarele aplicaţii sunt forme biliniare:
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y$;
b) $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $f(z, w) = Re(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \cdot Im(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$.

3. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}^2$, astfel încât aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + a)(y + b)$ să fie funcţională biliniară.

4. Să se aducă la forma canonică formele pătratice:
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$;
b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

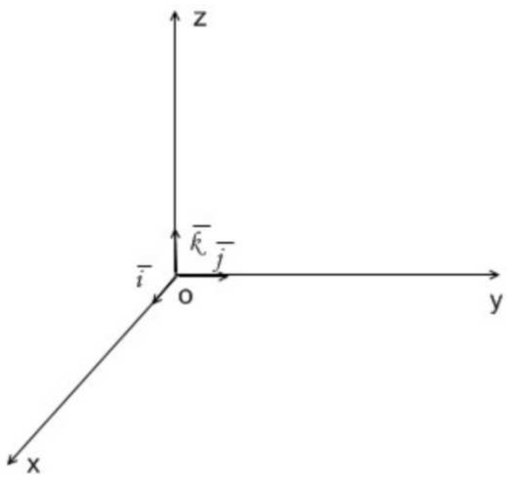
5. În spaţiul dual lui $\mathbb{R}^3$ se consideră formele liniare $f_1^*(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3$, $f_2^*(x) = x_1 + \lambda x_2 + 2x_3$ şi $f_3^*(x) = -7x_1 + 3x_2 + (\lambda - 5)x_3$. Determinaţi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ să reprezinte o bază în $(\mathbb{R}^3)^*$.

CAPITOLUL 6

Aplicaţii ale vectorilor geometrici în geometria analitică

1. Planul şi dreapta. Diferite tipuri de ecuaţii ale planelor şi dreptelor.

Fixăm un reper cartezian drept în spaţiu, $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, adică fixăm un punct O şi doi versori perpendiculari $\overline{i} = \overline{Ox}$ şi $\overline{j} = \overline{Oy}$. Considerăm versorul $\overline{Oz} = \overline{k}$, astfel încât $\overline{k}$ este perpendicular pe $\overline{i}$ şi $\overline{j}$ şi baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ respectă "regula burghiului", adică versorul $\overline{k}$ are sensul de înaintare al unui burghiu care se roteşte de la $\overline{i}$ către $\overline{j}$ cu $90°$, rămânând perpendicular pe $\overline{i}$ şi pe $\overline{j}$.



Semidreptele care au originea în O şi sensul dat de $\overline{i}$, $\overline{j}$ şi $\overline{k}$ se vor nota cu Ox, Oy şi respectiv Oz.

Dreptele suport ale acestor semidrepte se vor numi **axe de coordonate**, iar planele xOy, yOz şi zOx se vor numi **plane de coordonate**. Fiecare axă de coordonate are o parte pozitivă şi o parte negativă.

Definiţia 1.1. Fie M_0 un punct în spaţiul intuitiv şi (x_0, y_0, z_0) coordonatele sale relativ la reperul $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, adică $\overline{OM_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$. De asemenea, fie vectorul $\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$, unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, $\overline{n} \neq \overline{0}$, adică A, B, C nu sunt toate nule. Mulţimea tuturor punctelor M din spaţiu astfel încât $\overline{M_0M}$ este perpendicular pe $\overline{n}$ se numeşte **planul care trece prin M_0 normal (perpendicular) pe vectorul** $\overline{n}$. Notăm acest plan cu $\mathcal{P}(M_0, \overline{n})$ sau cu $\mathcal{P}$.

Este clar că $M \in \mathcal{P}(M_0, \overline{n}) \Leftrightarrow \overline{n} \cdot \overline{M_0 M} = 0 \Leftrightarrow$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{1.1}$$

unde $M(x, y, z)$, adică (x, y, z) sunt coordonatele punctului M relativ la reperul fixat mai sus; (x, y, z) verifică relaţia (1.1) $\Leftrightarrow M(x, y, z) \in \mathcal{P}(M_0, \overline{n})$.

Egalitatea (1.1) se numeşte ecuaţia planului $\mathcal{P}(M_0, \overline{n})$, iar $M(x, y, z)$ se numeşte punct curent(generic) al planului; x, y, z se numesc variabilele ecuaţiei (1.1).

Ecuaţia (1.1) se mai poate scrie: $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$, adică

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1.2}$$

unde

$$D = -\overline{n} \cdot \overline{OM_0} = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \tag{1.3}$$

Ecuaţia (1.2) se numeşte ecuaţia generală a unui plan. Singura restricţie pentru numerele A, B, C, D este ca A, B, C să nu fie toate nule.

Punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ verifică relaţia (1.2) $\Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

Propoziţia 1.2. *Ecuaţia planului $\mathcal{P}$ care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralel cu direcţiile vectorilor liberi neparaleli $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ şi $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$, este:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

Demonstraţie. Relaţia (1.4) reprezintă condiţia ca vectorii liberi $\overline{M_0 M}$, $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ să fie coplanari, adică produsul lor mixt să fie 0, unde $M(x, y, z)$ este un punct curent al planului.

Consecinţa 1.3. Ecuaţia planului $\mathcal{P}$ care trece prin punctele necolinare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi $M_3(x_3, y_3, z_3)$ este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.5}$$

deoarece $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overline{M_1 M}, \overline{M_1 M_2}, \overline{M_1 M_3}$ sunt coplanari ca vectori liberi.

Consecinţa 1.4. Ecuaţia planului $\mathcal{P}$ care intersectează axele de coordonate Ox, Oy, Oz în $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$, respectiv $C(0, 0, c)$ este:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{1.6}$$

dacă a, b, c sunt simultan nenule (niciunul din punctele A, B, C nu coincide cu originea $O(0,0,0)$). Astfel se obţin ecuaţiile planelor de coordonate: $xOy : z = 0$, $yOz : x = 0$, $zOx : y = 0$.

DEMONSTRAŢIE.

Folosind formula (1.5) pentru cazul $M_1 = A$, $M_2 = B$ şi $M_3 = C$, obţinem $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ sau $abz + bcx - abc + acy = 0$. Împărţind ultima ecuaţie prin abc obţinem $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Ecuaţia (1.6) se numeşte **ecuaţia "prin tăieturi"** a planului.

În continuare enunţăm o teoremă folositoare în aplicaţii, fără demonstraţie.

Teorema 1.5. *Două plane $\mathcal{P}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ şi $\mathcal{P}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sunt paralele dacă şi numai dacă $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$. Dacă, în plus, $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$, atunci planele coincid.*

Dacă numitorul unui raport din egalitatea de mai sus este zero atunci şi numărătorul corespunzător trebuie să fie zero, deoarece $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.6. Ecuaţia unui plan paralel cu planul xOy şi care trece prin punctul $A(2, -5, 3)$: orice plan $(\mathcal{P})$, paralel cu planul xOy, are, conform teoremei anterioare ecuaţia $z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ deci, în acest caz, ecuaţia planului este $z = 3$.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat în spaţiul intuitiv şi $\overline{v} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ un vector dat.

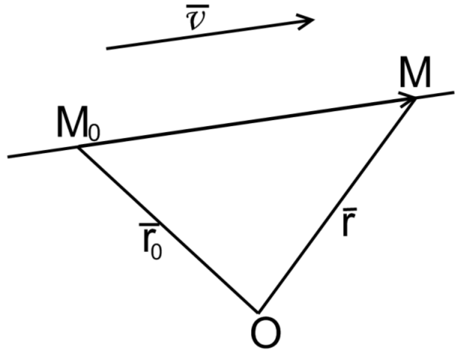
Mulţimea punctelor M din spaţiul intuitiv astfel încât $\overline{M_0M} || \overline{v}$ determină o unică dreaptă D.

Un punct curent $M(x, y, z)$ descrie dreapta D, dacă vectorii $\overline{M_0M}$ şi $\overline{v}$ sunt coliniari, adică $\overline{M_0M} \times \overline{v} = \overline{0}$ sau $\overline{M_0M} = t\overline{v}$, cu $t \in \mathbb{R}$.

Considerând coliniaritatea exprimată prin relaţia $\overline{M_0M} \times \overline{v} = \overline{0} \Rightarrow$

$$(\overline{r} - \overline{r_0}) \times \overline{v} = \overline{0} \tag{1.7}$$

care este numită **ecuaţia vectorială a dreptei**.



De aici rezultă ecuaţiile scalare:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{1.8}$$

numite **ecuaţiile carteziene sub formă canonică ale dreptei.**

Considerând coliniaritatea în forma $\overline{M_0M}=t\overline{v}$, cu $t\in\mathbb{R}$ obţinem:

$$\overline{r}=\overline{r_0}+t\overline{v} \tag{1.9}$$

echivalentă cu ecuaţiile scalare:

$$\begin{cases} x=x_0+lt\\ y=y_0+mt,\ t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+nt\end{cases} \tag{1.10}$$

numite **ecuaţiile parametrice ale dreptei în spaţiu**.

Vectorul $\overline{v}=l\overline{i}+m\overline{j}+n\overline{k}\neq\overline{0}$ ce defineşte direcţia dreptei se numeşte **vectorul director** al dreptei, iar scalarii l,m,n se numesc **parametrii directori ai dreptei**.

