Podstawy Fizyki

dla Informatyki

Stanisław Drożdż
Katedra Informatyki PK

Stany stacjonarne

- Częstość czynnika oscylacyjego $\exp(-iEt/\hbar)$ funkcji falowej wynosi $\omega = E/\hbar$.
- Zatem dla cząstki materialnej otrzymujemy zależność między jej energią i częstością funkcji falowej:
$$E = \hbar\omega,$$
która jest identyczna jak dla fotonu!
- Funkcja falowa (zwana też stanem kwantowym)
$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-iEt/\hbar) = \psi(\vec{r}) \exp(-i\omega t).$$
zależy od czasu.
- Natomiast gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ od czasu nie zależy!
- Takie rozwiązanie równania Schrödingera nazywamy stanem stacjonarnym.

Ruch cząstki swobodnej w jednym wymiarze

- Ruch cząstki swobodnej — brak sił, a zatem i energii potencjalnej ($U = 0$).
- Najpierw rozpatrujemy ruch cząstki w jednym wymiarze, np. wzdłuż osi x.
- Wtedy $\nabla^2 \to \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ i stąd dla cząstki otrzymujemy

Niezależne od czasu równanie Schrödingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = E\psi(x).$$

- Rozwiązanie równania stacjonarnego:

$$\psi(x) = C_+ \exp(ikx) + C_- \exp(-ikx),$$

gdzie C_+ i C_- są stałymi, natomiast

$$k = \sqrt{2mE}/\hbar = p/\hbar.$$

Cząstka swobodna — całkowite rozwiązanie

- Całkowite rozwiązanie: $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp(-i\omega t)$

Funkcja falowa cząstki swobodnej:

$$\Psi(x,t) = C_+ \exp[i(kx - \omega t)] + C_- \exp[-i(kx + \omega t)].$$

- Jest to złożenie fal harmonicznych, które biegną w dodatnim i ujemnym kierunku osi x.
- Parametr k jest nazywany liczbą falową. Z długością fali wiąże go zależność:
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$
- Wynika z niej relacja de Broglie'a między pędem a długością fali cząstki:
$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}.$$

Zasada nieoznaczoności

- Gęstość prawdopodobieństwa dla cząstki swobodnej jest jednakowa dla każdego punktu prostej x:

$$|\Psi_+(x,t)|^2 = |C_+|^2, \qquad |\Psi_-(x,t)|^2 = |C_-|^2.$$

- Wynika stąd, że w przypadku cząstki o ściśle określonym pędzie p jej położenie x jest zupełnie nieokreślone!

- Jest to przykład zasady sformułowanej przez Wernera Heisenberga (1927 r.)

Zasada nieoznaczoności:

Nie można jednocześnie zmierzyć z dowolną dokładnością dwóch wielkości fizycznych, których operatory A i B nie komutują:

$$[A,B] \equiv AB - BA \neq 0\,.$$

- Przykład — operator położenia x i pędu $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$ wzdłuż osi x : $[x, p_x] = i\hbar \neq 0\,.$

Relacje nieoznaczoności

- Dokonujemy pomiarów położenia x i składowej pędu p_x cząstki w wielu identycznych kopiach układu w tym samym stanie kwantowym.
- Wyniki tych pomiarów nie są identyczne.
- Obliczone błędy pomiarów Δx i Δp_x spełniają nierówność $\Delta x \, \Delta p_x \geqslant \hbar/2$, nawet w przypadku idealnie dokładnych przyrządów.
- Inne zależności:

Relacje nieoznaczoności:

$$\Delta x \, \Delta p_x \geqslant \hbar/2,$$
$$\Delta y \, \Delta p_y \geqslant \hbar/2,$$
$$\Delta z \, \Delta p_z \geqslant \hbar/2,$$
$$\Delta E \, \Delta t \geqslant \hbar/2.$$

Ruch cząstki swobodnej w przestrzeni

- W przestrzeni funkcja falowa cząstki swobodnej o określonym pędzie $\vec{p}$ i energii $E = p^2/(2m)$ ma postać fali płaskiej

Funkcja falowa cząstki swobodnej:

$$\Psi(\vec{r}, t) = C \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)],$$
$$\vec{k} = \vec{p}/\hbar, \qquad \omega = E/\hbar,$$

gdzie $\vec{k}$ jest wektorem falowym: $k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

- Gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = |C|^2$ jest stała, zatem położenie cząstki jest nieokreślone.
- Taka funkcja falowa dobrze opisuje strumień nieoddziaływujących cząstek.