Лабораторная работа по теории вероятности

2. Найти вероятность того, что 2 случайно брошенные в квадрат точки A, B будут образовывать диаметр окружности, лежащей в квадрате.

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{если окружность лежит в квадрате} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

Тогда требуется найти:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

.

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x_1 = x + r\cos\varphi \\ x_2 = x - r\cos\varphi \\ y_1 = y + r\sin\varphi \\ y_2 = y - r\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда при замене координат возникает множитель:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cos\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\sin\varphi & r\cos\varphi & -r\cos\varphi \end{matrix} \right\| = 2r\sin^2\varphi$$

Обозначим за $g(x, y, r)$ – индикатор того, что окружность с центром (x, y) и радиусом r лежит в квадрате, при этом область определения не ограничена.

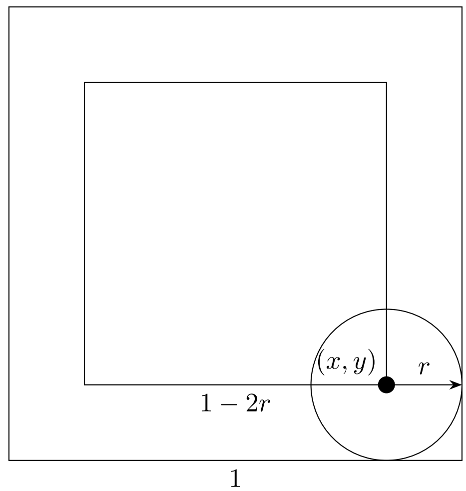
Итого интеграл преобразуется в:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^1 g(x, y, r)(2r\sin^2\varphi) dr d\varphi dx dy =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r \int\limits_{[0,1]^2} g(x, y, r) dx dy dr$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r \int\limits_{[0,1]^2} g(x, y, r) dx dy dr$$

Так как центр окружности находится в вложенном квадрате со стороной $1-2r$, то $\int\limits_{[0,1]^2} g(x,y,r)dxdy$ заменяется на $(1-2r)^2$



$$= 2\pi \int\limits_0^{\frac{1}{2}} r(1-2r)^2 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{48} = \frac{\pi}{24} \approx 0.1309$$

3. Известно, что $A_i = \{X = i\}$ и $B_j = \{Y = j\}$, при $i, j \geq 0$ независимы. $P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ и $P(Y = j) = e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}$.
   Тогда

$$P(X = i | X + Y = j) = \frac{P(X = i \,\&\, X + Y = j)}{P(X + Y = j)} = \frac{P(X + Y = j | X = i)P(X = i)}{P(X + Y = j)}$$

$$= \frac{P(Y = j - i)P(X = i)}{\sum\limits_{k=0}^{j} P(X = K)P(Y = j - k)} = \frac{e^{-\mu}\dfrac{\mu^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}}{\sum\limits_{k=0}^{j} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\dfrac{\mu^{j-k}}{(j-k)!}} = \frac{\dfrac{\mu^{j-i}\lambda^i}{(j-i)!\cdot i!}}{\dfrac{(\lambda+\mu)^j}{j!}} = C_j^i \frac{\mu^{j-i}\lambda^i}{(\lambda+\mu)^j}$$