Remarca 1.7. Există trei modalităţi pentru a descrie mulţimea punctelor de pe o dreaptă:

1. ca mulţime a punctelor de intersecţie a două plane distincte neparalele;

2. parametric, adică prin precizarea coordonatelor unui punct curent de pe o dreaptă în funcţie de un parametru variabil în $\mathbb{R}$;

3. în forma canonică, în care apare un vector director care precizează direcţia dreptei şi un punct M_0 de pe dreaptă.

Exemplul 1.8. Fie dreapta $(D):\frac{x-\alpha}{2}=\frac{y+1}{\beta}=\frac{z-2\alpha}{3}$ şi planul $(\mathcal{P})$: $x-2y-3z-2=0$. Să determinăm α şi β astfel încât dreapta (D) să fie situată în planul $\mathcal{P}$.

Avem $\overline{v}(2,\beta,3)$ vectorul director al dreptei (D) şi $\overline{N}(1,-2,-3)$ vectorul normal la planul $\mathcal{P}$. Punem condiţia ca $\overline{v}\perp\overline{N}$, adică $\overline{v}\cdot\overline{N}=0$ de unde se obţine $\beta=-\frac{7}{2}$.

Punând apoi condiţia ca punctul $M(\alpha,-1,2\alpha)$ prin care trece dreapta să aparţină planului rezultă $\alpha=0$.

2. Fascicule de plane

Definiţia 2.1. Fie $(\mathcal{P}_1):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ şi $(\mathcal{P}_2):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ două plane neparalele. O combinaţie liniară netrivială a celor două ecuaţii conduce tot la ecuaţia unui plan. Mulţimea tuturor acestor plane astfel obţinute formează **fasciculul de plane determinat de** $(\mathcal{P}_1)$ **şi** $(\mathcal{P}_2)$ sau determinat de dreapta $(\mathcal{P}_1)\cap(\mathcal{P}_2)$.

Ultima afirmaţie este evidentă deoarece orice plan de forma $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y_+C_2z+D_2)=0$, conţine punctele dreptei $(d)=(\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2)$. Prin urmare, un fascicul de plane este determinat de o dreaptă (d).

Trebuie arătat că, orice plan $(\mathcal{P})$ care conţine dreapta $(d) = (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$ este o combinaţie liniară a acestor două plane.

Fie $(\mathcal{P}) : Ax + By + Cz + D = 0$. $(\mathcal{P}) \supset (d) = (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow$ sistemul:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ Ax + By + Cz = -D \end{cases}$$

are o infinitate de soluţii, matricea acestuia având rangul 2, rang dat de primele două linii.

Găsim că $(A, B, C) = \alpha(A_1, B_1, C_1) + \beta(A_2, B_2, C_2)$, pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Cum sistemul (2.1) are cel puţin o soluţie, înmulţim prima ecuaţie cu α, a doua cu β, apoi scădem din a treia ecuaţie suma primelor două ecuaţii.

Vom obţine că $0 = -D + \alpha D_1 + \beta D_2$ sau că $D = \alpha D_1 + \beta D_2$ şi deci $(\mathcal{P}) = \alpha(\mathcal{P}_1) + \beta(\mathcal{P}_2)$, unde ecuaţiile planelor le-am notat cu numele lor.

Algoritmul de aplicare a fasciculelor de plane în rezolvarea problemelor este următorul: pentru a determina un plan $(\mathcal{P})$ care trece printr-o dreaptă dată (d) şi care mai îndeplineşte o altă cerinţă (C) scriem ecuaţia fasciculului determinat de dreapta (d) şi găsim o relaţie omogenă între α şi β dată de cerinţa (C).

Înlocuim apoi în ecuaţia fasciculului α în funcţie de β (sau invers) şi găsim ecuaţia planului căutat.

Exemplul 2.2. Ecuaţia carteziană a planului ce conţine dreapta (D) : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ şi intersectează dreapta (D_1) : $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$ în punctul $M_0(4, -1, 4)$.

Scriem ecuaţia fascicului de plane determinate de dreapta (D), $(\mathcal{P})$: $\alpha(x - y) + \beta(2y - z - 2) = 0$ sau $(\mathcal{P}) : x - y + \lambda(2y - z - 2) = 0$, prin împărţire cu α.

Avem $(\mathcal{P}) : x + (2\lambda - 1)y - \lambda z - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Punem condiţia ca $M_0 \in (\mathcal{P})$ de unde obţinem $\lambda = \frac{5}{8}$.

Deci planul căutat are ecuaţia $(\mathcal{P}) : 8x + 2y - 5z - 10 = 0$.

3. Probleme de distanţe şi unghiuri

Fie punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Definim distanţa dintre ele prin formula:

$$(3.1) \quad d(M_1, M_2) = \|\overline{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Fie acum două obiecte Δ_1 şi Δ_2 în spaţiul intuitiv, date ca mulţimi nevide de puncte.

Definim distanţa dintre cele două obiecte prin formula:

$$(3.2) \qquad d(\Delta_1, \Delta_2) = \underbrace{inf}_{M_1 \in \Delta_1, M_2 \in \Delta_2} \{d(M_1, M_2)\}$$

Acest infimum există deoarece $d(M_1, M_2) \geq 0$, totuşi nu întotdeauna el este atins, adică nu întotdeauna există $M' \in \Delta_1$ şi $M'' \in \Delta_2$ astfel încât $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M', M'')$.

Ca exemplu se poate lua hiperbola $xy = 1$, considerată în planul xOy şi axa Ox. Distanţa dintre hiperbolă şi axa Ox este 0 şi totuşi niciodată hiperbola nu întâlneşte axa Ox, ea fiind asimptotă pentru hiperbolă.

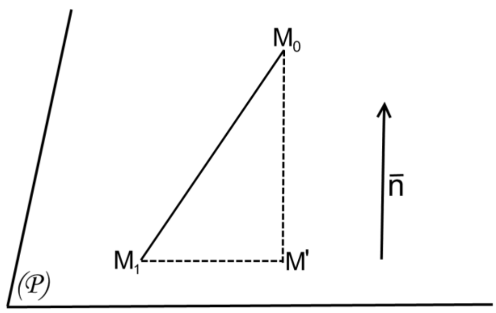
Infimumul de mai sus poate fi atins într-o infinitate de puncte, de exemplu în cazul a două plane paralele.

În continuare ne propunem să calculăm distanţa între obiecte geometrice uzuale:

1) Distanţa dintre un punct şi un plan este zero dacă punctul aparţine planului şi este, în general, distanţa dintre punctul considerat şi proiecţia acestuia pe plan, deoarece orice oblică ce trece prin punct este "mai mare" decât perpendiculara din punct pe plan. În continuare prezentăm o metodă vectorială şi o formulă pentru calculul acestei distanţe.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi planul $(\mathcal{P}) : Ax + By + Cz + D = 0$. Fie $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (\mathcal{P})$ şi $\overline{M_0M'}$ perpendiculara din M_0 pe planul $(\mathcal{P})$.

Este clar că $d(M_0, (\mathcal{P})) = \|\overline{M_0M'}\| = \|pr_{\overline{n}}\overline{M_1M_0}\|$, unde $\overline{n}(A, B, C)$ este un vector normal la planul $(\mathcal{P})$.



Deci $d(M_0, (\mathcal{P})) = \dfrac{|\overline{M_1M_0} \cdot \overline{n}|}{\|\overline{n}\|}$, de unde:
$d(M_0, (\mathcal{P})) = \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, şi deoarece $M_1 \in (\mathcal{P})$, adică $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, obţinem că:

$$d(M_0, (\mathcal{P})) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.3}$$

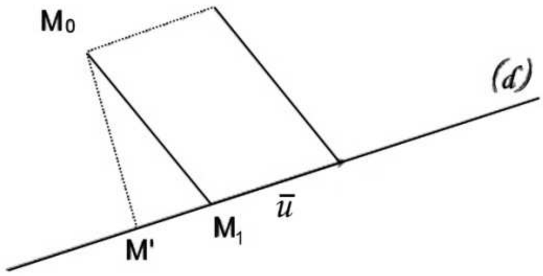
Exemplul 3.1. Să se determine distanţa de la triunghiul ABC (suprafaţa mărginită de conturul ABC) la planul $(\mathcal{P})$ de ecuaţie $x - y + z = 0$, dacă $A(1, -1, 0), B(2, 1, 0), C(-1, 0, -1)$.

Este evident că distanţa este atinsă într-unul din vârfurile tringhiului. Calculăm aceste distanţe: $d(A,(\mathcal{P})) = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(A,(\mathcal{P})) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $d(B,(\mathcal{P})) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $d(C,(\mathcal{P})) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ şi obţinem că $d(ABC,(\mathcal{P})) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) Distanţa dintre un punct şi o dreaptă

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $(d) : \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$, o dreaptă care trece prin $M(x_1, y_1, z_1)$.

Este clar că $d(M_0,(d)) = d(M_0, M')$, unde M' este proieţia punctului M_0 pe dreapta (d).



Vom folosi următorul procedeu vectorial: legăm vectorul liber $\overline{u} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ în $M_1(M_1 \in (d))$ şi calculăm aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{u}$ şi $\overline{M_1M_0}$ în două moduri:

$S = \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{M_0M'}\| = \|\overline{u} \times \overline{M_1M_0}\|$, de unde găsim formula:

$$d(M_0,(d)) = \frac{\|\overline{u} \times \overline{M_0M_1}\|}{\|\overline{u}\|}. \tag{3.4}$$

Exemplul 3.2. Fie segmentul $[AB]$, unde $A(1,2,-1), B(-1,0,1)$ şi dreapta $(d) : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. Să se determine distanţa dintre dreapta (d) şi segmentul $[A,B]$.

