Kapitola 4

Logaritmické a exponenciální funkce

V této kapitole se budeme zabývat exponenciálními a logaritmickými funkcemi. Uvedeme si definice vlastnosti a vztah mezi nimi.

4.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkce patří mezi takové funkce, které popisují významné závislosti v různých oblastech, např. biologie, ekonomie, finančnictví, chemie, fyzika. Konkrétně se exponenciální závislosti používají na modelování růstu živočišné, lidské nebo rostlinné populace (v omezeném časovém intervalu), na růst firmy po jejím založení za krátký časový interval. Také se používají na výpočet úrokování, exponenciální klesající funkce modelují například rozpad radioaktivní látky.

Základní pojmy

Definice 4.1.1. *Exponenciální funkce* je každá funkce vyjádřená předpisem $f : y = a^x$, kde $a > 0$ je reálná konstanta, přičemž $a \neq 1$. Konstanta a se nazývá *exponenciální základ*, (resp. *základ mocniny*), číslo x je její *exponent* (resp. *mocnina, mocnitel*). Exponenciální funkce pro $a = e$, kde e je Eulerovo číslo, (přibližná hodnota $e = 2,7182818284$), nazveme *přirozená exponenciální funkce*.

Definování mocniny s obecným reálným exponentem se zakládá na jednoznačném rozšíření definice mocniny s celočíselným exponentem s celočíselným a racionálním exponentem. Pro numerické výpočty mocnin s reálným exponentem platí stejná pravidla jako pro mocniny s racionálním exponentem.

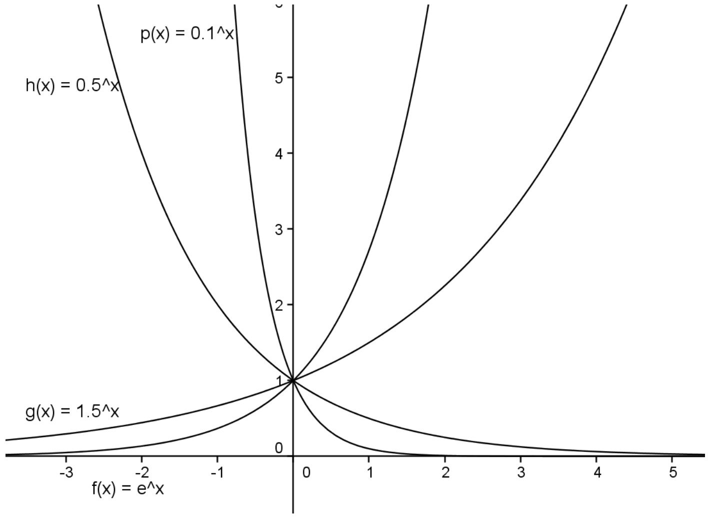
Pro zopakování uvedeme **pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami** *(předpokládáme $a,\ b \in \mathbb{R}$, $m,\ n,\ k,\ r,\ s \in \mathbf{N}$):*

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad a \neq 0$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $(ab)^r = a^r \cdot b^r$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$
6. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \quad a \geq 0,\, b \geq 0$
7. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad a \neq 0,\ b > 0$
8. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \ \ a \geq 0$
9. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \ \ a \geq 0$
10. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}, \quad a \geq 0$

Graf exponenciální funkce se nazývá exponenciální křivka.

Všimněte si, že exponenciální funkce pro $a > 1$ je rostoucí na $\mathbf{R}$, pro $0 < a < 1$ je klesající na $\mathbf{R}$. Pro $a = 1$ bychom měli konstantní funkci s grafem přímky $f(x) = 1$, ovšem tuto možnost nepřipouštíme. Každý graf *exponenciální funkce prochází pro $x = 0$, bodem $y = 1$, protože $a^0 = 1$. Definiční obor této funkce je $\mathbb{R}$ a obor hodnot interval $(0, \infty)$. Exponenciální funkce je pro $a \neq 1$ prostou funkcí na definičním oboru.*

V následujícím obrázku jsou znázorněny grafy exponenciálních funkcí pro různou volbu čísla $a \neq 1$.



Obrázek 4.1: Části grafů exponenciálních funkcí.

Úprava na mocniny o stejném exponenciálním základu.

Nejprve upravíme rovnici s využitím pravidel pro počítání s mocninami tak, aby na obou stranách rovnice byl stejný mocninný základ a pak stačí položit rovnost pro exponenty a dopočíst.

