Projekt 1 – Całkowanie

Wiktor Zmiendak, gr. 13

1. Opis zadania:

Zadanie projektowe polega na stworzenie programu obliczającego całkę oznaczoną funkcji jednej zmiennej na podanym przez użytkownika przedziale za pomocą metody prostokątów, trapezów oraz Monte Carlo.

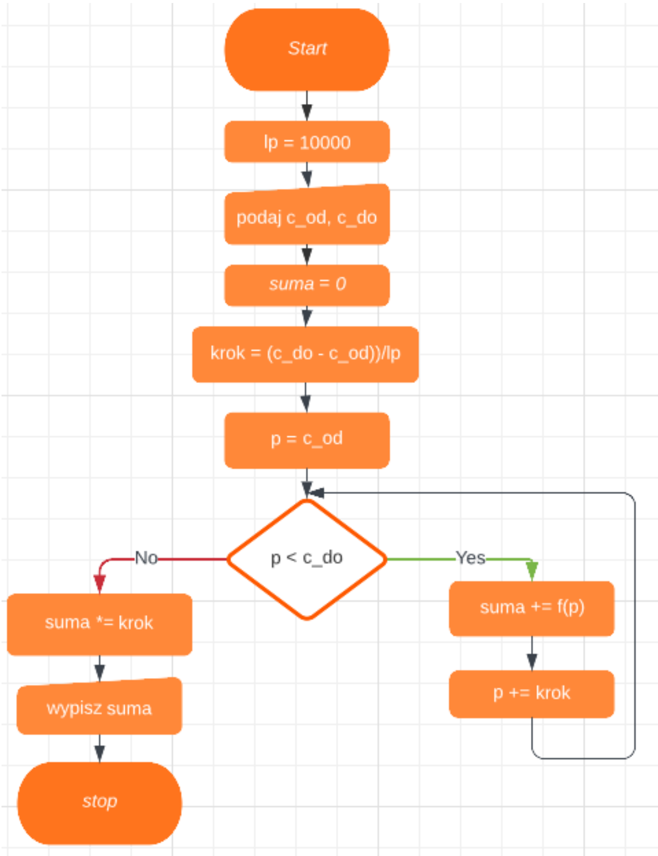
Metoda prostokątów polega na podzieleniu obszaru całkowania na prostokąty o podstawach tej samej długości. Całkę liczymy sumując wysokości wszystkich prostokątów a następnie mnożąc tą wartość przez długość jednej podstawy. Podstawę prostokątów obliczamy ze wzoru krok = (c_do – c_od)/lp gdzie lp to ilość prostokątów w całce.

Metoda trapezów podobnie jak w poprzedniej metodzie polega na podzieleniu obszaru całkowania tym razem na trapezy prostokątne również o podstawach tej samej długości. Całkę obliczamy sumując do siebie długości boków przy podstawie trapezów a następnie wartość tą mnożymy przez długość jednej podstawy i dzielimy na 2. Długość podstawy liczymy podobnie jak w przypadku metody prostokątów.

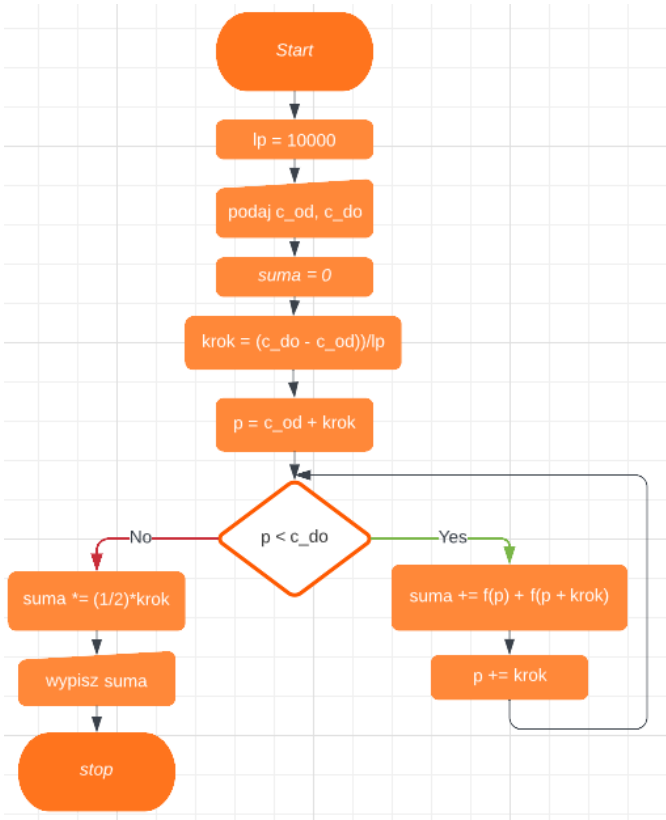
Metoda Monte Carlo polega na generowaniu losowych punktów (x, y) gdzie x jest wartością z danego przedziału <c_od ; c_do>, a y jest wartością z <ymin ; ymax>. Jeżeli wylosowany punkt należy do podanego przez nas przedziału oraz znajduje się nad osią OX to zwiększamy wartość Nl, w przeciwnym wypadku jeśli y ma wartość ujemną to ją zmniejszamy. Wartość całki obliczamy stosując wzór:
Suma = pole prostokąta*Nl/liczba wszystkich wygenerowanych punktów.

