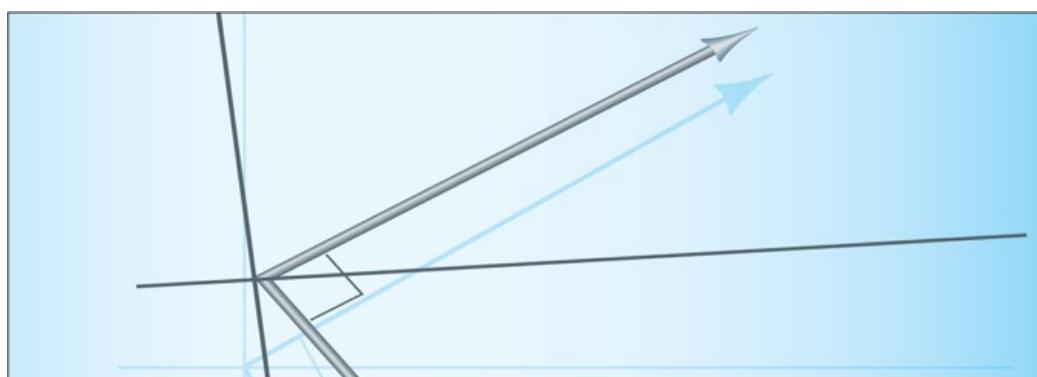


Chapitre 5 Analyse sinusoïdale en régime permanent



L'étude de ce chapitre vous permettra de :

- Identifier la fréquence, la fréquence angulaire, la valeur de crête, la valeur efficace et la phase d'un signal
- sinusoïdal. Déterminer la valeur efficace (rms) de tout courant ou tension périodique.
- Résoudre les problèmes de circuits à courant alternatif en régime permanent, en utilisant des phaseurs et des impédances complexes. Calculer la puissance des circuits à courant alternatif en régime permanent.
- Trouver des circuits équivalents de Thévenin et de Norton. Déterminer les impédances de charge pour un transfert de puissance maximal. Discuter des avantages de la distribution d'énergie triphasée. Résoudre les problèmes de circuits triphasés équilibrés.
- Utilisez MATLAB pour faciliter les calculs de circuits alternatifs.

Introduction à ce chapitre :

Les circuits à sources sinusoïdales ont de nombreuses applications importantes. Par exemple, l'énergie électrique est distribuée aux résidences et aux entreprises par des courants et des tensions sinusoïdales. De plus, les signaux sinusoïdaux ont de nombreuses utilisations dans les communications radio. Enfin, une branche des mathématiques connue sous le nom d'analyse de Fourier montre que tous les signaux d'intérêt pratique sont composés de composantes sinusoïdales. Ainsi, l'étude des circuits à sources sinusoïdales est un thème central en génie électrique.

Dans Chapitre 4, nous avons vu que la réponse d'un réseau comporte deux parties : la réponse forcée et la réponse naturelle. Dans la plupart des circuits, la réponse naturelle décroît rapidement jusqu'à zéro. La réponse forcée des sources sinusoïdales persiste indéfiniment et est donc appelée réponse en régime permanent. Étant donné que la réponse naturelle décroît rapidement, la réponse en régime permanent est souvent du plus haut intérêt. Dans ce chapitre, nous apprenons des méthodes efficaces pour trouver les réponses en régime permanent des sources sinusoïdales.

Nous étudions également les circuits triphasés, qui sont utilisés dans les systèmes de distribution d'énergie électrique. La plupart des ingénieurs qui travaillent dans des environnements industriels doivent comprendre la distribution d'énergie triphasée.

5.1 Courants et tensions sinusoïdaux

Une tension sinusoïdale est représentée dans [Figure 5.1](#) et est donné par

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (5.1)$$

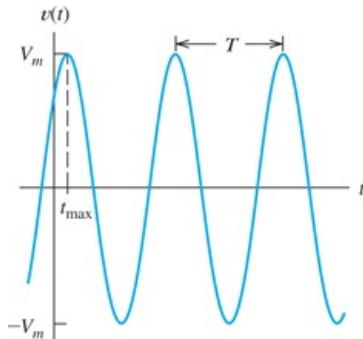


Figure 5.1

Une forme d'onde de tension sinusoïdale donnée par $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$. Note: En supposant que θ est dans degrés, nous avons $t_{\max} = -\frac{\theta}{\omega}$. Pour la forme d'onde affichée, θ est -45° .

où V_m est la **valeur maximale** de la tension, ω est la **fréquence angulaire** en radians par seconde, et θ est le **angle de phase**.

Les signaux sinusoïdaux sont périodiques, répétant le même modèle de valeurs à chaque fois. **période** T . Parce que la fonction cosinus (ou sinus) complète un cycle lorsque l'angle augmente de 2π radians, on obtient

$$\omega T = 2\pi \quad (5.2)$$

Le **fréquence** d'un signal périodique est le nombre de cycles effectués en une seconde. Ainsi, on obtient

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.3)$$

Nous nous référons à ω comme fréquence angulaire avec des unités de radians par seconde et/ou simplement comme fréquence avec des unités de hertz (Hz).

Les unités de fréquence sont les hertz (Hz). (En fait, les unités physiques de hertz sont équivalentes à l'inverse des secondes.) [Équation 5.2](#) pour la fréquence angulaire, nous avons

$$\omega = 2\pi f \quad (5.4)$$

En utilisant [Équation 5.3](#) remplacer T , nous constatons que

$$\omega = 2\pi f \quad (5.5)$$

Tout au long de notre discussion, l'argument de la fonction cosinus (ou sinus) est de la forme

$$\omega t + \theta$$

Les ingénieurs électriques écrivent souvent l'argument d'une sinusoïde en unités mixtes : ω est en radians et l'angle de phase θ est en degrés.

Nous supposons que la fréquence angulaire ω pour unité le radian par seconde (rad/s). Cependant, nous donnons parfois l'angle de phase θ en degrés. Alors, l'argument a des unités mixtes. Si nous voulions évaluer parce que $(\omega t + \theta)$ pour une valeur particulière du temps, nous devrions convertir θ en radians avant d'ajouter les termes de l'argument. En général, il est plus facile de visualiser un angle exprimé en degrés, et les unités mixtes ne posent pas de problème.

Pour des raisons d'uniformité, nous exprimons les fonctions sinusoïdales en utilisant la fonction cosinus plutôt que la fonction sinus. Les fonctions sont liées par l'identité

$$\text{péché}(j) = \cos(j - 90^\circ) \quad (5.6)$$

Par exemple, lorsque nous voulons trouver l'angle de phase de

$$v_x(t) = 10 \sin(200t + 30^\circ)$$

nous l'écrivons d'abord comme

$$\begin{aligned} v_x(t) &= 10 \cos(200t + 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 10 \cos(200t - 60^\circ) \end{aligned}$$

Ainsi, nous affirmons que l'angle de phase de $v_x(t)$ est -60° .

Valeurs quadratiques moyennes

Envisagez d'appliquer une tension périodique $v(t)$ avec période T à une résistance R . La puissance délivrée à la résistance est donnée par

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (5.7)$$

De plus, l'énergie délivrée en une période est donnée par

$$E_T = \int_0^T p(t) dt \quad (5.8)$$

La puissance moyenne P_{moyenne} délivrée à la résistance est l'énergie délivrée en un cycle divisée par la période. Ainsi,

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (5.9)$$

En utilisant [Équation 5.7](#) pour remplacer par [Équation 5.9](#), nous obtenons

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (5.10)$$

Cela peut être réorganisé comme

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}{R}^2 \quad (5.11)$$

Maintenant, nous définissons la **racine carrée moyenne** (valeur efficace (rms) de la tension périodique $v(t)$) comme

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (5.12)$$

En utilisant cette équation pour remplacer dans [Équation 5.11](#), nous obtenons

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{V_{\text{RMS}}^2}{R} \quad (5.13)$$

Ainsi, si la valeur efficace d'une tension périodique est connue, il est relativement facile de calculer la puissance moyenne que la tension peut délivrer à une résistance. La valeur efficace est également appelée **valeur effective**.

Les calculs de puissance sont facilités par l'utilisation de valeurs efficaces pour la tension ou le courant.

De même pour un courant périodique $i(t)$, nous définissons la valeur rms comme

$$I_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (5.14)$$

et la puissance moyenne délivrée si $i(t)$ traverse une résistance est donnée par

$$P_{\text{moyenne}} = I_{\text{RMS}}^2 R \quad (5.15)$$

Valeur RMS d'une sinusoïde

Considérons une tension sinusoïdale donnée par

$$V(t) = V_m \text{ parce que } (\omega t + \theta) \quad (5.16)$$

Pour trouver la valeur efficace, nous substituons dans [Équation 5.12](#)  , ce qui donne

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m \text{ parce que } 2(\omega t + \theta) dt} \quad (5.17)$$

Ensuite, nous utilisons l'identité trigonométrique

$$\text{parce que } 2(j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2j) \quad (5.18)$$

écrire [Équation 5.17](#)  comme

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V_m}{2T} \int_0^T 1 + \cos(2\omega t + 2\theta) dt} \quad (5.19)$$

En intégrant, nous obtenons

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V_m}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\theta) \right]_0^T} \quad (5.20)$$

En évaluant, nous avons

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V_m}{2T} \left[T + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\theta) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\theta) \right]} \quad (5.21)$$

Se référant à [Équation 5.2](#)  , nous voyons que $\omega T = 2\pi$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\theta) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\theta) &= \frac{1}{2\omega} \sin(4\pi + 2\theta) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\theta) \\ &= \frac{1}{2\omega} \sin(2\theta) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, [Équation 5.21](#)  réduit à

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V_m}{2}} \quad (5.22)$$

C'est un résultat utile que nous utiliserons de nombreuses fois dans le traitement des sinusoïdes.

En général, lorsqu'on parle de sinusoïdes, on donne la valeur efficace plutôt que la valeur de crête. Par exemple, le courant alternatif dans le câblage résidentiel est distribué sous forme de sinusoïde 60 Hz 115 V efficace (aux États-Unis).

La plupart des gens en sont conscients, mais probablement peu savent que 115 V est la valeur efficace et que la valeur de crête est $V_m = V_{\text{RMS}} \times \sqrt{2} = 115 \times \sqrt{2} \approx 163$ V. En fait, 115 V est la tension nominale de distribution résidentielle. (Elle peut varier d'environ 105 à 130 V.)

La valeur efficace d'une sinusoïde est la valeur de crête divisée par la racine carrée de deux. Cela n'est pas vrai pour d'autres formes d'ondes périodiques telles que les ondes carrées ou triangulaires.

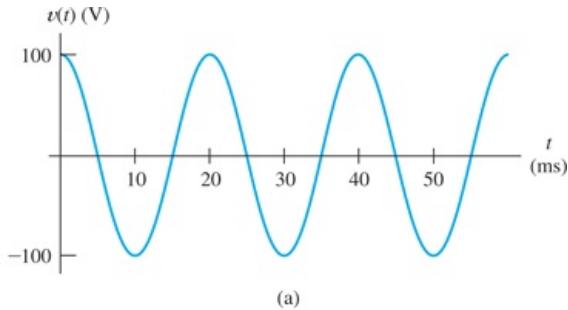
Gardez à l'esprit que $V_{\text{RMS}} = V_m / \sqrt{2}$ s'applique aux sinusoïdes. Pour trouver la valeur efficace d'autres formes d'onde périodiques, il faudrait employer la définition donnée par [Équation 5.12](#) .

Exemple 5.1 Puissance délivrée à une résistance par une source sinusoïdale

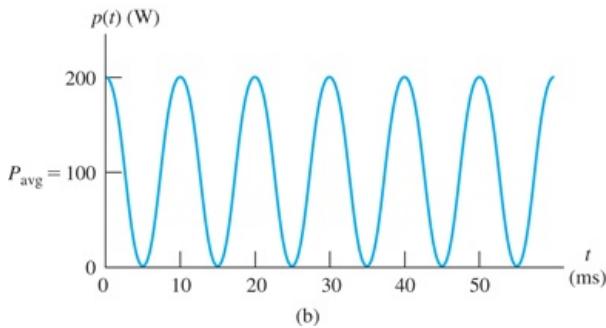
Supposons qu'une tension donnée par $v(t) = 100 \cos(100\pi t)$ V est appliquée à un $50 - \Omega$ résistance. Esquissez $v(t)$ à l'échelle en fonction du temps. Trouvez la valeur efficace de la tension et la puissance moyenne délivrée à la résistance. Trouvez la puissance en fonction du temps et dessinez à l'échelle.

Solution

Par comparaison de l'expression donnée pour $v(t)$ avec [Équation 5.1](#), nous voyons que $\omega = 100\pi$. En utilisant [Équation 5.5](#), nous constatons que la fréquence est $f = \omega/2\pi = 50$ Hz. Ensuite, la période est $T = 1/f = 20$ ms. Un complot de $v(t)$ en fonction du temps est affiché dans [Figure 5.2\(a\)](#).



(a)



(b)

Figure 5.2

Tension et puissance en fonction du temps pour [Exemple 5.1](#).

La valeur de crête de la tension est $V_m = 100$ V. Ainsi, la valeur efficace est $V_{RMS} = V_m/\sqrt{2}$. Ensuite, la puissance moyenne est

$$P_{moyenne} = \frac{V_{RMS}^2}{R} = \frac{(70.71)^2}{50} = 100 \text{ W}$$

La puissance en fonction du temps est donnée par

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{100^2 \text{ par } \cos^2(100\pi t)}{50} = 200 \cos^2(100\pi t) \text{ W}$$

Un complot de $p(t)$ en fonction du temps est affiché dans [Figure 5.2\(b\)](#). Notez que la puissance fluctue de 0 à 200 W. Cependant, la puissance moyenne est de 100 W, comme nous l'avons constaté en utilisant la valeur efficace.

Pour un courant sinusoïdal circulant dans une résistance, la puissance fluctue périodiquement de zéro à deux fois la valeur moyenne.

Valeurs RMS des tensions ou des courants non sinusoïdaux

Parfois, nous devons déterminer les valeurs efficaces de courants ou de tensions périodiques qui ne sont pas sinusoïdaux. Nous pouvons y parvenir en appliquant la définition donnée par **Équation 5.12** ou **5.14** directement.

Exemple 5.2 Valeur RMS d'une tension triangulaire

La tension indiquée dans **Figure 5.3(a)** est connue sous le nom de forme d'onde triangulaire. Déterminez sa valeur efficace.

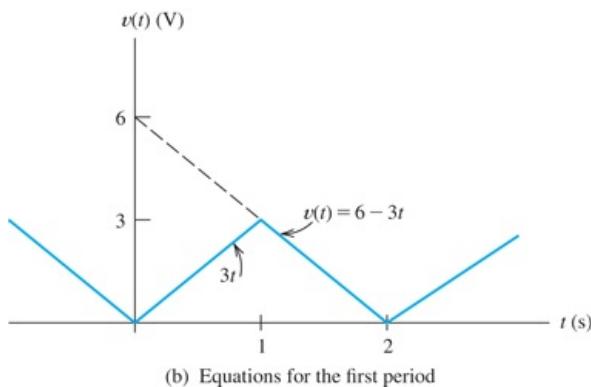
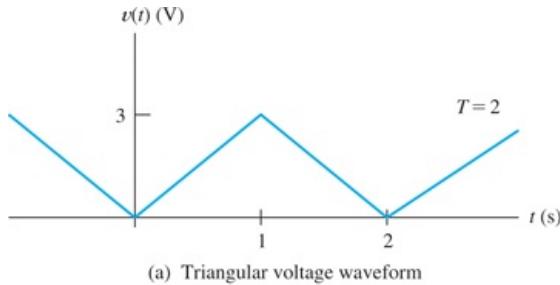


Figure 5.3

Forme d'onde de tension triangulaire de **Exemple 5.2**.

Solution

Tout d'abord, nous devons déterminer les équations décrivant la forme d'onde entre $t=0$ et $t=2$ s. Comme illustré dans **Figure 5.3(b)**, les équations de la première période de l'onde triangulaire sont

$$v(t) = \begin{cases} 3t & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ 6 - 3t & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Équation 5.12 donne la valeur efficace de la tension.

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

Diviser l'intervalle en deux parties et le remplacer par $v(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} V_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^1 9t^2 dt + \int_1^2 (6 - 3t)^2 dt} \\ V_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{2} [3t^3]_{t=0}^{t=1} + (36t^2 - 36t + 9) \Big|_{t=1}^{t=2}} \end{aligned}$$

En évaluant, nous trouvons

$$V_{RMS} = \sqrt{3 + (72 - 36 - 72 + 18 + 24 - 3)} = \sqrt{3} V$$

Les intégrales de cet exemple sont faciles à réaliser manuellement. Cependant, lorsque les intégrales sont plus difficiles, nous pouvons parfois obtenir des réponses en utilisant la boîte à outils symbolique de MATLAB. Voici les outils MATLAB

commandes nécessaires pour effectuer les intégrales dans cet exemple :

```
>> sym Vrms t  
>> Vrms = sqrt((1/2)*(int(9*t^2,t,0,1) + int((6-3*t)^2,t,1,2))) Valeur efficace =  
3^(1/2)
```

Exercice 5.1

Supposons qu'une tension sinusoïdale soit donnée par

$$v(t) = 150 \cos(200\pi t - 30^\circ) \text{ V}$$

- Trouvez la fréquence angulaire, la fréquence en hertz, la période, la valeur de crête et la valeur efficace. Trouvez également la première valeur du temps t_{\max} après $t=0$ tel que $v(t)$ atteint son pic positif.
- Si cette tension est appliquée à un 50Ω résistance, calculer la puissance moyenne délivrée.
- Esquissez $v(t)$ à l'échelle en fonction du temps.

Répondre

un. $\omega = 200\pi \approx 628 \text{ rad/s}$, $f = 100 \text{ Hz}$, $T = 10 \text{ ms}$, $V_m = 150 \text{ V}$, $V_{\text{RMS}} = 106,1 \text{ V}$, $t_{\max} = 30^\circ \times T = 0,833 \frac{\text{ms}}{360^\circ}$

b. $P_{\text{moyenne}} = 225 \text{ W}$;

c. une parcelle de $v(t)$ en fonction du temps est affiché dans [Figure 5.4](#).

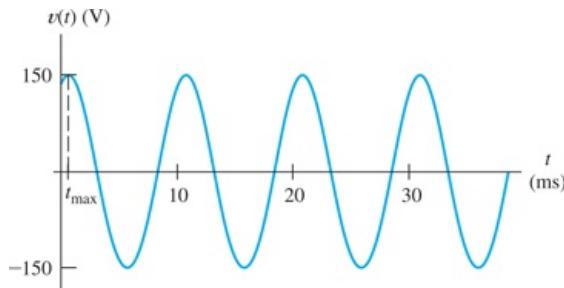


Figure 5.4

Réponse pour [Exercice 5.1\(c\)](#).

