

# Wstęp do Sztucznej Inteligencji - rok akademicki 2023/2024

Przed rozpoczęciem pracy z notatnikiem zmień jego nazwę zgodnie z wzorem:  
NrAlbumu\_Nazwisko\_Imie\_PoprzedniaNazwa.

Przed wystaniem notatnika upewnij się, że rozwiązałeś wszystkie zadania/ćwiczenia.

## Temat: Optymalizacja globalna: Prosty algorytm genetyczny cz. I

Głównym celem zajęć poświęconych algorytmom genetycznym jest stworzenie od podstaw (implementacja) prostego algorytmu genetycznego i późniejsze wykorzystanie go do rozwiązywania przykładowych zadań optymalizacji globalnej.

W tym notatniku będą Państwo mieli za zadanie zaimplementować funkcje wchodzące w skład procedury algorytmu genetycznego.

### Import biblioteki numpy

Wszystkie funkcje należy tworzyć z wykorzystaniem biblioteki `numpy`.

```
import numpy as np
```

### Przykładowa funkcja celu

Zadanie optymalizacji w wielu przypadkach sprowadza się do optymalizacji odpowiednio sformułowanej funkcji, tzw. funkcji celu. Poniżej przykładowa prosta funkcja umożliwiająca testowanie zaimplementowanych funkcji.

```
# testowa funkcja celu
# x - jednowymiarowa tablica ndarray
def obj_func(x):
    return (x**2).sum()
```

Przykład wywołania.

Wektor `x` to tak zwany osobnik, czyli jedno z możliwych (dopuszczalnych) rozwiązań.

```
# przykład wywołania
x = np.array([1.2, 0.1, 3, 2.1])
print(obj_func(x))
```

Zadanie optymalizacji można sformułować jako zadanie poszukiwania minimum (minimalizacja) bądź maksimum (maksymalizacja) funkcji.

Zaznaczmy, że rozwiązaniem problemu optymalizacji jest podanie nie tylko jaka jest wartość optymalna, ale również (a może nawet przede wszystkim) dla jakich wartości  $x$  funkcja osiąga to optimum.

Przykład: Znajdź minimum funkcji  $f(x) = x^2$  w przedziale  $[-1, 1]$ .

Rozwiązanie można sformułować następująco: w przedziale  $[-1, 1]$  funkcja  $f(x) = x^2$  osiąga minimum równe 0 dla  $x=0$ .

Zwróć uwagę, że powyższe zadanie można zdefiniować jako zadanie maksymalizacji:

Przykład: Znajdź maksimum funkcji  $f(x) = -x^2$  w przedziale  $[-1, 1]$ .

Rozwiązanie jest takie samo, tzn. dla  $x=0$  podana funkcja osiąga wartość 0 (tym razem jest to maksimum).

Zatem, implementując nasz algorytm genetyczny do szukania maksimum funkcji, będziemy go w stanie użyć do szukania minimum danej funkcji, jeśli weźmiemy oryginalną funkcję i pomnożymy ją przez  $-1$ .

## Liczba potrzebnych bitów

W prostym algorytmie genetycznym wykorzystywane jest kodowanie binarne osobnika, tzn. każda z wartości rzeczywistych wektora  $x$  reprezentowana jest przez ciąg bitów (zer i jedynek).

Pierwszym krokiem zatem jest określenie ile potrzeba bitów aby móc zakodować wszystkie dopuszczalne rozwiązania z zadaną dokładnością.

### Zadanie 1

Zaimplementować metodę obliczającą ilość bitów potrzebnych do zakodowania liczby rzeczywistej z przedziału  $[a, b]$  z zadanym krokiem  $dx$ . Metoda ta powinna zwracać również nowy dokładniejszy krok  $dx$ .

Należy zatem na podstawie kroku  $dx$  oraz końców przedziału  $a$  i  $b$  określić ile liczb całkowitych będzie trzeba zakodować w postaci binarnej. Następnie dobrać najmniejszą liczbę bitów pozwalającą na zakodowanie tylu liczb.

**Przykład:**  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $dx=0.1$

W przedziale  $[0, 1]$  z krokiem  $0.1$  mieści się 11 liczb (włącznie z końcami przedziału), zatem potrzebna liczba bitów to 4 bo na 4 bitach zakodujemy 16 (od 0 do 15) liczb a na 3 już tylko 8 (za mało).

Ponieważ na 4 bitach zakodujemy 16 liczb to przy niezmiennym kroku liczba:

- $0000$  odpowiada liczbie całkowitej 0 ( $i$ ), a rzeczywistej 0.0 (wzór:  $i * dx + a$ )

- `1111` odpowiada liczbie całkowitej 15 ( $i$ ), a rzeczywistej 1.5 (wzór:  $i * dx + a$ )

Jak widać liczba `1111` po rozkodowaniu wykracza poza dopuszczalny podział. Należy zatem zaktualizować krok `dx` tak aby `1111` odpowiadało dokładnie wartości `b`.

Argumenty funkcji:

- `a` - początek przedziału, liczba rzeczywista.
- `b` - koniec przedziału, liczba rzeczywista.
- `dx` - krok, dokładność kodowania, liczba rzeczywista.
- `B` - liczba bitów, liczba całkowita.
- `dx_new` - nowy dokładniejszy krok, liczba rzeczywista.

```
def nbits(a, b, dx):
    ### TWÓJ KOD TUTAJ

    B = int((np.abs(b-a)/dx)+1).bit_length()
    dx_new = np.abs(a-b)/(2**B - 1)

    return B, dx_new

# jeśli poniższe nie rzuca wyjątku to znaczy, że testy przeszły ale
nie musi oznaczać, że wszystko jest dobrze
np.testing.assert_almost_equal(nbits(0, 1, 0.1)[0], 4, decimal=6)
np.testing.assert_almost_equal(nbits(0, 1, 0.1)[1],
0.06666666666666667, decimal=6)
np.testing.assert_almost_equal(nbits(-2.4, 3.1, 0.01)[0], 10,
decimal=6)
np.testing.assert_almost_equal(nbits(-2.4, 3.1, 0.01)[1],
0.005376344086021506, decimal=6)
```

## Populacja początkowa

Algorytm genetyczny jest algorytmem działającym na pewnej populacji osobników (początkowo losowej), którą to poddaje się tzw. operacjom genetycznym.

### Zadanie 2

Zaimplementować metodę generującą początkową populację zakodowanych osobników (binarną). Metoda ta powinna zwracać obiekt typu `ndarray`. Użyj metody `np.random.randint`.

Jest to po prostu dwuwymiarowa tablica, gdzie pierwszy wymiar to liczba osobników, a drugi liczba zmiennych w osobniku razy liczba bitów na każdą z nich.

Uwaga: W naszej implementacji algorytmu genetycznego, dla uproszczenia przyjmujemy, że każdą zmienną rzeczywistą kodować będziemy za pomocą takiej samej liczby bitów. Ułatwia to implementację, jednak warto pamiętać, że w rzeczywistych problemach może to nie wystarczyć. Może istnieć potrzeba dokładniejszego reprezentowania pewnej zmiennej rzeczywistej (wykorzystując większą liczbę bitów) niż innej. Problem ten pojawia się również, jeśli wszystkie zmienne chcemy reprezentować z tą samą dokładnością, ale zakresy ich wartości różnią się - aby

osiągnąć tę samą dokładność przy większym zakresie wartości musimy użyć większej liczby bitów.

Warto zwrócić uwagę, że szukając rozwiązania jako liczby rzeczywistej ale stosując kodowanie binarne, z góry wiemy, że pewnych wartości nie będziemy w stanie reprezentować wykorzystując przyjętą liczbę bitów.

