

**Laboratorium komputerowe oraz Ćwiczenia rachunkowe z przedmiotu
„Metody obliczeniowe”
Prowadzący: L. Bieniasz
Zagadnienia do opanowania przed zajęciami,
pomocnicze zadania rachunkowe do rozwiązania na ćwiczeniach rachunkowych,
oraz tematy programów do realizacji na zajęciach laboratoryjnych.**

Zajęcia nr 1:

Zagadnienia do opanowania:

Rodzaje błędów w obliczeniach numerycznych, reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb rzeczywistych, standard IEEE 754.

Zadania:

(1) Oszacuj wielkość błędu obcięcia przy wyznaczaniu przybliżonej wartości $\ln(z)$ poprzez sumowanie n wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z_0 = 1$. Ile wyrazów należy zsumować, aby otrzymać błąd bezwzględny logarytmu nie większy niż 10^{-8} , dla $z = 2$?

(2) Rozważ prosty system reprezentacji zmiennoprzecinkowej

$$rd(x) = (-1)^e m 2^{z-b}$$

liczb rzeczywistych, w którym na mantysę oraz na cechę przeznaczono po dwa bity, zatem jedno słowo maszynowe zajmuje 5 bitów. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych liczb rzeczywistych reprezentowalnych w tym systemie, przy założeniu że $b = 1$. Uwzględnij możliwość liczb znormalizowanych zakładając $m \in [1, 2)$, oraz zdenormalizowanych, i określ jakie słowa maszynowe należałoby zarezerwować na $+0$, -0 , $+INF$, $-INF$ oraz reprezentacje NaN.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, umożliwiający „doświadczalne” wyznaczenie liczby bitów mantysy oraz tzw. *epsylona maszynowego*, dla zmiennych typu **float** i **double**, tj. najmniejszej liczby ε takiej, że $fl(\varepsilon + 1) > 1$. Aby znaleźć odpowiedź na pytanie jak napisać taki program, zacznij od wyjaśnienia kwestii jaki jest związek ε z precyzją arytmetyki.

Zajęcia nr 2:

Zagadnienia do opanowania:

Własności zadań: uwarunkowanie zadań. Metody oceny błędów maszynowych. Zjawisko utraty cyfr znaczących przy odejmowaniu. Własności algorytmów: numeryczna poprawność, numeryczna stabilność.

Zadania:

(1) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia iloczynu $p = x \cdot y$ oraz ilorazu $d = x/y$ dwóch liczb rzeczywistych x i y , oraz oszacuj wielkość względnych błędów maszynowych wyników w przypadku numerycznych obliczeń zmiennoprzecinkowych p i d .

(2) Oceń błąd względny obliczenia $a^2 - b^2$ w arytmetyce fl , przy zastosowaniu algorytmów:

$$A1(a,b) = a \cdot a - b \cdot b$$

$$A2(a,b) = (a - b) \cdot (a + b)$$

zakładając, że $rd(a) = a$, $rd(b) = b$.

(3) Zbadaj uwarunkowanie (względne) zadania obliczenia wartości funkcji $y = f(x) = (1 + x)^{-1}$.

Program:

Zaimplementuj w języku „C/C++” algorytm obliczający przybliżone wartości funkcji $f(x) = [1 - \exp(-x)]/x$ dla $x \in [10^{-30}, 10^9]$, korzystając z funkcji standardowej $\exp()$. W oparciu o zbiór dokładnych wartości tej funkcji, udostępniony przez prowadzącego zajęcia, zbadaj jak zmieniają się błędy względne przybliżenia funkcji w tym algorytmie, w zależności od x . W tym celu wykonaj rysunek przedstawiający zależność logarytmu dziesiętnego z bezwzględnej wartości błędu względnego od logarytmu dziesiętnego z x . Z wykresu odczytaj zakres zmiennej x , w którym błąd względny pozostaje na poziomie błędu reprezentacji, oraz zakres zmiennej x , w którym błąd względny jest większy. Wyjaśnij przyczynę obserwowanych zmian błędów. Na tej podstawie zaproponuj alternatywny sposób obliczania wartości funkcji $f(x)$ w sytuacjach gdy obserwowany błąd jest duży. Dokonaj stosownej modyfikacji programu, tak aby uzyskać błąd względny na poziomie błędu reprezentacji (czyli tzw. dokładność maszynową) dla dowolnego $x \in [10^{-30}, 10^9]$. W obliczeniach zastosuj zmienne podwójnej precyzji. Do wykonania rysunku w tym ćwiczeniu (a także w niektórych dalszych ćwiczeniach) najlepiej użyć programu GNUPLOT (dostępnego za darmo z Internetu).