Exercice 5.2

Exprimer $v(t) = 100 \sin(300\pi t + 60^\circ) \text{ V}$ comme une fonction cosinus.

Répondre

$$v(t) = 100 \cos(300\pi t - 30^\circ) \text{ V}$$

Exercice 5.3

Supposons que la tension de ligne alternative alimentant un ordinateur ait une valeur efficace de 110 V et une fréquence de 60 Hz, et que la tension de crête soit atteinte à $t=5 \text{ ms}$. Écrivez une expression pour cette tension alternative en fonction du temps.

Répondre

$$v(t) = 155,6 \cos(377t - 108^\circ) \text{ V}$$

5.2 Phaseurs

Dans les sections suivantes, nous verrons que l'analyse sinusoïdale en régime permanent est grandement facilitée si les courants et les tensions sont représentés sous forme de vecteurs (appelés **phaseurs**) dans le plan des nombres complexes. En préparation de ce matériel, vous souhaiterez peut-être étudier la révision de l'arithmétique des nombres complexes dans [Annexe A](#).



Nous commençons par une étude des méthodes pratiques pour ajouter (ou soustraire) des formes d'onde sinusoïdales. Nous devons souvent le faire en appliquant la loi de tension de Kirchhoff (KVL) ou la loi de courant de Kirchhoff (KCL) aux circuits à courant alternatif. Par exemple, en appliquant la loi de tension de Kirchhoff à un réseau avec des tensions sinusoïdales, nous pourrions obtenir l'expression

$$v(t) = 10 \cos(\omega t) + 5 \sin(\omega t + 60^\circ) + 5 \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (5.23)$$

Pour obtenir la valeur maximale de $v(t)$ et son angle de phase, nous devons mettre [Équation 5.23](#) dans la forme

$$v(t) = V_m \text{parce que } (\omega t + \theta) \quad (5.24)$$

Cela pourrait être accompli par substitution répétée, en utilisant des identités trigonométriques standard. Cependant, cette méthode est trop fastidieuse pour un travail de routine. Au lieu de cela, nous verrons que nous pouvons représenter chaque terme sur le côté droit de [Équation 5.23](#) par un vecteur dans le plan des nombres complexes appelé **phaseur**. Alors, nous pouvons ajouter les phasors avec une relative facilité et convertir la somme dans la forme souhaitée.

Définition de phaseur

Pour une tension sinusoïdale de la forme

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$

nous définissons le phasor comme

$$V_1 = V_1 \angle \theta_1$$

Ainsi, le phasor d'une sinusoïde est un nombre complexe dont la grandeur est égale à la valeur de crête et dont l'angle de phase est le même que celui de la sinusoïde. Nous utilisons des lettres en gras pour les phasors. (En fait, les ingénieurs ne sont pas cohérents dans le choix des grandeurs des phasors. Dans ce chapitre et dans **Chapitre 6**, nous prenons le **valeurs de pointe** pour les grandeurs des phasors, ce qui est la coutume dominante dans les cours d'analyse de circuits pour les ingénieurs électriques. Cependant, plus tard dans **Chapitres 14** et **15**, nous prendrons les valeurs rms pour le (Nous utiliserons les grandeurs des phaseurs comme le font habituellement les ingénieurs des systèmes électriques. Nous prendrons soin d'étiqueter les phaseurs rms comme tels lorsque nous les rencontrerons. Dans ce livre, si les phaseurs ne sont pas étiquetés comme rms, vous pouvez supposer qu'il s'agit de valeurs de crête.)

Les phaseurs sont des nombres complexes qui représentent des tensions ou des courants sinusoïdaux. La grandeur d'un phaseur est égale à la valeur de crête et l'angle est égal à la phase de la sinusoïde (écrite sous forme de cosinus).

Si la sinusoïde est de la forme

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

nous convertissons d'abord en une fonction cosinus en utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos(j - 90^\circ) = \cos(j - 90^\circ) \quad (5.25)$$

Ainsi, nous avons

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \theta_2 - 90^\circ)$$

et le phaseur est

$$V_2 = V_2 \angle \theta_2 - 90^\circ$$

Les phaseurs sont obtenus pour les courants sinusoïdaux de manière similaire. Ainsi, pour les courants

$$j e_1(t) = j e_1 \cos(\omega t + \theta_1)$$

et

$$j e_2(t) = j e_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

les phaseurs sont

$$j e_1 = j e_1 \angle \theta_1$$

et

$$j e_2 = j e_2 \angle \theta_2 - 90^\circ$$

respectivement.

Ajout de sinusoïdes à l'aide de phaseurs

Maintenant, nous illustrons comment nous pouvons utiliser des phasors pour combiner les termes du côté droit de [Équation 5.23](#)

Dans cette discussion, nous procérons par petites étapes logiques pour illustrer clairement pourquoi les sinusoïdes peuvent être ajoutés en ajoutant leurs phasors. Plus tard, nous rationalisons la procédure pour le travail de routine.

Notre première étape dans la combinaison des termes dans [Équation 5.23](#) consiste à écrire toutes les sinusoïdes sous forme de fonctions cosinus

en utilisant [Équation 5.25](#). Ainsi, [Équation 5.23](#) peut être écrit comme

$$v(t) = 10 \cos(\omega t) + 5 \cos(\omega t + 60^\circ - 90^\circ) + 5 \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (5.26)$$

$$v(t) = 10 \cos(\omega t) + 5 \cos(\omega t - 30^\circ) + 5 \cos(\omega t + 90^\circ) \quad (5.27)$$

En se référant à la formule d'Euler ([Équation A.8](#)) dans [Annexe A](#), on voit qu'on peut écrire

$$\text{parce que } (\theta) = \text{Ré} e^{j\theta} = \text{Ré} \cos(\theta) + j\sin(\theta) \quad (5.28)$$

où la notation $\text{Re}()$ signifie que l'on ne conserve que la partie réelle de la quantité entre parenthèses.

Ainsi, on peut réécrire [Équation 5.27](#) comme

$$v(t) = 10 \text{ Ré} e^{j\omega t} + 5 \text{ Ré} e^{j(\omega t - 30^\circ)} + 5 \text{ Ré} e^{j(\omega t + 90^\circ)} \quad (5.29)$$

Quand on multiplie un nombre complexe z par un nombre réel UN , les parties réelles et imaginaires de z sont multipliées par UN . Ainsi, [Équation 5.29](#) devient

$$v(t) = \text{Ré} 10 e^{j\omega t} + \text{Ré} 5 e^{j(\omega t - 30^\circ)} + \text{Ré} 5 e^{j(\omega t + 90^\circ)} \quad (5.30)$$

Ensuite, nous pouvons écrire

$$v(t) = \text{Ré} 10 e^{j\omega t} + 5 e^{j(\omega t - 30^\circ)} + 5 e^{j(\omega t + 90^\circ)} \quad (5.31)$$

car la partie réelle de la somme de plusieurs quantités complexes est égale à la somme des parties réelles. Si l'on exclut le terme commun $e^{j\omega t}$, [Équation 5.31](#) devient

$$v(t) = \text{Ré} 10 + 5 e^{-j30^\circ} + 5 e^{j90^\circ} \quad e^{j\omega t} \quad (5.32)$$

En mettant les nombres complexes sous forme polaire, nous avons

$$v(t) = \text{Ré} 10 \angle 0^\circ + 5 \angle -30^\circ + 5 \angle 90^\circ \quad e^{j\omega t} \quad (5.33)$$

Maintenant, nous pouvons combiner les nombres complexes comme

$$\begin{aligned} 10 \angle 0^\circ + 5 \angle -30^\circ + 5 \angle 90^\circ &= 10 + 4,33 - j2,50 + j5 \\ &= 14,33 + j2,5 \\ &= 14,54 \angle 9,90^\circ \\ &= 14,54 e^{j9,90^\circ} \end{aligned} \quad (5.34)$$

En utilisant ce résultat dans [Équation 5.33](#), nous avons

$$v(t) = \text{Ré} 14,54 e^{j9,90^\circ} \quad e^{j\omega t}$$

qui peut être écrit comme

$$v(t) = \text{R\'e } 14,54 e^{j(\omega t + 9,90^\circ)} \quad (5.35)$$

Maintenant, en utilisant **Équation 5.28** , nous pouvons écrire ceci comme

$$v(t) = 14,54 \cos(\omega t + 9,90^\circ) \quad (5.36)$$

Ainsi, nous avons mis l'expression originale pour $v(t)$ dans la forme souhaitée. Les termes sur le côté gauche de **Équation 5.34**  sont les phasors des termes du côté droit de l'expression originale pour $v(t)$.

Notez que la partie essentielle du travail nécessaire pour combiner les sinusoïdes est d'ajouter les phasors.

Procédure simplifiée pour l'ajout de sinusoïdes

À partir de maintenant, pour ajouter des sinusoïdes, nous allons d'abord écrire le phasor de chaque terme de la somme, additionner les phasors en utilisant l'arithmétique des nombres complexes, puis écrire l'expression simplifiée de la somme.

Pour ajouter des sinusoïdes, nous trouvons le phasor pour chaque terme, additionnons les phasors en utilisant l'arithmétique des nombres complexes, exprimons la somme sous forme polaire, puis écrivons la fonction temporelle sinusoïdale correspondante.

Exemple 5.3 Utilisation de phaseurs pour ajouter des sinusoïdes

Supposons que

$$v_1(t) = 20 \cos \omega t - 45^\circ$$

$$v_2(t) = 10 \sin(\omega t + 60^\circ)$$

Réduire la somme $v_m(t) = v_1(t) + v_2(t)$ à un seul terme.

Lors de l'utilisation de phasors pour ajouter des sinusoïdes, tous les termes doivent avoir la même fréquence.

Solution

Les phaseurs sont

Étape 1 : Déterminez le phasor pour chaque terme.

$$V_1 = 20 \angle -45^\circ$$

$$V_2 = 10 \angle +30^\circ$$

Notez que nous avons soustrait 90° pour trouver l'angle de phase pour V_2 parce que $v_2(t)$ est une fonction sinus plutôt qu'une fonction cosinus.

Ensuite, nous utilisons l'arithmétique des nombres complexes pour additionner les phasors et convertir la somme en forme polaire :

$$\begin{aligned}
 V_m &= V_1 + V_2 \\
 &= 20 \angle -45^\circ + 10 \angle +30^\circ \\
 &= 14,14 - j14,14 + 8,660 - j5 \\
 &= 22,80 - j19,14 = \\
 &29,77 \angle -40,01^\circ
 \end{aligned}$$

Étape 2 : Utilisez une arithmétique complexe pour additionner les phasors.

Maintenant, nous écrivons la fonction temporelle correspondant au phasor V_m .

Étape 3 : Convertissez la somme en forme polaire.

Étape 4 : Écrivez le résultat sous forme de fonction temporelle.

$$v_m(t) = 29,77 \cos(\omega t - 40,01^\circ)$$

Exercice 5.4

Réduisez les expressions suivantes en utilisant des phaseurs :

$$\begin{aligned}v_1(t) &= 10 \cos(\omega t) + 10 && \text{péché}(\omega t) \\j e_1(t) &= 10 \cos(\omega t + 30^\circ) + 5 && \text{péché}(\omega t + 30^\circ) \\j e_2(t) &= 20 \sin(\omega t + 90^\circ) + 15 && \text{parce que}(\omega t - 60^\circ)\end{aligned}$$

Répondre

$$\begin{aligned}v_1(t) &= 14,14 && \text{parce que}(\omega t - 45^\circ) \\j e_1(t) &= 11,18 && \text{parce que}(\omega t + 3,44^\circ) \\j e_2(t) &= 30,4 && \cos(\omega t - 25,3^\circ)\end{aligned}$$

Les phasors comme vecteurs rotatifs

Considérons une tension sinusoïdale donnée par

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

En développant le concept de phasor, nous écrivons

$$v(t) = \operatorname{Re} V_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

La quantité complexe entre parenthèses est

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \angle \omega t + \theta$$

Cela peut être visualisé comme un vecteur de longueur V_m qui tourne dans le plan complexe dans le sens inverse des aiguilles d'une montre avec une vitesse angulaire de ω rad/s. De plus, la tension $v(t)$ est la partie réelle du vecteur, qui est illustrée dans **Figure 5.5**. Lorsque le vecteur tourne, sa projection sur l'axe réel trace la tension en fonction de temps. Le phasor est simplement un « instantané » de ce vecteur rotatif à $t=0$.

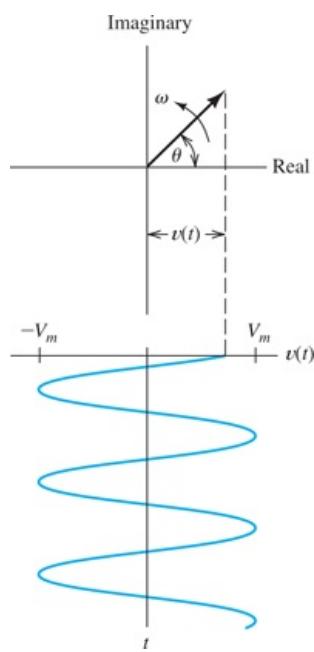


Figure 5.5

Une sinusoïde peut être représentée comme la partie réelle d'un vecteur tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre dans le plan complexe.

Les sinusoïdes peuvent être visualisées comme la projection sur l'axe réel de vecteurs tournant dans le plan complexe. Le phasor d'une sinusoïde est un instantané du vecteur rotatif correspondant à $t=0$.

Relations entre les phases

Nous verrons que les relations de phase entre les courants et les tensions sont souvent importantes. Considérons les tensions

$$v_1(t) = 3 \cos(\omega t + 40^\circ)$$

et

Pour déterminer les relations de phase à partir d'un diagramme de phase, considérez que les phasors tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ensuite, lorsque vous vous trouvez à un point fixe, si V_1 arrive en premier suivi de V_2 après une rotation de θ , nous disons que V_1 conduit V_2 par θ . Alternativement, nous pourrions dire que V_2 décalage V_1 par θ . (Habituellement, nous prenons θ comme le plus petit angle entre les deux phasors.)

$$v_2(t) = 4 \cos(\omega t - 20^\circ)$$

Les phaseurs correspondants sont

$$V_1 = 3 \angle 40^\circ$$

et

$$V_2 = 4 \angle -20^\circ$$

Le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.6](#). Notez que l'angle entre V_1 et V_2 est de 60° . Parce que les vecteurs complexes tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on dit que V_1 conduit V_2 de 60° . (Une autre façon d'énoncer la relation de phase est d'énoncer que V_2 décalage V_1 de 60° .)

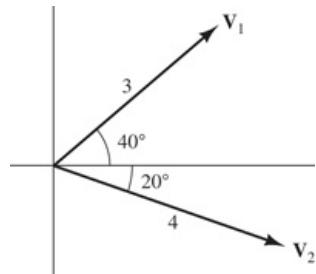


Figure 5.6

Parce que les vecteurs tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, V_1 conduit V_2 de 60° (ou, de manière équivalente, V_2 décalage V_1 de 60°).

Nous avons vu que les tensions en fonction du temps peuvent être obtenues en traçant la partie réelle des vecteurs rotatifs. Les tracés de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ contre ωt sont affichés dans [Figure 5.7](#). Notez que $v_1(t)$ atteint son pic 60° plus tôt que $v_2(t)$. C'est le sens de la déclaration selon laquelle $v_1(t)$ conduit $v_2(t)$ par 60° .

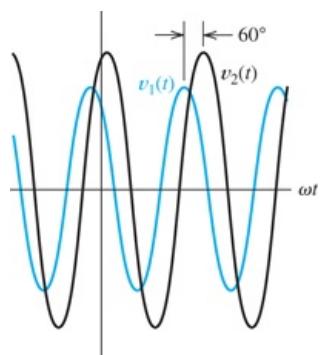


Figure 5.7

Les sommets de $v_1(t)$ se produisent 60° avant les pics de $v_2(t)$. Autrement dit, $v_1(t)$ conduit $v_2(t)$ par 60° .

Pour déterminer les relations de phase entre les sinusoïdes à partir de leurs tracés en fonction du temps, trouvez l'intervalle de temps le plus court t_p entre les pics positifs des deux formes d'onde. Ensuite, l'angle de phase est $\theta = (t_p / T) \times 360^\circ$. Si le pic de $v_1(t)$ se produit en premier, nous disons que $v_1(t)$ conduit $v_2(t)$ ou ça $v_2(t)$ décalage $v_1(t)$.

Exercice 5.5

Considérez les tensions données par

$$v_1(t) = 10 \cos(\omega t - 30^\circ)$$

$$v_2(t) = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$v_3(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

Indiquez la relation de phase entre chaque paire de tensions. *Indice:* Trouvez le phasor pour chaque tension et dessinez le diagramme de phasor.)

Répondre

v_1 décalage v_2 de 60° (ou v_2 conduit v_1 par 60°)

v_1 conduit v_3 de 15° (ou v_3 décalage v_1 de 15°)

v_2 conduit v_3 de 75° (ou v_3 décalage v_2 par 75°)

5.3 Impédances complexes

Dans cette section, nous apprenons qu'en utilisant des phasors pour représenter des tensions et des courants sinusoïdaux, nous pouvons résoudre les problèmes de circuits sinusoïdaux à l'état stationnaire avec une relative facilité par rapport aux méthodes de [Chapitre 4](#).

Mis à part le fait que nous utilisons une arithmétique complexe, l'analyse sinusoïdale en régime permanent est pratiquement la même que l'analyse des circuits résistifs, que nous avons étudiée dans [Chapitre 2](#).

Inductance

Considérons une inductance dans laquelle le courant est une sinusoïde donnée par

$$je_L(t) = jempeché(\omega t + \theta) \quad (5.37)$$

Rappelons que la tension aux bornes d'une inductance est

$$V_L(t) = L \frac{d(i_L)}{dt} \quad (5.38)$$

Substitution [Équation 5.37](#) dans [Équation 5.38](#) et en réduisant, on obtient

$$V_L(t) = \omega L I_m \angle \theta \quad (5.39)$$

Maintenant, les phasors pour le courant et la tension sont

$$je_L = jem \angle \theta - 90^\circ \quad (5.40)$$

et

$$V_L = \omega L I_m \angle \theta = V_m \angle \theta \quad (5.41)$$

Le diagramme de phase du courant et de la tension est représenté dans [Figure 5.8\(a\)](#) les formes d'onde du courant et de la tension sont représentées dans [Figure 5.8\(b\)](#). Notez que le courant est en retard sur la tension par 90° pour une inductance pure.