2. Schematy blokowe wszystkich zastosowanych algorytmów całkowania:

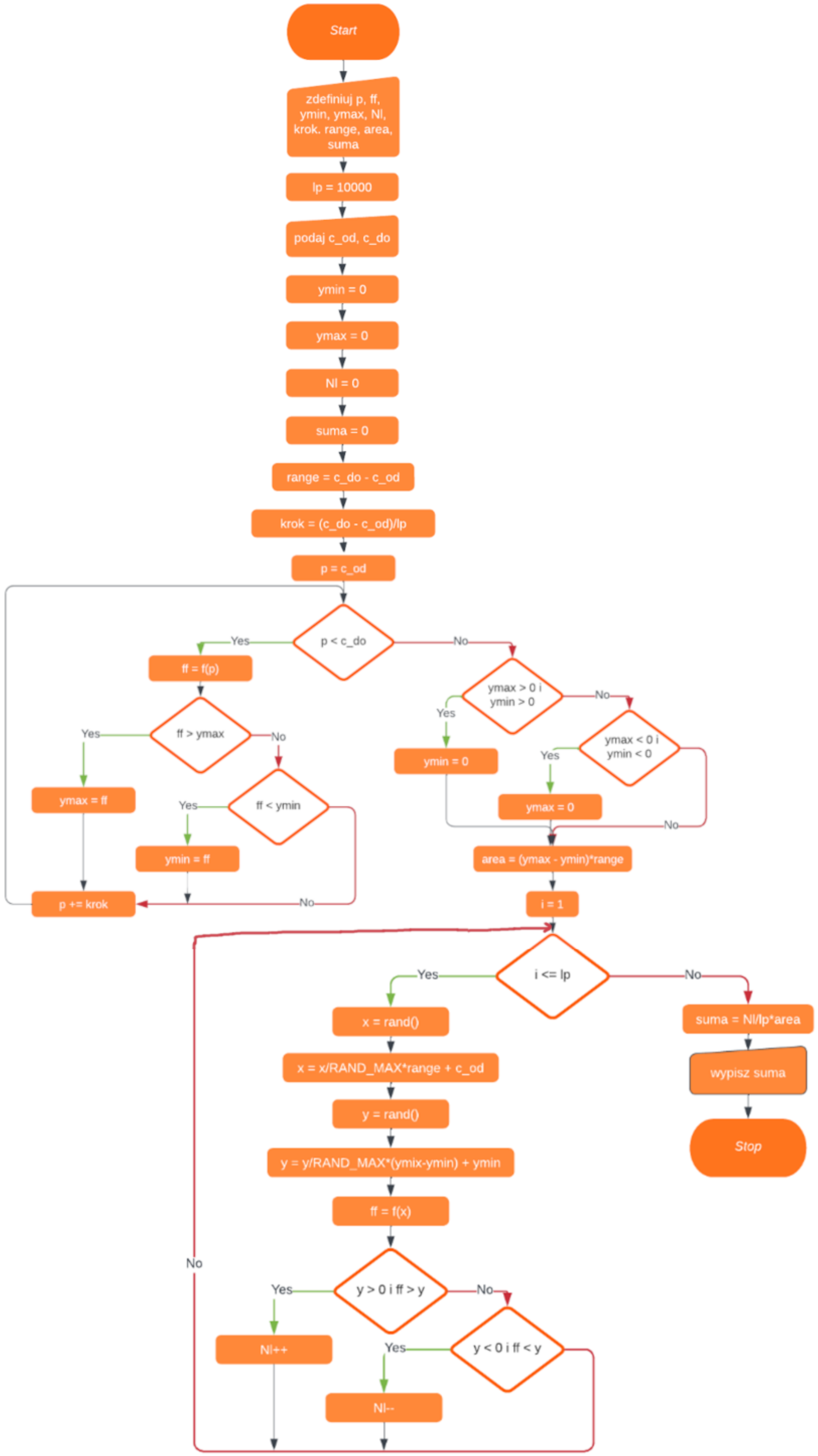
Metoda prostokątów:



Metoda trapezów:



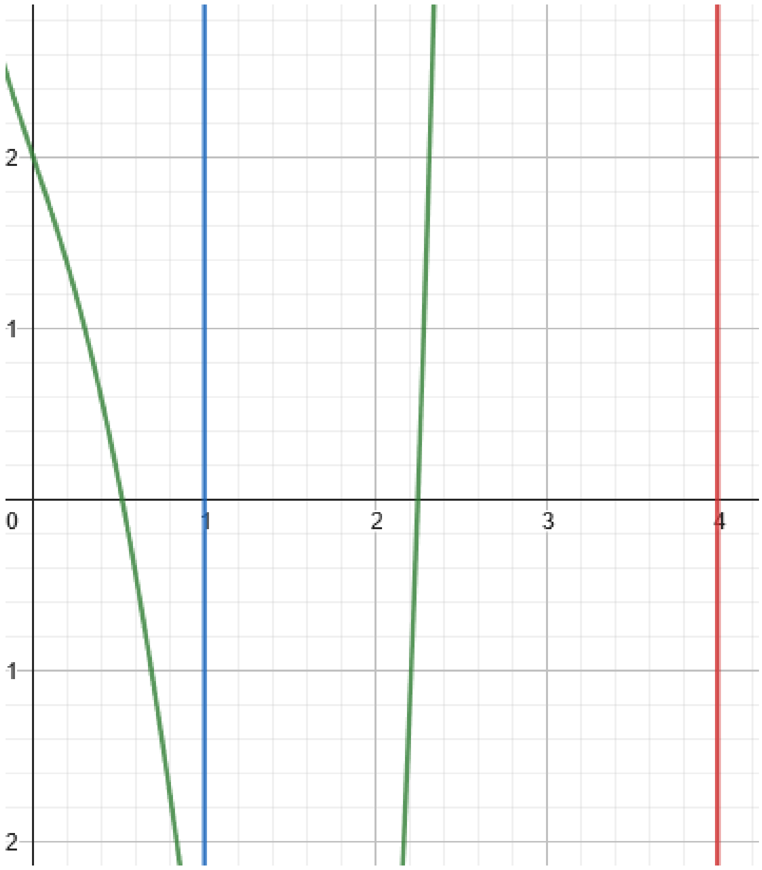
Metoda Monte Carlo:



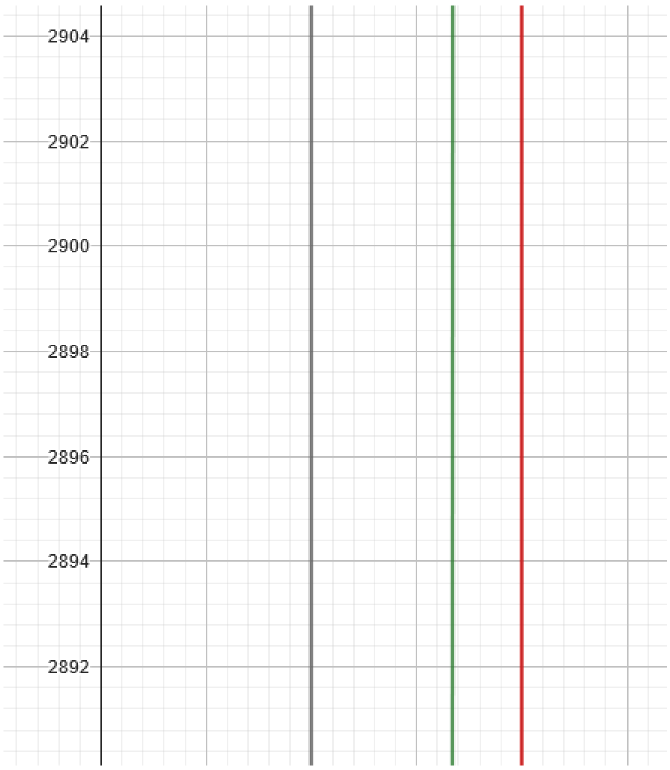
3. **Wykresy badanych funkcji z zaznaczonymi przedziałami całkowania:**