Zajęcia nr 3:

Zagadnienia do opanowania:

Metody rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych: Picarda, bisekcji, reguła fałsi, Newtona, siecznych. Zbieżność metod iteracyjnych.

Zadania:

(1) Oceń zbieżność metody iteracyjnej Picarda w zastosowaniu do równań nieliniowych:

- a) $\sin^2(x/4) - x = 0$
- b) $\tan(2x) - x - 1 = 0$

(2) Pokaż, że tzw. algorytm Herona, służący do obliczania pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej a w oparciu o wzory:

$$\sqrt{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{gdzie } x_n = (x_{n-1} + a/x_{n-1})/2$$

może być interpretowany jako algorytm Newtona zastosowany do pewnego równania nieliniowego.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący metody:

- (a) Picarda
- (b) bisekcji
- (c) Newtona
- (d) siecznych

rozwiązywania pojedynczych algebraicznych równań nieliniowych. Zastosuj program do przykładów z zadania 1. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania rozwiązania o zadanej dokładności przez każdą z metod. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum równania w trakcie iteracji.

Zajęcia nr 4:

Zagadnienia do opanowania:

Rozwiązywanie układów nieliniowych równań algebraicznych. Uogólniona metoda Newtona.

Zadania:

(1) Napisz równania uogólnionej metody Newtona, w zastosowaniu do układu równań nieliniowych:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 = y$$

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący uogólnioną metodę Newtona rozwiązywania układu trzech algebraicznych równań nieliniowych, i zastosuj ten program do przykładu z zadania 1.

Przyjmij takie przybliżenie początkowe, aby uzyskać zbieżność metody. Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie iteracji.

Zajęcia nr 5:

Zagadnienia do opanowania:

Obliczanie norm wektorów i macierzy. Wskaźnik uwarunkowania macierzy. Eliminacja Gaussa. Dekompozycja LU macierzy pełnej. Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzą pełną.

Zadania:

(1) Oblicz normę pierwszą, normę drugą, i normę maksimum wektora

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz macierzy} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(2) Oblicz wskaźnik uwarunkowania dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$,

posługując się normą maksimum. Przyjmij $0 < \varepsilon \ll 1$. Która macierz zapewnia lepsze uwarunkowanie rozwiązania układu równań ($Ax = b$ lub $Bx = b$)?

(3) Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz wektor } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad \text{Zademonstruj kolejne etapy dekompozycji LU macierzy}$$

A, stosując eliminację Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, a następnie, korzystając z uzyskanego rozkładu, rozwiąż układ równań $Ax=b$. Podaj końcową zawartość macierzy L i U.

Program:

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -20 & 30 & -4 \\ 2 & -40 & -6 & 50 \\ 9 & -180 & 11 & -12 \\ -16 & 15 & -140 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{oraz wektor } b = \begin{bmatrix} 35 \\ 104 \\ -366 \\ -354 \end{bmatrix}.$$

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący dekompozycję LU macierzy A, przy zastosowaniu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego, a następnie rozwiązujący układ równań $Ax = b$.

Uwaga: należy zaimplementować wariant dekompozycji omawiany na wykładzie.

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy A, i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze b, korzystając z wyników działania procedury pierwszej.

Dodatkowe ćwiczenie, dla chętnych; prawidłowe rozwiązanie będzie premiowane dodatkową oceną 5.0.

Dany jest układ równań z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1+e & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+e & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+e & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+e \end{bmatrix} \text{ oraz wektorem } b = \begin{bmatrix} 6+e \\ 6+2e \\ 6+2e \\ 6+e \end{bmatrix}. \text{ Znajdź najpierw rozwiązanie}$$

analityczne, a następnie numeryczne, przyjmując coraz mniejsze wartości $e = 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}$, itd. Porównaj rozwiązania numeryczne z analitycznym, i wyjaśnij ewentualne obserwowane zmiany błędu rozwiązań numerycznych.

Zajęcia nr 6:

Zagadnienia do opanowania:

Metody bezpośrednie rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych z macierzami rzadkimi. Algorytm Thomasa. Metody rozwiązywania nad-określonych układów liniowych równań algebraicznych.