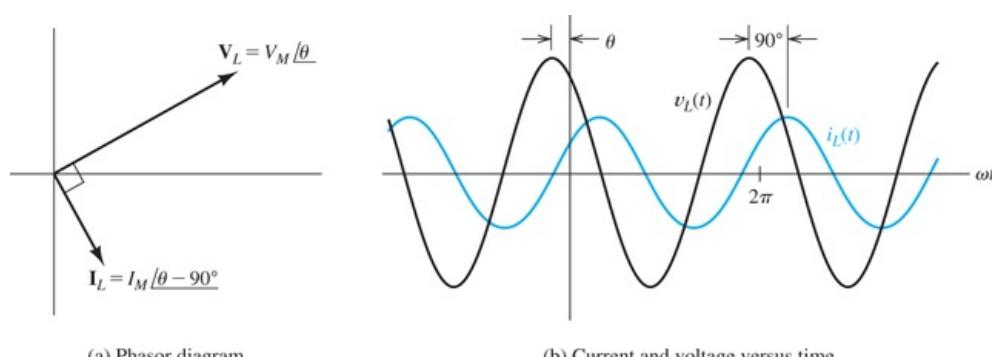


Figure 5.8

Dans une inductance pure, le courant est en retard de 90° sur la tension.

Le courant est en retard de 90° sur la tension pour une inductance pure.

[Équation 5.41](#) peut être écrit sous la forme

$$V_L = \omega L \angle 90^\circ \times j \text{em} \angle \theta - 90^\circ \quad (5.42)$$

En utilisant **Équation 5.40**  remplacer par **Équation 5.42** , nous constatons que

$$V_L = \omega L \angle 90^\circ \times j e_L \quad (5.43)$$

qui peut également s'écrire comme

$$V_L = j \omega L \times j e_L \quad (5.44)$$

Nous faisons référence au terme $j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$ comme la **impédance** de l'inductance et la désigner comme Z_L . Ainsi, nous avoir

$$Z_L = j \omega L = \omega L \angle 90^\circ \quad (5.45)$$

et

$$V_L = Z_L j e_L \quad (5.46)$$

Ainsi, la tension du phasor est égale à l'impédance multipliée par le courant du phasor. C'est la loi d'Ohm sous forme de phasor. Cependant, pour une inductance, l'impédance est un nombre imaginaire, alors que la résistance est un nombre réel. (Les impédances purement imaginaires sont également appelées **réactances**.)

Équation 5.46  montre que la tension et le courant du phasor pour une inductance sont liés d'une manière analogue à la loi d'Ohm.

Capacitance

De la même manière pour une capacité, nous pouvons montrer que si le courant et la tension sont sinusoïdaux, les phasors sont liés par

$$V_C = Z_C j e_C \quad (5.47)$$

dans lequel l'impédance de la capacité est

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C j \omega C} \angle -90^\circ \quad (5.48)$$

Notez que l'impédance d'une capacité est également un nombre purement imaginaire.

Supposons que la tension du phasor soit

$$V_C = V_m \angle \theta$$

Ensuite, le courant du phaseur est

$$\begin{aligned} j e_C &= \frac{V_C}{Z_C} = \frac{V_m \angle \theta}{(1/\omega C) \angle -90^\circ} = \omega C V_m \angle \theta + 90^\circ \\ &= j e_m \angle \theta + 90^\circ \end{aligned}$$

où $e_m = \omega C V_m$. Le diagramme de phase pour le courant et la tension dans une capacité pure est représenté dans [Figure 5.9\(a\)](#). Les tracés correspondants du courant et de la tension en fonction du temps sont présentés dans [Figure 5.9\(b\)](#).

Notez que le courant est en avance de 90° sur la tension. (D'autre part, le courant est en retard sur la tension pour une inductance. C'est facile à retenir si vous savez **ÉLIE GLACE** homme. La lettre *E* est parfois utilisé pour désigner *force électromotrice*, qui est un autre terme pour la tension, *L* et *C* sont utilisés respectivement pour l'inductance et la capacité, et *j* est utilisé pour le courant.)

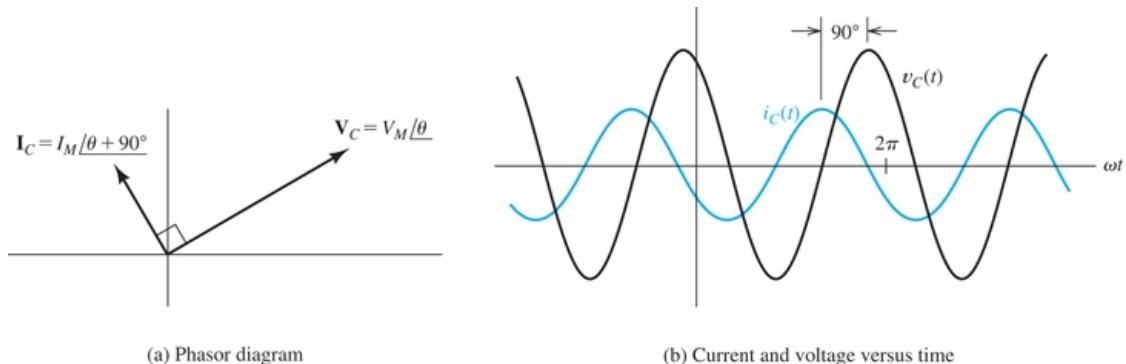


Figure 5.9

Le courant précède la tension de 90° dans une capacité pure.

Le courant devance la tension de 90° pour une capacité pure.

Résistance

Pour une résistance, les phasors sont liés par

$$V_R = R I_R \quad (5.49)$$

Étant donné que la résistance est un nombre réel, le courant et la tension sont en phase, comme illustré dans [Figure 5.10](#).

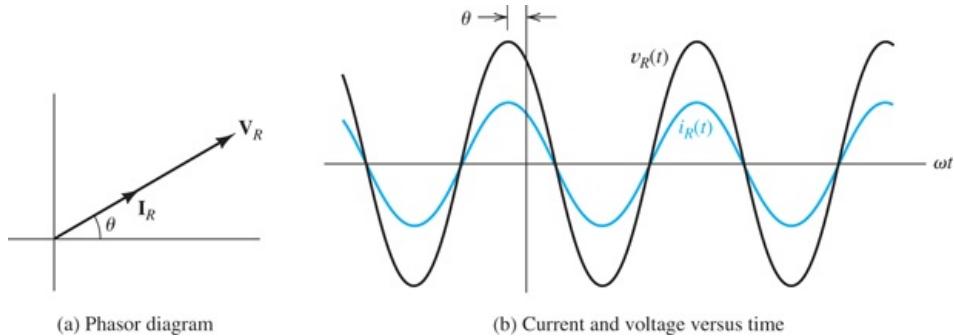


Figure 5.10

Pour une résistance pure, le courant et la tension sont en phase.

Le courant et la tension sont en phase pour une résistance.

Impédances complexes en série et en parallèle

Les impédances des inductances, des capacités et des résistances sont combinées en série et en parallèle de la même manière que les résistances. (Rappelons que nous combinons les capacités en série comme nous le faisons avec les résistances en parallèle. Cependant, la **impédance** des capacités sont combinées de la même manière que les résistances.)

Exemple 5.4 Combinaison d'impédances en série et en parallèle

Déterminer l'impédance complexe entre les bornes indiquées dans **Figure 5.11(a)** pour $\omega=1000 \text{ rad/s}$.

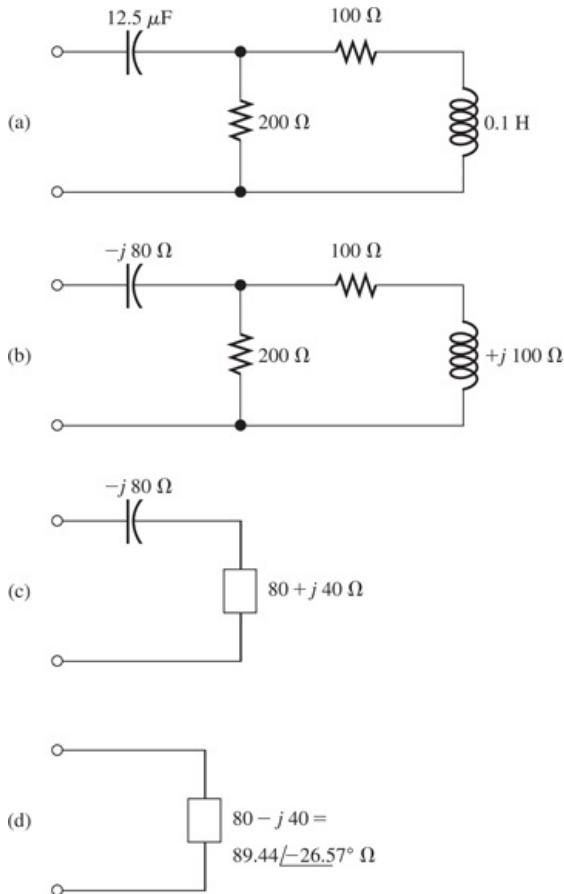


Figure 5.11
Circuit de **Exemple 5.4**.

Solution

Premièrement, l'impédance de l'inductance est $j\omega L=j100\Omega$, et l'impédance de la capacité est $-j/(\omega C) = -j80\Omega$. Ces valeurs sont affichées dans **Figure 5.11(b)**.

Ensuite, nous observons que le $200 -j0\Omega$ la résistance est en parallèle avec l'impédance série $100 +j100\Omega$. L'impédance de cette combinaison parallèle est

$$\frac{1}{1/100 + 1/(100 + j100)} = 80 + j40\Omega$$

L'équivalent résultant est montré dans **Figure 5.11(c)**. (Nous utilisons des cases rectangulaires pour représenter les impédances combinées de différents types de composants.)

Ensuite, remarquez que les impédances dans **Figure 5.11(d)** sont en série et ils sont combinés en ajoutant ce qui entraîne :

$$-j80 + 80 + j40 = 80 - j40 = 89,44 - 26,57\Omega$$

Ceci est montré dans **Figure 5.11(d)**.

Exercice 5.6

Une tension $v_L(t) = 100 \cos(200t)$ est appliquée à une inductance de 0,25 H. (Remarquez que $\omega=200$.)

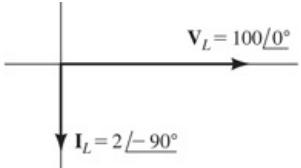
- Trouvez l'impédance de l'inductance, le courant du phasor et la tension du phasor.

- Dessinez le diagramme de phasor.

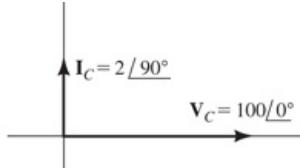
Répondre

$$\text{un. } Z_L = j50 = 50 \angle 90^\circ, j\epsilon_L = 2 \angle -90^\circ, V_L = 100 \angle 0^\circ;$$

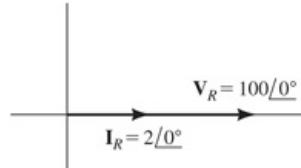
- le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.12\(a\)](#).



(a) Exercise 5.6 (0.25 H inductance)



(b) Exercise 5.7 (100 μF capacitance)



(c) Exercise 5.8 (50 Ω resistance)

Figure 5.12

Réponses pour [Exercices 5.6](#), [5.7](#), et [5.8](#). L'échelle a été élargie pour les courants comparé aux tensions afin que les phasors de courant puissent être facilement vus.

Exercice 5.7

Une tension $v_C(t) = 100 \cos(200t)$ est appliquée à un $100 \mu F$ capacitance.

- Trouvez l'impédance de la capacité, le courant du phasor et la tension du phasor.

- Dessinez le diagramme de phasor.

Répondre

$$\text{un. } Z_C = -j50 = 50 \angle -90^\circ, j\epsilon_C = 2 \angle 90^\circ, V_C = 100 \angle 0^\circ;$$

- le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.12\(b\)](#).

Exercice 5.8

Une tension $v_R(t) = 100 \cos(200t)$ est appliquée à un 50Ω résistance.

- Trouvez le phasor pour le courant et le phasor pour la tension.

- Dessinez le diagramme de phasor.

Répondre

$$\text{un. } j\epsilon_R = 2 \angle 0^\circ, V_R = 100 \angle 0^\circ;$$

- le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.12\(c\)](#).

5.4 Analyse de circuit avec des phaseurs et des impédances complexes

Les lois de Kirchhoff sous forme de phasor

Rappelons que KVL exige que la somme des tensions soit nulle pour tout chemin fermé dans un réseau électrique. Une équation KVL typique est

$$V_1(t) + V_2(t) - V_3(t) = 0 \quad (5.50)$$

Si les tensions sont sinusoïdales, elles peuvent être représentées par des phasors. Alors, **Équation 5.50** devient

$$V_1 + V_2 - V_3 = 0 \quad (5.51)$$

Ainsi, nous pouvons appliquer la KVL directement aux phasors. La somme des tensions des phasors est égale à zéro pour tout chemin fermé.

De même, la méthode KCL peut être appliquée aux courants sous forme de phaseurs. La somme des courants de phaseurs entrant dans un nœud doit être égale à la somme des courants de phaseurs sortant.

Analyse de circuit utilisant des phaseurs et des impédances

Nous avons vu que les courants et les tensions des phaseurs sont liés par des impédances complexes, et les lois de Kirchhoff s'appliquent sous forme de phaseurs. À l'exception du fait que les tensions, les courants et les impédances peuvent être complexes, les équations sont exactement les mêmes que celles des circuits résistifs.

Une procédure étape par étape pour l'analyse en régime permanent des circuits avec des sources sinusoïdales est

1. Remplacez les descriptions temporelles des sources de tension et de courant par les phasors correspondants.
(Toutes les sources doivent avoir la même fréquence.)
2. Remplacer les inductances par leurs impédances complexes $Z_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$. Remplacer les capacités par leurs impédances complexes $Z_C = 1/(j\omega C) = 1/\omega C \angle -90^\circ$. Les résistances ont des impédances égales à leurs résistances.
3. Analysez le circuit en utilisant l'une des techniques étudiées dans **Chapitre 2**, et exécuter le calculs avec arithmétique complexe.

Exemple 5.5 Analyse en régime permanent d'un circuit série

Trouvez le courant à l'état stable pour le circuit illustré dans **Figure 5.13(a)** à travers **Figure 5.13(b)**. Trouvez également la tension du phasor chaque élément et construisez un diagramme de phasor.

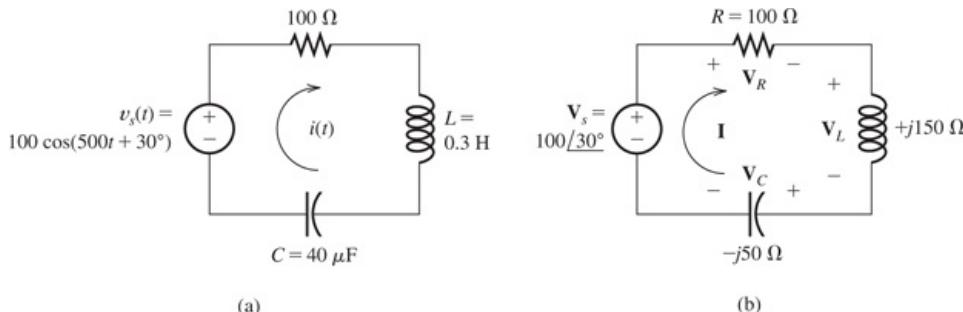


Figure 5.13
Circuit pour **Exemple 5.5**.

Solution

À partir de l'expression donnée pour la tension source $v_m(t)$, on voit que la tension de crête est de 100 V, la fréquence angulaire est $\omega=500$, et l'angle de phase est de 30° . Le phasor de la source de tension est

$$V_m = 100 \angle 30^\circ$$

Étape 1 : remplacez la description temporelle de la source de tension par le phasor correspondant.

Les impédances complexes de l'inductance et de la capacité sont

Étape 2 : Remplacez les inductances et les capacités par leurs impédances complexes.

$$Z_L = j\omega L = j500 \times 0,3 = j150\Omega$$

et

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{500 \times 40 \times 10^{-6}} = -j50\Omega$$

Le circuit transformé est représenté dans **Figure 5.13(b)**. Les trois éléments sont en série. Ainsi, nous trouvons l'impédance équivalente du circuit en additionnant les impédances des trois éléments :

Étape 3 : Utilisez une arithmétique complexe pour analyser le circuit.

$$Z_{\text{équ.}} = R + Z_L + Z_C$$

En substituant les valeurs, nous avons

$$Z_{\text{équ.}} = 100 + j150 - j50 = 100 + j100$$

En passant à la forme polaire, on obtient

$$Z_{\text{équ.}} = 141,4 \angle 45^\circ$$

Maintenant, nous pouvons trouver le courant du phasor en divisant la tension du phasor par l'impédance équivalente, ce qui donne

$$je = \frac{V_m}{Z} = \frac{100 \angle 30^\circ}{141,4 \angle 45^\circ} = 0,707 \angle -15^\circ$$

En fonction du temps, le courant est

$$je(t) = 0,707 \cos(500t - 15^\circ)$$

Ensuite, nous pouvons trouver la tension du phasor aux bornes de chaque élément en multipliant le courant du phasor par l'impédance respective :

$$\begin{aligned}
 V_R &= R \times j\omega L = 100 \times 0,707 \angle -15^\circ = 70,7 \angle -15^\circ \\
 V_L &= j\omega L \times j\omega C = \omega L \angle 90^\circ \times j\omega C = 150 \angle 90^\circ \times 0,707 \angle -15^\circ \\
 &= 106,1 \angle 75^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_C &= -j1 \frac{\omega C}{\omega C} = 1 \angle 90^\circ \times j\omega C = 50 \angle 90^\circ \times 0,707 \angle -15^\circ \\
 &= 35,4 \angle -105^\circ
 \end{aligned}$$

Le diagramme de phase pour le courant et les tensions est présenté dans [Figure 5.14](#). Notez que le courant \mathbf{I} retarde la tension source V_s de 45° . Comme prévu, la tension V_R et actuel \mathbf{I} sont en phase pour la résistance. Pour l'inductance, la tension V_L mène le courant \mathbf{I} de 90° . Pour la capacité, la tension V_C est en retard de 90° par rapport au courant.

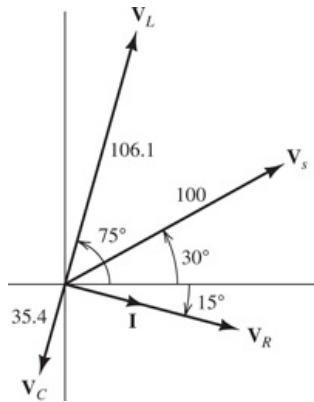


Figure 5.14

Diagramme de phase pour [Exemple 5.5](#).

Exemple 5.6 Combinaisons en série et en parallèle d'impédances complexes

Considérez le circuit illustré dans [Figure 5.15\(a\)](#). Trouver la tension $v_C(t)$ en régime permanent. Trouvez le courant phasor à travers chaque élément et construisez un diagramme phasor montrant les courants et la tension source.