Przykładowo, mamy za zadanie znalezienie minimum funkcji

$$f(x) = x^2$$

w przedziale  $[-1, 1]$ .

Wiadomo, że minimum tej funkcji jest w  $x=0$  i wynosi  $f(0)=0^2=0$ . Jeśli jednak nasze rozwiązania reprezentujemy za pomocą 2 bitów, nie jesteśmy w stanie reprezentować wartości zero. Uruchoom poniższy przykład.

```
import numpy as np

def fun(x):
    return x*x

a = -1.0
b = 1.0

bits_num = 2

print('{0:>6} | {1:>15} | {2:>15}'.format('binary', 'decoded',
'wartosc funkcji'))
for i in range(2**bits_num):
    binary_solution = bin(i)[2:].zfill(bits_num)
    decoded_solution = a + i*(b-a)/(2**bits_num-1)
    print('{0:>6} | {1:15.10f} | {2:15.10f}'.format(binary_solution,
    decoded_solution, fun(decoded_solution)))
```

binary	decoded	wartosc funkcji
00	-1.0000000000	1.0000000000
01	-0.3333333333	0.1111111111
10	0.3333333333	0.1111111111
11	1.0000000000	1.0000000000

Jeśli użyjemy trzech bitów, również nie jesteśmy w stanie reprezentować zera, jednak najlepsze (najbliższe 0) rozwiązanie, jakie jesteśmy w stanie reprezentować jest bliżej rzeczywistego.

```
import numpy as np

def fun(x):
    return x*x

a = -1.0
b = 1.0
```

```

bits_num = 3

print('{0:>3} | {1:>15} | {2:>15}'.format('binary', 'decoded',
'wartosc funkcji'))
for i in range(2**bits_num):
    binary_solution = bin(i)[2:].zfill(bits_num)
    decoded_solution = a + i*(b-a)/(2**bits_num-1)
    print('{0:>6} | {1:15.10f} | {2:15.10f}'.format(binary_solution,
    decoded_solution, fun(decoded_solution)))

```

binary	decoded	wartosc funkcji
000	-1.0000000000	1.0000000000
001	-0.7142857143	0.5102040816
010	-0.4285714286	0.1836734694
011	-0.1428571429	0.0204081633
100	0.1428571429	0.0204081633
101	0.4285714286	0.1836734694
110	0.7142857143	0.5102040816
111	1.0000000000	1.0000000000

Warto zaznaczyć jeszcze jedną rzecz. Typy float i double również są reprezentowane w komputerach binarnie i mają swoje ograniczenia - niektórych wartości nie da się reprezentować. Zatem zwiększanie liczby bitów w naszej implementacji również ma sens tylko do pewnego momentu.

Zaimplementuj funkcję generującą początkową populację zakodowanych osobników (binarną). Metoda ta powinna zwracać obiekt typu ndarray. Użyj metody np.random.randint.

Argumenty funkcji:

- **P** - liczba osobników, liczba całkowita.
- **N** - liczba zmiennych, liczba całkowita.
- **B** - liczba bitów na każdą ze zmiennych, liczba całkowita.
- **pop** - populacja zakodowanych osobników, tablica ndarray.

```

def gen_population(P, N, B):
    ### TWÓJ KOD TUTAJ

    pop = np.random.randint(2, size = (P, N*B))

    return pop

# jeśli poniższe nie rzuca wyjątku to znaczy, że testy przeszły ale
# nie musi oznaczać, że wszystko jest dobrze
np.testing.assert_array_almost_equal(np.array(gen_population(5, 2,
3)).shape), np.array((5, 6)))
np.testing.assert_array_almost_equal(np.array(gen_population(10, 3,
8)).shape), np.array((10, 24)))

```

# Dekodowanie osobnika

Aby móc ocenić danego osobnika (podstawić go do funkcji celu) należy go zdekodować, czyli każdą ze zmiennych w postaci binarnej zamienić na liczbę rzeczywistą. Patrz przykład do zadania pierwszego.

## Zadanie 3

Zaimplementuj metodę pozwalającą na rozkodowanie osobników, tzn. przekonwertowanie osobnika z postaci binarnej na rzeczywistą. Metoda powinna zwrócić jedno wymiarową tablicę `ndarray`.

Argumenty funkcji:

- `individual` - osobnik binarny kodujący `N` zmiennych rzeczywistych, tablica `ndarray`.
- `N` - liczba zmiennych, liczba całkowita.
- `B` - liczba bitów na każdą ze zmiennych, liczba całkowita.
- `a` - początek przedziału, liczba rzeczywista, dla każdej zmiennej taki sam.
- `dx` - krok, dokładność kodowania, taki sam dla każdej zmiennej.
- `decode_individual` - rozkodowany osobnik, tablica `ndarray` zawierająca `N` zmiennych rzeczywistych.

**Ważne:** Funkcja ta wykonywana będzie w każdej iteracji algorytmu (wielokrotnie) należy zatem zadbać o to aby było ona zaimplementowana w sposób wydajny.

```
def decode_individual(individual, N, B, a, dx):
    ### TWÓJ KOD TUTAJ

    decode = np.zeros(N)
    individual = individual.reshape(N, B)
    for x in enumerate(individual):
        tmp = ''
        for y in x[1]:
            tmp += str(y)
        decode[x[0]] = int(tmp, 2)

    return decode * dx + a

# jeśli poniższe nie rzuca wyjątku to znaczy, że testy przeszły ale
nie musi oznaczać, że wszystko jest dobrze
a = -1
N = 2
B = 5
dx = 0.06451612903225806
pop = np.array([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]])
dpop = np.array([[-0.5483871, 0.03225806], [-0.48387097, -0.41935484],
[-0.48387097, 0.80645161], [0.22580645, 0.80645161], [1.0,
```

```
0.87096774]])
for i, ind in enumerate(pop):
    np.testing.assert_array_almost_equal(decode_individual(ind, N, B,
a, dx), dpop[i])
```

## Ocena całej populacji

Gdy już umiemy rozkodować osobniki to możemy na każdym z nich obliczyć wartość funkcji celu.

### Zadanie 4

Zaimplementuj metodę oceny osobników w populacji, tzn. metodę wykonującą funkcję celu na każdym z osobników. Metoda powinna zwrócić jedno wymiarową tablicę `ndarray`.

Wejściem do funkcji jest populacja zakodowana, tak więc należy wykorzystać funkcję z zadania 3 do rozkodowania osobnika a następnie wywołać na nim funkcję celu.

Argumenty funkcji:

- `func` - funkcja celu (przystosowania).
- `pop` - populacja zakodowanych osobników, tablica `ndarray`.
- `N` - liczba zmiennych, liczba całkowita.
- `B` - liczba bitów na każdą ze zmiennych, liczba całkowita.
- `a` - początek przedziału, liczba rzeczywista, dla każdej zmiennej taki sam.
- `dx` - krok, dokładność kodowania, taki sam dla każdej zmiennej.
- `evaluated_pop` - tablica `ndarray` zawierająca wartości funkcji celu dla poszczególnych osobników.