Soluţie: Este clar că $d([A,B],(d)) = min\{d(A,(d)), d(B,(d)\}$. Prin calcul $d(A,(d)) = \frac{\|(0,2,-1)\times(0,-2,0)\|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ şi $d(B,(d)) = \frac{\|(0,2,-1)\times(2,0,-2)\|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$, deci $d([A,B],(d)) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Aici $M_1(1,0,-1) \in (d)$.

3) Distanţa dintre o dreaptă şi un plan: este zero dacă dreapta intersectează planul, iar dacă dreapta este paraleă cu planul distanţa dintre dreaptă şi plan este distanţa dintre un punct de pe dreaptă şi plan.

4) Distanţa dintre o dreaptă (d_1) şi o altă dreaptă (d_2) se găseşte după următorul procedeu:

Fie $(d_1) : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} = \alpha$, $(d_2) : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} = \beta$, $M_1(x_1 + \alpha l_1, y_1 + \alpha m_1, z_1 + \alpha n_1) \in (d_1)$ şi $M_2(x_2 + \beta l_2, y_2 + \beta m_2, z_2 + \beta n_2) \in (d_2)$. Parametrii α şi β se determină din condiţiile:

$$\begin{cases} \overline{M_1M_2} \cdot \overline{u_1} = 0 \\ \overline{M_1M_2} \cdot \overline{u_2} = 0 \end{cases}, \tag{3.5}$$

unde $\overline{u_1} = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$ şi $\overline{u_2} = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$. Aceste condiţii exprimă faptul că segmentul M_1M_2 este perpendicular pe (d_1) şi (d_2), altfel $\|\overline{M_1M_2}\|$ nu ar putea realiza distanţa minimă dintre (d_1) şi (d_2). Am aplicat din nou faptul că “o oblică este mai mare decât o perpendiculară”.

Sistemul (3.5) în necunoscutele α şi β are determinantul $s = (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2 - ({l_1}^2 + {m_1}^2 + {n_1}^2)({l_2}^2 + {m_2}^2 + {n_2}^2)$. Avem că $s \leq 0$, iar $s = 0$ dacă şi numai dacă $\overline{u_1}$ este coliniar cu $\overline{u_2}$, adică (d_1) este paralelă cu (d_2).

În acest caz, distanţa dintre (d_1) şi (d_2) se calculează astfel: se consideră un punct $P_1 \in (d_1)$ şi se calculează distanţa de la P_1 la (d_2).

Dacă (d_1) nu este paralelă cu (d_2), sistemul (3.5) are o unică soluţie (α_0, β_0) care precizează unic două puncte ${M_1}^0$ şi ${M_2}^0$ pe (d_1) şi respectiv (d_2) în care distanţa minimă este atinsă.

Dreapta care trece prin ${M_1}^0$ şi ${M_2}^0$ se numeşte **perpendiculara comună a celor două drepte**.

Exemplul 3.3. Fie $(d_1) : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ şi $(d_2) : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Să se determine $d((d_1), (d_2))$ şi ecuaţia perpendicularei comune.

Soluţie: Avem nevoie de ecuaţiile canonice ale dreptei (d_1). Pentru acesta luăm un punct $M_1' \in (d_1)$, adică considerăm o soluţie a sistemului $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

Fie $z = 0, x = -1, y = 1$, deci $M_1'(-1, 1, 0)$. Paramterii directori ai dreptei (d_1), l_1, m_1, n_1 se află din egalitatea $l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k} = \overline{v_1} \times \overline{v_2}$, unde $\overline{v_2} = \overline{i} - \overline{k}$, un vector normal la planul $x - z + 1 = 0$, iar $\overline{v_2} = \overline{j} + 2\overline{k}$, un vector normal la planul $y + 2z - 1 = 0$.

Deci $l_1 = 1, m_1 = -2, n_1 = 1$.

Dreptele (d_1) şi (d_2) nu sunt paralele deoarece nu există $\lambda \in \mathbb{R}$astfel încât $(1, -2, 1) = \lambda(3, 2, -1)$.

$M_2'(1, 0, -1) \in (d_2)$, deci un punct curent $M_1 \in (d_1)$ are coordonatele de forma $(-1 + \alpha, -2\beta, -1 + \beta)$.

Prin urmare, $\overline{M_1M_2}(2+3\beta-\alpha, -2\beta+2\alpha-1, -1+\beta-\alpha)$, iar sistemul (3.5) devine: $\begin{cases} 1(2 - \alpha + 3\beta) - 2(2\alpha - 2\beta - 1) - 1 - \alpha + \beta = 0 \\ 3(2 - \alpha + 3\beta) - 2(2\alpha - 2\beta - 1) - 1 + \beta - \alpha = 1. \end{cases}$.

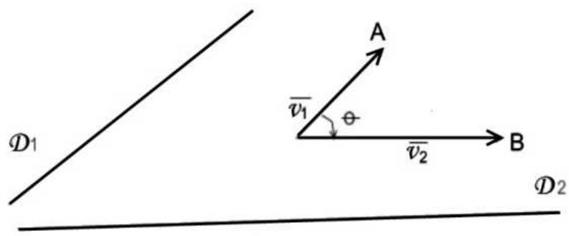
Rezolvăm acest sistem şi găsim α şi β. Cu aceste valori pentru α şi

β calculăm coordonatele punctelor corespunzătoare şi apoi $\|\overline{M_1M_2}\|$. După aceea se scrie ecuaţia unei drepte care trece prin M_1 şi M_2. Aceasta va fi ecuaţia perpendicularei comune celor două drepte (d_1) şi (d_2).

În continuare ne ocupăm de unghiul a două obiecte geometrice. În general, unghiul dintre două obiecte geometrice Δ_1 şi Δ_2 poate fi definit, dacă fiecărui obiect i se asociază în mod unic o direcţie. Analizăm în continuare câteva cazuri particulare:

1) Unghiul între două drepte orientate: se defineşte ca fiind unghiul dintre vectorii care dau direcţiile lor. Cum semnul acestor vectori nu ne interesează, vor apărea mereu două unghiuri suplementare care pot fi unghiurile a două drepte.

Prezentăm o metodă de calcul, considerând dreptele (D_1) şi (D_2) orientate prin vectorii lor directori $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2} \neq \overline{0}$.



Unghiul θ dintre vectorii directori $\overline{v_1}$ şi $\overline{v_2}$ este definit prin $\cos\theta = \dfrac{(\overline{v_1}, \overline{v_2})}{\|\overline{v_1}\| \cdot \|\overline{v_2}\|}$, $\theta \in [0, \pi]$.

Dacă $\overline{v_1} = l_1\overline{i} + m_1\overline{j} + n_1\overline{k}$ şi $\overline{v_2} = l_2\overline{i} + m_2\overline{j} + n_2\overline{k}$, atunci $\cos\theta = \dfrac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

2) Unghiul dintre două plane orientate

Fie două plane $(\mathcal{P}_1)$ şi $(\mathcal{P}_2)$ orientate prin vectorii lor normali $\overline{N_1}$, $\overline{N_2} \neq 0$, pe care le considerăm neconfundate şi neparalelele. Ele se intersectează după o dreaptă (D) şi determină un unghi diedru. Acest unghi este unghiul dintre cei doi vectori normali $\overline{N_1}$ şi $\overline{N_2}$, determinat prin:

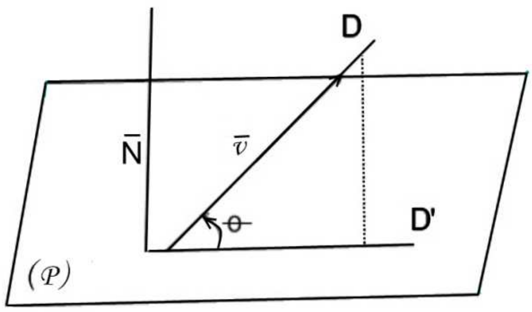
$$\cos\varphi = \frac{(\overline{N_1}, \overline{N_2})}{\|\overline{N_1}\| \cdot \|\overline{N_2}\|}.$$

Dacă $\overline{N_1} = A_1\overline{i} + B_1\overline{j} + C_1\overline{k}$ şi $\overline{N_2} = A_2\overline{i} + B_2\overline{j} + C_2\overline{k}$ atunci

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3) Unghiul dintre o dreaptă orientată şi un plan orientat

Fie $(\mathcal{P}) : Ax + By + Cz + D = 0$ un plan şi $(D) : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ o dreaptă care intersectează planul. Fie (D') proiecţia dreptei (D) pe planul orientat $\mathcal{P}$. Prin definiţie, unghiul dintre planul orientat $(\mathcal{P})$ şi dreapta orientată (D) este cel mai mic unghi θ dintre dreapta (D) şi proiecţia ei (D') pe planul $(\mathcal{P})$.



Întrucât $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \dfrac{(\overline{N},\overline{v})}{\|\overline{N}\|\cdot\|\overline{v}\|}$, avem

$\sin(\theta) = \dfrac{lA+mB+nC}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Exemplul 3.4. Să se determine unghiul dintre dreapta $(D): x-2=y=2z+1$ şi planul $(\mathcal{P}): x+2y-3z+4=0$.