Funkcja 1: $f(x) = 2{,}1x^4 - 4{,}3x^3 - 3x + 2$

Przedział [1 ; 4]



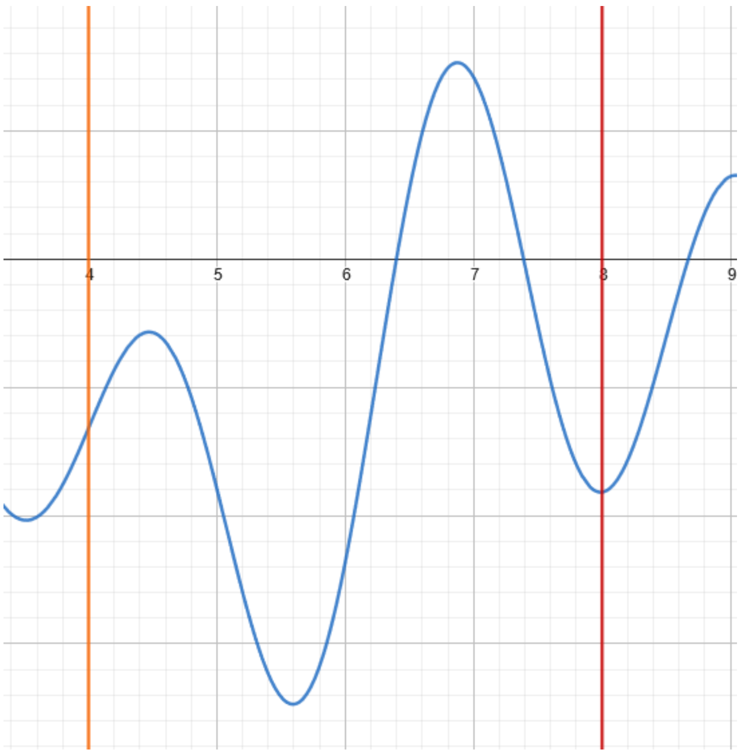
Przedział [4 ; 8]



Funkcja 2: $f(x) = 2\sin(2x)\cos(x) - \cos(2{,}3x) - 1$

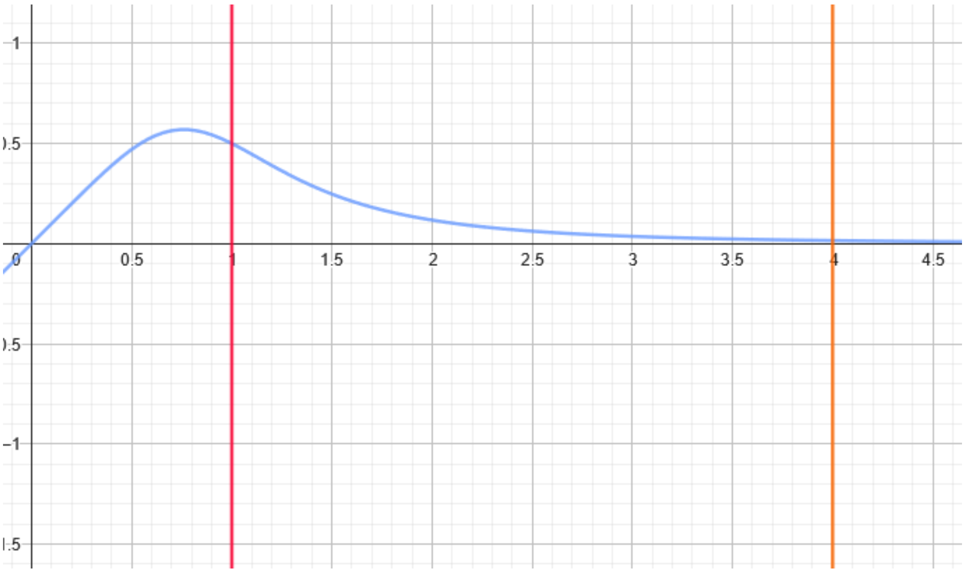
Przedział [1 ; 4]