Příklad 4.1.1. Vyřešte rovnici $3^{5-x} = 3^{4+x}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.1.** Vzhledem k tomu, že mocniny mají stejný základ musí pro ně platit $5 - x = 4 + x$, tedy $x = \frac{1}{2}$.

Příklad 4.1.2. Vyřešte rovnici $81^{-x} = 27$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.2.** Rovnici lze upravit na $(3^4)^{-x} = 3^3$, podle pravidel platí $3^{-4x} = 3^3$, pak $-4x = 3$. Řešením je $x = -\frac{3}{4}$.

Příklad 4.1.3. Vyřešte rovnici $2^x + 2^{x+1} = 24$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.3.** Rovnici lze upravit na $2^x + 2.2^x = 24$, tedy $3.2^x = 24$, což je $2^x = 8$ Řešením je $x = 3$.

Příklad 4.1.4. Vyřešte rovnici $3^x + 3^{x+1} - 5^{x+1} = 5^x - 3^{x+3} + 5^{x+2}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.4.** Podle pravidel upravíme na $3^x + 3.3^x - 5.5^x = 5^x - 27.3^{x+3} + 25.5^{x+2}$ a následně na $3^x = 5^x$, což je $\frac{3}{5}^x = 1$. Řešením je $x = 0$.

Metoda substituce.

Příklad 4.1.5. Vyřešte exponenciální rovnici $2^{4x} - 50.2^{2x} = 896$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.5.** Rovnice se dá zapsat ve tvaru $(2^{2x})^2 - 50.2^{2x} - 896 = 0$. Do rovnice dosadíme substituci $2^{2x} = t$ a dostáváme kvadratickou rovnici $t^2 - 50.t - 896 = 0$ pro neznámou t. Kvadratická rovnice má dva kořeny $t_1 = -14$ a $t_2 = 64$. Dosadíme postupně kořeny do rovnice substituce za t a dopočteme. Rovnici $2^{2x} = -14$ nevyhovuje žádné řešení. Řešením rovnice $2^{2x} = 64$ je $x = 3$. Snadno (dosazením do původní rovnice) zjistíme, že jsme našli řešení příkladu.

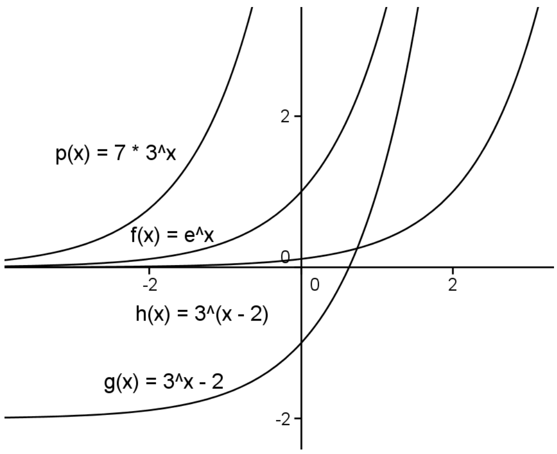
Exponenciální nerovnice.

Příklad 4.1.6. Nalezněte řešení exponenciální nerovnice $2^x - 3^x > 2^{x+2} - 3^{x+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

***Řešení:* 4.1.6.** Po úpravě dostaneme $3^{x+1} - 3^x > 2^{x+2} - 2^x$. Dalšími úpravami dostáváme $2.3^x > 3.2^x$. Podělíme nerovnici postupně čísly 2, 3, 2^x. Všechna jsou větší než 0 ($2^x > 0$ plyne z toho, že obor uvedené funkce hodnot je $(0, \infty)$), znaménko nerovnosti se nezmění. Všimněme si, že pro funkci $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$ v nerovnici $\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > 1$ platí, že je rostoucí (základ mocniné funkce $\frac{3}{2} > 1$). Pro exponenty platí $x - 1 > 0$, výsledkem je $x > 1$.

Druhý způsob řešení (jiné ekvivalentní úpravy). Podělíme nerovnici $2.3^x > 3.2^x$ postupně čísly 2, 3, 3^x. Všechna jsou větší než 0, znaménko nerovnosti se nezmění. Všimněme si, že pro funkci $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ v nerovnici $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1$ platí, že klesající (základ mocniné funkce $\frac{2}{3} < 1$). Pro exponenty platí $x - 1 > 0$, pro exponenty je nerovnost opačná. Výsledkem je $x > 1$.

