Лабораторная работа по теории вероятности

1. X – случайная величина, принимающая значения только значения вида k^2, где $k \in \mathbb{N}$. При этом $\forall k \in \mathbb{N}\, P(X = k^2) > 0$. Показать, что X нельзя разложить в сумму двух независимых невырожденных случайных величин.

   Пусть X представим в виде $Y + Z$, где Y и Z – случайные величины со свойствами из условия. Из независимости следует, что если Y принимает значение y, а Z принимает значение z, то $Y + Z$ принимает значение $y + z$ с ненулевой вероятностью. Из матана известно, что конечная сумма по семейству обладает счетным числом ненулевых слагаемых, поэтому можем пронумеровать множество значений случайных величин Y и Z. Заметим, что так как $\forall i, j.\, y_i + z_j \in \mathbb{N}$, то все дробные части y_i и z_j должны совпадать. Тогда все y_i и все z_j можно сдвинуть на значения дробной части и получить целые числа. Так как $\forall i, j.\, y_i + z_j \geq 0$, то отрицательных значений конечное количество, причем они есть либо только среди y_i, либо среди только z_j. Пусть отрицательные значения только в z_j, тогда ко всем z_j можно прибавить $|\min z_j|$, а у всех y_i вычесть $|\min z_j|$. После сдвигов случайные величины Y и Z принимают только неотрицательные целые значения. Так как $Y + Z$ должна принимать все значения k^2, то Y и Z принимают 0. Либо Y, либо Z должны принимать 1. Пусть Y принимает 1, тогда Z не может принимать других значений, так как $\nexists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : n = k_1^2$ и $n + 1 = k_2^2$. Получили противоречии с невырожденностью.

2. Даны $U, V \sim U[0, 1]$. Показать, что $X = \sqrt{-2 \ln V} \cos(2\pi U)$, $Y = \sqrt{-2 \ln V} \sin(2\pi U)$ образуют стандартный гауссов вектор.

   Воспользуемся формулой преобразования плотности:

   Для этого нужно предварительно выразить старые координаты через новые. Заметим, что

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = -2 \ln V \\ \dfrac{Y}{X} = \tan(2\pi U) \end{cases}$$

   Тогда преобразование получает вид:

$$\begin{cases} V = e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}} \\ U = \dfrac{1}{2\pi} \arctan\left(\dfrac{Y}{X}\right) \end{cases}$$

   Тогда множитель при переходе в другие координаты равен:

$$\left\| \begin{vmatrix} -xe^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}} & -ye^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}} \\ -\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}$$

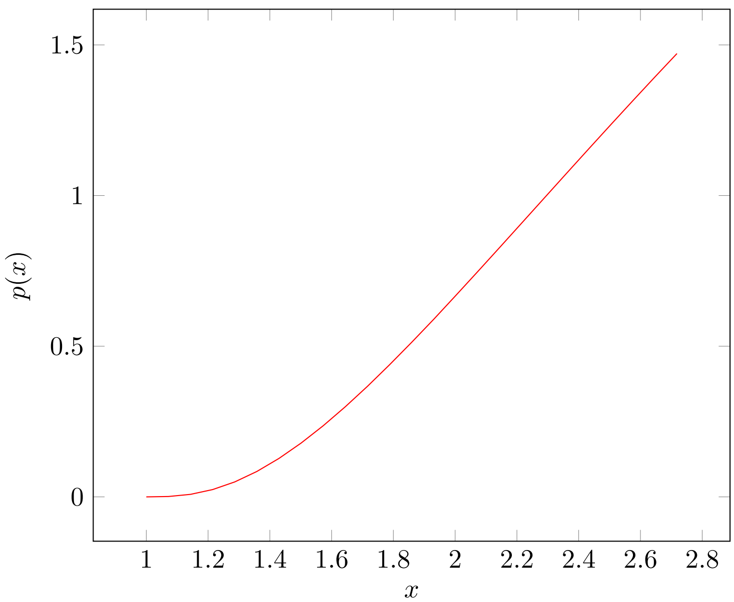
$p_{U,V}(u, v) = 1$, поэтому $p_{X,Y}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}$, что совпадает с формулой плотности для стандартного гауссового вектора. ($EX = 0, EY = 0, VarX = 1, VarY = 1, \rho(X, Y) = 0$).

3. Реализация генератора случайных чисел для распределения с плотностью $p(x) = 4\frac{\ln^3(x)}{x}$ на $[1, e]$.

   Рассматриваются три реализации:

   1. Стандартная – задана только плотность.
   2. Через квантили.
   3. Rejection sample метод.

   Принцип работы rejection sample метода: рассмотрим прямоугольник, в котором полностью укладывается функция плотности. Будем равновероятностно генерировать точку (x, y) пока она не попадет в подграфик $p(x)$, при этом x – случайно сгенерированнное число, соответствующее распределению. Рассмотрим вероятность того, что x лежит в некотором отрезке $[a, b]$. Очевидно, что вероятность этого – это площадь под графиком $p(x)$, то есть $\int\limits_a^b p(x)dx$. Поэтому сгенерированные числа действительно соответствуют распределению. Вероятность попасть под график $p(x)$ равна $\frac{1}{S(\text{прямоугольника})} = \frac{e}{4(e-1)}$, а тогда матожидание числа попыток $= \frac{4(e-1)}{e} \approx 2.5$



   Замеры в репозитории показывают ожидаемые результаты линейного времени работы при генерации n случайных чисел. Rejection sampling работает медленнее метода через квантили, потому что методу через квантили требуется только одно случайное число, а rejection sampling не детерминирован. При этом стандарнтый метод показывает самый худший результат, так как скорее всего реализован через квантили, но обратная функция считается приближенно численным интегрированием.

4. Оценка коорректности теорем о больших числах для распределения Пуассона при $\lambda \in (0, 10)$:

   Оценка через ЦПТ:

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq a\sqrt{\frac{VarX_1}{n}}\right) \approx Erf(a)$$

   Тогда $Erf(a) \geq 1 - \delta \Leftrightarrow a \geq Erf^{-1}(1-\delta)$ и $a\sqrt{\frac{VarX_1}{n}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{Erf^{-1}(1-\delta)VarX_1}{\varepsilon^2} \leq n$

   При заданных $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.05$ и $VarX_1 = \lambda$, где максимальное значение достигает 10, получается $n \approx 192000$.

   Оценка через неравенство Чебышева:

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{Var\overline{X}_n}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

Тогда $\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2} \le \delta$ достигается при $n \approx 2000000$.