**Ważne:** Funkcja ta wykonywana będzie w każdej iteracji algorytmu (wielokrotnie) należy zatem zadbać o to aby było ona zaimplementowana w sposób wydajny.

```
def evaluate_population(func, pop, N, B, a, dx):
    ### TWÓJ KOD TUTAJ

    evaluated_pop = np.zeros(len(pop))
    for x in enumerate(pop):
        value = decode_individual(x[1], N, B, a, dx)
        evaluated_pop[x[0]] = func(value)

    return evaluated_pop

# jeśli poniższe nie rzuca wyjątku to znaczy, że testy przeszły ale
nie musi oznaczać, że wszystko jest dobrze
a = -1
N = 2
B = 5
dx = 0.06451612903225806
pop = np.array([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
```

```
0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]))
epop = np.array([0.30176899, 0.40998959, 0.88449532, 0.70135276,
1.75858481])
np.testing.assert_array_almost_equal(evaluate_population(obj_func,
pop, N, B, a, dx), epop)
```

## Wybór najlepszego osobnika

W działaniu algorytmu genetycznego chodzi o to aby znaleźć osobnika, który ma najlepszą wartość funkcji. Będziemy implementować algorytm genetyczny w wersji algortmu maksymalizującego wartość funkcji celu. Zatem najlepszy osobnik to ten, którego wartość funkcji celu jest największa.

### Zadanie 5

Zaimplementować metodę zwracającą najlepszego osobnika z populacji (maksimum). Metoda powinna zwracać osobnika w postaci jednowymiarowej tablicy `ndarray` oraz odpowiadającą mu wartość funkcji celu.

- `pop` - populacja zakodowanych osobników, tablica `ndarray`.
- `evaluated_pop` - tablica `ndarray` ocen osobników.
- `best_individual` - najlepszy osobnik (zakodowany), tablica `ndarray`.
- `best_value` - wartość najlepszego osobnika, liczba rzeczywista.

**Ważne:** Funkcja ta wykonywana będzie w każdej iteracji algorytmu (wielokrotnie) należy zatem zadbać o to aby było ona zaimplementowana w sposób wydajny.

```
def get_best(pop, evaluated_pop):
    ### TWÓJ KOD TUTAJ

    best_individual = pop[np.argmax(evaluated_pop)]
    best_value = evaluated_pop[np.argmax(evaluated_pop)]

    return best_individual, best_value

# jeśli poniższe nie rzuca wyjątku to znaczy, że testy przeszły ale
nie musi oznaczać, że wszystko jest dobrze
pop = np.array([[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
0, 0, 1], [0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
0], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]])
epop = np.array([0.30176899, 0.40998959, 0.88449532, 0.70135276,
1.75858481])
np.testing.assert_array_almost_equal(get_best(pop, epop)[0],
np.array([1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]))
np.testing.assert_almost_equal(get_best(pop, epop)[1], 1.75858481)
```



# Selekcja: Metoda koła ruletki

Metoda ruletki (koła ruletki) – jedna z najbardziej podstawowych metod selekcji. Polega na utworzeniu koła ruletki z polami odpowiadającymi poszczególnym osobnikom. Wielkość pól jest proporcjonalna do wartości funkcji przystosowania (celu). Proces selekcji oparty jest na obrocie ruletką tyle razy ile osobników jest w populacji i na wyborze za każdym razem jednego osobnika do nowej populacji. Pewne osobniki są wybierane więcej niż jeden raz, niektóre dokładnie raz, a niektóre wcale.

Koło ruletki w praktyce:

- Koło zestawiamy odcinkiem  $[0, 1]$ , który dzielimy na tyle podprzedziałów ile osobników w populacji.
- Rozmiar każdego podprzedziału jest proporcjonalny do wartości funkcji celu danego osobnika, tzn. im większa wartość funkcji celu tym odcinek powinien być większy. Ponieważ cały odcinek ma długość 1 to rozmiary podprzedziałów można utożsamozić z prawdopodobieństwem przejścia osobnika do nowej populacji i policzyć ze wzoru

$$p_i = \frac{e_i}{\sum_i e_i}, \text{ gdzie } i \text{ to numer osobnika, a } e_i \text{ to wartość funkcji celu } i\text{-tego osobnika.}$$

- Zamiast kręcić kołem, losujemy liczbę z przedziału  $[0, 1]$  i sprawdzamy w którym podprzedziale się ona zawiera i osobnika o numerze zgodnym z numerem tego podprzedziału wybieramy do nowej populacji.

Warto zwrócić na fakt, że tak zaproponowany wzór na długości przedziałów  $p_i$  zadziała tylko wtedy gdy wszystkie wartości funkcji celu będą dodatnie. Aby to zapewnić wystarczy na początku do wektora wartości funkcji celu dodać odpowiednią stałą zapewniającą dodatniość (lub przynajmniej nieujemność) wszystkich elementów.

## Zadanie 6

Zaimplementuj operator selekcji. Selekcja metodą koła ruletki.

Argumenty funkcji:

- `pop` - populacja zakodowanych osobników, tablica `ndarray`.
- `evaluated_pop` - tablica `ndarray` ocen osobników.
- `new_pop` - nowa populacja wybranych osobników (zakodowanych), tablica `ndarray`.

```
def roulette(pop, evaluated_pop):  
    """ TWÓJ KOD TUTAJ """  
  
    roulette = np.zeros(len(pop))  
    new_pop = np.zeros((len(pop), len(pop[0])))  
    for i in range(len(pop)):  
        roulette[i] = evaluated_pop[i] / evaluated_pop.sum()  
    for i in range(len(pop)):  
        rand = np.random.rand()  
        for j in range(len(pop)):
```

```

    rand -= roulette[j]
    if rand <= 0:
        new_pop[i] = pop[j]
        break

return new_pop

```

## Krzyżowanie

Operacja krzyżowania polega na wymianie fragmentów łańcuchów dwóch osobników rodzicielskich. Krzyżowanie jest kluczowym operatorem w algorytmach genetycznych, stanowiącym o ich sile i efektywności.

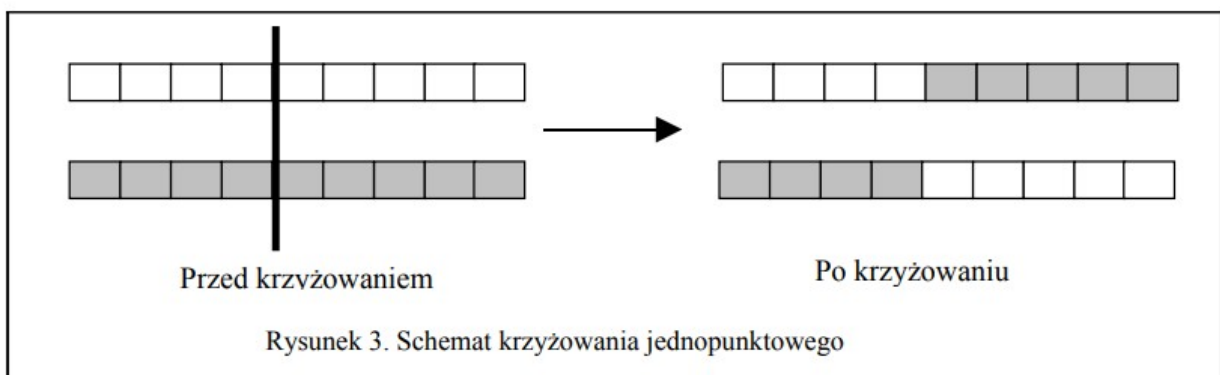
Ideą operatorów krzyżowania jest wymiana kodu genetycznego pomiędzy osobnikami, tak jak to się dzieje w naturze. Stworzono wiele teorii i rodzajów krzyżowań, które stosowane są do różnych rodzajów zadań i są zależne od sposobu kodowania. Dla potrzeb klasycznego algorytmu genetycznego opisano operator krzyżowania jednopunktowego.