Identificând $\overline{v}$ şi $\overline{N}$ şi aplicând formula de calcul stabilită mai sus obţinem $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) - \dfrac{(\overline{v},\overline{N})}{\|\overline{N}\|\cdot\|\overline{v}\|} \Rightarrow \cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

4. PROBLEME REZOLVATE

1. a) Calculaţi distanţa de la punctul $A(2,1,3)$ la planul $(\mathcal{P})$, de ecuaţie $4x-3y+12z-7=0$.

b) Calculaţi distanţa de la punctul $P(2,1,0)$ la planul determinant de punctele $A(1,-1,1), B(-2,1,3)$ şi $C(4,-5,-2)$.

Soluție:a) $d(A,\mathcal{P}) = \dfrac{|4\cdot 2-3\cdot 1+12\cdot 3-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+12^2}} = \dfrac{34}{13}$.

b) Ecuaţia planului (ABC) este dată de $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$. Dezvoltând după prima linie şi calculând obţinem: $2x-3y+6z-11=0$. Atunci $d(P,(ABC)) = \dfrac{|2\cdot 2-3\cdot 1+6\cdot 0-11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{49}} = \dfrac{10}{7}$.

2. Un mobil punctual se află la momentul t în punctul $M(2t+1, t-2, t-5)$. Să se arate că traiectoria acestuia este o dreaptă şi să se afle la ce moment de timp t_0, acesta se află la distanţa minimă faţă de origine.

Soluție:Considerăm la un moment t că punctul M are coordonatele (x, y, z). Atunci $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = t - 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ acestea reprezentând ecuaţiile parametrice ale unei drepte. Deci punctul M descrie o dreaptă.

Considerăm originea $O(0, 0, 0)$ şi atunci la un moment de timp t, distanta dintre O şi M va fi $d(t) = \sqrt{(2t + 1)^2 + (t - 2)^2 + (t - 5)^2} = \sqrt{6t^2 - 10t + 30}$. Minimul funcţiei $d(t)$ este atins atunci când este atins minimul funcţiei de gradul al doilea de sub radical, adică la momentul $t_0 = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

3. Fie planele $(\mathcal{P}_1) : x - y + 3z - 5 = 0$ şi $(\mathcal{P}_2) : 2x + 3y - 4z + 5 = 0$. Determinaţi ecuaţia dreptei de intersecţie a acestora şi unghiul φ dintre cele două plane.

Soluție:Vectorul normal la planul $(\mathcal{P}_1)$ este $\overline{N_1} = \overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k}$, iar vectorul normal la planul $(\mathcal{P}_2)$ este $\overline{N_2} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$.

Un vector director al dreptei de intersecţie a celor două plane este $\overline{v} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}$. Pentru calculul produsului vectorial considerăm determinantul formal: $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ pe care îl dezvoltăm după prima linie. Obţinem $\overline{v} = -5\overline{i} + 10\overline{j} + 5\overline{k}$.

Pentru a determina ecuaţia dreptei (D) de intersecţie mai avem nevoie de un punct de pe aceasta, pe care îl determinăm ca o soluţie particulară a sistemului format cu ecuaţiile celor două plane. Pentru $z = 0$ obţinem sistemul $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$ cu soluţia $(x, y) = (2, -3)$. Obţinem deci punctul $A(2, -3, 0) \in D$, iar ecuaţia dreptei D va fi $\frac{x - 2}{-5} = \frac{y + 3}{10} = \frac{z}{5}$, sau $2 - x = \frac{y + 3}{2} = z$.

În fine, $\cos \varphi = \frac{(\overline{N_1}, \overline{N_2})}{\|\overline{N_1}\| \cdot \|\overline{N_2}\|} = \frac{2 - 3 - 12}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{13}{\sqrt{319}}$.

4. Se dau punctele $A(1, -2, 3)$, $B(2, -1, 8)$ şi $D(2, 3, 5)$în reperul cartezian $Oxyz$.

a) Să se determine mulţimea punctelor C din planul xOy astfel încât triunghiul ABC să fie isoscel cu $AB = AC$ şi $< \overline{AB}, \overline{AC} >= -9$.

b) Să se verifice dacă $ABCD$ este tetraedru.

Soluție:a) Fie $C(x, y, 0)$ un punct în planul xOy cu proprietăţile din enunţ.

Avem $AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 + 2)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{27}$, iar $AC = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 9}$. Atunci din $AB = AC$ obţinem $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 9 = 27 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 18$.

Pe de altă parte, $\overline{AB} = \overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k}$ şi $\overline{AC} = (x - 1)\overline{i} + (y + 2)\overline{j} - 3\overline{k}$, deci relaţia $< \overline{AB}, \overline{AC} >= -9$, devine $x - 1 + y + 2 - 15 = -9 \Rightarrow x + y = 5$.

Atunci $y = 5 - x$ şi înlocuid în relaţia de mai sus $(x-1)^2 + (7-x)^2 = 18 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 50 = 18 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 1$. În concluzie $C(4,1,0)$ este singurul punct cu proprietaţile cerute.

b) Verificăm dacă cele 4 puncte sunt coplanare. Pentru aceasta determinăm ecuaţia planului (BCD) şi verificăm apoi dacă punctul A aparţine acestui plan.

Ecuaţia planului (BCD) este dată de $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-8 \\ 2 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 26(x-2) + 6(y+1) + 8(z-8) = 0 \Rightarrow 26x + 6y + 8z - 110 = 0 \Rightarrow 13x + 3y + 4z - 55 = 0$. Verificăm dacă $A(1,-2,3)$ aparţine acestui plan $13 - 6 + 12 - 55 = -36 \neq 0$, deci punctele A, B, C, D sunt necoplanare şi atunci determină un tetraedru.

5. Determinaţi planul care trece prin intersecţia planelor (P_1) de ecuaţie $x + 5y + z = 0$ şi (P_2) de ecuaţie $x - z + 4 = 0$ şi care formează cu planul (P) de ecuaţie $x - 4y - 8z + 12 = 0$ un unghi $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Soluţie:Considerăm fasciculul de plane care trec prin dreapta de intersecţie a planelor (P_1) şi (P_2), (P_λ): $(x + 5y + z) + \lambda(x - z + 4) = 0 \Rightarrow (1+\lambda)x + 5y + (1-\lambda)z + 4\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vectorul normal la planul (P) este $\overline{N} = \overline{i} - 4\overline{j} - 8\overline{k}$, iar vectorul normal la (P_λ) este $\overline{N_\lambda} = (1+\lambda)\overline{i} + 5\overline{j} + (1-\lambda)\overline{k}$.

Atunci, dacă φ este unghiul planelor (P) şi (P_λ), $\cos\varphi = \dfrac{<\overline{N}, \overline{N_\lambda}>}{\|\overline{N}\| \cdot \|\overline{N_\lambda}\|}$.

Din ipoteză $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ şi atunci $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Atunci $\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$
$= \dfrac{(1+\lambda) - 20 - 8(1-\lambda)}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{(1+\lambda)^2 + 25 + (1-\lambda)^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{(9\lambda - 27)^2}{81 \cdot (2\lambda^2 + 27)} \Rightarrow 162\lambda^2 + 2187 = 2(81\lambda^2 - 486\lambda + 729) \Rightarrow 2187 - 1458 = -972\lambda \Rightarrow 729 = -972\lambda \Rightarrow \lambda = -\dfrac{729}{972} \Rightarrow \lambda = -\dfrac{3}{4}$.

Deci planul căutat are ecuaţia $\frac{1}{4}x + 5y + \frac{7}{4}z - 3 = 0$.

6. Determinaţi simetricul punctului $A(-1,2,0)$ faţă de planul (P) de ecuaţie $x + 2y - z + 3 = 0$.

Soluţie:Simetricul punctului A este un punct $A'(x', y', z')$ care se află pe perpendiculara din A pe plan şi cu proprietatea că $d(A, (P)) = d(A', (P))$.

Perpendiculară din A pe plan, va avea ca vector director, vectorul normal la planul (P), adică $\overline{N} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$. Atunci ecuaţia generală a acestei drepte este $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

Determinăm punctul de intersecţie al acestei drepte cu planul (P) care va fi mijlocul segmentului AA'.

Pentru aceasta scriem ecuaţiile dreptei sub formă parametrică, adică $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ şi înlocuind în ecuaţia planului obţinem $t - 1 + 2(2t + 2) - (-t) + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$. Atunci punctul de intersecţie căutat este $M(-2, 0, 1)$. Cum M este mijlocul segmentului AA' obţinem $\frac{x' - 1}{2} = -2$, $\frac{y' + 2}{2} = 0$ şi $\frac{z'}{2} = 1$, de unde $A'(-3, -2, 2)$.

5. PROBLEME PROPUSE

1. a) Stabiliţi poziţia relativă a planelor $(\mathcal{P}_1) : 2x - 3y + 5z - 7 = 0$ şi $(\mathcal{P}_2) : 2x - 3y + 5z + 3 = 0$.

b) Arătaţi că planele $(\mathcal{P}_1) : 4x - y - 2z - 7 = 0$, $(\mathcal{P}_2) : x - 2y + 3z + 5 = 0$ şi $(\mathcal{P}_3) : x + 2y + z = 0$ sunt două câte două ortogonale.

2. a) Să se stabilească poziţia dreptei de ecuaţie $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 3}{5}$, faţă de planul de ecuaţie $2x - y + 5z - 2 = 0$.