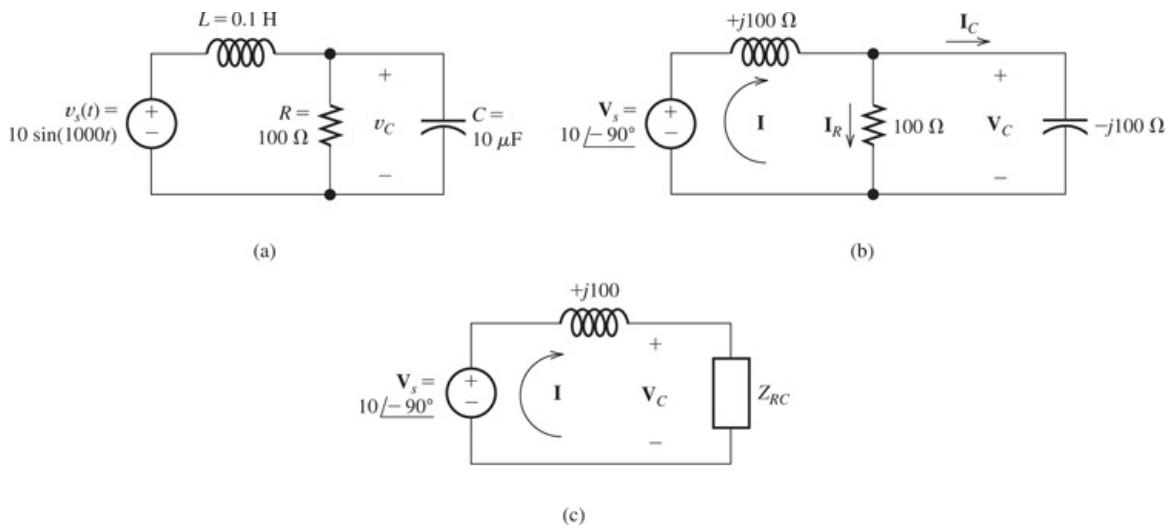


Figure 5.15

Circuit pour [Exemple 5.6](#).

Solution

Le phasor de la source de tension est $V_m = 10 \angle -90^\circ$. [Notez que $v_m(t)$ est une fonction sinusoïdale plutôt qu'une fonction cosinusoïdale, et il est nécessaire de soustraire 90° à la phase.] La fréquence angulaire de la source est $\omega=1000$. Les impédances de l'inductance et de la capacité sont

$$Z_L = j\omega L = j1000 \times 0,1 = j100 \Omega$$

Étape 1 : remplacez la description temporelle de la source de tension par le phasor correspondant.

et

$$Z_C = -j1 \quad \frac{1}{\omega C} = -j \quad \frac{1}{1000 \times 10 \times 10^{-6}} = -j100 \Omega$$

Étape 2 : Remplacez les inductances et les capacités par leurs impédances complexes.

Le réseau transformé est représenté dans **Figure 5.15(b)** 

Étape 3 : Utilisez une arithmétique complexe pour analyser le circuit.

Pour trouver V_C , nous allons d'abord combiner la résistance et l'impédance du condensateur en parallèle. Ensuite, nous utiliserons le principe de division de tension pour calculer la tension aux bornes du RC combiné.

L'impédance du parallèle RC circuit est

$$\begin{aligned} Z_{RC} &= \frac{1}{1/R + 1/Z_C} = \frac{1}{1/100 + 1/(-j100)} \\ &= \frac{1}{0,01 + j0,01} = \frac{1 \angle 0^\circ}{0,01414 \angle 45^\circ} = 70,71 \angle -45^\circ \end{aligned}$$

En passant à la forme rectangulaire, nous avons

$$Z_{RC} = 50 \angle -45^\circ$$

Le réseau équivalent est montré dans **Figure 5.15(c)** 

Maintenant, nous utilisons le principe de division de tension pour obtenir

$$\begin{aligned} V_C &= V_m Z \frac{Z_{RC}}{L + Z_{RC}} = 10 \angle 90^\circ \frac{70,71 \angle -45^\circ}{j100 + 50 \angle -45^\circ} \\ &= 10 \angle 90^\circ \frac{70,71 \angle -45^\circ}{50 + j50} = 10 \angle 90^\circ \frac{70,71 \angle -45^\circ}{70,71 \angle -45^\circ} \\ &= 10 \angle 180^\circ \end{aligned}$$

En convertissant le phasor en une fonction temporelle, nous avons

$$v_C(t) = 10 \cos(1000t - 180^\circ) = -10 \cos(1000t)$$

Ensuite, nous calculons le courant dans chaque élément donnant

$$\begin{aligned}
 j e &= \frac{V_m}{Z_L + Z_{RC}} = \frac{10 \angle -90^\circ}{j100 + 50 - j50} = \frac{10 \angle -90^\circ}{50 + j50} \\
 &= \frac{10 \angle -90^\circ}{70,71 \angle 45^\circ} = 0,1414 \angle -135^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j e_R &= \frac{V_C}{R} = \frac{10 \angle -180^\circ}{100} = 0,1 \angle -180^\circ \\
 j e_C &= \frac{V_C}{Z_C} = \frac{10 \angle -180^\circ}{-j100} = \frac{10 \angle -180^\circ}{100 \angle -90^\circ} = 0,1 \angle -90^\circ
 \end{aligned}$$

Le diagramme de phase est montré dans **Figure 5.16** .

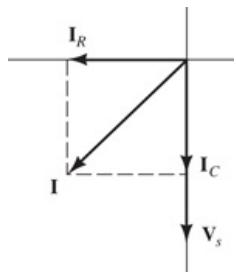


Figure 5.16

Diagramme de phase pour **Exemple 5.6** .

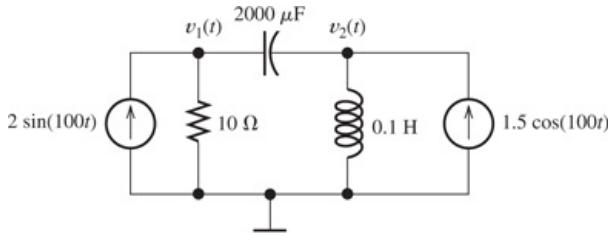
Analyse de la tension des nœuds

Nous pouvons effectuer une analyse de tension de nœud en utilisant des phasors d'une manière parallèle à celle de [Chapitre 2](#). Nous illustrer avec un exemple.

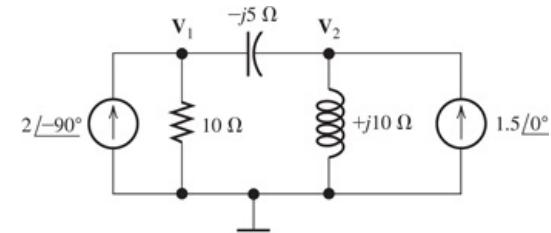
Exemple 5.7 Analyse de la tension de nœud CA en régime permanent

Utilisez la technique de tension de nœud pour trouver $v(t)$ en régime permanent pour le circuit représenté dans [Figure 5.17\(a\)](#).

Figure 5.17(a)



(a)



(b)

Figure 5.17

Circuit pour [Exemple 5.7](#).

Solution

Le réseau transformé est représenté dans [Figure 5.17\(b\)](#). Nous obtenons deux équations en appliquant KCL à nœud 1 et au nœud 2. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} &= 2 \angle -90^\circ \\ \frac{V_2}{j10} + \frac{V_2 - V_1}{-j5} &= 1.5 \angle 0^\circ \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être mises sous la forme standard

$$\begin{aligned} (0.1 + j0.2)V_1 - j0.2V_2 &= -j2 \\ -j0.2V_1 + (0.1 - j0.2)V_2 &= 1.5 \end{aligned}$$

Maintenant, nous résolvons pour V_1 cédant

$$V_1 = 16.1 \angle 29.7^\circ$$

Ensuite, nous convertissons le phasor en une fonction temporelle et obtenons

$$v_1(t) = 16.1 \cos(100t + 29.7^\circ)$$

Analyse du courant de maillage

De la même manière, vous pouvez utiliser des phasors pour effectuer une analyse du courant de maillage dans les circuits à courant alternatif.

Exemple 5.8 Analyse du courant de maille CA en régime permanent

Utilisez la technique du courant de maillage pour trouver $je_1(t)$ en régime permanent pour le circuit représenté dans [Figure 5.18\(a\)](#)

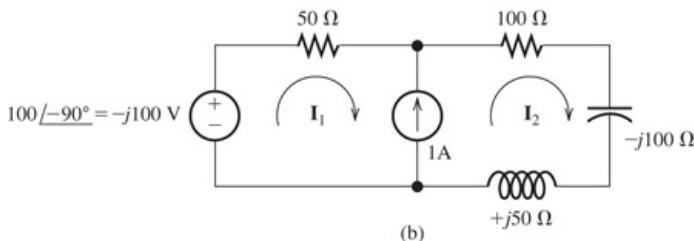
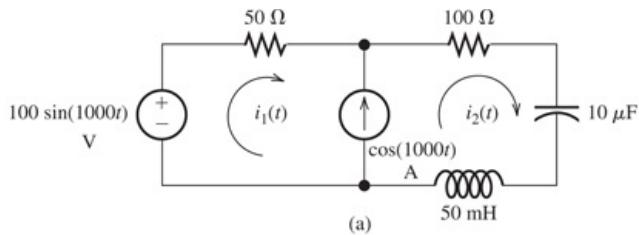


Figure 5.18

Circuit de [Exemple 5.8](#)



Solution

Tout d'abord, nous notons que $\omega=1000$ rad/s pour les deux sources de ce circuit. L'impédance de l'inductance est $j\omega L=j50\Omega$, et l'impédance de la capacité est $-j/(\omega C)=-j100\Omega$. Le réseau transformé est représenté dans [Figure 5.18\(b\)](#).



Ensuite, nous écrivons des équations KVL. Nous ne pouvons pas écrire d'équations autour de la maille 1 ou de la maille 2 car nous ne connaissons pas la tension aux bornes de la source de courant. La seule option est d'écrire une équation KVL autour de l'extérieur du réseau, ce qui donne :

$$j100 + 50je_1 + 100je_2 - j100je_2 + j50je_2 = 0$$

Le courant circulant vers le haut à travers la source de courant est

$$je_2 - je_1 = 1$$

Sous forme standard, ces équations deviennent :

$$\begin{aligned} 50je_1 + (100 - j50)je_2 &= -j100 \\ -je_1 + je_2 &= 1 \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne :

$$je_1 = 0,7071 \angle -135^\circ \text{ ou } je_1(t) = 0,7071 \cos 1000t - 135^\circ \text{ V}$$

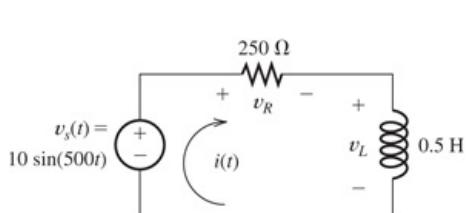
Exercice 5.9

Considérez le circuit illustré dans **Figure 5.19(a)**

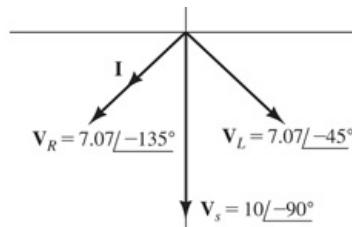
a. Trouver $je(t)$.

b. Construisez un diagramme de phase montrant les trois tensions et le courant.

c. Quelle est la relation de phase entre $v_m(t)$ et $je(t)$?



(a)



(b)

Figure 5.19

Schéma de circuit et de phaseur pour **Exercice 5.9**

Répondre

$$a. je(t) = 0,0283 \cos 500t - 135^\circ;$$

b. le diagramme de phase est montré dans **Figure 5.19(b)**

c. $je(t)$ retarder $v_m(t)$ par 45° .

Exercice 5.10

Trouvez la tension du phasor et le courant du phasor à travers chaque élément du circuit de **Figure 5.20**

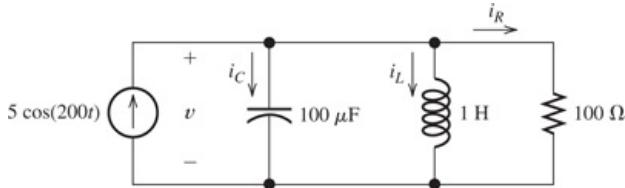


Figure 5.20

Circuit pour **Exercice 5.10**

Répondre

$$V = 277 \angle -56,3^\circ, jec = 5,55 \angle 3 - 3,7^\circ, je_L = 1,39 \angle -146,3^\circ, jer = 2,77 \angle -56,3^\circ.$$

Exercice 5.11

Résolvez les courants de maillage indiqués dans **Figure 5.21** .

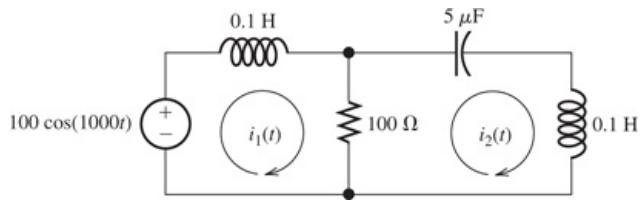


Figure 5.21

Circuit pour **Exercice 5.11** .

Répondre

$$je_1(t) = 1,414 \cos 1000t - 45^\circ, je_2(t) = \cos(1000t).$$

5.5 Puissance dans les circuits à courant alternatif

Considérez la situation illustrée dans **Figure 5.22**. Une tension $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ est appliquée à un réseau composé de résistances, d'inductances et de capacités (c'est-à-dire un RLC réseau). Le phaseur de la source de tension est $V = V_m \angle 0^\circ$, et l'impédance équivalente du réseau est $Z = |Z| \angle \theta = R + jX$.

Le courant du phaseur est

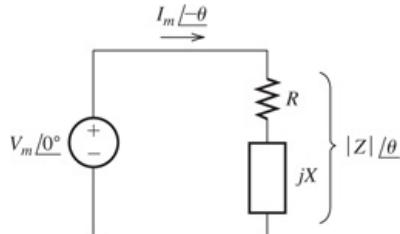


Figure 5.22

Une source de tension fournissant de l'énergie à une impédance de charge $Z = R + jX$.

$$je = \frac{V_m \angle 0^\circ}{Z} = \frac{V_m}{|Z|} \angle -\theta \quad (5.52)$$

où nous avons défini

$$je_m = \frac{V_m}{|Z|} \quad (5.53)$$

Avant de considérer la puissance délivrée par la source à une charge générale, il est instructif de considérer une charge résistive pure, une charge inductive pure et une charge capacitive pure.

Courant, tension et puissance pour une charge résistive

Considérons d'abord le cas où le réseau est une pure résistance. Ensuite, $\theta=0$, et nous avons

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \text{ parce que } (\omega t) \\ jv(t) &= jem \text{ parce que } (\omega t) \\ p(t) &= v(t)jv(t) = V_m jem \text{ parce que } 2(\omega t) \end{aligned}$$

Les tracés de ces quantités sont présentés dans **Figure 5.23**  Notez que le courant est en phase avec la tension (c'est-à-dire qu'ils atteignent tous deux leurs valeurs maximales en même temps). Parce que $p(t)$ Si la tension est positive à tout moment, nous en concluons que l'énergie circule continuellement dans le sens de la source vers la charge (où elle est convertie en chaleur). Bien entendu, la valeur de la puissance augmente et diminue avec l'amplitude de la tension (et du courant).

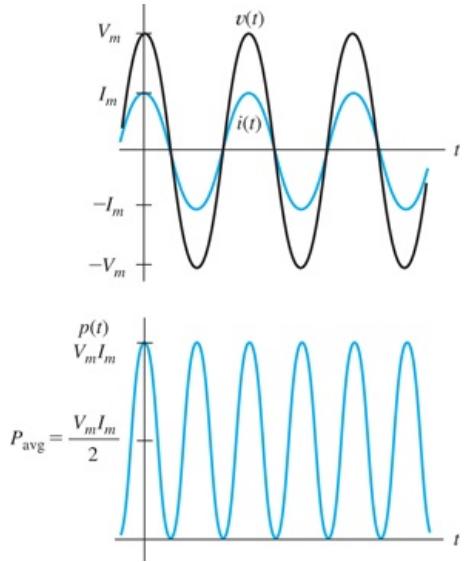


Figure 5.23

Courant, tension et puissance en fonction du temps pour une charge purement résistive.

La puissance moyenne est absorbée par les résistances dans les circuits à courant alternatif.

Courant, tension et puissance pour une charge inductive

Considérons ensuite le cas dans lequel la charge est une inductance pure pour laquelle $Z = \omega L \angle 90^\circ$. Ainsi, $\theta = 90^\circ$, et nous obtenons

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \text{ parce que } (\omega t) \\ j\epsilon(t) &= jem \text{ parce que } (\omega t - 90^\circ) = jem \text{ parce que } (\omega t) = v(t) \\ p(t) &= jem \text{ parce que } (\omega t) \text{ péché } (\omega t) \end{aligned}$$

Utilisation de l'identité trigonométrique parce que $\text{péché}(x) = 1/2 \sin(2x)$, nous constatons que l'expression de la puissance devient

$$p(t) = \frac{V_m}{2} jem \text{ parce que } (2\omega t)$$

Surtensions entrant et sortant des inductances dans les circuits à courant alternatif. La puissance moyenne absorbée par les inductances est nulle.

Les tracés du courant, de la tension et de la puissance sont représentés dans [Figure 5.24\(a\)](#). Notez que le courant est en retard sur la tension de 90° . La moitié du temps, la puissance est positive, ce qui montre que l'énergie est délivrée à l'inductance, où elle est stockée dans le champ magnétique. Pendant l'autre moitié du temps, la puissance est négative, ce qui montre que l'inductance renvoie de l'énergie à la source. Notez que la puissance moyenne est nulle. Dans ce cas, nous disons que **puissance réactive circule de la source vers la charge**.

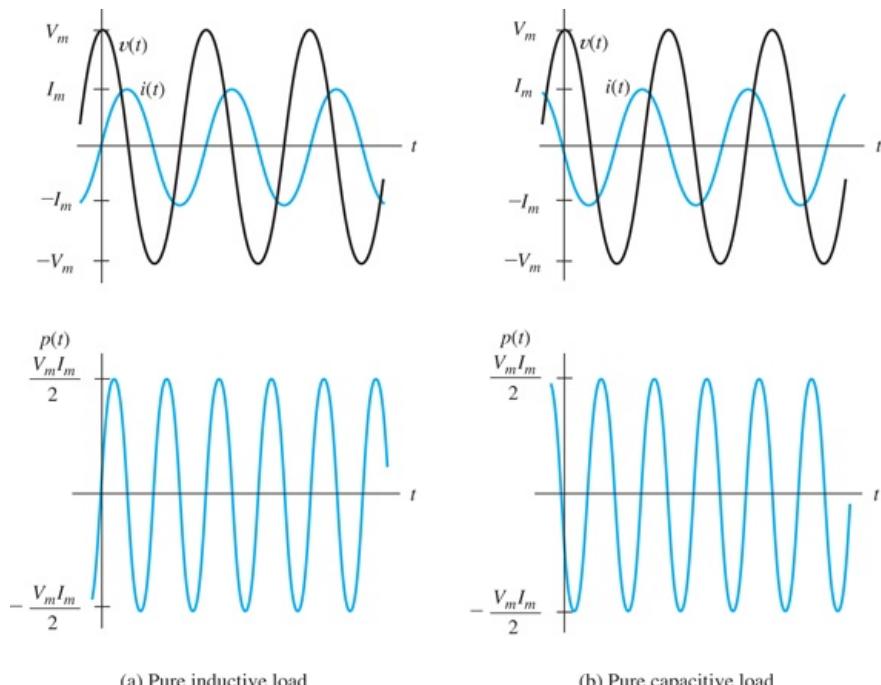


Figure 5.24

Courant, tension et puissance en fonction du temps pour les éléments de stockage d'énergie pure.