Zadania:

(1) Znajdź pseudorozwiązanie nad-określonego układu równań:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{array} \right\}$$

posługując się metodą najmniejszych kwadratów, poprzez bezpośrednie rozwiązanie układu równań normalnych.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, realizujący algorytm Thomasa dla macierzy trój-diagonalnej o dowolnych rozmiarach $N \times N$, a następnie zastosuj ten program do rozwiązywania układu równań $Ax = b$, w którym

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1/2 & & & & \\ 1/3 & 20 & 1/4 & & & \\ & 1/5 & 30 & 1/6 & & \\ & & 1/7 & 30 & 1/8 & \\ & & & 1/9 & 20 & 1/10 \\ & & & & 1/11 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 31 \\ 165/4 \\ 917/30 \\ 851/28 \\ 3637/90 \\ 332/11 \end{bmatrix}$$

Program należy zrealizować w postaci dwóch odrębnych procedur: jednej, która operuje wyłącznie na macierzy A , i drugiej, która operuje wyłącznie na wektorze b , korzystając z wyników działania procedury pierwszej.

Uwaga: ponieważ macierz trój-diagonalna jest macierzą rzadką, więc w programie **NIE NALEŻY** używać tablic kwadratowych do reprezentacji macierzy A .

Zajęcia nr 7:

Zagadnienia do opanowania:

Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych. Metody Richardsona, Jacobiego, Gaussa-Seidela, SOR. Kryteria zbieżności metod iteracyjnych.

Zadania:

(1) Dany jest układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 49 \\ 30 \end{bmatrix}$. Oceń zbieżność metody iteracyjnej Jacobiego (w normie maksimum) dla tego układu, posługując się twierdzeniem Banacha o kontrakcji.

(2) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna Richardsona jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

(3) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna Gaussa-Seidela jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

(4) Dany jest układ liniowych równań algebraicznych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Zbadaj i oceń, czy metoda iteracyjna SOR (z parametrem $\omega=1/2$) jest zbieżna dla tych danych. Następnie, mając dane przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rozwiązania układu, wyznacz kolejne przybliżenie x_1 za pomocą tej metody.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący układ czterech równań liniowych metodami iteracyjnymi: (a) Jacobiego, (b) Gaussa-Seidela, (c) SOR z parametrem $\omega = 1/2$, a następnie zastosuj

ten program do rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 100 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 200 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 300 & -6 \\ 3 & -5 & 6 & 400 \end{bmatrix}$,

$$b = \begin{bmatrix} 116 \\ -226 \\ 912 \\ -1174 \end{bmatrix}.$$

Przyjmij przybliżenie początkowe $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Zastosuj trzy niezależne kryteria zakończenia iteracji. Zadbaj o to, aby wyprowadzać na konsolę wyniki pośrednie obliczeń dla każdej iteracji, tak aby możliwe było obserwowanie zbieżności kolejnych przybliżeń pierwiastków i porównanie liczby iteracji niezbędnych do uzyskania (za pomocą różnych metod) rozwiązania o zadanej dokładności bezwzględnej. W szczególności oblicz jak zmienia się estymator błędu rozwiązania oraz residuum układu w trakcie kolejnych iteracji.

Zajęcia nr 8:

Zagadnienia do opanowania:

Podstawy przybliżeń różnicowych dla pochodnych funkcji. Wyznaczanie błędów obciążenia przybliżeń.

Zadania:

(1) Udowodnij, że jednostronne przybliżenia trzypunktowe na pierwszą pochodną w początkowym i końcowym węźle sieci jednorodnej x_0, \dots, x_n o kroku h , dane wzorami:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)}{h}, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \approx \frac{\frac{3}{2}f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_{n-2})}{h}, \text{ mają}$$

dokładność drugiego rzędu.