3. Se consideră în spaţiu punctele $A(1, -1, 0)$, $B(0, 1, -1)$ şi $C(-2, 1, 3)$. Să se determine:

a) vectorul director al dreptei AB şi distanţa de la C la AB;

b) ecuaţia planului perpendicular pe AB şi care conţine punctul C;

c) Simetricul punctului A faţă de planul determinat anterior.

4. Se consideră punctele $A(1, 3, 0)$, $B(3, -2, 1)$, $C(\alpha, 1, -3)$ şi $D(7, -2, 3)$.

a) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât cele 4 puncte să fie coplanare;

b) Să se determine unghiul dintre dreptele AC şi BD.

5. Fie ABC triunghiul determinat de punctele $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, -7, -2)$.

a) Scrieţi ecuaţiile parametrice ale dreptei suport a medianei dusă din vârful C.

b) Determinaţi lungimile înălţimilor triunghiului.

6. Scrieţi ecuaţiile canonice ale dreptei ce trece prin $A(2, 0, -4)$ şi este paralelă cu dreapta de ecuaţii parametrice: $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

7. Determinaţi ecuaţia planului care conţine dreapta de intersecţie a planelor (P_1) de ecuaţie $x - 2y + 3z - 7 = 0$ şi (P_2) de ecuaţie $2x - y + 5z + 3 = 0$ şi este perpendicular pe planul (P) de ecuaţie: $x + y - 2z - 5 = 0$.

CAPITOLUL 7

Cuadrice

1. Sferă. Elipsoid. Hiperboloizi. Paraboloizi

1.1. Sferă.

Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fix şi $R > 0$ un număr real fixat.

Mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ cu proprietatea că distanţa de la aceste puncte la punctul fix C este egală cu R, deci $d(C, M) = R$ este o suprafaţă numită **sferă de centru C şi rază R**.

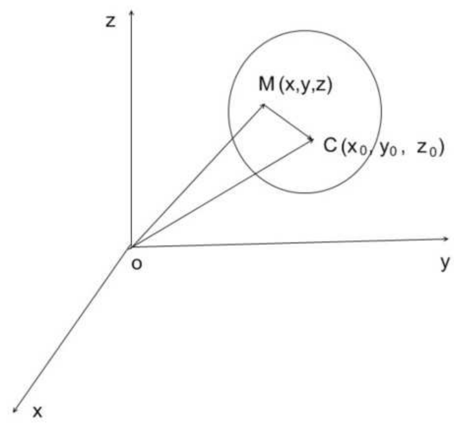
Folosind expresia analitică a distanţei între două puncte, rezultă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \tag{1.1}$$

şi, în acest fel, sfera, notată cu S este mulţimea:

$$S = \{M(x, y, z) | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2\}$$

Definiţia 1.1. Ecuaţia (1.1) se numeşte **ecuaţia carteziană implicită a sferei de centru C şi rază R.**



Ecuaţia (1.1) este echivalentă cu trei ecuaţii parametrice în $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos u \sin v \\ y = y_0 + R\sin u \sin v,\ \ u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi], \\ z = z_0 + R\cos v \end{cases} \tag{1.2}$$

sau cu ecuaţia vectorială

$$\overline{r} = \overline{r_0} + R(\cos u \sin v\overline{i} + \sin u \sin v\overline{j} + \cos v\overline{k}) \tag{1.3}$$

Observăm că membrul stâng al ecuaţiei carteziene (1.1) este un polinom de gradul al doilea în x, y, z şi considerăm mulţimea:

$$(1.4) \qquad S_1 : x^2 + y^2 + z^3 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0;\ x, y, z \in \mathbb{R}$$

Deoarece ecuaţia lui S_1 se scrie de forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$ rezultă:

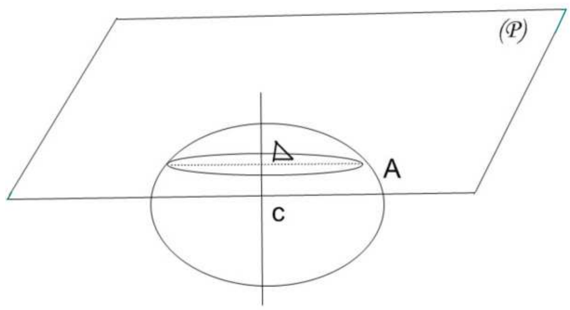
i) dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, atunci S_1 este o sferă cu centrul în punctul $C_1(a, b, c)$ şi de rază $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$;

ii) dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, atunci $S_1 = \{(a, b, c)\}$;

iii) dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, atunci $S_1 = \emptyset$.

Definiţia 1.2. Ecuaţia (1.4), unde $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ se numeşte ecuaţia carteziană generală a sferei.

În continuare considerăm sfera $S : x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d = 0$, cu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ şi planul $(\mathcal{P}) : Ax + By + Cz + D = 0$.



Deoarece $C(a, b, c)$ este centrul sferei, $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ raza ei, iar $d(C, (\mathcal{P}))$ este distanţa de la centrul sferei la planul $(\mathcal{P})$, avem:

i) dacă $d(C, (\mathcal{P})) < R$, intersecţia dintre sfera S şi planul $(\mathcal{P})$ este un cerc.

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

numit “cerc în spaţiu”.

ii) dacă $d(C, (\mathcal{P})) = R$, atunci planul $(\mathcal{P})$ este tangent la sfera S.

iii) dacă $d(C, (\mathcal{P})) > R$, atunci $S \cap (\mathcal{P}) = \emptyset$, adică planul $(\mathcal{P})$ nu intersectează sfera S.

Observaţii 1.3. 1. Dacă centrul sferei C coincide cu O, originea reperului, atunci avem $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, numită sfera cu centrul în origine.

2. O sferă S este o mulţime compactă, fiind închisă şi mărginită, care împarte spaţiul în două submulţimi disjuncte: interiorul sferei $int(S)$, şi exteriorul sferei $ext(S)$, unde:
$int(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 < 0\}$ şi
$ext(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 > 0\}$.

Exemplul 1.4. Să se scrie ecuaţia sferei cu centrul pe dreapta (D) : $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$, având raza $R = \sqrt{5}$ şi care trece prin punctul $A(0, 2, -1)$.

Soluţie: Centrul sferei aparţine dreptei (D), deci are coordonatele $C(t, 1-t, t-2)$. Celelalte condiţii se exprimă sub forma $R = \|\overline{CA}\|$ sau $t^2 + (1+t)^2 + (t-1)^2 = 5$, de unde $t_1 = -1, t_2 = 1$.

Centrele corespunzătoare sunt $C_1(-1, 2, -3)$ şi $C_2(1, 0, -1)$, iar ecuaţiile sferelor sunt: $S1 : (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5$, respectiv $S_2 : (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$.

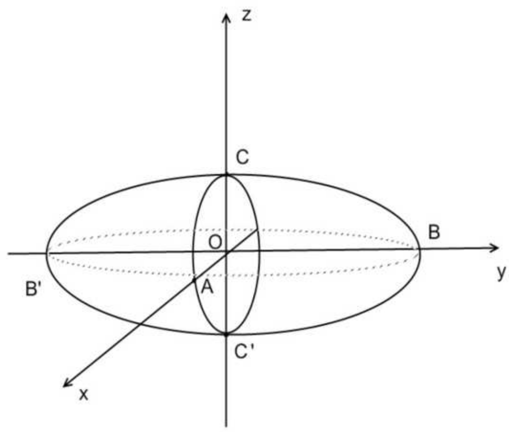
1.2. Elipsoidul.

Definiţia 1.5. Se numeşte **elipsoid** o suprafaţă (cuadrică) E, pentru care există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia suprafeţei este:

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{1.5}$$

unde $a, b, c > 0$.

Ecuaţia (1.5) se mai numeşte şi ecuaţia canonică a cudricei de tip elipsoid.



Observații 1.6.: 1. Elipsoidul este o mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.

2. Deoarece $(x, y, z) \in E \Rightarrow (-x, y, z), (x, -y, z), (-x, -y, z),$ $(-x, -y, -z) \in E$, deducem că eplipsoidul admite planele xOy, xOz şi yOz ca plane de simetrie. De asemenea, şi intersecţiile acestor plane, adică axele de coordonate sunt axe de simetrie ale elipsoidului, iar originea O este centrul de simetrie al elipsoidului.

Intersecţia lui E cu planul xOy este elipsa

$$\Gamma : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases} .$$

şi analog intersecţia cu celelalte două plane de simetrie.

Similar, intersecţiile elipsoidului E cu plane paralele cu planele de simetrie sunt elipse reale.

Intersecţiile elipsoidului E cu axele de simetrie sunt punctele A, A'; $B, B'; C, C'$ care se numesc vârfurile elipsoidului.

Ecuaţia carteziană (1.5) este echivalentă cu ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cos u \sin v \\ y = b \sin u \sin v \\ z = c \cos v \end{cases} , \; u \in [0, \pi], v \in [0, \pi]. \tag{1.6}$$

1.3. Hiperboloizi.

Definiţia 1.7. O suprafaţă H_1 se numeşte **hiperboloid cu o pânză**, dacă există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia sa are forma:

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1.7}$$

Ecuaţia (1.7) se numeşte ecuaţia canonică a cuadricei de tip hiperboloid cu o pânză.

Suprafaţa H_1 are planele de coordonate, axele şi originea ca plane de simetrie, axe de simetrie şi respectiv centru de simetrie.

Intersecţia cu planul xOy este elipsa: $\Gamma_1 : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$.