Courant, tension et puissance pour une charge capacitive

Considérons ensuite le cas dans lequel la charge est une capacité pure pour laquelle $Z = 1/\omega C \angle -90^\circ$. Alors, $\theta = -90^\circ$, et nous avons

$$\begin{aligned}V(t) &= V_m \text{parce que } (\omega t) \\j\epsilon(t) &= jV_m \text{parce que } (\omega t + 90^\circ) = -j\text{impénétré}(\omega t) = V \\p(t) &= t j\epsilon(t) = -V_m j \text{parce que } (\omega t) \text{ péché}(\omega t) \\&= -\frac{V_m j e}{2} \text{impénétré}(2\omega t)\end{aligned}$$

Sur tensions entrant et sortant des capacités dans les circuits à courant alternatif. La puissance moyenne absorbée par les capacités est nulle.

Les tracés du courant, de la tension et de la puissance sont représentés dans [Figure 5.24\(b\)](#). Ici encore, la puissance moyenne est Si la puissance réactive est nulle, on dit qu'elle circule. Il faut cependant remarquer que la puissance de la capacité est de signe opposé à celle de l'inductance. On dit donc que la puissance réactive est positive pour une inductance et négative pour une capacité. Si une charge contient à la fois une inductance et une capacité avec des puissances réactives de même amplitude, les puissances réactives s'annulent.

Importance de la puissance réactive

Même si aucun élément de stockage d'énergie pure (inductance ou capacité) ne consomme de puissance moyenne, la puissance réactive reste une préoccupation pour les ingénieurs des systèmes électriques, car les lignes de transmission, les transformateurs, les fusibles et d'autres éléments doivent être capables de supporter le courant associé à la puissance réactive. Il est possible d'avoir des charges composées d'éléments de stockage d'énergie qui consomment des courants importants nécessitant un câblage robuste, même si la consommation moyenne est faible. Par conséquent, les compagnies d'électricité facturent à leurs clients industriels la puissance réactive (mais à un tarif réduit) ainsi que l'énergie totale livrée.

Le flux de puissance aller-retour vers les inductances et les capacités est appelé puissance réactive. Le flux de puissance réactive est important car il provoque une dissipation de puissance dans les lignes et les transformateurs d'un système de distribution d'énergie.

Calculs de puissance pour une charge générale

Considérons maintenant la tension, le courant et la puissance d'un appareil général. *RLC* charge pour laquelle la phase θ peut être n'importe quelle valeur de -90° à $+90^\circ$. Nous avons

$$v(t) = V_m \cos(\omega t) \quad (5.54)$$

$$j_e(t) = j_e \cos(\omega t - \theta) \quad (5.55)$$

$$p(t) = V_m j_e \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta) \quad (5.56)$$

Utilisation de l'identité trigonométrique

$$\cos(\omega t - \theta) = \cos(\theta) \cos(\omega t) + \sin(\theta) \sin(\omega t)$$

nous pouvons mettre **Équation 5.56** dans la forme

$$p(t) = V_m j_e \cos(\theta) \cos^2(\omega t) + V_m j_e \sin(\theta) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \quad \text{parce que } \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \quad (5.57)$$

Utiliser les identités

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

et

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$$

nous constatons que **Équation 5.57** peut être écrit comme

$$p(t) = \frac{V_m^2}{2} \cos(\theta) + \frac{V_m^2}{2} \sin(\theta) \sin(2\omega t) \quad (5.58)$$

Notez que les termes impliquant $\cos(2\omega t)$ et $\sin(2\omega t)$ ont des valeurs moyennes de zéro. Ainsi, la moyenne pouvoir P est donné par

$$P = \frac{V_m^2 \cos(\theta)}{2} \quad (5.59)$$

En utilisant le fait que $V_{RMS} = V_m / \sqrt{2}$ et $j_{eRMS} = j_e / \sqrt{2}$, nous pouvons écrire l'expression de la puissance moyenne comme

$$P = V_{RMS} j_{eRMS} \cos(\theta) \quad (5.60)$$

Comme d'habitude, les unités de puissance sont les watts (W).

Facteur de puissance

Le terme par ce que (θ) est appelé le **facteur de puissance**:

$$PF = \cos(\theta) \quad (5.61)$$

Pour simplifier notre discussion, nous avons supposé une tension ayant une phase nulle. En général, la phase de la tension peut avoir une valeur autre que zéro. Ensuite, θ doit être considéré comme la phase de la tension θ moins la phase du courant θ_e , ou

Le facteur de puissance est le cosinus de l'angle θ par lequel le courant est en retard sur la tension. (Si le courant est en avance sur la tension, l'angle est négatif.)

$$\theta = \theta_v - \theta_{je} \quad (5.62)$$

Parfois, θ est appelé le **angle de puissance**.

Souvent, le facteur de puissance est exprimé en pourcentage. Il est également courant d'indiquer si le courant est en avance (charge capacitive) ou en retard (charge inductive) sur la tension. Un facteur de puissance typique serait indiqué comme étant en retard de 90 %, ce qui signifie que par ce que (θ) = 0,9 et que le courant est en retard sur la tension.

Souvent, le facteur de puissance est exprimé en pourcentage.

Si le courant est en retard par rapport à la tension, le facteur de puissance est dit inductif ou en retard. Si le courant est en avance par rapport à la tension, le facteur de puissance est dit capacitif ou en avance.

Puissance réactive

Dans les circuits à courant alternatif, l'énergie circule dans et hors des éléments de stockage d'énergie (inductances et capacités). Par exemple, lorsque l'amplitude de la tension aux bornes d'une capacité augmente, l'énergie circule dans celle-ci, et lorsque l'amplitude de la tension diminue, l'énergie circule en dehors. De même, l'énergie circule dans une inductance lorsque le courant qui la traverse augmente en amplitude. Bien que la puissance instantanée puisse être très importante, l'énergie nette transférée par cycle est nulle pour une capacité ou une inductance idéale.

Lorsqu'une capacité et une inductance sont en parallèle (ou en série), l'énergie circule dans l'une, tandis qu'elle circule dans l'autre. Ainsi, le flux d'énergie d'une capacité tend à annuler celui d'une inductance à chaque instant.

La puissance instantanée de pointe associée aux éléments de stockage d'énergie contenus dans une charge générale est appelée **puissance réactive** et est donnée par

$$Q = V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}} \sin \theta \quad (5.63)$$

où θ est l'angle de puissance donné par [Équation 5.62](#), V_{rms} est la tension efficace (ou rms) aux bornes du chargeur, et I_{rms} est le courant effectif à travers la charge. (Remarquez que si nous avions une charge purement résistive, nous aurions $\theta=0$ et $Q=0$.)

Les unités physiques de la puissance réactive sont les watts. Cependant, pour souligner le fait que Q ne représente pas le flux d'énergie nette, ses unités sont généralement données comme suit Volt \times Ampères Réactifs (VAR).

Les unités de puissance réactive Q sont des VAR.

Puissance apparente

Une autre quantité d'intérêt est la **puissance apparente**, qui est défini comme le produit de la tension effective et du courant effectif, ou

$$\text{puissance apparente} = V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}}$$

La puissance apparente est égale au produit du courant efficace et de la tension efficace. Les unités de la puissance apparente sont exprimées en voltampères (VA).

Ses unités sont les voltampères (VA).

En utilisant [Équations 5.60](#) et [5.63](#), nous pouvons écrire

$$P_2 + Q_2 = (V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}})^2 \text{ parce que } z(\theta) + (V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}})^2 \sin^2 \theta$$

Cependant, parce que $z(\theta) + \sin^2 \theta = 1$, alors nous avons

$$P_2 + Q_2 = (V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}})^2 \quad (5.64)$$

Unités

Souvent, les unités données pour une quantité indiquent si la quantité est la puissance (W), la puissance réactive (VAR) ou la puissance apparente (VA). Par exemple, si nous disons que nous avons une charge de 5 kW, cela signifie que $P=5$ kW. En revanche, si nous avons une charge de 5 kVA, $V_{\text{rms}} j I_{\text{rms}}=5$ kVA. Si nous disons qu'une charge absorbe 5 kVAR, alors $Q=5$ kVAR.

Triangle de puissance

Les relations entre le pouvoir réel P , puissance réactive Q , puissance apparente $V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$, et l'angle de puissance θ peuvent être représenté par le **triangle de puissance**. Le triangle de puissance est représenté dans [Figure 5.25\(a\)](#) pour un charge inductive, auquel cas θ et Q sont positifs. Le triangle de puissance pour une charge capacitive est représenté par [Figure 5.25\(b\)](#), auquel cas θ et Q sont négatifs.

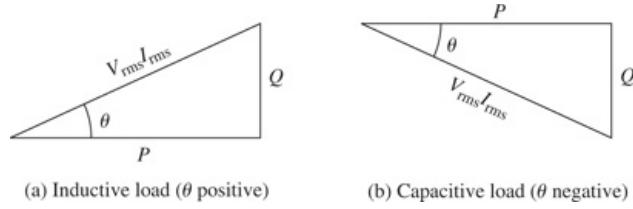


Figure 5.25

Triangles de puissance pour charges inductives et capacitatives.

Le triangle de puissance est une manière compacte de représenter les relations de puissance en courant alternatif.

Relations de pouvoir supplémentaires

L'impédance Z est

$$Z = Z \angle \theta = R + jX$$

dans lequel R est la résistance de la charge et X est la réactance. Ceci est illustré dans [Figure 5.26](#) je peux. Nous écrire

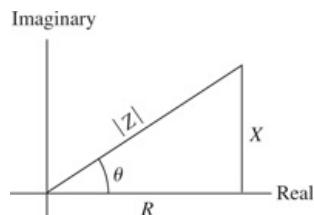


Figure 5.26

L'impédance de charge dans le plan complexe.

$$\text{parce que } (\theta) = \frac{R}{|Z|} \quad (5.65)$$

et

$$\text{péché}(\theta) = \frac{X}{|Z|} \quad (5.66)$$

Substitution [Équation 5.65](#) dans [Équation 5.59](#), nous constatons que

$$P = \frac{V_m^2 R}{2 |Z|^2} \quad (5.67)$$

Cependant, [Équation 5.53](#) déclare que $jem = V_m/Z$, alors nous avons

$$P = \frac{jem^2 R}{2} \quad (5.68)$$

Dans **Équation 5.69** , Rest la partie réelle de l'impédance à travers laquelle circule le courant.

En utilisant le fait que $j\epsilon_{\text{RMS}} = j\epsilon_m / \sqrt{2}$, nous obtenons

$$P = j\epsilon^2_{\text{RMS}} R \quad (5.69)$$

Dans **Équation 5.70** , X est la partie imaginaire (y compris le signe algébrique) de l'impédance à travers lequel circule le courant.

De la même manière, nous pouvons montrer que

$$Q = j\epsilon^2_{\text{RMS}} X \quad (5.70)$$

Puissance réactive Q est positif pour les charges inductives et négatif pour les charges capacitives.

En appliquant **Équation 5.70** , on conserve le signe algébrique de X . Pour une charge inductive, X est positif, alors que pour une charge capacitive, X est négatif. Ce n'est pas difficile à retenir si nous gardons à l'esprit que Q est positif pour les charges inductives et négatif pour les charges capacitives.

Dans **Équation 5.71** , V_R est la tension efficace aux bornes de la résistance.

De plus, dans **Section 5.1** , nous avons montré que la puissance moyenne délivrée à une résistance est

$$P = \frac{V_R^2 R}{R} \quad (5.71)$$

où V_R est la valeur efficace de la tension à travers la résistance. (Avis dans **Figure 5.22** (la tension  de la source n'apparaît pas à travers la résistance, car la réactance est en série avec la résistance.)

Dans **Équation 5.72** , V_X est la tension efficace aux bornes de la réactance.

De même, nous avons

$$Q = \frac{V_X^2 X}{X} \quad (5.72)$$

où V_X est la valeur efficace de la tension à travers la réactance. Ici encore, X est positif pour un inductance et négatif pour une capacité.

Pouvoir complexe

Considérez la partie d'un circuit illustrée dans **Figure 5.27** . Le **pouvoir complexe**, désigné par S , livré à ce circuit est défini comme la moitié du produit de la tension du phasor V et le conjugué complexe du courant phasor IU .

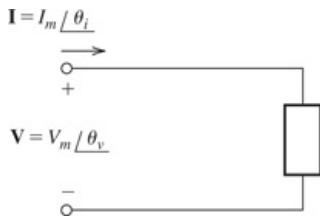


Figure 5.27

La puissance complexe délivrée à cet élément de circuit est $S = \frac{1}{2} VI^*$.

$$S = \frac{1}{2} VI^* \quad (5.73)$$

La tension du phaseur est $V = V_m \angle \theta_v$ dans lequel V_m est la valeur de crête de la tension et θ_v est l'angle de phase de la tension. De plus, le courant du phaseur est $I = I_m \angle \theta_e$ où I_m est la valeur maximale et θ_e est le angle de phase du courant. En remplaçant dans [Équation 5.73](#), nous avons

$$S = \frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} V_m \angle \theta_v \times I_m \angle -\theta_e = \frac{V_m I_m}{2} \angle \theta_v - \theta_e = \frac{V_m I_m}{2} \angle \theta \quad (5.74)$$

où, comme auparavant, $\theta = \theta_v - \theta_e$ est l'angle de puissance. En développant le terme de droite de [Équation 5.74](#) parties réelles et imaginaires, nous avons

$$S = \frac{VI}{2} \text{ parce que } (\theta) + j \frac{V_m I_m \sin \theta}{2}$$

Cependant, le premier terme du côté droit est la puissance moyenne P livré au circuit et le deuxième terme est jQ fois la puissance réactive. Ainsi, on peut écrire :

$$S = \frac{VI}{2} = P + jQ \quad (5.75)$$

Si nous connaissons le pouvoir complexe S , alors nous pouvons trouver la puissance, la puissance réactive et la puissance apparente :

$$P = \text{Ré } S = \text{Ré } \frac{1}{2} VI^* \quad (5.76)$$

$$Q = \text{Imaginaire } S = \text{Imaginaire } \frac{1}{2} VI^* \quad (5.77)$$

$$\text{puissance apparente } S = \frac{1}{2} VI^* \quad (5.78)$$

où $\text{Re}(S)$ désigne la partie réelle de S et $\text{Imaginaire}(S)$ désigne la partie imaginaire de S .

Exemple 5.9 Calculs de puissance CA

Calculer la puissance et la puissance réactive prélevées à la source pour le circuit de [Exemple 5.6](#) calculé aussi, puissance et la puissance réactive délivrées à chaque élément du circuit. Pour plus de commodité, le circuit et les courants qui ont été calculés dans [Exemple 5.6](#) sont affichés dans [Figure 5.28](#).

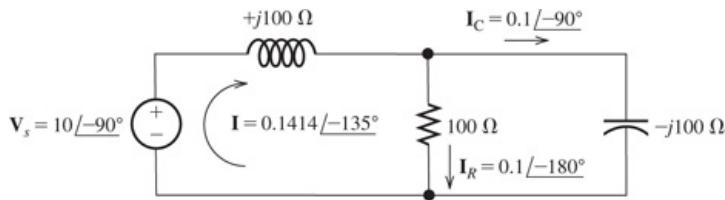


Figure 5.28

Circuit et courants pour **Exemple 5.9** Le □.

circuit comporte deux boucles :

Solution

Pour trouver la puissance et la puissance réactive de la source, nous devons d'abord trouver l'angle de puissance qui est donné par

Équation 5.62 □:

$$\theta = \theta_V - \theta_{Ie}$$

L'angle de la tension source est $\theta_V = -90^\circ$, et l'angle du courant délivré par la source est $\theta_{Ie} = -135^\circ$. Par conséquent, nous avons

$$\theta = -90^\circ - -135^\circ = 45^\circ$$

La tension et le courant efficaces de la source sont

$$V_{mRMS} = \sqrt{\frac{V_m}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = 7,071 \text{ V}$$

$$I_{eRMS} = \sqrt{\frac{I_{e0}}{2}} = \sqrt{\frac{0,1}{2}} = 0,1 \text{ A}$$

Maintenant, nous utilisons **Équations** □ et **5.63** □ pour calculer la puissance et la puissance réactive délivrées par **5.60** la source:

$$\begin{aligned} P &= V_{mRMS} I_{eRMS} \cos \theta = \\ &= 7,071 \times 0,1 \cos 45^\circ = 0,5 \text{ W} \\ Q &= V_{mRMS} I_{eRMS} \sin \theta = \\ &= 7,071 \times 0,1 \sin 45^\circ = 0,5 \text{ VAR} \end{aligned}$$

Une méthode alternative et plus compacte pour le calcul P et Q il faut d'abord trouver la puissance complexe puis prendre les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} S &= V_{mRMS} I_{e0} = \sqrt{\frac{V_m}{2}} \times 10 \angle -90^\circ = 0,1414 \angle -135^\circ = 0,707 \angle 45^\circ = 0,5 + j0,5 \\ P &= \text{Ré } S = 0,5 \text{ W} \\ Q &= \text{Im } S = 0,5 \text{ VAR} \end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser **Équation 5.70** □ pour calculer la puissance réactive délivrée à l'inducteur, ce qui donne

$$Q_L = j e_2 RMS X_L = (0,1) \times (100) = 1,0 \text{ VAR}$$

Pour le condensateur, nous avons

$$Q_C = j e_2 RMS X_C = \sqrt{\frac{0,1}{2}}^2 (-100) = -0,5 \text{ VAR}$$

Notez que nous avons utilisé la valeur efficace du courant traversant le condensateur dans ce calcul. De plus, notez que la réactance X_C de la capacité est négative. Comme prévu, la capacité réactive

la puissance est négative pour une capacité. La puissance réactive pour la résistance est nulle. Pour vérification, on peut vérifier que la puissance réactive délivrée par la source est égale à la somme des puissances réactives absorbées par l'inductance et la capacité. Ceci est démontré par

$$Q = Q_L + Q_C$$

La puissance délivrée à la résistance est

$$\begin{aligned} P_R &= j e_2 \cdot R_{RMS}^2 \\ R &= \sqrt{\frac{j e}{2}}^2 \\ &= \sqrt{\frac{0,1}{2}}^2 \cdot 100 \\ &= 0,5 \text{ W} \end{aligned}$$

La puissance absorbée par la capacité et l'inductance est donnée par

$$\begin{aligned} P_L &= 0 \\ P_C &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, toute la puissance délivrée par la source est absorbée par la résistance.