Poznámka 4.1.1. V kapitole o funkcích a elementárních funkcích jsme se zabývali operacemi s grafem funkcí. Na následujícím obrázku jsou ukázány některé operace s grafem funkce $f(x) = 3^x$. Graf funkce $g(x) = 3^x - 2$ vzniká posunem grafu $f(x) = 3^x$ o 2 díly dolů. Graf funkce $h(x) = 3^{x-2}$ vzniká posunem grafu $f(x) = 3^x$ o 2 díly doprava. Graf funkce $p(x) = 7.3^x$ vzniká změnou „míry”funkce.



Obrázek 4.2: Operace s grafem funkce $f(x) = 3^x$.

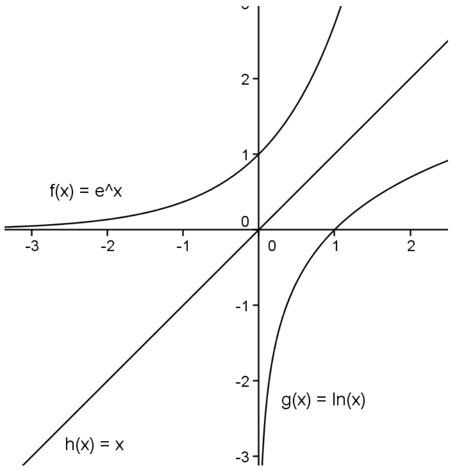
4.2 Logaritmické funkce

Protože exponenciální funkce je prostá na svém definičním oboru, existuje k ní inverzní funkce; tato funkce se nazývá logaritmická funkce. Ale také obráceně: inverzní funkce k logaritmické funkci je funkce exponenciální. Z tohoto vzájemného vztahu vyplyne, proč je důležité, aby na světě existovaly logaritmy čísel.

Definice 4.2.1. *Logaritmická funkce o základu* a (resp. *logaritmus o základu* a), $a > 0$ je reálná konstanta, přičemž $a \neq 1$, je každá funkce vyjádřená předpisem $f(x) = \log_a x$, přičemž platí $y = \log_a x$, jestliže $x = a^y$. Logaritmickou funkci o základu $a = e$, kde e je Eulerovo číslo, nazveme *přirozená logaritmická funkce*, resp. *přirozený logaritmus).* Logaritmickou funkci o základu $a = 10$ nazveme *dekadická logaritmická funkce*, resp. *dekadický logaritmus).*

Logaritmická funkce je definována pomocí exponenciální funkce jako její inverzní funkce. Tedy definiční obor logaritmu je interval $(0, \infty)$ *a obor hodnot je* $\mathbb{R}$. *Všimněte si, že exponenciální funkce pro* $a > 1$ *je opět rostoucí na* $\mathbf{R}$, *pro* $0 < a < 1$ *je klesající na* $\mathbf{R}$. *Každý graf logaritmické funkce prochází bodem* $x = 1$ *a* $y = 0$.

Graf logaritmické funkce se nazývá logaritmická křivka.



Obrázek 4.3: Přirozená exponenciální funkce a přirozený logaritmus.

Poznámka 4.2.1. Uvedeme ještě pro opakování základní pravidla pro počítání s logaritmy; tato pravidla vyplývají z pravidel pro počítání s mocninami a z definice logaritmu. Ve vztazích, které následují, jsou $a > 0,\ x > 0,\ y > 0,\ k$ reálná čísla:

1.	$\log_a xy = log_a x + log_a y$	(logaritmus součinu je součtem logaritmů)
2.	$\log_a \dfrac{x}{y} = log_a x - log_a y$	(logaritmus podílu je rozdíl logaritmů)
3.	$\log_a x^k = k \cdot log_a x$	(logaritmus mocniny je součinem mocnitele a logaritmu základu)

Logaritmické rovnice

Výše zmíněné vlastnosti zakládají postupy pro řešení logaritmických rovnic (a také logaritmických nerovnic). Máme dva základní typy:

typ (1): $\log_a x = b$

pro $a,\ b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Tato rovnice má jediné řešení* $x = a^b$.

typ (2): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,

pro $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$, $g(x)$ *kladné funkce. Protože logaritmická funkce* $y = \log_a x$ *je prostá na* $(0, \infty)$, *tato rovnost se splní pouze pro stejné hodnoty logaritmovaných výrazů. Proto řešení logaritmické rovnice se najde jako řešení rovnice*

$f(x) = g(x)$.

