Síndrome de Tourette

Perturbação neurológica crónica que se traduz na presença de determinados tiques (simples ou complexos), os tiques são movimentos (tiques motores) e vocalizações (tiques vocais) sem sentido e fora do contexto, involuntários, rápidos e recorrentes. cuja a frequência e intensidade são variáveis.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 6x \\ 2x + y = 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 6x - 4x \\ 2x = 6y - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 2x \\ 2x = 5y \end{cases}$$

Escolhendo uma das equações

$$5y = 2x$$

$$y = \frac{2x}{5}$$

$$\vec{v}_1 = (x, y)$$

$$\vec{v}_1 = \left(x, \frac{2x}{5}\right)$$

$$\vec{v}_1 = x \cdot \left(1, \frac{2}{5}\right)$$

→ Autovetor em relação ao autovalor $\lambda = 6$

2º caso

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 2x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -x - 4x \\ 2x = -y - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -5x \\ 2x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-5x}{5} \\ x = \frac{-2y}{2} \end{cases} \begin{cases} y = \\ x = \end{cases}$$

[illegible] os resultados são iguais

$$\vec{v}_2 = (x, y)$$

$$\vec{v}_2 = (x, -x)$$

$$\vec{v}_2 = x\,(1, -1)$$

Autovector

Logo [illegible] na forma (x, y) [illegible] a condição $(x, -x)$; logo o [illegible] resultado [illegible] é o autovetor em relação ao autovalor $\lambda = -1$, não só mas qualquer múltiplo de x

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

1 Considere o operador $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (2y, x+y)$ considerando $B = \{(1,0); (0,1)\}$. A base canónica do $\mathbb{R}^2$ obtenha:

a) A equação característica

$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$

1.º calcular $(A - \lambda \cdot I)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-\lambda & 2-0 \\ 1-0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

2.º calcular

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot (1-\lambda) - 1 \cdot 2$$
$$= -\lambda + \lambda^2 - 2$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2$$

$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

b) os autovalores

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

c) os autovectores

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$$

1º caso

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2x}{2} \\ x = 2y - y \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \rightarrow y = \frac{2x}{2} \Rightarrow y = x \quad \vee \quad \cancel{y = x - 2y}$$

$$\therefore y = x$$

$$\vec{v}_1 = (x, y) \qquad \vec{v} = (x, y) \Rightarrow \vec{v} = x(\boxed{1, 1})$$
$$\vec{v}_1 = (y, y) \qquad \vec{v} = (x, x)$$
$$\vec{v}_1 = y(1, 1)$$

→ Autovector em função de $\lambda = 2$

2º caso

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 2y \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y = -x \;(-1) \\ x + y = -y \end{cases} \iff \begin{cases} -2y = x \\ x = -y - y \end{cases} \iff \begin{cases} -2y = x \\ x = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ -\frac{x}{2} = y \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 = (x, y)$$
$$\vec{v}_2 = (-2y, y)$$
$$\vec{v}_2 = y(-2, 1)$$

→ Autovector em função de $\lambda = -1$

ou

$$\vec{v}_2 \; (x, y)$$
$$\vec{v}_2 = (x, -\frac{x}{2})$$
$$\vec{v} = x(1, -\frac{1}{2})$$

$$\underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \\ y & z \end{bmatrix}} \neq \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

2 Considere o operador T sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x+y, y-z, 2y+4z)$ considerando $B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$. A base canonica do $\mathbb{R}^3$, obtenha

a) Equação característica

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{bmatrix} 2x & y & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & 2y & 4z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1º calcular $(A - \lambda I)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

2º calcular diterminante

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 2(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)\cdot[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2]$$
$$= (2-\lambda)\cdot(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2)$$
$$(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) = 0$$

$2-\lambda = 0$ ou $\lambda^2-5\lambda+6=0$ $\quad S=5 \quad P=6$

$\lambda = 2$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

b) os aitovalores

$\lambda = 2$

c) os autovectores $\quad A(v) = \lambda(v)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & y & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & 2y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+y=2x \\ y-z=2y \\ 2y+4z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -z=y \\ 2y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$\vec{v}_1 = (x, y, z)$

$\vec{v}_1 = (x, 0, 0)$

$\vec{v}_1 = x(1, 0, 0) \rightarrow$ Autovector associado ao autovalor $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x & y & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & 2y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3x \\ y - z = 3y \\ 2y + 4z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ -z = 2y_{(-1)} \\ 2y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

$\vec{v}_2 = (x, y, z)$

$\vec{v}_2 = (y, y, -2y)$

$\vec{v}_2 = y\,(1, 1, -2) \rightarrow$ Autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$

2