Dans les systèmes de distribution d'énergie, nous rencontrons généralement des valeurs de puissance, de puissance réactive et de puissance apparente bien plus élevées que les petites valeurs de l'exemple précédent. Par exemple, une grande centrale électrique peut générer 1 000 MW. Un moteur de 100 ch utilisé dans une application industrielle absorbe environ 85 kW d'énergie électrique à pleine charge.

Une résidence typique absorbe une *culmine* puissance comprise entre 10 et 40 kW. *Moyenne* La consommation électrique de ma maison (de taille moyenne, avec deux résidents et sans chauffage électrique) est d'environ 600 W. Il est intéressant de garder à l'esprit votre consommation électrique moyenne et la puissance utilisée par les différents appareils, car cela vous donne une idée claire de l'impact économique et environnemental de l'extinction des lumières, des ordinateurs, etc., qui ne sont pas utilisés.

Exemple 5.10 Utilisation des triangles de puissance

Considérez la situation illustrée dans [Figure 5.29](#). Ici, une source de tension fournit de l'énergie à deux charges connectés en parallèle. Trouvez la puissance, la puissance réactive et le facteur de puissance de la source. Trouvez également le courant de phase j .

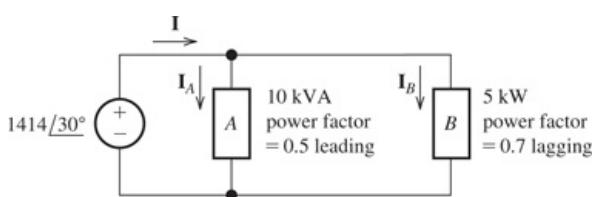


Figure 5.29

Circuit pour [Exemple 5.10](#).

Solution

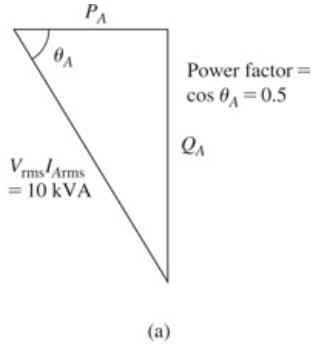
Par les unités données dans la figure, nous voyons que la charge *A* a une puissance apparente de 10 kVA. D'autre part, le pouvoir pour charger *B* est spécifié à 5 kW.

De plus, chargez *A* un facteur de puissance de 0,5 en avance, ce qui signifie que le courant précède la tension dans la charge *A*. Une autre façon de dire cela est que la charge *A* est capacitif. De même, la charge *B* a un facteur de puissance de 0,7 en retard (ou inductif).

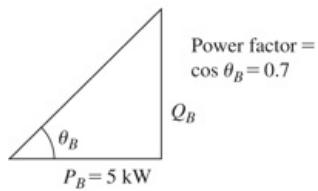
Notre approche consiste à trouver la puissance et la puissance réactive pour chaque charge. Ensuite, nous additionnons ces valeurs pour trouver la puissance et la puissance réactive de la source. Enfin, nous calculons le facteur de puissance de la source, puis nous trouvons le courant.

Calculs de charge UN

Parce que la charge UN a un facteur de puissance (capacitif) de premier plan, nous savons que la puissance réactive Q_{UN} et l'angle de puissance θ_{UN} sont négatifs. Le triangle de puissance pour la charge UN est montré dans [Figure 5.30\(a\)](#).  Le pouvoir le facteur est



(a)



(b)

Figure 5.30

Triangles de puissance pour les charges UN et B de [Exemple 5.10](#) .

$$\text{parce que } \theta_{UN} = 0,5$$

Le pouvoir est

$$P_{UN} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \text{ parce que } \theta_{UN} = 104,5 = 5 \text{ kW}$$

Résoudre [Équation 5.64](#)  pour la puissance réactive, nous avons

$$\begin{aligned} Q_{UN} &= \frac{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}{2 - P_{UN}} \\ &= \frac{104}{2 - 5000} \\ &= -8,660 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

Notez que nous avons sélectionné la valeur négative pour Q_{UN} , parce que nous savons que la puissance réactive est négative pour une charge capacitive (principale).

Calculs de charge B

Le triangle de puissance pour la charge B est montré dans [Figure 5.30\(b\)](#)  . Depuis la charge B a un retard (inductif) facteur de puissance, nous savons que la puissance réactive Q_B et l'angle de puissance θ_B sont positifs. Ainsi,

$$\theta_B = \arccos(0,7) = 45,57^\circ$$

En appliquant la trigonométrie, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Q_B &= P_B \tan \theta_B = 5000 \tan 45,57^\circ \\ Q_B &= 5,101 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

À ce stade, comme indiqué ici, nous pouvons trouver la puissance et la puissance réactive délivrées par la source :

$$\begin{aligned} P &= P_{UN} + P_B = 5 + 5 = 10 \text{ kW} \\ Q &= Q_{UN} + Q_B = -8,660 + 5,101 = -3,559 \text{ kVAR} \end{aligned}$$

La puissance totale est obtenue en additionnant les puissances des différentes charges. De même, les puissances réactives sont additionnées.

Calculs de puissance pour la source.

Parce que Q est négatif, nous savons que l'angle de puissance est négatif. Ainsi, nous avons

$$\theta = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \frac{-3,559}{10} = -19,59^\circ$$

Le facteur de puissance est

$$\text{parce que } (\theta) = 0,9421$$

Les ingénieurs des systèmes électriques expriment fréquemment les facteurs de puissance sous forme de pourcentages et indiqueraient que ce facteur de puissance est de 94,21 pour cent.

La puissance complexe délivrée par la source est

$$S = P + jQ = 10 - j3,559 = 10,61 \angle -19,59^\circ \text{ kVA}$$

Ainsi, nous avons

$$S = 1 \frac{V}{2} \quad mje = 1 \frac{1}{2} 414 \quad \angle 30^\circ \quad je = 10,61 \times 10^3 \angle -19,59^\circ \text{ kVA}$$

En résolvant le problème du courant de phase, nous obtenons :

$$je = 15,0 \angle 49,59^\circ \text{ A}$$

Le diagramme de phase pour le courant et la tension est représenté dans [Figure 5.31](#). Notez que le courant est conduire la tension.

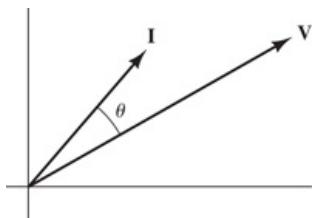


Figure 5.31

Diagramme de phase pour [Exemple 5.10](#).

Correction du facteur de puissance

Nous avons vu que des courants importants peuvent circuler dans les dispositifs de stockage d'énergie (inductance et capacité) sans que la puissance moyenne ne soit délivrée. Dans l'industrie lourde, de nombreuses charges sont partiellement inductives et de grandes quantités de puissance réactive circulent. Cette puissance réactive entraîne des courants plus élevés dans le système de distribution d'énergie. Par conséquent, les lignes et les transformateurs doivent avoir des valeurs nominales plus élevées que celles qui seraient nécessaires pour fournir la même puissance moyenne à une charge résistive (facteur de puissance de 100 %).

La correction du facteur de puissance peut offrir un avantage économique significatif aux consommateurs de grandes quantités d'énergie électrique.

Les tarifs de l'énergie facturés aux industriels dépendent du facteur de puissance, les tarifs étant plus élevés pour l'énergie délivrée à des facteurs de puissance plus faibles. (Le facteur de puissance n'est pas pris en compte pour les clients résidentiels.) Par conséquent, il est avantageux de choisir des charges qui fonctionnent à un facteur de puissance proche de l'unité. Une approche courante consiste à placer des condensateurs en parallèle avec une charge inductive pour augmenter le facteur de puissance.

Exemple 5.11 Correction du facteur de puissance

Une charge de 50 kW fonctionne à partir d'une ligne 60 Hz 10 kV-rms avec un facteur de puissance en retard de 60 %.

Calculez la capacité qui doit être placée en parallèle avec la charge pour obtenir un facteur de puissance en retard de 90 %.

Solution

Tout d'abord, nous trouvons l'angle de puissance de charge :

$$\theta_L = \arccos(0,6) = 53,13^\circ$$

Ensuite, nous utilisons le concept du triangle de puissance pour trouver la puissance réactive de la charge. Par conséquent,

$$Q_L = P_{\text{tanné}} \cdot \tan(\theta_L) = 66,67 \text{ kVAR}$$

Après avoir ajouté le condensateur, la puissance sera toujours de 50 kW et l'angle de puissance deviendra

$$\theta_{\text{nouveau}} = \arccos(0,9) = 25,84^\circ$$

La nouvelle valeur de la puissance réactive sera

$$Q_{\text{nouveau}} = P_{\text{tanné}} \cdot \tan(\theta_{\text{nouveau}}) = 24,22 \text{ kVAR}$$

Ainsi, la puissance réactive de la capacité doit être

$$Q_C = Q_{\text{nouveau}} - Q_L = -42,45 \text{ kVAR}$$

Maintenant, nous constatons que la réactance du condensateur est

$$X_C = -\frac{V_{\text{RMS}}}{Q_C} = \frac{1042}{42,450} = -2356 \Omega$$

Enfin, la fréquence angulaire est

$$\omega = 2\pi f = 377,0$$

et la capacité requise est

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{377 \times 2356} = 1,126 \mu\text{F}$$

Exercice 5.12

- aa Une source de tension $V = 707,1 \angle 4_0^\circ$ fournit 5 kW à une charge avec un facteur de puissance de 100 pour cent.
la puissance réactive et le courant de phaseur.
- b. Répétez si le facteur de puissance est en retard de 20 pour cent.
- c. Pour quel facteur de puissance les courants nominaux des conducteurs reliant la source à la charge seraient-ils plus élevés ?
Dans quel cas le câblage pourrait-il être moins coûteux ?

Répondre

aa $Q = 0, j\varphi = 14,14 \angle 4_{-}0^\circ$;

b. $Q = 24,49 \text{ kVAR}, j\varphi = 70,7 \angle -38,46^\circ$;

c. Les valeurs nominales de courant des conducteurs devraient être cinq fois plus élevées pour la partie (b) que pour la partie (a). De toute évidence, le câblage pourrait être moins coûteux pour un facteur de puissance de 100 pour cent.

Exercice 5.13

Une source de tension de 1 kV-rms à 60 Hz fournit de l'énergie à deux charges en parallèle. La première charge est une $10 - \mu\text{F}$ condensateur et la deuxième charge absorbe une puissance apparente de 10 kVA avec un facteur de puissance en retard de 80 %. Trouvez la puissance totale, la puissance réactive totale, le facteur de puissance de la source et le courant efficace de la source.

Répondre

un. $P = 8 \text{ kW}, Q = 2,23 \text{ kVAR}, \text{PF} = 96,33\%$ pourcentage de retard, $j\varphi_{\text{RMS}} = 8,305 \text{ A}$.

5.6 Circuits équivalents de Thévenin et Norton

Circuits équivalents de Thévenin

Dans [Chapitre 2](#), nous avons vu qu'un réseau à deux bornes composé de sources et de résistances a une Circuit équivalent de Thévenin constitué d'une source de tension en série avec une résistance. Nous pouvons appliquer ce concept à des circuits composés de sources sinusoïdales (toutes ayant une fréquence commune), de résistances, d'inductances et de capacités. Ici, l'équivalent de Thévenin consiste en une source de tension phasor en série avec une impédance complexe comme illustré dans [Figure 5.32](#)

Rappelons que les phasors et les complexes

les impédances ne s'appliquent que pour un fonctionnement en régime permanent ; par conséquent, ces équivalents de Thévenin ne sont valables que pour le fonctionnement en régime permanent du circuit.

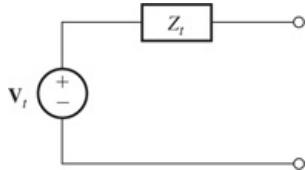


Figure 5.32

L'équivalent de Thévenin pour un circuit alternatif est constitué d'une source de tension phasor V_t en série avec une impédance complexe Z_t .

Comme dans les circuits résistifs, la tension de Thévenin est égale à la tension à vide du circuit à deux bornes. Dans les circuits alternatifs, on utilise des phasors, on peut donc écrire

La tension de Thévenin est égale à la tension du phaseur en circuit ouvert du circuit d'origine.

$$V_t = V_{oc} \quad (5.79)$$

L'impédance de Thévenin Z_t peut être trouvé en mettant à zéro le *indépendantsources* et en regardant dans les bornes pour trouver l'impédance équivalente. (Rappelons qu'en mettant à zéro une source de tension, nous réduisons sa tension à zéro et elle devient un court-circuit. D'autre part, en mettant à zéro une source de courant, nous réduisons son courant à zéro et elle devient un circuit ouvert.) Gardez également à l'esprit que nous ne devons pas mettre à zéro la source de tension *dépendantsources*.

Nous pouvons trouver l'impédance de Thévenin en mettant à zéro les sources indépendantes et en déterminant l'impédance en regardant dans les bornes du circuit.

Une autre approche pour déterminer l'impédance de Thévenin consiste d'abord à trouver le courant de phaseur de court-circuit i_{esc} et la tension en circuit ouvert V_{oc} . Alors, l'impédance de Thévenin est donnée par

$$Z_t = \frac{V_{oc}}{j i_{esc}} = \frac{V}{j i_{esc}} \quad (5.80)$$

Ainsi, à l'exception de l'utilisation de phaseurs et d'impédances complexes, les concepts et procédures des équivalents Thévenin des circuits à courant alternatif en régime permanent sont les mêmes que pour les circuits résistifs.

L'impédance de Thévenin est égale à la tension en circuit ouvert divisée par le courant de court-circuit.

Circuits équivalents Norton

Un autre équivalent pour un circuit alternatif à deux bornes en régime permanent est l'équivalent Norton, qui consiste en une source de courant phasor j_{en} en parallèle avec l'impédance de Thévenin. Ceci est illustré dans [Figure 5.33](#). Le courant de Norton est égal au courant de court-circuit du circuit d'origine :

$$j_{en} = j_{esc} \quad (5.81)$$

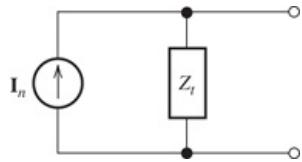


Figure 5.33

Le circuit équivalent de Norton se compose d'une source de courant phasor j_{en} en parallèle avec l'impédance complexe Z_t .

Exemple 5.12 Equivalents de Thévenin et Norton

Trouvez les circuits équivalents de Thévenin et Norton pour le circuit représenté dans [Figure 5.34\(a\)](#).

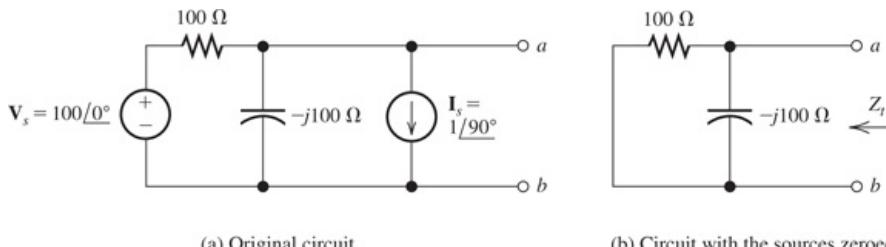


Figure 5.34

Circuit de [Exemple 5.12](#).

Tout d'abord, regardez quelles sont les deux quantités parmi les trois V_{oc} , j_{esc} , ou Z_t sont les plus faciles à déterminer.

Solution

Nous devons trouver deux des trois quantités : V_{oc} , j_{esc} , ou Z_t . Souvent, il est plus intéressant de rechercher les deux sources qui peuvent être trouvées avec le moins de travail. Dans ce cas, nous choisissons de commencer par mettre à zéro les sources pour trouver Z_t . Une fois cette partie du problème terminée, nous trouverons le courant de court-circuit.

Si nous mettons à zéro les sources, nous obtenons le circuit représenté sur la figure [Figure 5.34\(b\)](#). L'impédance de Thévenin est l'impédance vue en regardant en arrière dans les terminaux a — b . Il s'agit de la combinaison parallèle de la résistance et de l'impédance de la capacité. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{1}{1/100 + 1/(-j100)} \\ &= \frac{1}{0,01 + j0,01} \\ &= \frac{1}{0,01414 \angle 45^\circ} \\ &= 70,71 \angle -45^\circ \\ &= 50 - j50 \Omega \end{aligned}$$

Maintenant, nous appliquons un court-circuit aux bornes a — b pour trouver le courant, qui est affiché dans [Figure 5.34\(c\)](#).

En cas de court-circuit, la tension aux bornes de la capacité est nulle. Par conséquent, $j_{ec} = 0$.

De plus, la tension source V_m apparaît à travers la résistance, donc nous avons

$$j_{er} = \frac{V_m}{100} = \frac{100}{100} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Ensuite, en appliquant KCL, nous pouvons écrire

$$j_{esc} = j_{er} - j_{em} = 1 - 1 \angle 90^\circ = 1 - j = 1,414 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Ensuite, nous pouvons résoudre [Équation 5.80](#) pour la tension de Thévenin :

$$V_t = j_{esc} Z_t = 1,414 \angle -45^\circ \times 70,71 \angle -45^\circ = 100 \angle -90^\circ \text{ V}$$

Enfin, nous pouvons dessiner les circuits équivalents de Thévenin et de Norton, qui sont représentés dans [Figure 5.35](#).

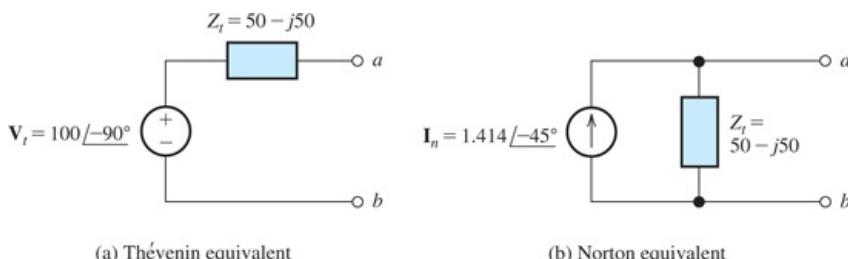


Figure 5.35

Équivalents Thévenin et Norton pour le circuit de [Figure 5.34\(a\)](#).

Transfert de puissance moyen maximal

Parfois, nous sommes confrontés au problème de l'ajustement d'une impédance de charge pour extraire la puissance moyenne maximale d'un circuit à deux bornes. Cette situation est illustrée dans [Figure 5.36](#), dans lequel nous avons représenté le circuit à deux bornes par son équivalent Thévenin. Bien entendu, la puissance délivrée à la charge dépend de l'impédance de la charge. Une charge en court-circuit ne reçoit aucune puissance car la tension à ses bornes est nulle. De même, une charge en circuit ouvert ne reçoit aucune puissance car le courant qui la traverse est nul. De plus, une charge purement réactive (inductance ou capacité) ne reçoit aucune puissance car le facteur de puissance de la charge est nul.