(2) Udowodnij, że pięciopunktowe przybliżenia różnicowe na pierwszą i drugą pochodną w wewnętrznym węźle sieci jednorodnej x_0, \dots, x_n o kroku h , dane wzorami:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{\frac{1}{12}f(x_{i-2}) - \frac{2}{3}f(x_{i-1}) + 0f(x_i) + \frac{2}{3}f(x_{i+1}) - \frac{1}{12}f(x_{i+2})}{h}$$
$$\left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{-\frac{1}{12}f(x_{i-2}) + \frac{4}{3}f(x_{i-1}) - \frac{5}{2}f(x_i) + \frac{4}{3}f(x_{i+1}) - \frac{1}{12}f(x_{i+2})}{h^2}$$

mają dokładność czwartego rzędu.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, obliczający przybliżone wartości pierwszych pochodnych funkcji $f(x) = \sin(x)$ w punktach końcowych i środkowym przedziału $[0, \pi/2]$ zmiennej x . Zastosuj wszystkie omawiane na wykładzie i na ćwiczeniach przybliżenia różnicowe dwupunktowe i trzypunktowe (jednostronne bądź centralne, w zależności od położenia punktu w przedziale) na sieci jednorodnej o kroku h . Wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności błędów **bezwzględnych** przybliżeń różnicowych od kroku sieci, posługując się skalą logarymiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}|\text{błąd}|$ od $\log_{10} h$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności przybliżeń różnicowych. Sprawdź, czy tak wyznaczone rzędy dokładności pokrywają się z rzędami teoretycznymi i wyjaśnij ewentualne rozbieżności. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych. Obliczenia powtórz dla dwóch typów zmiennych rzeczywistych (**float**, i **double**) i porównaj wyniki.

*Uwaga: najwygodniej jest zastosować wzorzec funkcji (**function template**) z typem zmiennych jako parametrem wzorca.*

Zajęcia nr 9:

Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkami brzegowymi dla równań różniczkowych zwyczajnych 2-go rzędu.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu: $x^2 u''(x) + (2 - x^2) u'(x) - x u(x) + 4 = 0$, określone na przedziale $x \in [0, 2]$, oraz warunki brzegowe $u(0) = 1$, $u(2) = 3$. Mając daną jednorodną siatkę węzłów: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, wyznacz przybliżone rozwiązanie równania w punkcie $x = 1$, przy zastosowaniu centralnych przybliżeń różnicowych na pochodne.

(2) Dane jest częściowo nieliniowe równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, o postaci:

$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - F(x, U(x)) = 0$. Udowodnij, że konwencjonalny schemat różnicowy:

$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - F(x_i, u_i) = 0$ aproksymuje to równanie z dokładnością drugiego rzędu na sieci

jednorodnej o kroku h , natomiast schemat różnicowy B. Numerowa:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \left[\frac{1}{12} F(x_{i-1}, u_{i-1}) + \frac{10}{12} F(x_i, u_i) + \frac{1}{12} F(x_{i+1}, u_{i+1}) \right] = 0$$

aproksymuje to równanie z dokładnością czwartego rzędu, mimo że korzysta z tej samej liczby (trzech) węzłów sieci. (Wyjaśnienie: „Numerow” to nazwisko rosyjskiego astronoma).

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} - 4U(x) - x = 0, \text{ określone na przedziale } 0 \leq x \leq 1,$$

z warunkami brzegowymi $U(0) = 1$, $U(1) = 0$. Zastosuj typ **double** oraz trzypunktową dyskretyzację konwencjonalną oraz dyskretyzację Numerowa na sieci jednorodnej. Do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych zastosuj algorytm Thomasa (patrz zajęcia nr 6). Wykonaj rysunek przedstawiający porównanie uzyskanych wyników numerycznych z rozwiązaniem analitycznym

$$U(x) = \frac{e^{2-2x} - 4e^{4-2x} + 4e^{2x} - e^{2+2x} - x + xe^4}{4 - 4e^4}. \text{ Pokaż, że rząd dokładności rozwiązań numerycznych}$$

jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi wynikającymi z zadania 2. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności maksymalnego błędu bezwzględnego rozwiązań od kroku sieci h , posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}|\text{błąd}|$ od $\log_{10} h$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą różnych metod, i porównaj je z rzędami teoretycznymi. Ponadto zidentyfikuj wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

Zajęcia nr 10:

Zagadnienia do opanowania:

Metody różnicowe rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym dla równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Metody bezpośrednie i pośrednie a kwestia stabilności numerycznej. Metody: bezpośrednia Eulera, pośrednia Eulera, trapezów.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{10t^2 + 20}{t^2 + 1} [y(t) - 1] = 0, \text{ określone dla zmiennej } t \geq 0,$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 0$. Określ typ tego równania (rozpadu, wzrostu, oscylacyjne) i zbadaj jakie warunki muszą być spełnione, aby metody:

(a) bezpośrednia Eulera

(b) pośrednia Eulera

(c) metoda trapezów

dawały stabilne bądź niestabilne numerycznie rozwiązanie tego równania.