Intersecţiile cu planele yOz şi respectiv xOz sunt hiperbolele $\Gamma_2 :$ $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$ şi respectiv, $\Gamma_3 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$.

Intersecţiile lui H_1 cu planele paralele cu xOy, adică planele de ecuaţie $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt elipse reale.

Hiperboloidul H_1 se mai numeşte şi hiperboloid cu o pânză cu Oz ca axă netransversală. Similar şi suprafeţele $H_1' : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ şi $H_1'' : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sunt hiperboloizi cu o pânză cu axe netransversale Ox şi respectiv Oy.

Hiperboloidul cu o pânză este o mulţime închisă, dar nemărginită deci nu este o suprafaţă compactă şi are doar 4 vârfuri: A, A' şi B, B'.

Definiţia 1.8. Suprafaţa $\Sigma_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ este un con numit **conul asimptotic** al hiperboloidului cu o pânză H_1.

Definiţia 1.9. Suprafaţa H_2 se numeşte **hiperboloid cu două pânze** dacă există un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ faţă de care ecuaţia ei este:

$$H_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \tag{1.8}$$

Ecuaţia (1.8) este ecuaţia canonică a cuadricei de tip hiperboloid cu două pânze.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii ca şi hiperboloidul cu o pânză. Intersecţia lui cu planul xOy este mulţimea vidă, iar intersecţiile cu planele yOz şi respectiv xOz sunt hiperbolele: $\Gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ şi respectiv $\Gamma_2 : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$.

Intersecţiile lui H_2 cu planele paralele cu xOy, adică planele de ecuaţie $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt elipse reale. Suprafaţa H_2 se mai numeşte şi hiperboloidul cu două pânze cu axă transversală axa Oz.

Similar, suprafeţele $H_2' : -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1 = 0$ şi $H_2'' : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1 = 0$ reprezintă hiperboloizi cu două pânze dar cu axele Ox şi respectiv Oy ca axe transversale.

Observaţii 1.10 1. H_2 este o suprafaţă închisă şi nemărginită.

2. Conul de ecuaţie $\Sigma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ este conul asimptotic al hiperboloidului H_2.

1.4. Paraboloizi.

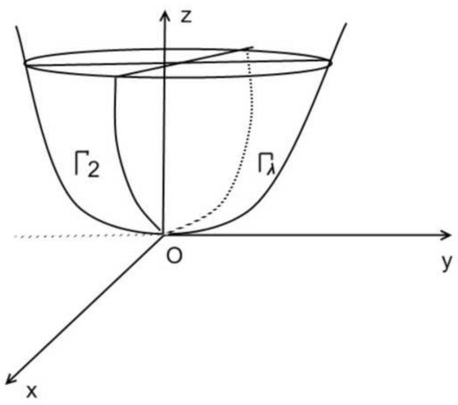
Definiţia 1.11. O suprafaţă P_1 se numeşte **paraboloid eliptic** dacă există un sistem de axe ortogonale faţă de care ecuaţia sa are forma

$$P_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,\ a > 0, b > 0 \tag{1.9}$$

Ecuaţia (1.9) se numeşte ecuaţia canonică a cuadricei de tip paraboloid eliptic. P_1 are planele xOz şi yOz ca plane de simetrie, iar axa Oz-axă de simetrie.

Intersecţia cu planul yOz şi respectiv xOz este parabola $\Gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{y^2}{b^2} \end{cases}$ şi respectiv parabola $\Gamma_2 : \begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{a^2} \end{cases}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu planul xOy, de ecuaţii $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ reprezintă elipse: $\Gamma_\lambda : \begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{(a\sqrt{\lambda})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{\lambda})^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda \in (0, \infty) \end{cases}$.



Şi paraboloidul eliptic este o suprafaţă închisă şi nemărginită.

Se obsevă că şi suprafeţele: $P_1' : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$ şi $P_1'' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = y$, $a > 0, b > 0, c > 0$ sunt tot paraboloizi eliptici.

Definiţia 1.12. Suprafaţa P_2 se numeşte **paraboloid hiperbolic** dacă există un sistem de axe ortogonale faţă de care ecuaţia sa este de forma:

$$P_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \ a > 0, b > 0. \tag{1.10}$$

Ecuaţia (1.10) se numeşte ecuaţia canonică a cuadricei de tip paraboloid hiperbolic.

P_2 este simetric faţă de xOz şi yOz şi axa Oz, de aceea este numit şi paraboloid hiperbolic cu axa de simetrie Oz.

Evident şi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = y$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = x$ sunt tot paraboloizi hiperbolici, dar cu axa de simetrie Oy, respectiv Ox.

Intersecţiile lui P_2 cu planele xOz şi yOz sunt parabolele:

$\Gamma_1 : \begin{cases} y = 0 \\ z = \frac{x^2}{a^2} \end{cases}$ şi $\Gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{y^2}{b^2} \end{cases}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu xOy: $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt hiperbole. Se observă că, paraboloidul hiperbolic ca mulţime de puncte în spaţiu este nemărginită şi închisă.

În încheierea paragrafului prezentăm o serie de suprafeţe cu care cititorul se poate întâlni.

Faţă de un sistem de axe ortogonale $Oxyz$ suprafaţa de ecuaţie:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ se numeşte **cilindru eliptic**;
b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ se numeşte **cilindru hiperbolic**;
c) $y^2 = 2px$ sau $x^2 = 2qy$ se numeşte **cilindru parabolic**;
d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ se numeşte **pereche de plane concurente**;
e) $x^2 - a^2 = 0$ se numeşte **pereche de plane paralele**;
f) $x^2 = 0$ se numeşte **pereche de plane confundate**

2. Reducerea cuadricelor la forma canonică

Fie $\Sigma = g^{-1}(0)$, adică $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | g(x,y,z) = 0\}$ o cuadrică, unde $g(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44}$, cu $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Vom nota, $\Sigma : g(x,y,z) = 0$.

Observație: Topologic, cuadricele sunt mulţimi închise în spaţiu deoarece $\{0\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, $\Sigma = g^{-1}(0)$ şi g este o funcţie continuă. (Am avut în vedere următorul rezultat: Preimaginea unei mulţimi închise printr-o funcţie continuă este tot o mulţime închisă.)

Prin trecerea de la reperul cartezian $\{O; \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit reper canonic sau natural) faţă de care ecuaţia $g(x,y,z) = 0$ să aibă cea mai simplă formă (numită ecuaţie canonică sau redusă) se obţine că suprafaţa Σ este identificată cu una din mulţimile studiate în paragraful anterior.

Faţă de translaţii şi rotaţii, ecuaţia generală a cuadricelor, $g(x,y,z) = 0$, are invarianţii:

$$\delta = detA,\ I = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta = detB,$$

unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ este matricea ataşată formei pătratice $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ din ecuaţia generală a cuadricei, iar $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ este matricea formată cu toţi coeficienţii din ecuaţia generală a cuadricei.

Tipul cuadricei se poate stabili cu ajutorul invarianţilor δ şi Δ.

Astfel, dacă $\Delta \neq 0$ cuadrica se numeşte **cuadrică nedegenerată**: sfera, elipsoidul, hiperboloizii şi paraboloizii, iar dacă $\Delta = 0$, cuadrica se numeşte cuadrică degenerată: con, cilindri, pereche de plane, drepte.

Pentru început, efectuăm translaţia sitemului de axe definită prin $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$ şi alegem a, b, c astfel încât noua origine să fie centru de simetrie.

Obţinem astfel sistemul pentru determinarea coordonatelor a, b, c ale centrului de simetrie:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}g_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ \frac{1}{2}g_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ \frac{1}{2}g_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases},$$

unde $g_x = \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}$, $g_y = \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y}$, $g_z = \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}$, sistem al cărui determinant este invariantul δ. Se obţin cazurile:

a) dacă $\delta \neq 0$, sistemul (2.1) are soluţie unică ceea ce înseamnă că există un centru de simetrie (elipsoizi, hiperboloizi, con);

b) dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi determinantul caracteristic $\Delta_c \neq 0$, adică $rang(A) = 2$, atunci sistemul (2.1) este incompatibil, adică nu există centru de simetrie (paraboloizi);

c) dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi determinantul caracteristic $\Delta_c = 0$, sistemul (2.1) este compatibil simplu nedeterminat şi deci există o dreaptă a centrelor (cilindri eliptici şi hiperbolici);

d) dacă $\delta = 0$, $rangA = 1$ şi determinanţii caracteristici Δ_{C_1}, Δ_{C_2} sunt nuli, sistemul este compatibil dublu nedeterminat; deci cuadrica are un plan de centre;

e) dacă $\delta = 0$, $rangA = 1$ şi cel puţin unul dintre determinanţii caracteristici Δ_{C_1}, Δ_{C_2} este nenul, sistemul este incompatibil (cilindri parabolici).

După translaţie, în cazul cuadricelor cu centru, ecuaţia cuadricei va fi:

$$a_{11}{x'}^2 + a_{22}{y'}^2 + a_{33}{z'}^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + g(x', y', z') = 0$$

Dacă efectuăm apoi şi rotaţia obţinem:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^3 + g(X, Y, Z) = 0$$

care reprezintă ecuaţia canonică a cuadricei cu centru ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sunt valorile proprii ale matricei A).

Da fapt, pentru reducerea la forma canonică a cuadricelor în cazul general, procedăm astfel:

I) dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci efectuăm o translaţie şi obţinem direct forma canonică a cuadricei;

II) dacă cel puţin unul din numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci mai efectuăm o rotaţie folosind metoda vectorilor proprii. Anume, pentru matricea A ataşată formei pătratice $q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ din ecuaţia generală a cuadricei, determinăm valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi vectorii proprii corespunzători $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ care sunt ortogonali.