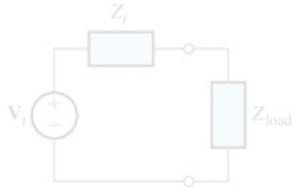


Figure 5.36

L'équivalent Thévenin d'un circuit à deux bornes fournissant de l'énergie à une impédance de charge.

Deux situations nous intéressent. Tout d'abord, supposons que l'impédance de charge puisse prendre n'importe quelle valeur complexe. Il s'avère alors que l'impédance de charge pour un transfert de puissance maximale est le conjugué complexe de l'impédance de Thévenin :

$$Z_{\text{chargeur}} = Z_t^*$$

Voyons pourquoi cela est vrai. Supposons que l'impédance de Thévenin soit

Si la charge peut prendre n'importe quelle valeur complexe, le transfert de puissance maximale est atteint pour une impédance de charge égale au conjugué complexe de l'impédance de Thévenin.

$$Z_t = R_t + jX_t$$

Ensuite, l'impédance de charge pour le transfert de puissance maximale est

$$Z_{\text{chargeur}} = Z_t^* = R_t - jX_t$$

Bien entendu, l'impédance totale vue par la source Thévenin est la somme de l'impédance Thévenin et de l'impédance de charge :

$$\begin{aligned} Z_{\text{total}} &= Z_t + Z_{\text{chargeur}} \\ &= R_t + jX_t + R_t - jX_t \\ &= 2R_t \end{aligned}$$

Ainsi, la réactance de la charge annule la réactance interne du circuit à deux bornes. La puissance maximale est transférée à une résistance de charge donnée en maximisant le courant. Pour des résistances données, le courant maximal est obtenu en choisissant la réactance pour minimiser l'amplitude de l'impédance totale. Bien entendu, pour des résistances fixes, l'amplitude de l'impédance minimale se produit pour une réactance totale nulle.

Ayant établi le fait que la réactance totale doit être nulle, nous avons un circuit résistif. Nous avons considéré ce circuit résistif dans [Chapitre 2](#), où nous avons montré que la puissance maximale est transférée pour $R_{\text{chargeur}} = R_t$.

Si la charge doit être une résistance pure, le transfert de puissance maximal est atteint pour une résistance de charge égale à l'amplitude de l'impédance de Thévenin.

Le deuxième cas intéressant est celui d'une charge contrainte à être une résistance pure. Dans ce cas, on peut montrer que la résistance de charge pour un transfert de puissance maximale est égale à la valeur de l'impédance de Thévenin :

$$Z_{\text{chargeur}} = R_{\text{chargeur}} = Z_t$$

Exemple 5.13 Transfert de puissance maximal

Déterminer la puissance maximale qui peut être délivrée à une charge par le circuit à deux bornes de **Figure 5.34(a)** si

- a. la charge peut avoir n'importe quelle valeur complexe et
- b. la charge doit être une résistance pure.

Solution

Dans **Exemple 5.12**, nous avons constaté que le circuit possède l'équivalent de Thévenin illustré dans **Figure 5.35(a)**. L'impédance de Thévenin est

$$Z_t = 50 - j50 \Omega$$

- a. L'impédance de charge complexe qui maximise le transfert de puissance est

$$Z_{\text{charger}} = Z_t * = 50 + j50$$

L'équivalent de Thévenin avec cette charge attachée est montré dans **Figure 5.37(a)**. Le courant est

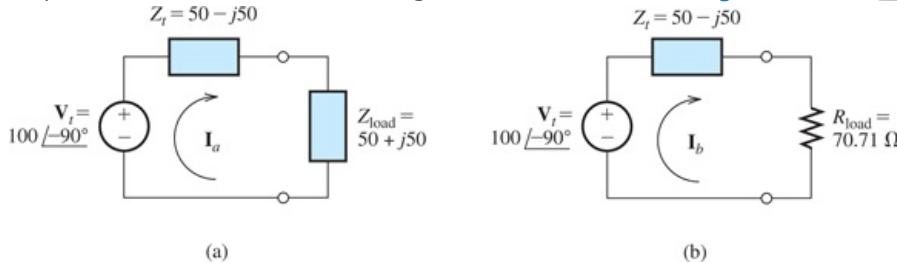


Figure 5.37

Circuit équivalent de Thévenin et charges de **Exemple 5.13**.

$$\begin{aligned} j\varphi_{in} &= \frac{V_t}{Z_t + Z_{\text{charger}}} \\ &= \frac{100 \angle -90^\circ}{50 - j50 + 50 + j50} \\ &= 1 \angle -90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Le courant de charge efficace est $j\varphi_{in,RMS} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Enfin, la puissance délivrée à la charge est

$$P = j\varphi_{in,RMS} R_{\text{charger}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 50 = 25 \text{ W}$$

- b. La charge purement résistive pour un transfert de puissance maximal est

$$\begin{aligned} R_{\text{charger}} &= Z_t \\ &= 50 - j50 \\ &= \frac{50^2 + (-50)^2}{50^2 - (-50)^2} \\ &= 70,71 \Omega \end{aligned}$$

L'équivalent de Thévenin avec cette charge attachée est montré dans **Figure 5.37(b)**. Le courant est

$$\begin{aligned} j\varphi_b &= \frac{V_t}{Z_t + Z_{\text{charger}}} \\ &= \frac{100 \angle -90^\circ}{50 - j50 + 70,71} \\ &= \frac{100 \angle -90^\circ}{130,66 \angle -22,50^\circ} \\ &= 0,7654 \angle -67,50^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

La puissance délivrée à cette charge est

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{j e_0^2}{2 R_{\text{charge}}} \\
 &= \frac{0,7053}{2} \quad 70.71 \\
 &= 20,71 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Notez que la puissance disponible pour une charge purement résistive est inférieure à celle d'une charge complexe.

Exercice 5.14

Trouvez l'impédance de Thévenin, la tension de Thévenin et le courant de Norton pour le circuit illustré dans [Figure 5.38](#)

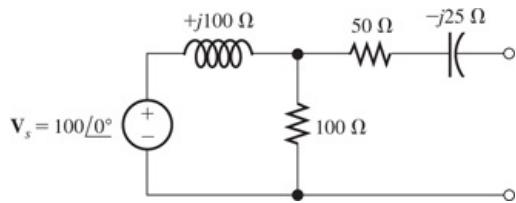


Figure 5.38

Circuit de [Exercices 5.14](#) et [5.15](#) .

Répondre $Z_t = 100 + j25 \Omega$, $V_t = 70,71 \angle -45^\circ$, $j e_n = 0,686 \angle -59,0^\circ$.

Exercice 5.15

Déterminer la puissance maximale qui peut être délivrée à une charge par le circuit à deux bornes de [Figure 5.38](#)



- a. la charge peut avoir n'importe quelle valeur complexe et
- b. la charge doit être une résistance pure.

Répondre

- a. 6,25 W;
- b. 6,16 W.

5.7 Circuits triphasés équilibrés

Nous verrons qu'il y a des avantages importants à générer et distribuer de l'énergie avec plusieurs tensions alternatives ayant des phases différentes. Nous considérons le cas le plus courant : trois tensions alternatives d'amplitude égale ayant des phases séparées de 120° . C'est ce qu'on appelle une **source triphasée équilibrée**, dont un exemple est illustré dans

Figure 5.39 [Rappelons que dans la notation à double indice pour les tensions, le premier indice est la référence positive. Ainsi, $v_{un}(t)$ est la tension entre les nœuds u et n avec la référence positive au nœud u .] Dans **Chapitre 16**, nous apprendrons comment les tensions triphasées sont générées.

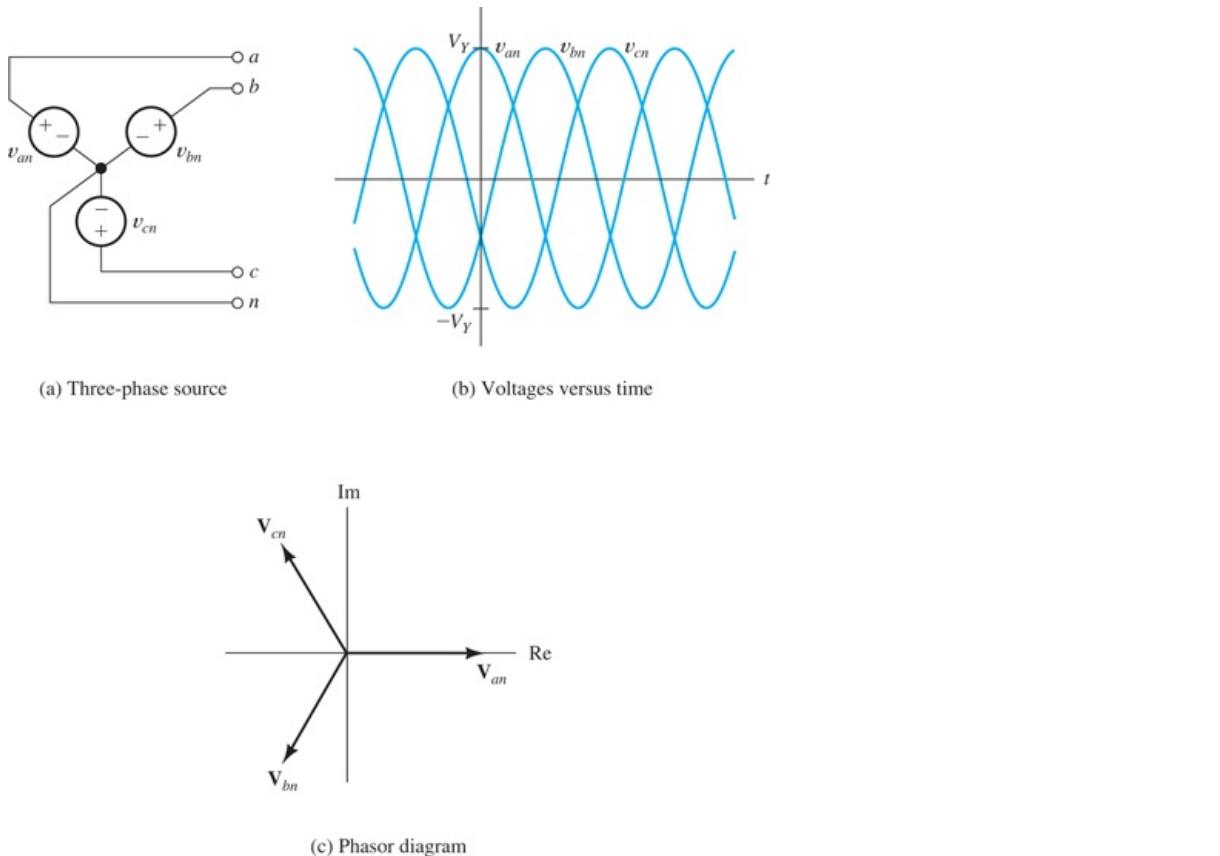


Figure 5.39

Une source de tension triphasée équilibrée.

Une grande partie de l'énergie utilisée par les entreprises et l'industrie est fournie par des systèmes de distribution triphasés. Les ingénieurs d'usine doivent être familiarisés avec l'alimentation triphasée.

La source indiquée dans **Figure 5.39(a)** on dit que c'est **connecté en Y (connecté en Y)**. Plus loin dans ce chapitre, nous considérons une autre configuration, connue sous le nom de delta (Δ) connexion.

Les trois tensions indiquées dans **Figure 5.39(b)** sont donnés par

$$v_{un}(t) = V_Y \cos(\omega t) \quad (5.82)$$

$$v_{bn}(t) = V_Y \cos(\omega t - 120^\circ) \quad (5.83)$$

$$v_{chinois}(t) = V_Y \cos(\omega t + 120^\circ) \quad (5.84)$$

où V est la grandeur de chaque source dans la configuration connectée en étoile. Les phasors correspondants sont

$$V_{un} = V \angle 0^\circ \quad (5.85)$$

$$V_{bn} = V \angle -120^\circ \quad (5.86)$$

$$V_{chinois} = V \angle 120^\circ \quad (5.87)$$

Le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.39\(c\)](#).

Séquence de phases

On dit que cet ensemble de tensions a une **séquence de phase positive** parce que les tensions atteignent leurs valeurs maximales dans l'ordre abc . Se référer à [Figure 5.39\(c\)](#) et remarquez que v_{un} conduit v_{bn} , qui à son tour conduit $v_{chinois}$. (Rappelons que nous pensons que les phasors tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour déterminer les relations de phase.) Si nous interchangions b et c , nous aurions une **séquence de phase négative**, dans lequel l'ordre est acb .

Les sources triphasées peuvent avoir une séquence de phases positive ou négative.

La séquence des phases peut être importante. Par exemple, si nous avons un moteur à induction triphasé, le sens de rotation est opposé pour les deux séquences de phases. Pour inverser le sens de rotation d'un tel moteur, nous intervertirons les b et c connexions. (Vous trouverez peut-être cette information utile si vous travaillez avec des moteurs triphasés, qui sont très courants dans l'industrie.) Étant donné que l'analyse des circuits est très similaire pour les deux séquences de phases, nous ne considérons que la séquence de phases positive dans la majeure partie de la discussion qui suit.

Nous verrons plus loin dans le livre que le sens de rotation de certains moteurs triphasés peut être inversé en changeant l'ordre des phases.

Connexion Wye-Wye

Considérez la source triphasée connectée à une charge triphasée équilibrée illustrée dans [Figure 5.40](#). Les lignes A , B , et C sont appelées **lignes**, et le fil n - N est appelé le **neutre**. Cette configuration est appelée connexion en étoile (**Y**) avec neutre. Par le terme **charge équilibrée**, nous entendons que les trois impédances de charge sont égales. (Dans ce livre, nous ne considérons que les charges équilibrées.)

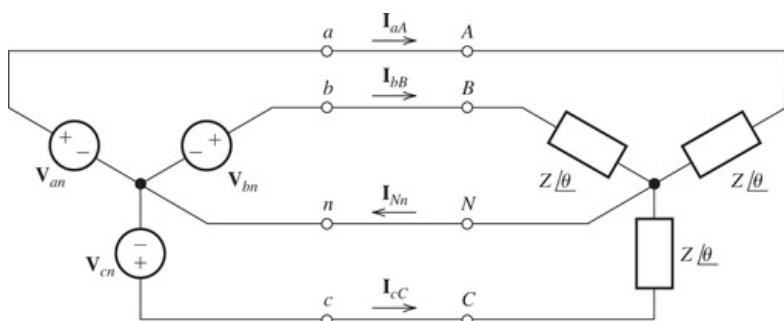


Figure 5.40

Une connexion triphasée en étoile avec neutre.

Les sources et charges triphasées peuvent être connectées soit dans une configuration en étoile, soit dans une configuration en triangle.

Nous verrons plus tard que d'autres configurations sont utiles. Par exemple, le fil neutre n - N peut être omis. De plus, la source et la charge peuvent être connectées sous forme de triangle. Nous verrons que les courants, les tensions et la puissance peuvent être calculés pour ces autres configurations en trouvant un circuit étoile-étoile équivalent. Ainsi, la clé pour comprendre les circuits triphasés est un examen attentif du circuit étoile-étoile.

La clé pour comprendre les différentes configurations triphasées est un examen attentif du circuit étoile-étoile.

Dans [Chapitres 5](#) et [6](#), nous prenons la grandeur d'un phasor comme valeur de crête.

les ingénieurs systèmes utilisent souvent la valeur efficace comme grandeur pour les phasors, ce que nous faisons dans

[Chapitres 14](#) et [15](#). Nous appellerons les phasors rms rms.

Souvent, nous utilisons le terme *phase* pour désigner une partie de la source ou de la charge. Ainsi, la phase U/N de la source est $v_{un}(t)$, et phase U/N de la charge est l'impédance connectée entre U et N . Nous nous référerons à V comme le **tension de phase** ou comme **le tension phase-neutre** de la source connectée en étoile. (Les ingénieurs en systèmes électriques spécifient généralement des valeurs efficaces plutôt que des amplitudes de crête. Sauf indication contraire, nous utilisons des phasors ayant des amplitudes égales aux valeurs de crête plutôt qu'aux valeurs efficaces.) De plus, $j e_{aA}$, $j e_{bB}$ et $j e_{cC}$ sont appelés **courants de ligne**. (Rappelons que dans la notation à double indice pour les courants, la direction de référence va du premier indice au second. Ainsi, $j e_{aA}$ est le courant référencé à partir du nœud u au nœud N , comme illustré dans [Figure 5.38](#)

.)

Le courant en phase U/N de la charge est donnée par

$$j e_{aA} = \frac{V_{un}}{Z_L \angle -\theta} = \frac{V \angle 0^\circ}{Z_L \angle -\theta} = j e_L \angle -\theta$$

où $e_L = V/Z$ est la grandeur du courant de ligne. Comme les impédances de charge sont égales, tous les courants de ligne sont identiques, à l'exception de la phase. Ainsi, les courants sont donnés par

$$j e_{aA}(t) = j e_L \text{ parce que } (\omega t - \theta) \quad (5.88)$$

$$j e_{bB}(t) = j e_L \text{ parce que } (\omega t - 120^\circ - \theta) \quad (5.89)$$

$$j e_{cC}(t) = j e_L \text{ parce que } (\omega t + 120^\circ - \theta) \quad (5.90)$$

Le courant neutre dans [Figure 5.40](#) est donné par

$$j e_{nn}(t) = j e_{aA}(t) + j e_{bB}(t) + j e_{cC}(t)$$

En termes de phasors, c'est

$$\begin{aligned} j e_{nn} &= j e_{aA} + j e_{bB} + j e_{cC} \\ &= j e_L \angle -\theta + j e_L \angle -120^\circ - \theta + j e_L \angle 120^\circ - \theta \\ &= j e_L \angle -\theta \times 1 + 1 \angle -120^\circ + 1 \angle 120^\circ \\ &= j e_L \angle -\theta \times 1 - 0,5 - j 0,866 - 0,5 + j 0,866 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la somme de trois phasors de magnitudes égales et de 120° (Nous utilisons à nouveau ce fait plus loin dans cette section.)

La somme de trois phaseurs de même magnitude et distants de 120° en phase est nulle.

Nous avons montré que le courant neutre est nul dans un système triphasé équilibré. Par conséquent, le fil neutre peut être éliminé sans modifier aucune des tensions ou des courants. Ensuite, les trois tensions sources sont délivrées aux trois impédances de charge avec trois fils.