Příklad 4.2.1. Určeme řešení rovnic:
(a) $\log_2(2x - 1) = -3$;
(b) $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$;

***Řešení:* 4.2.1.** Používáme pravidla pro počítání logaritmy:
(a) Jestliže $\log_2(2x-1) = -3$, pak $2x - 1 = 2^{-3}$; řešení je $x = \frac{9}{16}$;

(b) Vynásobíme rovnici $\frac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$ výrazem $\log_3(x-3)$, máme $\log_3(6x-2) = 2\log_3(x-3) = \log_3(x-3)^2$, tedy $(6x-2) = (x-3)^2$. Upravíme na kvadratickou rovnici $x^2 - 12x + 11 = 0$, jejím řešením jsou čísla 11 a 1. Ovšem číslo 1 neleží v definičním oboru funkce $\log_3(x-3)$, tedy nemůže být řešením původní logaritmické rovnice. Máme jediné řešení a to $x = 11$.

Příklad 4.2.2. Určeme řešení rovnic: Vyřešte rovnici $u^{\log u} = 100u$.

***Řešení:* 4.2.2.** Nejprve budeme rovnici logaritmovat. Vzhledem k tomu, že v rovnici se vyskytuje dekadický logaritmus, budeme logaritmovat také pomocí dekadického logaritmu $\log u^{\log u} = \log 100u$. Z vlastností logaritmů plyne $\log u . \log u = \log 100 + \log u$. Upravíme na tvar $\log^2 u - \log u - 2 = 0$. Substitucí $\log u = t$ získáme kvadratickou rovnici $t^2 - t - 2 = 0$ s kořeny $t_1 = 2$ a $t_2 = -1$. Dosadíme a vyšesíme rovnici $\log u = 2$, tedy $u = 100$. Pro $\log u = -1$ je $u = 0,1$. Snadno ověříme, že vyhovují obě řešení $u_1 = 100$ a $u_2 = 0,1$.

Logaritmické nerovnice

Příklad 4.2.3. Nalezněte řešení nerovnice $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) < 0$.

***Řešení:* 4.2.3.** Požíváme výše uvedená pravidla pro nalezení řešení: Definiční obor funkce je $\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$ je $(4, \infty)$. Výše uvedenou nerovnici mužeme přepsat do tvaru $\log_{\frac{1}{3}}(x-4) < \log_{\frac{1}{3}} 1$. Pro základ $\frac{1}{3}$ se jedná o funkci klesající, tedy po „odstranění"logaritmů se změní nerovnost pro argumenty logaritmu $(x-4) > 1$ neboli $x > 5$. Podmínka vyhovuje definičnímu oboru logaritmu a tak je řesením interval $(5, \infty)$.

Rozklad DDT

Pro zajímavost si uvádíme příklad ilustrující, jak se dají exponenciální a logaritmické funkce použít v praxi.

Příklad 4.2.4. DDT (Dichlordifenyltrichlorethan), pro člověka velice škodlivá látka, se dostává potravinovým řetězcem do mléka a dalších potravin. Její koncentrace ve výši $5.10^{-6}\%$ je v současné době ještě tolerována. Do budoucna je však požadováno snížit koncentraci na $2.10^{-6}\%$. Používání DDT je u nás zakázáno, ovšem chemický rozklad probíhá velice zvolna. Poločas rozkladu (tj. doba, za kterou se látka rozloží na polovinu původního množství) je 30 let. Za jak dlouho se koncentrace $5.10^{-6}\%$ sníží na koncentraci $2.10^{-6}\%$.

***Řešení:* 4.2.4.** Snadno zjistíme, že za 30 let se sníží koncentrace na polovinu, to je $2,5.10^{-6}\%$. Za dalších za 30 let se sníží opět na polovinu, to je $1,25.10^{-6}\%$. Je jasné, že koncentrace $2.10^{-6}\%$ dosáhneme někde v rozmezí 30 až 60 let od začátku rozkladu.

Pro přesný výpočet potřebujeme znát vztah pro rozklad látky (jedná se o obdobný vztah jako vztah pro přeměnu radioaktivní látky).

$$c = c_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

kde c je hodnota koncentrace v čase t, c_0 je počáteční koncentrace a T je poločas rozkladu látky. Dosadíme do vzorce $2.10^{-6} = 5.10^{-6} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$. Upravíme na $0,4 = 0,5^{\frac{t}{30}}$ a celou rovnici logaritmujeme například přirozeným logaritmem $\ln 0,4 = \ln 0,5^{\frac{t}{30}}$. Využije vlastností logaritmů $\ln 0,4 = \frac{t}{30} . \ln 0,5$. Pro čas dostáváme rovnici $t = 30 . \frac{\ln 0,4}{\ln 0,5}$ a je to přibližně $t = 40$ let. Původní koncentrace $5.10^{-6}\%$ sníží na koncentraci $2.10^{-6}\%$ za přibližně 40 let.