Fie $\overline{e_1} = \frac{\overline{v_1}}{\|\overline{v_1}\|}$, $\overline{e_2} = \frac{\overline{v_2}}{\|\overline{v_2}\|}$, $\overline{e_3} = \frac{\overline{v_3}}{\|\overline{v_3}\|}$ versorii proprii corespunzători şi fie $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matricea formată, pe coloane, cu coordonatele acestor versori astfel încât $detR = \pm 1$(dacă $detR = -1$, înlocuim unul dintre versorii proprii $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ prin opusul său şi renumerotăm valorile proprii).

Atunci rotaţia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ reduce forma pătratică q la forma canonică, $\lambda_1{x'}^2 + \lambda_2{y'}^2 + \lambda_3{z'}^2$ aşa încât ecuaţia generală a cuadricei, faţă de reperul rotit, devine:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + Ax' + By' + Cz' + a_{44} = 0.$$

Construim apoi pătrate $\lambda_1(x'+a_1)^2+\lambda_2(y'+a_2)^2+\lambda_3(z'+a_3)+1=0$, iar prin translaţia: $x'' = x' + a$, $y'' = y' + a_2$, $z'' = z' + a_3$, obţinem ecuaţia canonică:

$$(i)\ \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + D = 0. \tag{2.2}$$

Dacă una sau două valori proprii λ_i sunt nule, forma canonică (2.2) poate fi una din expresiile:
(ii) $\lambda_1 x''^2 + \lambda y''^2 + Cz'' = 0$ (sau variante);
(iii) $\lambda_1 x''^2 + \lambda y''^2 + D = 0$ (sau variante);
(iv) $\lambda_1 y''^2 + Ax'' = 0$ (sau variante);
(v) $\lambda_1 x''^2 + D = 0$ (sau variante).
Toate aceste forme conduc la una din formele canonice.

Exemplul 2.1. Să se reducă la forma canonică şi să se precizeze natura cuadricei $36x^2 + y^2 + 4z^2 + 72x + 6y - 40z + 109 = 0$.

Soluţie. Deoarece matricea $A = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ are forma diagonală va fi suficient să restrângem pătratele corespunzătoare fiecărei variabile, adică $36(x+1)^2+(y+3)^2+4(z-5)^2-36 = 0$. Efectuând apoi translaţia $x = x'-1$, $y = y'-3$, $z = z'+5$ şi împărţind prin termenul liber obţinem elipsoidul de ecuaţie $\dfrac{(x')^2}{1} + \dfrac{(y')^2}{36} + \dfrac{(z')^2}{9} - 1 = 0$.

3. Intersecţia unei cuadrice cu o dreaptă. Intersecţia cu un plan. Plan tangent

Fie dreapta $(D) : x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$, $t \in \mathbb{R}$ şi $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ o cuadrică.

Intersecţia $(D) \cap \Sigma$ corespunde rădăcinilor $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ale ecuaţiei

$$t^2\varphi(l, m, n) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0}) + g(x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{3.1}$$

unde $\varphi(l, m, n) = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn$, iar $g_{x_0} = \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$, $g_{y_0} = \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}$, $g_{z_0} = \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$.

Atunci, deosebim cazurile:

1) Dacă $\varphi(l, m, n) \neq 0$, atunci (3.1) este o ecuaţie de gradul al doilea şi:

a) dacă discriminantul $q = (lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0})^2-\varphi(l, m, n)g(x_0, y_0, z_0)$ este mai mare decât 0, ecuaţia (3.1) are două rădăcini reale şi distincte t_1, t_2 ceea ce înseamnă că $(D) \cap \Sigma = \{M_1, M_2\}$, unde M_1, M_2 sunt punctele corespunzătoare valorilor t_1, respectiv t_2.

b) dacă $q = 0$ atunci $t_1 = t_2$, adică (D) este tangentă la cuadrica Σ;

c) dacă $q < 0$ atunci $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$, adică (D) nu intersectează cuadrica Σ.

2) Dacă $\varphi(l, m, n) = 0$, ecuaţia (3.1) se reduce la o ecuaţie de gradul I. Atunci:

a) dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} \neq 0$, ecuaţia (3.1) are o soluţie unică $t_0 = -\frac{g(x_0,y_0,z_0)}{lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}}$, ceea ce înseamnă că (D) intersectează cuadrica Σ într-un singur punct;

b) dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$ şi $g(x_0, y_0, z_0) = 0$, atunci (3.1) este o identitate şi deci $(D) \subset \Sigma$.

În continuare, pentru $\Sigma : g(x, y, z) = 0$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ un punct în care $g^2_{x_0} + g^2_{y_0} + g^2_{z_0} \neq 0$, se poate arăta că o dreaptă (D) de parametrii directori l, m, n este tangentă la cuadrica Σ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dacă şi numai dacă:

$$lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0=0} \tag{3.2}$$

Teorema 3.1. *Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica Σ în punctul M_0 este planul T, de ecuaţie:*

$$T : (x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0. \tag{3.3}$$

DEMONSTRAŢIE. Folosind (3.2) şi eliminând parametrii l, m, n şi t între această ecuaţie şi (D) obţinem (3.3).

Definiţia 3.2. Planul T de ecuaţie (3.3) se numeşte **plan tangent** la cuadrica Σ în punctul M_0.

Remarcă: Ecuaţia (3.3) se scrie şi astfel: $a_{11}xx_0 + a_{22}yy_0 + a_{33}zz_0 + a_{12}(xy_0+x_0y)+a_{13}(xz_0+x_0z)+a_{23}(yz_0+y_0z)+a_{14}(x+x_0)+a_{24}(y+y_0)+ a_{34}(z + z_0) + a_{44} = 0$, numită şi **ecuaţia dedublată a cuadricelor**.

Definiţia 3.3. Dreapta care trece prin M_0 şi este perpendiculară pe planul tangent se numeşte **normală la cuadrică** în punctul M_0 şi are ecuaţiile:

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}. \tag{3.4}$$

Fie acum $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ o cuadrică şi $(\mathcal{P}) : Ax+By+Cz+D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ un plan. A studia intersecţia $(\mathcal{P}) \cap \Sigma$ înseamnă, a studia sistemul $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$.

Spre exemplu, dacă $C \neq 0 \Rightarrow z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$ şi înlocuind în $g(x, y, z) = 0$, obţinem că intersecţia $(\mathcal{P}) \cap \Sigma$ este o mulţime de puncte din planul $(\mathcal{P})$ caracterizată prin ecuaţia obţinută: $a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22} + y^2 + 2a'_{13} + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$ care este o conică.

Exemplul 3.4. Să se determine ecuaţia planului care trece prin dreapta $(D) : \frac{x-15}{9} = \frac{y}{2} = \frac{z-11}{-1}$ şi este tangent la cuadrica $\Sigma : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$.

Soluţie. Scriem ecuaţia fasciculului de plane: $(\mathcal{P}_\lambda): 2x - 9y - 30 + \lambda(y + 2z - 22) = 0$ determinat de dreapta (D) şi punem condiţia ca acest plan să coincidă cu planul tangent la Σ: $\frac{xx_0}{9} - \frac{yy_0}{4} - (z + z_0) = 0$ într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de pe Σ.

Obţinem $\begin{cases} \dfrac{2}{\dfrac{x_0}{9}} = \dfrac{\lambda - 9}{\dfrac{-y_0}{4}} = \dfrac{2\lambda}{-1} = \dfrac{-22\lambda - 30}{-z_0} \\ \dfrac{x_0^2}{9} - \dfrac{y_0^2}{4} - 2z_0 = 0 \end{cases}$

Eliminând x_0, y_0, z_0 obţinem ecuaţia $7\lambda^2 + 16\lambda - 24 = 0$ care are soluţiile $\lambda_{12} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{234}}{7}$. Deci obţinem două plane cu proprietatea cerută.

4. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se găsească punctele de intersecţie dintre suprafaţa $\Sigma: \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ şi drepta $D: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4}$.

Soluție:Scriem ecuaţiile dreptei D sub formă parametrică. Pentru aceasta considerăm $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z+2}{4} = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -6t + 4 \\ z = 4t - 2 \end{cases}$

Înlocuind în ecuaţia suprafeţei Σ, obţinem o ecuaţie în t, şi anume: $\dfrac{(3t+3)^2}{81} + \dfrac{(-6t+4)^2}{36} + \dfrac{(4t-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{9(t+1)^2}{81} + \dfrac{4(3t-2)^2}{36} + \dfrac{(4t-2)^2}{9} = 1 \Rightarrow (t+1)^2 + (3t-2)^2 + (4t-2)^2 = 9 \Rightarrow 26t^2 - 26t + 9 = 9 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t = 0$ sau $t = 1$. Corespunzător celor două valori ale lui t obţinem cele două puncte de intersecţie dintre D şi Σ.

Pentru $t = 0$ obţinem punctul $A = (3, 4, -2)$, iar pentru $t = 1$ obţinem punctul $B = (6, -2, 2)$.

2. Determinaţi poziţia planului de ecuaţie $2x - 2y - z - 10 = 0$, faţă de paraboloidul de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 2y$.