Przedział [4 ; 8]

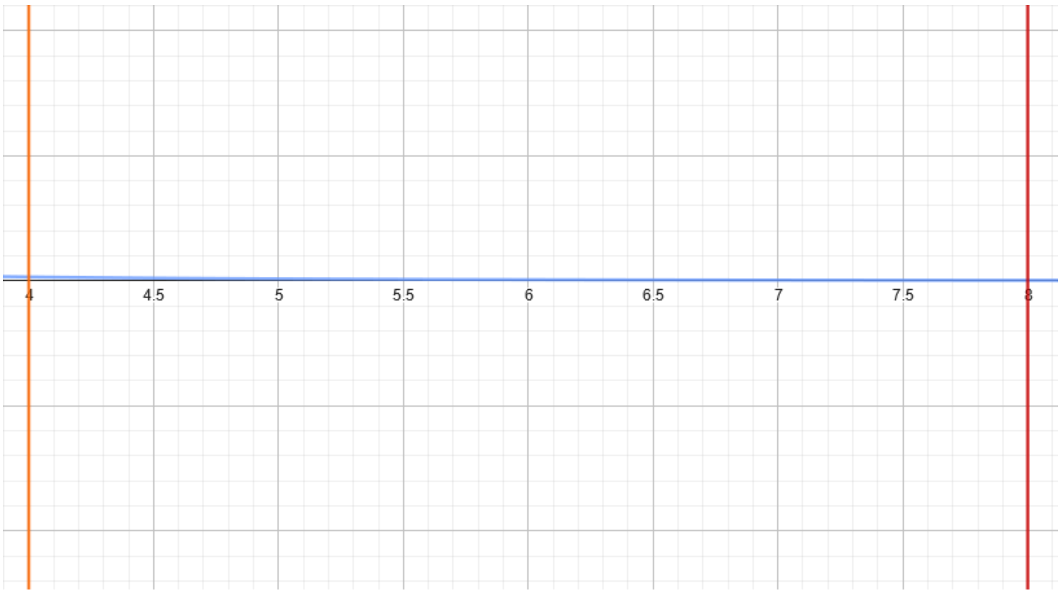


Funkcja 3: $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$

Przedział [1 ; 4]