(2) Przeprowadź analogiczną analizę, jak w zadaniu 1, dla następujących równań różniczkowych zwyczajnych określonych dla $t \geq 0$:

$$y'(t) + 2t + 3y(t) = 0, \quad y'(t) + 2t - 3y(t) = 0,$$

$$y'(t) - 3(1+t)y(t) = 0, \quad y'(t) + (1+t^2)y(t) = 0.$$

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, rozwiązujący równanie różniczkowe z zadania 1, za pomocą metod:

(a) bezpośredniej Eulera

(b) pośredniej Eulera

(c) metody trapezów.

Dla metod (b) i (c) wykonaj oddzielne rysunki przedstawiające po dwa wykresy: wykres przykładowego rozwiązania numerycznego oraz (dla porównania) wykres rozwiązania analitycznego: $y(t) = 1 - \exp\{-10[t + \arctg(t)]\}$. Oba wykresy winny przedstawiać zależność y od zmiennej niezależnej t . Rozwiązania analityczne zaznacz linią ciągłą, a numeryczne punktami. W przypadku metody (a) wykonaj dwa takie rysunki: jeden uzyskany w warunkach numerycznej stabilności metody, a drugi w warunkach numerycznej niestabilności. Wyjaśnij różnice pomiędzy uzyskanymi wykresami.

Pokaż, że rząd dokładności uzyskanych stabilnych rozwiązań numerycznych jest zgodny z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy przedstawiające zależności maksymalnych błędów bezwzględnych rozwiązań uzyskanych trzema metodami, od kroku sieci czasowej δt , posługując się skalą logarytmiczną (tzn. wykresy zależności $\log_{10}|\text{błąd}|$ od $\log_{10} \delta t$). Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności rozwiązań uzyskanych za pomocą różnych metod i porównaj je z rzędami teoretycznymi. O ile to możliwe, zidentyfikuj też wartości kroku sieci poniżej których pojawia się wpływ błędów maszynowych.

Zajęcia nr 11

Zagadnienia do opanowania:

Metody rozwiązywania zagadnień z warunkiem początkowym i brzegowym dla równań różniczkowych cząstkowych w przestrzeni jednowymiarowej.

Zadania:

(1) Dane jest równanie różniczkowe cząstkowe dyfuzji: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ze współczynnikiem dyfuzji $D = 1$.

Równanie określone jest dla $x \in [-1, 1]$ i towarzyszą mu: warunek początkowy $u(x, 0) = x^3$, oraz warunki brzegowe $u(-1, t) = -1 - t$, $u(1, t) = 1 + t$.

Przyjmij jednorodną siatkę węzłów przestrzennych: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, oraz krok czasowy $\delta t = 1$. Przy tych założeniach wyznacz przybliżone wartości rozwiązania pow. problemu w węzłach przestrzennych, dla $t = 1$, stosując metody:

- (a) klasyczną bezpośrednią,
- (b) Laasonen, oraz
- (c) Cranka-Nicolson.

W każdym przypadku podaj i uzasadnij czy tak uzyskane rozwiązania są numerycznie stabilne.

(2) Zaproponuj uogólnienia pośrednich metod różnicowych: a) Laasonen, b) Cranka-Nicolson, dla jednowymiarowego równania dyfuzji we współrzędnych Kartezjańskich, zależnego od czasu, na

liniowe równanie cząstkowe typu reakcji-dyfuzji: $\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - r U(x,t)$

(gdzie r jest stałą szybkości reakcji), przy założeniu jednorodnych sieci czasowo-przestrzennych. Wyprowadź stosowne układy algebraicznych równań liniowych, przy założeniu warunków brzegowych Dirichleta: $U(0, t) = \alpha(t)$, $U(L, t) = \beta(t)$.

Program:

W ramach zajęć konsultacja ćwiczeń zaliczeniowych związanych z rozwiązywaniem równań różniczkowych cząstkowych

Zajęcia nr 12:

Zagadnienia do opanowania:

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Bazy: potęgowa, Lagrange'a i Newtona wielomianów interpolacyjnych. Algorytm Hornera. Algorytm Neville'a. Zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a funkcji jednej zmiennej. Interpolacja wielomianowa Hermite'a funkcji jednej zmiennej.