Krzyżowanie jednopunktowe – krzyżowanie zachodzi z pewnym prawdopodobieństwem  $pk$ ; dla każdego osobnika losuje się liczbę i sprawdza, czy zachodzi krzyżowanie. Następnie dobiera się wybrane osobniki losowo w pary. Losuje się liczbę określającą miejsce krzyżowania i wymienia kod.

Podpowiedź: w praktyce krzyżowanie to można zaimplementować na dwa sposoby.

Sposób 1. Mając tablicę `pop` z parzystą liczbą osobników jako wiersze, dla każdego kolejnych dwóch wierszy wylosuj liczbę losową z przedziału  $[0, 1]$ . Jeśli jest ona mniejsza niż prawdopodobieństwo krzyżowania, skrzyżuj osobniki i oboje potomków umieść w populacji wynikowej. Jeśli wartość losowa jest większa niż prawdopodobieństwo krzyżowania, skopiuj oboje rodziców do populacji wynikowej.

Sposób 2. Mając tablicę `pop` z dowolną (niekoniecznie parzystą) liczbą osobników jako wiersze, dla każdego wiersza wylosuj liczbę losową z przedziału  $[0, 1]$ . Jeśli jest ona mniejsza niż prawdopodobieństwo krzyżowania, skrzyżuj osobnika z osobnikiem w następnym wierszu i dowolnego z potomków (jednego!) umieść w populacji wynikowej. Jeśli wartość losowa jest większa niż prawdopodobieństwo krzyżowania, skopiuj aktualny wiersz do populacji wynikowej. Uwaga: ostatni wiersz krzyżowany jest z pierwszym (następnym w sensie "modulo").



## Zadanie 7

Zaimplementuj operator krzyżowania. Krzyżowanie jedno-punktowe.

Argumenty funkcji:

- `pop` - populacja zakodowanych osobników, tablica `ndarray`.
- `pk` - prawdopodobieństwo krzyżowania dla pary osobników. Liczba rzeczywista z przedziału  $[0, 1]$ .
- `new_pop` - nowa populacja osobników po krzyżowaniu (zakodowanych), tablica `ndarray`.

```
def cross(pop, pk):  
    ### TWÓJ KOD TUTAJ  
  
    new_pop = np.zeros((len(pop), len(pop[0])))  
    len_pop = len(pop)  
    len_chrom = len(pop[0])  
    for i in range(0, len_pop):  
        rand = np.random.rand()  
        if rand <= pk:  
            new_pop[i] = np.concatenate((pop[i][0:len_chrom//2],  
pop[(i+1)%len_pop][len_chrom//2:len_chrom]))  
        else:  
            new_pop[i] = pop[i]  
  
    return new_pop
```

## Mutacja

Mutacja polega na wprowadzeniu do istniejących, zakodowanych osobników, pewnych losowych zmian. Mutacja tworzy nowego osobnika na bazie jednego i tylko jednego rodzica. Jest wiele metod tworzenia nowych osobników za pomocą operatora mutacji.

Podstawową formę mutacji można zapisać następująco:

$$x' = m(x)$$

gdzie:  $x$  jest osobnikiem rodzica,  $m$  funkcją mutacji,  $x'$  to potomek, osobnik zmutowany.

Mutacja również zachodzi z pewnym zadanym prawdopodobieństwem `pm`. Można ją zaimplementować na dwa sposoby.

Sposób 1. Dla każdego osobnika losuje się liczbę sprawdzając czy będzie on podlegał mutacji. Jeśli tak to losuje się gen, który będzie zmutowany i dokonuje się mutacji (tu: negacja bitu).

Sposób 2. Dla danego osobnika, dla każdego genu (bitu) osobno losuje się liczbę sprawdzając czy będzie podlegał mutacji. Jeśli tak, dokonuje się jego mutacji (u nas: negacja bitu).

Mutacja w klasycznym algorytmie genetycznym odgrywa drugorzędną rolę. Częstość mutacji potrzebna do uzyskania dobrych wyników w empirycznych badaniach nad algorytmami

genetycznymi jest rzędu jeden do tysiąca skopiowanych bitów. W naturalnych populacjach częstość jest równie mała lub nawet mniejsza.

W przypadku osobników zakodowanych binarnie (klasyczny algorytm genetyczny) nie ma problemu ze stosowaniem mutacji (po prostu zamieniamy wartość genu na przeciwny).

## Zadanie 8

Zaimplementuj operator mutacji. Mutacja bitowa.

Argumenty funkcji:

- `pop` - populacja zakodowanych osobników, tablica `ndarray`.
- `pm` prawdopodobieństwo mutacji dla pojedynczego bitu. Liczba rzeczywista z przedziału  $[0, 1]$ .
- `new_pop` - nowa populacja osobników po mutacji (zakodowanych), tablica `ndarray`.

```
def mutate(pop, pm):  
    ### TWÓJ KOD TUTAJ  
  
    mutated_pop = np.random.choice([0, 1],  
size=(len(pop), len(pop[0])), p=[1-pm, pm])  
    new_pop = pop ^ mutated_pop  
  
    return new_pop
```

## Zadanie 1 (obowiązkowe, 1pkt.)

W komórce poniżej wprowadź swój nr albumu a następnie ją wykonaj:

```
nr_albumu = 142706  
nr_funkcji = (nr_albumu % 16) + 1  
print('Twój nr funkcji celu to:', nr_funkcji if nr_funkcji != 6 else  
7)
```

Twój nr funkcji celu to: 3

Zgodnie z wygenerowanym numerem, wybierz funkcję celu ze strony:

<https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html> z działu "Many Local Minima".

Zaplementuj ją jako funkcję w Pythonie.

Dla wszystkich funkcji przyjmujemy  $N=2$  tzn. rozważamy ją jako funkcję dwóch zmiennych  $f(x_1, x_2)$ .

TWÓJ PROGRAM:

```
def obj_func(x):  
    ### TWÓJ KOD TUTAJ
```

```
x1, x2 = x

return -0.0001 * (np.abs(np.sin(x1) * np.sin(x2) *
np.exp(np.abs(100 - np.sqrt(x1**2 + x2**2) / np.pi))) + 1)**0.1
```

## Zadanie 2 (obowiązkowe, 1pkt.)

Przygotuj wykres 3D funkcji zaimplementowanej w zadaniu nr 1.