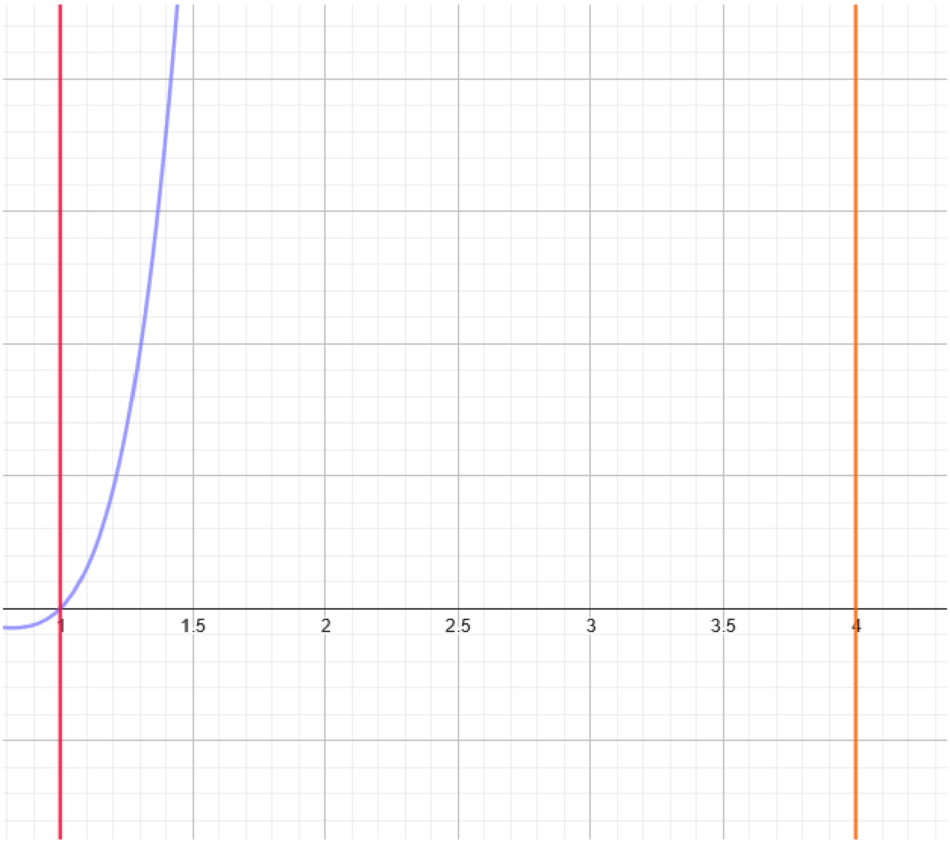


Przedział [4 ; 8]

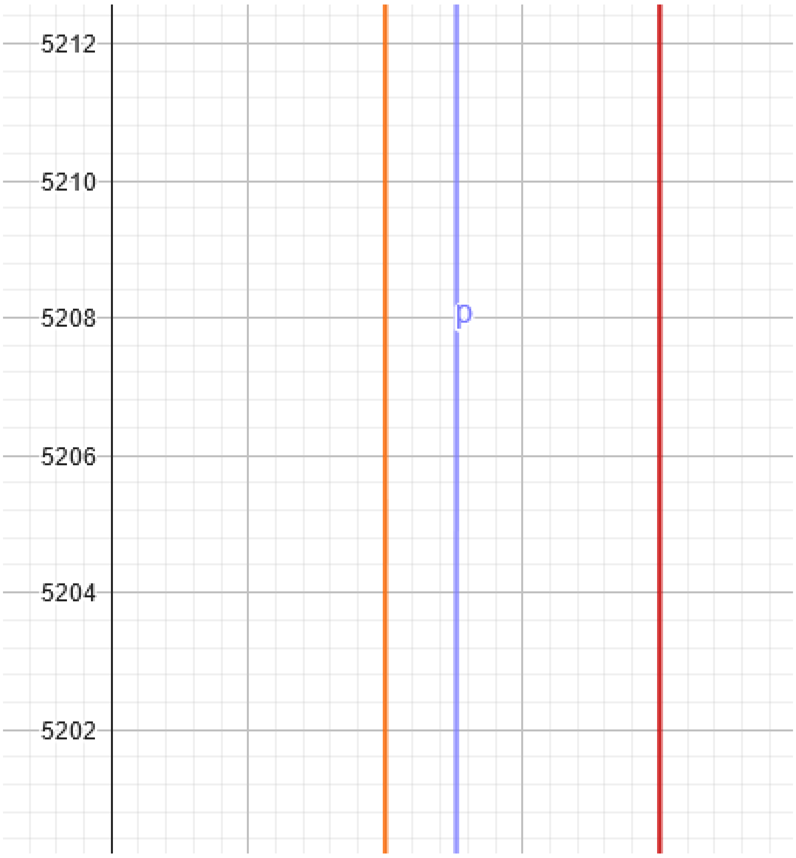


Funkcja 4: $f(x) = x^5 \ln x$

Przedział [1 ; 4]



Przedział [4 ; 8]