Soluție:Determinăm punctele de intersecţie dintre paraboloid şi plan, dacă acestea există, considerând sistemul format cu ecuaţiile acestora. Din ecuaţia planului găsim că $2y = 2x - z - 10$. Înlocuind în ecuaţia paraboloidului obţinem $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 2x - z - 10 \Rightarrow 4x^2 + 9z^2 = 36(2x - z - 10) \Rightarrow 4x^2 + 9z^2 - 72x + 36z + 360 = 0 \Rightarrow (2x-18)^2 + (3z+6)^2 = 0$, de unde obţinem valori unice pentru x şi z, şi anume $x = 9$, $z = -2$. Atunci $y = 5$ şi deci planul este tangent la paraboloid în punctul $P(9, 5, -2)$.

3. Să se determine centrul, să se aducă la forma canonică şi să se identifice cuadrica de ecuaţie generală $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$.

Soluție:Centrul cuadricei $C(x_0, y_0, z_0)$, se determina din sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$, unde $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8$. Atunci $\begin{cases} 2x_0 - 6 = 0 \\ 6y_0 + 4z_0 + 8 = 0 \\ 4y_0 = 0 \end{cases}$, de unde $C(3, 0, -2)$.

Efectuăm translaţia $\begin{cases} x = x_1 + 3 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + 2 \end{cases}$ şi ecuaţia cuadricei devine $(x_1+3)^2 + 3y_1^2 + 4y_1(z_1 - 2) - 6(x_1 + 3) + 8y_1 + 8 = 0$, de unde $x_1^2 + 3y_1^2 + 4y_1z_1 - 1 = 0$.

Funcţionala pătratică asociată acesteia este $q(x_1, y_1, z_1) = x_1^2+3y_1^2+4y_1z_1$, aceasta având matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Valorile proprii corespunzătoare acestei matrice se determină din ecuaţia $det(A - \lambda I_3) = 0$. Se obţin $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_3 = 4$.

Corespunzător fiecăreia dintre aceste valori proprii alegem câte un vector propriu şi considerăm versorii asociaţi fiecăruia dintre aceştia. Se obţin astfel $e_1(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $e_2(1, 0, 0)$ şi $e_3(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

Efectuăm apoi rotaţia dată de $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, adică $\begin{cases} x_1 = y_2 \\ y_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x_2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}z_2 \\ z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}z_2 \end{cases}$. Atunci ecuaţia cuadricei devine:
$y_2^2 + 3(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}z_2)^2 + 4(-\frac{1}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}z_2)(\frac{2}{\sqrt{5}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}z_2) - 1 = 0$, de unde obţinem, efectuând calculele, $-x_2^2 + y_2^2 + 4z^2 - 1 = 0$, adică ecuaţia unui hiperboloid cu o pânză.

4. Să se găsească sfera care trece prin punctele $A(1, 2, 3)$, $B(3, -4, 5)$ şi are centrul pe dreapta de intersecţie a planelor de ecuaţii $x+y+z = 5$ şi $2x + 5y + 3z = 10$. Determinaţi apoi ecuaţia planului tangent în punctul A la această sferă.

Soluție:Punctele dreaptei (D), ce reprezintă intersecţia celor două plane sunt soluţiile sistemului format cu ecuaţiile acestora, adică: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+5y+3z=10 \end{cases}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat şi are soluţiile $\begin{cases} x=5+2t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ acestea constituind ecuaţiile parametrice ale dreptei (D).

Considerăm ecuaţia carteziană a sferei de centru $C(x_0,y_0,z_0)$ şi raza R, $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Centrul sferei fiind pe dreapta (D), poate fi considerat ca având coordonatele $(5+2t,t,-3t)$, unde $t\in\mathbb{R}$.

Considerând aceste coordonate ale centrului şi apartenenţa lui A la sferă obţinem din ecuaţia sferei: $(1-5-2t)^2+(2-t)^2+(3+3t)^2=R^2$, iar din apartenenţa lui B la sferă obţinem $(3-5-2t)^2+(-4-t)^2+(5+3t)^2=R^2$. De aici, prin tranzitivitate, $(1-5-2t)^2+(2-t)^2+(3+3t)^2=(3-5-2t)^2+(-4-t)^2+(5+3t)^2\Rightarrow(-4-2t)^2+(2-t)^2+(3+3t)^2=(-2-2t)^2+(-4-t)^2+(5+3t)^2\Rightarrow 16+4t^2+16t+4+t^2-4t+9+9t^2+18t=4+4t^2+8t+16+t^2+8t+25+9t^2+30t\Rightarrow 16t+16=0\Rightarrow t=-1$. Astfel $C(3,-1,3)$ şi $R^2=13$, deci ecuaţia sferei este $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=13$.

Ecuaţia planului tangent în $A(1,2,3)$ la sferă se determină prin dedublare: $(1-3)(x-3)+(2+1)(y+1)+(3-3)(z-3)=13\Rightarrow -2x+6+3y+3=13\Rightarrow -2x+3y-4=0$.

5. Determinaţi ecuaţia planului tangent în punctul $A(3,2,-2)$ la cuadrica de ecuaţie $x^2-3y^2+xz+2yz-8z+1=0$.

Soluție:Considerăm $g(x,y,z)=x^2-3y^2+xz+2yz-8z+1$. Derivatele parţiale ale acesteia sunt: $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=2x+z$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=-6y+2z$ şi $\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=x+2y-8$. Calculându-le în punctul A obţinem: $\frac{\partial g}{\partial x}(3,2,-2)=4$, $\frac{\partial g}{\partial y}(3,2,-2)=-16$ şi $\frac{\partial g}{\partial z}(3,2,-2)=-1$. Atunci ecuaţia planului tangent în A la cuadrică este $4(x-3)-16(y-2)-(z+2)=0$, de unde $4x-16y-z+18=0$.

6. Să se determine intersecţia paraboloidului de ecuaţie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$ cu planul tangent în punctul $A(2,1,1)$ la cuadrica $\Sigma: x^2-y^2=3z$.

Soluție:Determinăm ecuaţia planului tangent în punctul A la cuadrica Σ. Avem $g(x,y,z)=x^2-y^2-3z$.

$\frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1)=4$, $\frac{\partial g}{\partial y}(2,1,1)=-2$ şi $\frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1)=-3$. Atunci ecuaţia planului tangent în A la cuadrică este $4(x-2)-2(y-1)-3(z-1)=0\Rightarrow 4x-2y-3z-3=0$.

Pentru a determina intersecţiile paraboloidului cu acest plan considerăm sistemul format cu ecuaţiile acestora, adică: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = z \\ 4x - 2y - 3z - 3 = 0 \end{cases}$. Atunci $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{4x-2y-3}{3} \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 12(4x - 2y - 3) \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 48x + 24y + 36 = 0 \Rightarrow (3x-8)^2 + (2y+6)^2 - 64 = 0 \Rightarrow \dfrac{(x-\frac{8}{3})^2}{(\frac{8}{3})^2} + \dfrac{(y+3)^2}{4^2} = 1$, adică intersecţia este o elipsă.

5. PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră cuadrica de ecuaţie $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{35} - 1 = 0$ şi punctele $A(1,3,2)$, $B(2,4,1)$. Să se precizeze poziţia dreptei AB faţă de cuadrică.

2. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât planul de ecuaţie $x - 2y - 2z + m = 0$ să fie tangent la elipsoidul de ecuaţie $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

3. Să se găsească punctele de intersecţie dintre hiperboloidul $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{4} = 1$ şi dreapta ce trece prin punctul $A(0,0,-2)$ şi are vectorul director $\overline{v} = (4,-3,4)$.

4. Determinaţi natura cuadricei de ecuaţie generală $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$.

5. Să se determine ecuaţia cuadricei care trece prin punctul $M(2,0,1)$, are centrul $C(0,0,-1)$ şi intersectează planul xOy după curba de ecuaţii $\begin{cases} x^2 - 4xy - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

6. Să se scrie ecuaţia planului tangent la elipsoidul $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0$ în punctul de intersecţie cu dreapta de ecuaţie $x = y = z$.

7. Calculaţi invarianţii δ, I şi Δ pentru cuadrica de ecuaţie $x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz - 2yz + 2x - 4 = 0$. Deduceţi dacă aceasta este sau nu degenerată.

Bibliografie

[1] Andronescu, S.C., *Algebră*, Ed. Universităţii din Piteşti, 2004.
[2] Atanasiu, Gh., Munteanu, Gh., Postolache, M., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, ecuaţii diferenţiale*, Ed. All, 1998.
[3] Ghelfand, I.M., *Lecţii de algebră liniară*(traducere din l. rusă), Ed. Tehnică, Bucureşti, 1953.
[4] Peschil, E., *Analytische Geometrie and Linear Algebra*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968.
[5] Popescu, A., *Algebră liniară şi aplicaţii*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1999.
[6] Radu, C., *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Ed. All, 1998.
[7] Udrişte, C., Radu, C., Dicu, C., Mălăncioiu, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1981.
[8] Udrişte, C., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1993.
[9] Nicolescu, L., Bumbăcea A, *Metode de rezolvare a problemelor de geometrie*, Ed. Universităţii din Bucureşti,
[10] Lipschutz, S., *Linear Algebra*, Ed. McGraw-Hill, New York, 1974.
[11] Georgescu, C., *Elemente de algebră liniară*, Ed. Universităţii din Piteşti, 2006.
[12] Stănăşilă, O., *Analiză liniară şi geometrie*, Ed. All, 2005.