Zadania:

(1) Wyznacz wielomian interpolacyjny Lagrange'a przechodzący przez punkty: $(x_i, f(x_i)) = (4, 2), (-6, -8), (-5, 4), (1, 10)$, stosując (a) bazę Lagrange'a, (b) bazę Newtona.

(2) Stosując algorytm Neville'a, oblicz wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a przechodzącego przez punkty:

$(x_i, f(x_i)) = (-1, -1), (2, 2), (-3, 3)$, dla wartości zmiennej niezależnej $x = 1$.

(3) Posługując się bazą Newtona, wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a $p(x)$, spełniający warunki:

$$p(0) = 0, p'(0) = 1, p''(0) = 2$$

$$p(1) = 3, p'(1) = 4,$$

Program:

(1) Napisz program w języku „C/C++”, demonstrujący zjawisko Rungego w interpolacji wielomianowej Lagrange'a, na przykładzie interpolacji funkcji $f(x) = 1/(1 + 10x^6)$, określonej na przedziale $[-1, 1]$. Zastosuj bazę Newtona do konstrukcji wielomianów interpolacyjnych. Porównaj wyniki interpolacji na węzłach równoodległych z wynikami interpolacji na węzłach Czebyszewa. Wykonaj wykres interpolowanej funkcji oraz uzyskanych wielomianów interpolacyjnych.

Zajęcia nr 13:

Zagadnienia do opanowania:

Interpolacja funkcjami sklejanymi. Interpolacja biliniowa funkcji dwóch zmiennych.
Numeryczne obliczanie całek oznaczonych. Kwadratury.

Zadania:

(1) Określ wartości współczynników a , b , c , i d tak, aby otrzymać naturalną funkcję sklejaną stopnia trzeciego z węzłami 0, 1 i 2:

$$S(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3 & x \in [0, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

(2) Dane są węzły i wartości funkcji dwóch zmiennych:

$(x_i, y_j, f(x_i, y_j)) = (0, 0, 1), (2, 0, 2), (0, 4, 3), (2, 4, 4)$.

Stosując interpolację biliniową, wyznacz przybliżoną wartość funkcji $f(x, y)$ w punkcie $(x, y) = (1, 1)$.

(3) Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości: $-1, 3, 7, 8, 6$, odpowiednio dla $x = 0, 1, 2, 4$ i 6 . Oblicz

przybliżoną wartość całki $\int_0^6 f(x) dx$, posługując się złożonymi kwadraturami:

- (a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
- (b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
- (c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
- (d) trapezów
- (e) parabol

W przypadkach (c) i (e) zastosuj wzory kwadratur prostych do dwóch pod-przedziałów $[0,2]$ i $[2,6]$, a w pozostałych przypadkach do czterech pod-przedziałów.

(4) Przedział $[0,8]$ podzielono na 8 równoodległych pod-przedziałów. W węzłach otrzymanej w ten sposób siatki funkcja $f(x)$ przyjmuje odpowiednio wartości: $-5, -3, 1, 2, 1, -1, 2, 5$ i 4 . Stosując

metodę Romberga, oblicz możliwie najdokładniej przybliżoną wartość całki $\int_0^8 f(x) dx$.

(5) Oblicz przybliżoną wartość całki $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx$ za pomocą kwadratury Gaussa z dwoma punktami węzłowymi. Porównaj wyznaczoną wartość z wartością dokładną.

Program:

Napisz program w języku „C/C++”, obliczający numerycznie wartości funkcji:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \text{ dla } x = 1.0, 2.0, 3.0.$$

Zastosuj złożone kwadratury:

- (a) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po lewej stronie przedziału)
- (b) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji po prawej stronie przedziału)
- (c) prostokątów (wariant z węzłem interpolacji w środku przedziału)
- (d) trapezów
- (e) parabol

na sieci o stałym kroku h . Oblicz błąd względny wyniku dla $x = 3.0$ w funkcji kroku h i pokaż, że rzędy dokładności zastosowanych kwadratur są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. W tym celu wykonaj (na jednym rysunku) wykresy zależności $\log_{10}|\text{błędu}|$ od $\log_{10} h$. Na podstawie wykresów wyznacz doświadczalnie rzędy dokładności kwadratur. Do obliczenia ścisłych wartości funkcji $\text{erf}(x)$ (z dokładnością zbliżoną do maszynowej) zastosuj pakiet CALERF udostępniony przez prowadzącego zajęcia.