

Лабораторная работа по теории вероятности

2. Найти вероятность того, что 2 случайно брошенные в квадрат точки A, B будут образовывать диаметр окружности, лежащей в квадрате.

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{если окружность лежит в квадрате} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (1)$$

Тогда требуется найти:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

.

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} x_1 = x + r \cos \varphi \\ x_2 = x - r \cos \varphi \\ y_1 = y + r \sin \varphi \\ y_2 = y - r \sin \varphi \end{cases}$$

Тогда при замене координат возникает множитель:

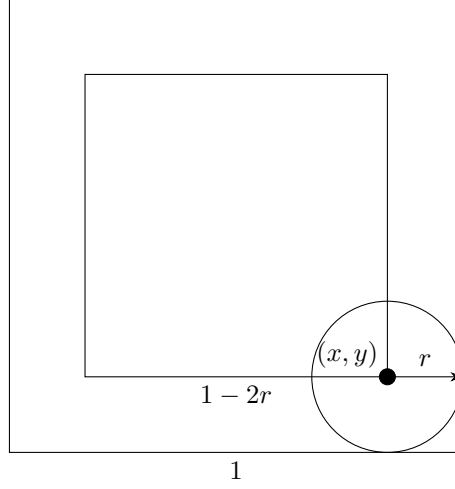
$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cos \varphi & -\cos \varphi & \sin \varphi & -\sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \sin \varphi & r \cos \varphi & -r \cos \varphi \end{array} \right\| = 4r$$

Обозначим за $g(x, y, r)$ – индикатор того, что окружность с центром (x, y) и радиусом r лежит в квадрате, при этом область определения не ограничена.

Итого интеграл преобразуется в:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 g(x, y, r)(4r) dr d\varphi dx dy = \\ & = 4 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} r \int_{[0,1]^2} g(x, y, r) dx dy dr \\ & = 8\pi \int_0^{\frac{1}{2}} r \int_{[0,1]^2} g(x, y, r) dx dy dr \end{aligned}$$

Так как центр окружности находится в вложенном квадрате со стороной $1-2r$, то $\int_{[0,1]^2} g(x, y, r) dx dy$ заменяется на $(1-2r)^2$



$$= 8\pi \int_0^{\frac{1}{2}} r(1-2r)^2 dr = 8\pi \cdot \frac{1}{48} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5235987$$

3. Известно, что $A_i = \{X = i\}$ и $B_j = \{Y = j\}$, при $i, j \geq 0$ независимы. $P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ и $P(Y = j) = e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!}$.

Тогда

$$\begin{aligned} P(X = i | X + Y = j) &= \frac{P(X = i \& X + Y = j)}{P(X + Y = j)} = \frac{P(X + Y = j | X = i)P(X = i)}{P(X + Y = j)} \\ &= \frac{P(Y = j - i)P(X = i)}{\sum_{k=0}^j P(X = k)P(Y = j - k)} = \frac{e^{-\mu} \frac{\mu^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}}{\sum_{k=0}^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{j-k}}{(j-k)!}} = \frac{\frac{\mu^{j-i} \lambda^i}{(j-i)! \cdot i!}}{\frac{(\lambda + \mu)^j}{j!}} = C_j^i \frac{\mu^{j-i} \lambda^i}{(\lambda + \mu)^j} \end{aligned}$$