4. Rozwiązanie analityczne z obliczeniami:

$$f_1(x) = 2{,}1x^4 - 4{,}3x^3 - 3x + 2$$

$$\int f_1(x)\,dx = \int (2{,}1x^4 - 4{,}3x^3 - 3x + 2)\,dx = \int 2{,}1x^4 dx - \int 4{,}3x^3 dx - \int 3x\,dx + \int 2dx$$

$$= 2{,}1 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 4{,}3 \cdot \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 2x + C =$$

$$= \frac{21}{50}x^5 - \frac{43}{40}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\int_1^4 f_1(x)\,dx = \left[\frac{21}{50}x^5 - \frac{43}{40}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^4 = \frac{10752}{25} - \frac{1376}{5} - 24 + 8 - \frac{21}{50} + \frac{43}{40} + \frac{3}{2} - 2 =$$

$$= \frac{27804}{200} \approx 139{,}035$$

$$\int_4^8 f_1(x)\,dx = \left[\frac{21}{50}x^5 - \frac{43}{40}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_4^8 = \frac{344064}{25} - \frac{22016}{5} - 96 + 16 - \frac{10752}{25} + \frac{1376}{5} + 24 - 8 =$$

$$= \frac{228512}{25} \approx 9140{,}48$$

$$f_2(x) = 2\sin(2x)\cos(x) - \cos(2{,}7x) - 1$$

$$\int f_2(x) = \int (2\sin(2x)\cos(x) - \cos(2{,}3x) - 1)\,dx = \int 2\sin(2x)\cos(x)\,dx - \int \cos(2{,}3x)\,dx - \int dx =$$

$$= 2\int \sin x \cos^2 x\,dx - \int \cos(2{,}3x)\,dx - \int dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) - \cos(x) - \frac{10}{23}\sin(2{,}3x) - x + C$$

$$\int_1^4 f_2(x)\,dx = -4 + 0{,}3290 + 0{,}6536 - 0{,}3260 + 1 + 0{,}3659 + 0{,}5403 - 0{,}8299 =$$

$$= -1{,}4641$$

$$\int_4^8 f_2(x)\,dx = -0{,}3046 - 0{,}9902 - 0{,}1372 - 8 + 0{,}3260 - 0{,}6536 + 0{,}0969 + 4 =$$

$$= -5{,}6626$$

$$f_3(x) = \frac{x}{x^4+1}$$

$$\int f_3(x)\,dx = \int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$$

$$\int_1^4 f_3(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right]_1^4 = 0{,}45419 - 0{,}3927 = 0{,}36149$$

$$\int_4^8 f_3(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2\right]_4^8 = 0{,}47759 - 0{,}45419 = 0{,}0234$$

$$f_4(x) = x^5 \ln x$$

$$\int f_4(x)\,dx = \int x^5 \cdot \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^5 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{1}{6}x^6 \end{array} \right| = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \int \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^6\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}x^6 + C = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6 + C$$

$$\int_1^4 f_4(x)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6\right]_1^4 = 946{,}3769 - 113{,}7778 - 0 + 0{,}0278 =$$

$$= 832{,}6269$$

$$\int_4^8 f_4(x)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{36}x^6\right]_4^8 = 90852{,}1843 - 7281{,}7778 - 946{,}3769 + 113{,}7778 =$$

$$= 82737{,}8104$$

5. **Tabelka z wynikami zaimplementowanych metod i wynikami rozwiązania analitycznego:**

Funkcja	Metoda prostokątów	Metoda trapezów	Metoda Monte Carlo	Metoda Analityczna
Przedział [1 ; 4]				
1	139.031166	139.035096	139.560937	139.035
2	-2.189996	-2.190045	-2.207134	-1,7671
3	0.361497	0.361475	0.360810	0.36149
4	832.605657	832.626951	837.521858	832.6269
Przedział [4 ; 8]				
1	9140.357489	9140.469904	9118.810705	9140.48
2	-4.082392	-4.082349	-4.105641	-5.6626
3	0.023398	0.023397	0.023391	0.0234
4	82736.475916	82737.753523	82808.590794	82737.8104

6. **Wnioski:**

Analizując podane metody całkowania możemy zauważyć wzrost dokładności ich działania wraz ze zwiększeniem wartości Lp. Metoda Monte Carlo wydaje się być najmniej dokładna nawet dla dużej ilości wygenerowanych punktów co czyni ją nieoptymalną w porównaniu do dwóch pozostałych. Poprzez podział obszaru całkowania na prostokąty i trapezy jesteśmy w stanie uzyskać wyniki najbardziej zbliżone do tych wyznaczonych metodą analityczną. Dodatkowo zauważyć można lekko zwiększoną dokładność przy stosowaniu metody trapezów.