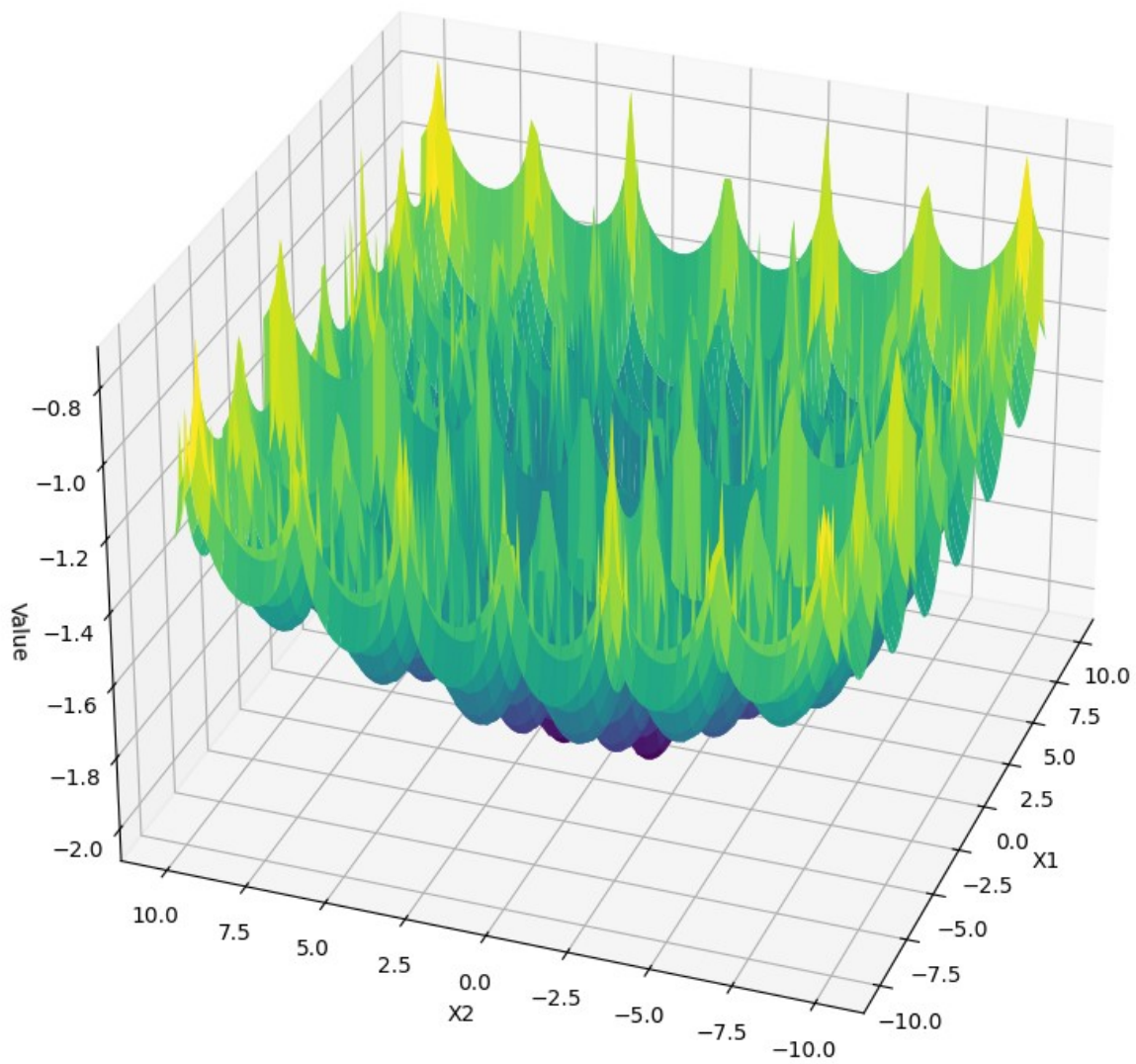
TWÓJ PROGRAM:

### TWÓJ KOD TUTAJ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d

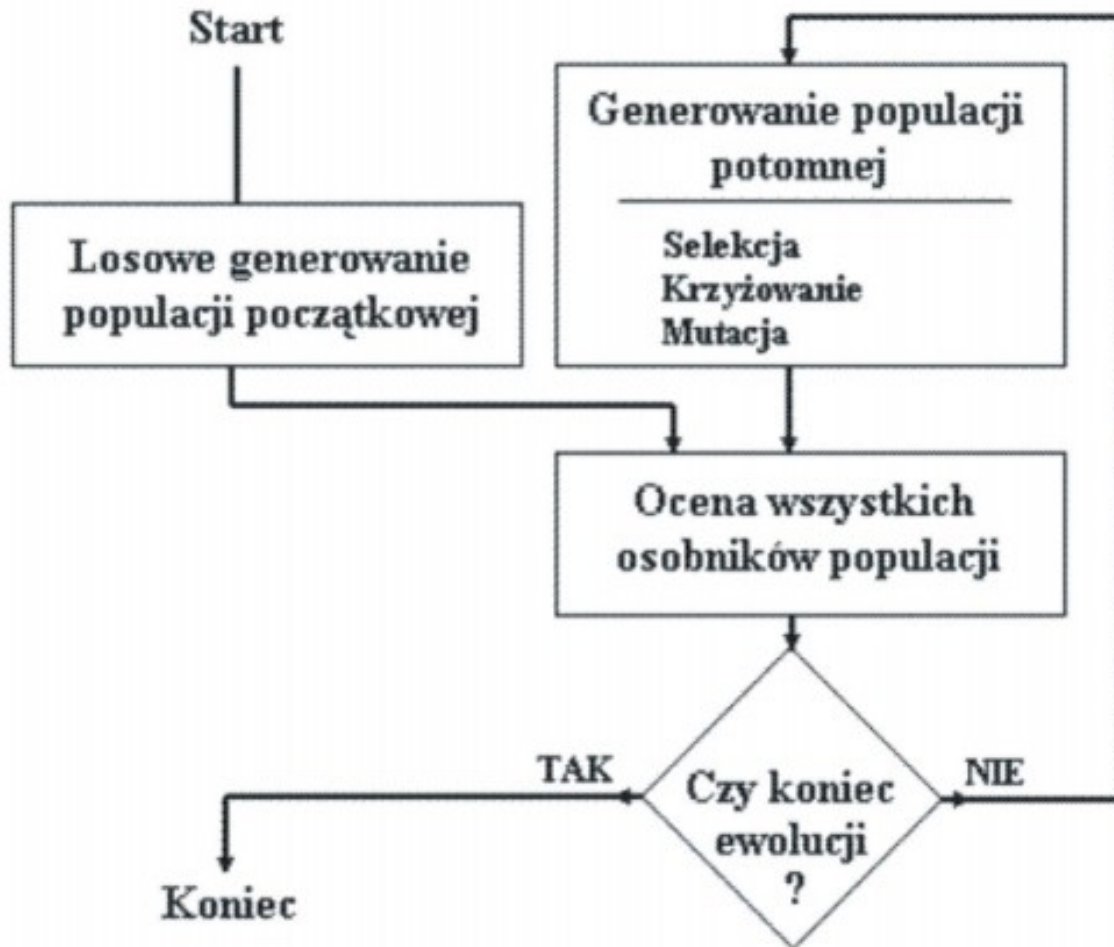
x = np.linspace(-10, 10, 100)
y = np.linspace(-10, 10, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.array([obj_func([xi, yi]) for xi in x] for yi in y])

fig = plt.figure(figsize=(10,10))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')
ax.set_xlabel('X1')
ax.set_ylabel('X2')
ax.set_zlabel('Value')
ax.view_init(30, 200)
plt.show()
```



### Zadanie 3 (obowiązkowe, 2pkt.)

Korzystając z zaimplementowanych funkcji, zaimplementuj główną pętlę klasycznego algorytmu genetycznego.



Rysunek 1: Ogólny schemat algorytmu genetycznego.

Implementacja powinna mieć postać funkcji, która przyjmuje parametry:

- `fun` - funkcja, której maksimum ma zostać znalezione
- `pop_size` - rozmiar populacji
- `pk` - prawdopodobieństwo krzyżowania
- `pm` - prawdopodobieństwo mutacji
- `generations` - liczba pokoleń
- `dx` - dokładność kodowania

Funkcja powinna zwracać:

- `best_sol` - najlepsze znalezione rozwiązanie (nieważne, w której iteracji; UWAGA! niekoniecznie jest to najlepszy osobnik z ostatniej populacji)

- `best_generation` - numer pokolenia, z którego pochodzi najlepsze rozwiązanie
- `list_best` - lista z najlepszą oceną osobnika w każdym pokoleniu (najlepsza ocena znaleziona w danym pokoleniu lub wcześniej)
- `list_best_generation` - lista z najlepszymi ocenami w każdym pokoleniu (najlepsza ocena z danej populacji)
- `list_mean` - lista z wartościami średnimi ocen osobników z każdego pokolenia

TWÓJ PROGRAM:

*# Miejsce na twój kod*

