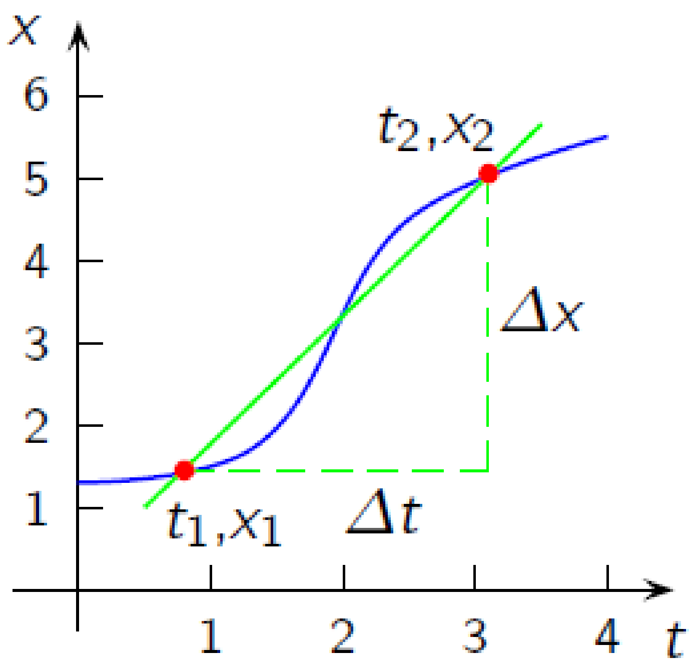
Podstawy Fizyki

dla Informatyki

Stanisław Drożdż
Instytut Informatyki PK

Prędkość



Zależność przemieszczenia od czasu $x(t)$

Definicje

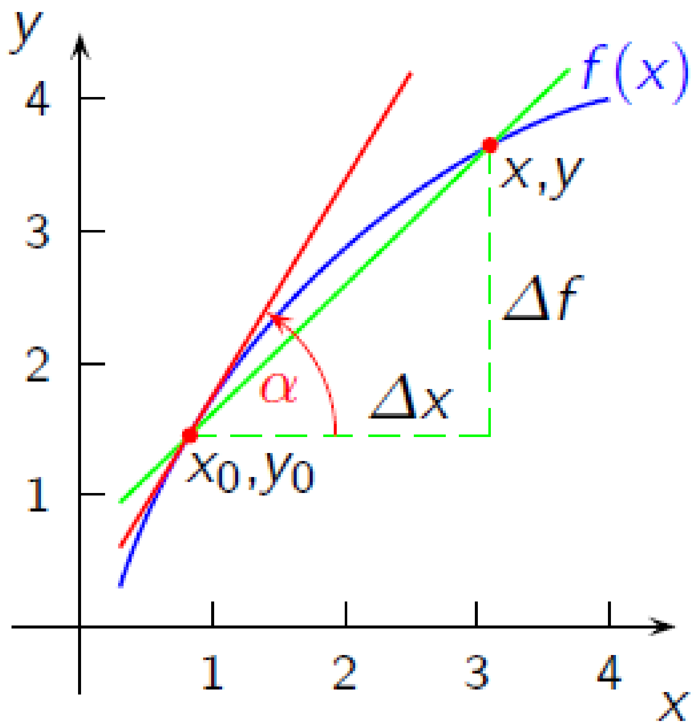
Prędkość średnia:

$$v_{\acute{s}r} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Prędkość chwilowa:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Definicja i interpretacja pochodnej



Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji $y = f(x)$:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Definicja

Pochodna f' funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest granicą ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Oznaczenia

$f(x)$ — funkcja

x — zmienna

$\lim$ — granica

$\Delta f,\ \Delta x$ — różnice

$df,\ dx$ — różniczki

Podstawowe wzory pochodnych

funkcja	pochodna
stała C	0
e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	x^{-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$C\,f(x)$	$C\,f'(x)$
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f[g(x)]$	$f'[g(x)]g'(x)$

Obliczenia pochodnych

Przykład

$$f(x) = ax^n = \frac{5}{\sqrt{x}} = 5x^{-1/2}$$

$$f'(x) = anx^{n-1} = 5(-\tfrac{1}{2})x^{-3/2} = -\tfrac{5}{2}x^{-3/2}$$

Przykład

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sin(ax)e^{-bx} \\
[f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&= a\cos(ax)e^{-bx} + \sin(ax)(-b)e^{-bx} \\
&= [a\cos(ax) - b\sin(ax)]\, e^{-bx}
\end{aligned}$$

Ruch przyspieszony

Przyspieszenie średnie:

$$a_{śr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Przyspieszenie chwilowe:

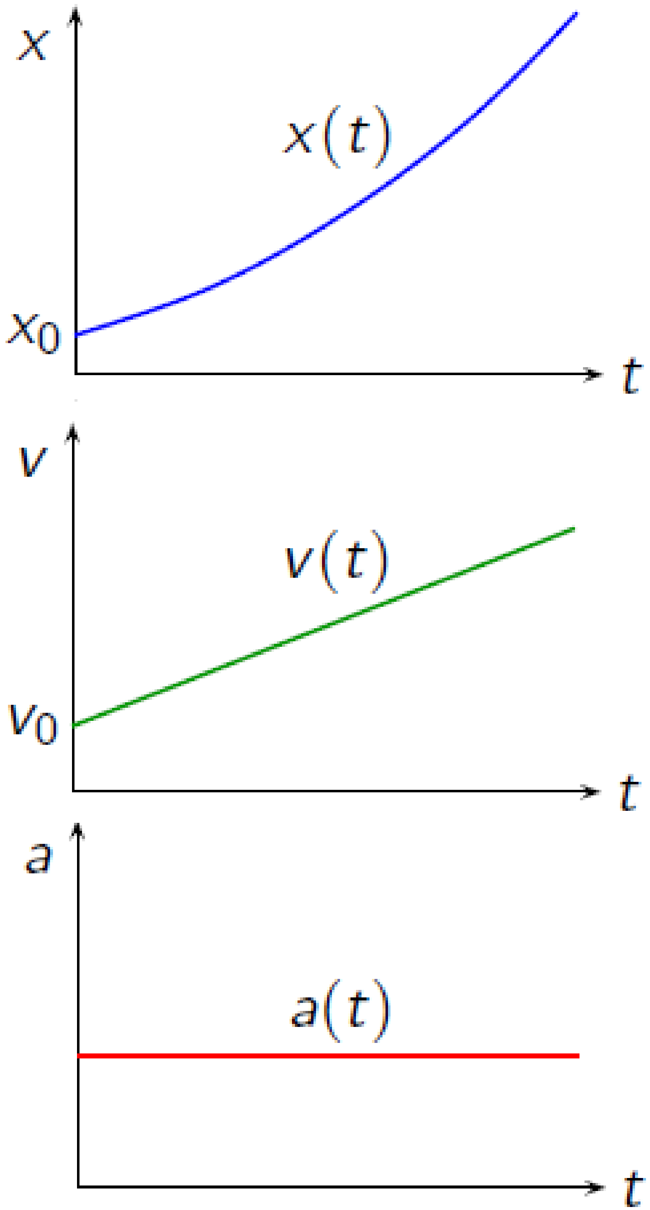
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

- Przyspieszenie jest drugą pochodną przemieszczenia względem czasu:

$$a = \frac{d}{dt} v = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- Jednostka: $[a] = \mathrm{m/s^2}$

Ruch ze stałym przyspieszeniem



Zakładamy, że w chwili $t = 0$ $v = v_0$. Zatem:

$$a = a_{śr} = \frac{v - v_0}{t}$$

i stąd

Wzór 1 $\quad v = v_0 + at$

Ruch ze stałym przyspieszeniem

Zakładając, że położenie $x = x_0$ w chwili $t = 0$, z definicji prędkości średniej otrzymujemy:

$$x = x_0 + v_{śr} t$$

Dla prędkości zmieniającej się liniowo w czasie mamy:

$$v_{śr} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$$

Z powyższych równań i wzoru 1 wynika:

Wzór 2 $$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Sprawdzenie poprzez użycie pochodnych:

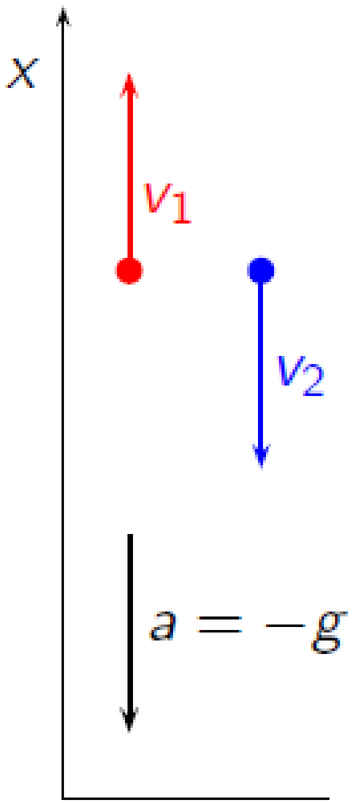
$$v = \frac{dx}{dt} = 0 + v_0 + \frac{1}{2} 2at = v_0 + at$$

Równania ruchu ze stałym przyspieszeniem

Eliminując różne wielkości w poprzednich równaniach otrzymujemy:

Równanie	„Brakująca” wielkość
$v = v_0 + at$	$x - x_0$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

Spadek swobodny



Wartość bezwzględna przyspieszenia ziemskiego przy powierzchni Ziemi jest równa $g = 9.8$ m/s^2

- Ciała poruszają się z tym samym przyspieszeniem, jeśli wyeliminować opór powietrza
- $x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$