```
def evaluate_population(func, pop, N, B, a, dx):
    evaluated_pop = np.zeros(len(pop))
    for x in enumerate(pop):
        value = decode_individual(x[1], N, B, a, dx)
        evaluated_pop[x[0]] = func(value)

    return evaluated_pop

def get_best(pop, evaluated_pop):
    best_individual = pop[np.argmax(evaluated_pop)]
    best_value = evaluated_pop[np.argmax(evaluated_pop)]

    return best_individual, best_value

def roulette(pop, evaluated_pop):
    roulette = np.zeros(len(pop))
    new_pop = np.zeros((len(pop), len(pop[0])))
    for i in range(len(pop)):
        roulette[i] = evaluated_pop[i] / evaluated_pop.sum()
    for i in range(len(pop)):
        rand = np.random.rand()
        for j in range(len(pop)):
            rand -= roulette[j]
            if rand <= 0:
                new_pop[i] = pop[j]
                break

    return new_pop

def cross(pop, pk):
    new_pop = np.zeros((len(pop), len(pop[0])))
    len_pop = len(pop)
    len_chrom = len(pop[0])
    for i in range(0, len_pop):
        rand = np.random.rand()
        if rand <= pk:
            new_pop[i] = np.concatenate((pop[i][0:len_chrom//2],
pop[(i+1)%len_pop][len_chrom//2:len_chrom]))
        else:
```



```

        new_pop[i] = pop[i]

    return new_pop

def mutate(pop, pm, dx):
    for i in range(len(pop)):
        if np.random.rand() < pm:
            mutation_point = np.random.randint(len(pop[0]))
            pop[i, mutation_point] += np.random.uniform(-0.5 *
dx[mutation_point], 0.5 * dx[mutation_point])
    return pop

def decode_individual(individual, N, B, a, dx):
    return individual

def evolve(fun, pop_size, pk, pm, generations, dx, lower_bound,
upper_bound):
    population = np.random.uniform(lower_bound, upper_bound, size =
(pop_size, len(dx)))

    list_best = []
    list_best_generation = []
    list_mean = []
    best_sol = None
    best_generation = None

    # Główna pętla algorytmu genetycznego
    for gen in range(generations):
        # Oceń osobniki w populacji
        evaluated_pop = evaluate_population(fun, population, pop_size,
len(dx), lower_bound, dx)

        # Znajdź najlepsze rozwiązanie w bieżącej populacji (minimalna
wartość funkcji)
        current_best_sol, current_best_value = get_best(population,
evaluated_pop)
        if best_sol is None or current_best_value < fun(best_sol):
            best_sol = current_best_sol.copy()
            best_generation = gen

        # Uaktualnij listy statystyk
        list_best.append(fun(best_sol))
        list_best_generation.append(current_best_value)
        list_mean.append(np.mean(evaluated_pop))

        # Selekcja proporcjonalna do oceny (minimalizacja)
        population = roulette(population, evaluated_pop)

        # Tworzenie nowej populacji przez krzyżowanie
        population = cross(population, pk)

```

```

        # Mutacja
        population = mutate(population, pm, dx)

    return best_sol, best_generation, list_best, list_best_generation,
list_mean
    # #generuj początkową populację
    # #oceń osobniki w populacji
    # #znajdź i zapamiętaj najlepsze rozwiązanie
    # #uaktualnij listy statystyk

    # #population = np.random.uniform(0, 10, size=(pop_size, len(dx)))
    # population = np.random.randint(0, 10, size = (pop_size,
len(dx)))

    # listBest = []
    # listBestGeneration = []
    # listMean = []
    # bestSolution = None
    # bestGenerationNumber = None

    # for i in range(generations):
    #     #selekcja
    #     #krzyżowanie
    #     #mutacja
    #     #oceń osobniki w populacji
    #     #znajdź i zapamiętaj najlepsze rozwiązanie, jeśli jest
lepsze niż dotychczasowe najlepsze
    #     #uaktualnij listy statystyk

    #     fitness = np.array([fun(individual) for individual in
population])
    #     maxFitnessIndex = np.argmax(fitness)
    #     if bestSolution is None or fitness[maxFitnessIndex] >
fun(bestSolution):
    #         bestSolution = population[maxFitnessIndex]
    #         bestGenerationNumber = i

    #     listBest.append(fun(bestSolution))
    #     listBestGeneration.append(np.max(fitness))
    #     listMean.append(np.mean(fitness))

    #     rankedIndices = np.argsort(fitness)
    #     rankedFitness = np.arange(pop_size)
    #     normalizedFitness = rankedFitness / np.sum(rankedFitness)
    #     selectedIndices = np.random.choice(rankedIndices,
size=pop_size, replace=True, p=normalizedFitness)

    #     for i in range(0, pop_size, 2):
    #         if np.random.rand() < px:

```

```

#         crossoverPoint = np.random.randint(len(dx))
#         population[selectedIndices[i], crossoverPoint:] = \
population[selectedIndices[i + 1], crossoverPoint:] = \
#         population[selectedIndices[i + 1],
crossoverPoint:], population[selectedIndices[i], crossoverPoint:]

#     for i in range(pop_size):
#         for j in range(len(dx)):
#             if np.random.rand() < pm:
#                 population[i, j] += np.random.uniform(-
0.5*dx[j], 0.5*dx[j])

# return bestSolution, bestGenerationNumber, listBest,
listBestGeneration, listMean

```

## Zadanie 4 (obowiązkowe, 1pkt.)

Zaprezentuj działanie algorytmu z przykładowymi wartościami parametrów:

- pop\_size: 60
- pk: 0.7
- pm: 0.01
- generations: 200
- dx: 1e-10

Na wykresach funkcji 3D przedstaw położenie osobników z pierwszej populacji, w połowie ewolucji oraz końcowej populacji. Zaznacz wyraźnie położenie najlepszego rozwiązania.

Na wykresach 2D przedstaw przebieg wartości z list z zebranymi statystykami (listy list\_best, list\_best\_generation, list\_mean) w zależności od numeru pokolenia.

TWÓJ PROGRAM:

```

### TWÓJ KOD TUTAJ

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def plot_population(ax, population, color='b', label=None):
    z = np.array([obj_func(ind) for ind in population])
    ax.scatter(population[:, 0], population[:, 1], z, c=color,
label=label)

pop_size = 200
pk = 0.7
pm = 0.01
generations = 200
dx = [1e-10, 1e-10]
lower_bound = 0

```

```

upper_bound = 10

population = np.random.uniform(-10, 10, size=(pop_size, len(dx)))
bestSol, bestGeneration, listBest, listBestGeneration, listMean =
evolve(obj_func, pop_size, pk, pm, generations, dx, lower_bound,
upper_bound)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
plot_population(ax, population)
ax.scatter(bestSol[0], bestSol[1], obj_func(bestSol), color='r',
label='Best solution')
ax.set_title('First population')
ax.set_xlabel('X1')
ax.set_ylabel('X2')
ax.set_zlabel('F(X1, X2)')
ax.set_xlim(10, -10)
ax.set_ylim(-10, 10)
plt.legend()
plt.show()

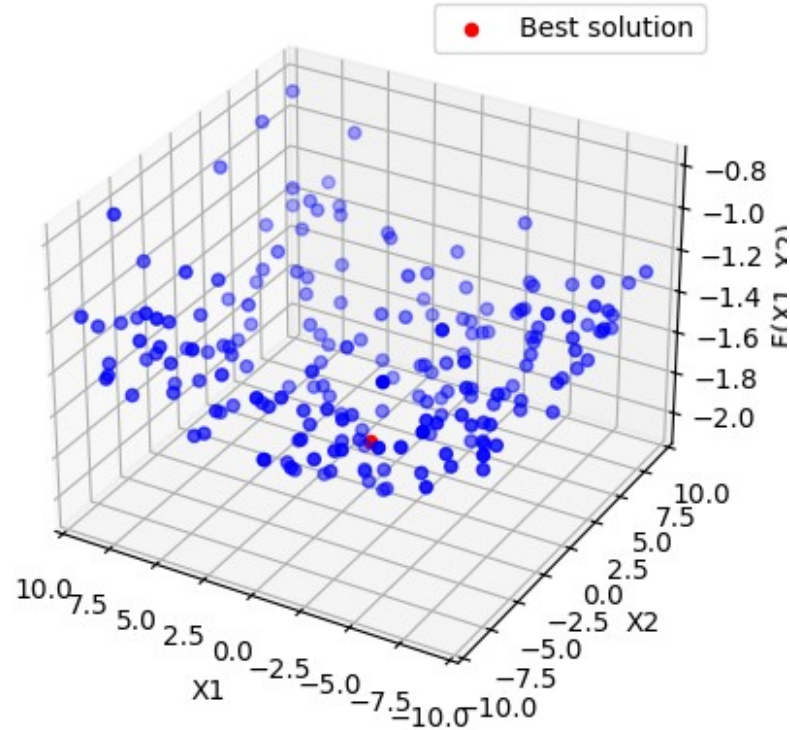
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(range(generations), listBest, label='Best villager in
generation')
plt.plot(range(generations), listBestGeneration, label='Best villager
in population')
plt.plot(range(generations), listMean, label='Avarage population
value')
plt.xlabel('Generation number')
plt.ylabel('Value')
plt.title('The course of the value of the collected statistics
depending on the generation number')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
plot_population(ax, population, label='Starting population')
plot_population(ax, bestSol.reshape(1, -1), color='r', label='Best
solution')
ax.set_title('Final population')
ax.set_xlabel('X1')
ax.set_ylabel('X2')
ax.set_zlabel('F(X1, X2)')
ax.set_xlim(10, -10)
ax.set_ylim(-10, 10)

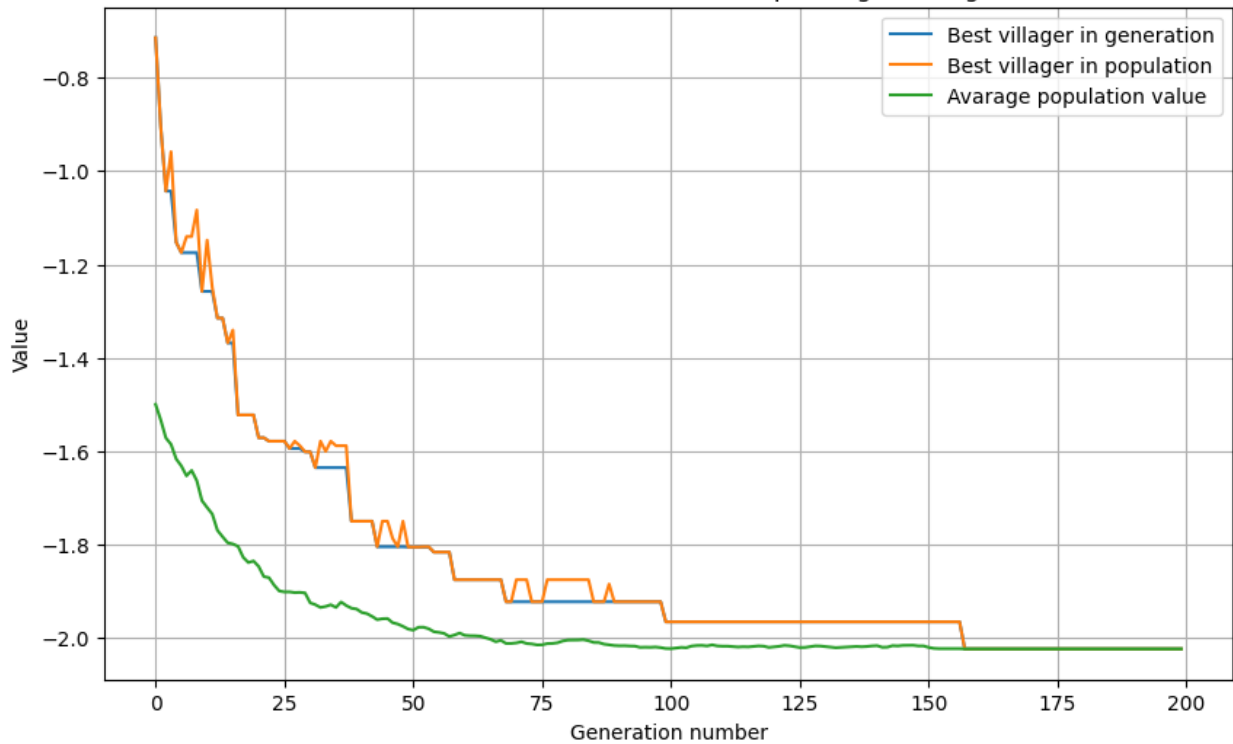
plt.legend()
plt.show()

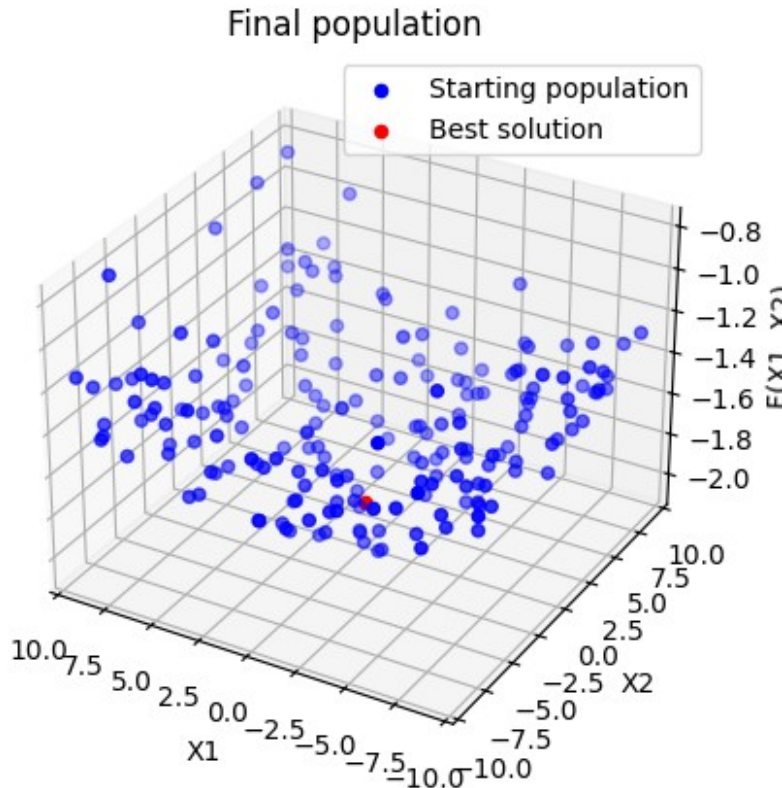
```

First population



The course of the value of the collected statistics depending on the generation number





## Zadanie 5 (obowiązkowe, 5pkt.)

Zbadaj wpływ parametrów klasycznego algorytmu genetycznego na jego zdolność znalezienia optymalnego rozwiązania. Dla ułatwienia analizy, zmieniając jeden parametr, zachowaj typowe wartości pozostałych.

1. Jak działa algorytm z typowymi ustawieniami parametrów (jak w zadaniu 4)? Podaj średnią wartość przystosowania znalezionej populacji po wielokrotnym uruchomieniu AG.
2. Czy wydłużenie ewolucji przynosi poprawę czy też następuje "nasycenie"? Porównaj zarówno jak dobre rozwiązanie zostało znalezione jak również w której generacji.
  - **generations**: kilka różnych wartości z przedziału [100, 10000]
3. Czy mutacja jest potrzebna?
  - **pm** = 0.0
4. Jak działa algorytm bez krzyżowania, z samą mutacją?
  - **pk** = 0.0
5. Czy lepiej jest dłużej ewoluować mniejszą populację czy krócej większą, jeśli liczba ewaluacji funkcji jest taka sama (np. 2000)?
  - porównaj dwa ustawienia: **pop\_size**=20, **generations**=100 vs. **pop\_size**=100, **generations**=20.

UWAGA: Powyższe porównania powinny być wykonane na podstawie uśrednionych wyników co najmniej 10 uruchomień algorytmu z danymi parametrami. Podając wyniki podaj średnią z

najlepszych znalezionych rozwiązań oraz odchylenie standardowe oraz numer pokolenia, w którym znaleziono rozwiązanie.

TWÓJ PROGRAM:

```
solution1, solution2, solution3, solution4, solution51, solution52 =  
[], [], [], [], [], []  
avg1, avg2, avg3, avg4, avg51, avg52 = 0, 0, 0, 0, 0, 0  
deflection1, deflection2, deflection3, deflection4, deflection51,  
deflection52 = 0, 0, 0, 0, 0, 0  
generation1, generation2, generation3, generation4, generation51,  
generation52 = 0, 0, 0, 0, 0, 0  
execNum = 10  
  
for i in range(execNum):  
    solution1.append(evolve(obj_func, 60, 0.7, 0.01, 200, [1e-10, 1e-  
10], 0, 10))  
    solution2.append(evolve(obj_func, 60, 0.7, 0.01, 200*(i+1) if i <  
5 else 2000*(i-4), [1e-10, 1e-10], 0, 10))  
    solution3.append(evolve(obj_func, 60, 0.7, 0.00, 200, [1e-10, 1e-  
10], 0, 10))  
    solution4.append(evolve(obj_func, 60, 0.0, 0.3, 200, [1e-10, 1e-  
10], 0, 10))  
    solution51.append(evolve(obj_func, 20, 0.7, 0.01, 100, [1e-10, 1e-  
10], 0, 10))  
    solution52.append(evolve(obj_func, 100, 0.7, 0.01, 20, [1e-10, 1e-  
10], 0, 10))  
  
for x in solution1:  
    avg1 += x[0]  
    generation1 += x[1]  
avg1 /= execNum  
generation1 /= execNum  
for x in solution1:  
    deflection1 += (x[0] - avg1) ** 2  
deflection1 = np.sqrt(deflection1 / execNum)  
print(f'Zadanie 1: \nŚrednia: {avg1}\nOdchylenie: {deflection1}\n  
nPokolenie: {generation1}\n\n')  
  
for x in solution2:  
    avg2 += x[0]  
    generation2 += x[1]  
avg2 /= execNum  
generation2 /= execNum  
for x in solution2:  
    deflection2 += (x[0] - avg2) ** 2  
deflection2 = np.sqrt(deflection2 / execNum)  
print(f'Zadanie 2: \nŚrednia: {avg2}\nOdchylenie: {deflection2}\n  
nPokolenie: {generation2}\n\n')
```

```

for x in solution3:
    avg3 += x[0]
    generation3 += x[1]
avg3 /= execNum
generation3 /= execNum
for x in solution3:
    deflection3 += (x[0] - avg3) ** 2
deflection3 = np.sqrt(deflection3 / execNum)

print(f'Zadanie 3: \nŚrednia: {avg3}\nOdchylenie: {deflection3}\n\n')

for x in solution4:
    avg4 += x[0]
    generation4 += x[1]
avg4 /= execNum
generation4 /= execNum
for x in solution4:
    deflection4 += (x[0] - avg4) ** 2
deflection4 = np.sqrt(deflection4 / execNum)
print(f'Zadanie 4: \nŚrednia: {avg4}\nOdchylenie: {deflection4}\n\n')

for x in solution51:
    deflection51 += x[0]
    generation51 += x[1]
deflection51 /= execNum
generation51 /= execNum
for x in solution51:
    deflection51 += (x[0] - avg51) ** 2
deflection51 = np.sqrt(deflection51 / execNum)
print(f'Zadanie 5.1: \nŚrednia: {avg51}\nOdchylenie: {deflection51}\n\n')

for x in solution52:
    avg52 += x[0]
    generation52 += x[1]
avg52 /= execNum
generation52 /= execNum
for x in solution52:
    deflection52 += (x[0] - avg52) ** 2
deflection52 = np.sqrt(deflection52 / execNum)
print(f'Zadanie 5.2: \nŚrednia: {avg52}\nOdchylenie: {deflection52}\n\n')

```

Zadanie 1:

Średnia: [1.18351947 1.8709141 ]

Odchylenie: [0.52011383 0.98676942]



Pokolenie: 112.0

Zadanie 2:

Średnia: [1.99082847 2.56421828]

Odchylenie: [1.36448876 1.21232899]

Pokolenie: 2714.4

Zadanie 3:

Średnia: [1.9360164 1.79788445]

Odchylenie: [0.990501 0.98395685]

Pokolenie: 56.2

Zadanie 4:

Średnia: [1.85108017 1.6986027 ]

Odchylenie: [1.38665558 0.78277564]

Pokolenie: 114.7

Zadanie 5.1:

Średnia: 0

Odchylenie: [4.68107362 3.19396751]

Pokolenie: 29.6

Zadanie 5.2:

Średnia: [4.75222001 4.46882636]

Odchylenie: [3.54005132 2.61308009]

Pokolenie: 16.3

UMIEŚĆ TWOJE WNIOSKI I KOMENTARZE W KOMÓRCE PONIŻEJ

Odnies się do każdego punktu.

Zadanie 1: Chociaż algorytm zdaje się dobrze radzić sobie z funkcją, czasami nie osiąga optymalnych rezultatów. Średnie wartości przystosowania mieszczą się w przedziale od około 4.09 do 6.67, co sugeruje, że algorytm może utknąć w lokalnych maksimach, zamiast znaleźć najlepsze rozwiązanie. Wysokie odchylenie standardowe wskazuje na dużą rozbieżność między wynikami, co może być spowodowane próbowaniem różnych strategii.

Zadanie 2: Zwiększenie liczby generacji znacząco poprawia jakość wyników. Średnie wartości przystosowania oscylują wokół 7.04 i 5.62. Niższe odchylenie standardowe w porównaniu z zadaniem 1 sugeruje, że rezultaty są bardziej jednolite.

Zadanie 3: Brak mutacji znacząco wpływa na jakość rezultatów. Średnie wartości przystosowania wynoszą około 5.58 do 7.56, ale wyniki są bardzo zróżnicowane.

Zadanie 4: Brak krzyżowania nie ma istotnego wpływu na wyniki. Średnie wartości przystosowania mieszczą się w przedziale od 2 6.87 do 7.50, co sugeruje, że losowe mutacje są wystarczające do osiągnięcia dobrych rezultatów.

Zadanie 5:

© Katedra Informatyki, Politechnika Krakowska