Le courant neutre est nul dans un système étoile-étoile équilibré. Ainsi, en théorie, le fil neutre peut être inséré ou retiré sans affecter les courants ou les tensions de charge. *pas vrai si la charge est déséquilibrée, ce qui est souvent le cas dans les systèmes de distribution d'énergie réels.*

Un avantage important des systèmes triphasés par rapport aux systèmes monophasés est que le câblage pour connecter les sources aux charges est moins coûteux. Comme le montre [Figure 5.41](#), il faudrait six fils pour connecter trois sources monophasées à trois charges séparément, alors que seulement trois fils (quatre si le fil neutre est utilisé) sont nécessaires pour la connexion triphasée pour obtenir le même transfert de puissance.

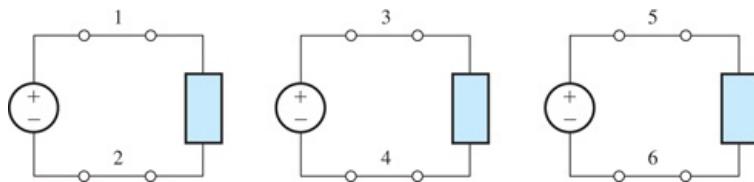


Figure 5.41

Six fils sont nécessaires pour connecter trois sources monophasées à trois charges. Dans un système triphasé, le même transfert de puissance peut être réalisé avec trois fils.

Pouvoir

Un autre avantage des systèmes triphasés équilibrés, par rapport aux systèmes monophasés, est que la puissance totale est constante (en fonction du temps) plutôt que pulsatoire. (Reportez-vous à [Figure 5.2](#) sur la page 220 à voir que la puissance pulse dans le cas monophasé.) Pour montrer que la puissance est constante pour la connexion étoile-étoile équilibrée illustrée dans [Figure 5.40](#), nous écrivons une expression pour la puissance totale. La puissance livré à la phase U_N de la charge est $v_{un}(t)je_aA(t)$. De même, la puissance de chacune des autres phases de la charge est le produit de la tension et du courant. Ainsi, la puissance totale est

$$p(t) = v_{un}(t)je_aA(t) + v_{bn}(t)je_bB(t) + v_{chinois}(t)je_cC(t) \quad (5.91)$$

En utilisant [Équations 5.82](#), [5.83](#), et [5.84](#) pour remplacer les tensions et [Équations 5.88](#), [5.89](#), et [5.90](#) pour remplacer les courants, on obtient

$$\begin{aligned} p(t) = & \text{ parce que } (\omega t)je \text{ parce que } (\omega t - \theta) \cos(\omega t - \\ & + V_Y 120^\circ)je \text{ parce que } (\omega t - \theta - 120^\circ) \\ & + V_Y \text{ parce que } (\omega t + 120^\circ)je \text{ parce que } (\omega t - \theta + 120^\circ) \end{aligned} \quad (5.92)$$

Utilisation de l'identité trigonométrique

$$\text{parce que } (x) \cos(et) = \frac{1}{2} \cos(x - et) + \frac{1}{2} \cos(x + et)$$

nous constatons que **Équation 5.92** peut être écrit comme

$$p(t) = 3 \frac{V}{2} \text{ parce que } (\theta) + \frac{V j e^j \cos(2\omega t - \theta)}{2} + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 480^\circ) \quad (5.93)$$

Cependant, le terme entre parenthèses est

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 480^\circ) \\ = \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta + 120^\circ) + \cos(2\omega t - \theta - 120^\circ) = 0 \end{aligned}$$

(Ici, nous avons utilisé le fait, établi précédemment, que la somme est nulle pour trois ondes sinusoïdales d'amplitude égale et séparées de 120° en phase.) Ainsi, l'expression de la puissance devient

$$p(t) = 3 \frac{V}{2} \text{ parce que } (\theta) \quad (5.94)$$

Notez que la puissance totale est constante dans le temps. Une conséquence de ce fait est que le couple nécessaire pour entraîner un générateur triphasé connecté à une charge équilibrée est constant et que les vibrations sont réduites. De même, le couple produit par un moteur triphasé est constant plutôt que pulsatoire comme c'est le cas pour un moteur monophasé.

Dans les systèmes triphasés équilibrés, le flux de puissance total est constant dans le temps.

La tension efficace de chaque ligne au neutre est

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{V^2}{2}} \quad (5.95)$$

De même, la valeur efficace du courant de ligne est

$$j e_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{j e^2}{2}} \quad (5.96)$$

En utilisant **Équations 5.95** et **5.96** remplacer par **Équation 5.94**, nous constatons que

Dans **Équations 5.97** et **5.98**, V_{RMS} est la tension efficace entre la ligne et le neutre, $j e_{\text{RMS}}$ est le RMS courant de ligne, et θ est l'angle des impédances de charge.

$$P_{\text{moyenne}} = p(t) = 3 V_{\text{RMS}} j e_{\text{RMS}} \text{ parce que } (\theta) \quad (5.97)$$

Puissance réactive

Comme dans les circuits monophasés, l'énergie circule dans les deux sens entre les sources et les éléments de stockage d'énergie contenus dans une charge triphasée. Cette énergie est appelée *puissance réactive*. Les courants plus élevés résultant de la présence de puissance réactive nécessitent un câblage et d'autres composants de distribution d'énergie ayant des valeurs nominales plus élevées. La puissance réactive délivrée à une charge triphasée équilibrée est donnée par

$$Q = 3 \frac{V}{2} j e_{\text{RMS}} \text{ péché } (\theta) = 3 V_{\text{RMS}} j e_{\text{RMS}} \text{ péché } (\theta) \quad (5.98)$$

Tensions entre phases

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les tensions entre les bornes a, b , ou c et le point neutre n sont appelés **tensions phase-neutre**. D'autre part, les tensions entre a et b , b et c , ou a et c sont appelés **tensions entre phases** ou, plus simplement, **tensions de ligne**. Ainsi V_{un} , V_{bn} , et $V_{chinois}$ sont des tensions phase-neutre, tandis que V_{ab} , $V_{avant J.-C.}$, et $V_{Californie}$ sont des tensions entre phases. (Pour des raisons de cohérence, nous choisissons les indices de manière cyclique dans l'ordre abc .) Considérons les relations entre les tensions composées et les tensions composées-neutres.

Nous pouvons obtenir la relation suivante en appliquant KVL à [Figure 5.40](#) :

$$V_{un} = V_{un} - V_{bn}$$

En utilisant [Équations 5.85](#) et [5.86](#) remplacer V_{un} et V_{bn} , nous obtenons

$$V_{un} = V_Y \angle 0^\circ - V_Y \angle -120^\circ \quad (5.99)$$

ce qui équivaut à

$$V_{un} = V_Y \angle 0^\circ + V_Y \angle 60^\circ \quad (5.100)$$

Cette relation est illustrée dans [Figure 5.42](#). On peut montrer que [Équation 5.100](#) réduit à

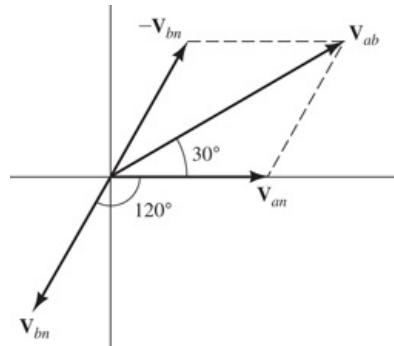


Figure 5.42

Diagramme de phase montrant la relation entre la tension ligne à ligne V_{un} et les tensions phase-neutre V_{un} et V_{bn} .

$$V_{un} = \sqrt{3} V_Y \angle 30^\circ \quad (5.101)$$

Nous désignons l'amplitude de la tension entre phases par V_L . L'amplitude de la tension entre phases est $\sqrt{3}$ fois l'amplitude de la tension phase-neutre :

$$V_L = \sqrt{3} V_Y \quad (5.102)$$

Ainsi, la relation entre la tension ligne à ligne V_{un} et la tension phase-neutre V_{un} est

$$V_{un} = V_{un} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (5.103)$$

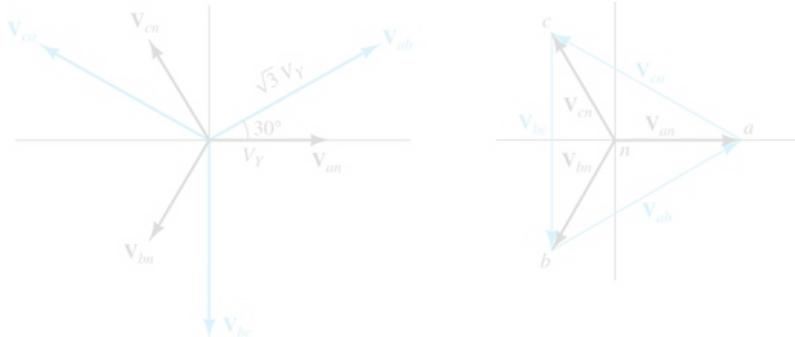
De même, on peut montrer que

$$V_{avant J.-C.} = V_{bn} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (5.104)$$

et

$$V_{Californie} = V_{chinois} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \quad (5.105)$$

Ces tensions sont indiquées en [Figure 5.43](#).



(a) All phasors starting from the origin

(b) A more intuitive way to draw the phasor diagram

Figure 5.43

Diagramme de phase montrant les tensions entre phases et les tensions entre phases et neutre

Figure 5.43(b) fournit un moyen pratique de mémoriser les relations de phase entre tensions composées et composées-neutres.

Exemple 5.14 Analyse d'un système en étoile

Une source triphasée à séquence positive équilibrée connectée en étoile de 60 Hz a des tensions phase-neutre de $V_Y = 1000 \text{ V}$. Cette source est connectée à une charge connectée en étoile équilibrée. Chaque phase de la charge est constituée d'une inductance de $0,1 \text{ H}$ en série avec une $50 - \Omega$ résistance. Trouvez les courants de ligne, les tensions entre phases, la puissance et la puissance réactive délivrées à la charge. Dessinez un diagramme de phase montrant les tensions entre phase et neutre, les tensions entre phases et les courants de ligne. Supposons que l'angle de phase de V_{un} est nul.

Solution

Tout d'abord, en calculant l'impédance complexe de chaque phase de la charge, nous constatons que

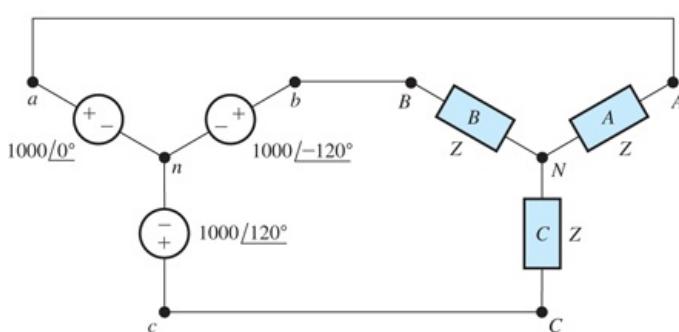
$$Z = R + j\omega L = 50 + j2\pi(60)(0,1) = 50 + j37,70 \\ = 62,62 \angle 37,02^\circ$$

Ensuite, nous dessinons le circuit comme indiqué dans [Figure 5.44\(a\)](#). Dans les calculs en étoile-étoile équilibrés, nous pouvons supposer que n et N sont connectés. (Les courants et les tensions sont les mêmes, que la connexion neutre existe ou non.) Ainsi, V_{un} apparaît à travers la phase U de la charge, et nous pouvons écrire

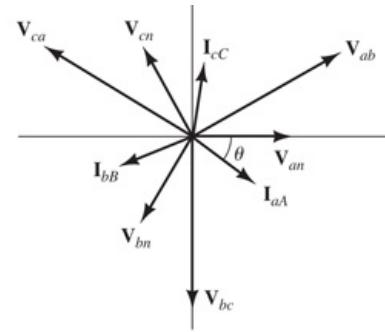
$$j\varrho_A = \frac{V_{un}}{Z} = \frac{1000 \angle 0^\circ}{62,62 \angle 37,02^\circ} = 15,97 \angle -37,02^\circ$$

De la même manière,

$$j\varrho_B = \frac{V_{bn}}{Z} = \frac{1000 \angle -120^\circ}{62,62 \angle 37,02^\circ} = 15,97 \angle -157,02^\circ \\ j\varrho_C = \frac{V_{chinois}}{Z} = \frac{1000 \angle 120^\circ}{62,62 \angle 37,02^\circ} = 15,97 \angle 82,98^\circ$$



(a) Circuit diagram



(b) Phasor diagram

Figure 5.44

Schéma de circuit et de phaseur pour [Exemple 5.14](#).

Nous utilisons [Équations 5.103](#), [5.104](#), et [5.105](#) pour trouver les phasors ligne à ligne :

$$\begin{aligned} V_{unb} &= V_{un} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ = 1732 \angle 30^\circ \\ V_{avan-j-c} &= V_{bn} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ = 1732 \angle -90^\circ \\ V_{California} &= V_{chinois} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ = 1732 \angle 150^\circ \end{aligned}$$

La puissance délivrée à la charge est donnée par [Équation 5.94](#):

$$P = 3 \frac{VI}{2} \text{ parce que } (\theta) = 3 \frac{1000 \times 15,97}{2} \cos(37,02^\circ) = 19,13 \text{ kW}$$

La puissance réactive est donnée par [Équation 5.98](#):

$$Q = 3 \frac{Vj\varrho}{2} \text{ Péché } (\theta) = 3 \frac{1000 \times 15,97}{2} \sin(37,02^\circ) = 14,42 \text{ kVAR}$$

Le diagramme de phase est montré dans [Figure 5.44\(b\)](#). Comme d'habitude, nous avons choisi une échelle différente pour la [5.44\(b\)](#) courants que pour les tensions.

Exercice 5.16

Une source triphasée à séquence positive équilibrée connectée en étoile de 60 Hz a des tensions ligne à ligne de $V_L = 1000 \text{ V}$. Cette source est connectée à une charge connectée en étoile équilibrée. Chaque phase de la charge est constituée d'une inductance de $0,2 \text{ H}$ en série avec une $100 - \Omega$ résistance. Trouvez les tensions phase-neutre, les courants de ligne, la puissance et la puissance réactive délivrées à la charge. Supposons que la phase de V_{un} est nul.

Répondre $V_{un} = 577,4 \angle 0^\circ$, $V_{bn} = 577,4 \angle -120^\circ$, $V_{chinois} = 577,4 \angle 120^\circ$; $j e_{aA} = 4,61 \angle -37^\circ$, $j e_{bB} = 4,61 \angle -157^\circ$, $j e_{cC} = 4,61 \angle 83^\circ$; $P = 3,19 \text{ kW}$; $Q = 2,40 \text{ kVAR}$.

Sources connectées au delta

Un ensemble de sources de tension triphasées équilibrées peut être connecté sous la forme d'un delta, comme illustré dans **Figure 5.45**. En règle générale, nous évitons de connecter des sources de tension en boucle fermée. Cependant, dans ce cas, il il s'avère que la somme des tensions est nulle :

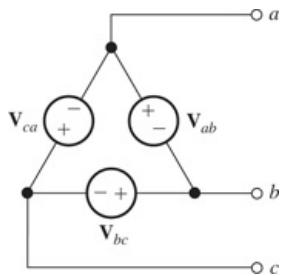


Figure 5.45

Source triphasée connectée en triangle.

$$V_{un} + V_{avant J.-C.} + V_{Californie} = 0$$

Ainsi, le courant circulant dans le triangle est nul. (En fait, il s'agit d'une première approximation. Il existe de nombreuses subtilités des systèmes de distribution d'énergie qui dépassent le cadre de notre discussion. Par exemple, les tensions dans les systèmes de distribution d'énergie réels ne sont pas exactement sinusoïdales ; elles sont plutôt la somme de plusieurs composantes harmoniques. Le comportement des composantes harmoniques est un facteur important dans le choix entre des sources ou des charges connectées en étoile et en triangle.)

Pour une source connectée en triangle donnée, nous pouvons trouver une source connectée en étoile équivalente (ou vice versa) en utilisant **Équations 5.103** à travers **5.105**. De toute évidence, une source connectée en triangle n'a pas de point neutre, donc une connexion à quatre fils n'est possible que pour une source connectée en étoile.

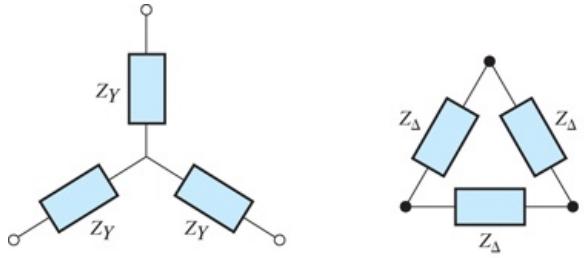
Charges connectées en étoile et en triangle

Les impédances de charge peuvent être connectées en étoile ou en triangle, comme indiqué dans **Figure 5.46**

Cela peut être montré que les deux charges sont équivalentes si

$$Z_\Delta = 3Z_Y \quad (5.106)$$

Ainsi, nous pouvons convertir une charge connectée en triangle en une charge équivalente connectée en étoile, ou vice versa.



(a) Wye-connected load

(b) Delta-connected load

Figure 5.46

Les charges peuvent être connectées en étoile ou en triangle.

Connexion Delta-Delta

Figure 5.47 montre une source connectée en triangle fournissant de l'énergie à une charge connectée en triangle. Nous supposons que les tensions sources sont données par

$$V_{un b} = V_L \angle 30^\circ \quad (5.107)$$

$$V_{avant J.-C.} = V_L \angle -90^\circ \quad (5.108)$$

$$V_{Californie} = V_L \angle -150^\circ \quad (5.109)$$

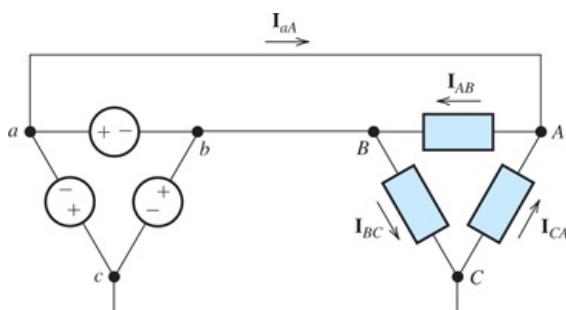


Figure 5.47

Une source connectée en triangle fournissant de l'énergie à une charge connectée en triangle.

Ces phasors sont représentés dans **Figure 5.43** (source plus). Nous avons choisi les angles de phase du delta-connecté être cohérent avec notre discussion précédente.)

Si les impédances des fils de connexion sont nulles, les tensions entre phases au niveau de la charge sont égales à celles à la source. Ainsi $V_{un B} = V_{Colombie-Britannique} = V_{avant J.-C.}$ et $V_{Californie} = V_{un b}$. Nous supposons que l'impédance de chaque phase de la charge est Z_Δ . Ensuite, le courant de charge pour la phase $Un B$ est

$$j e_{un B} = \frac{V_{un B}}{Z_\Delta \angle \theta} = \frac{V_{un b}}{Z_\Delta \angle \theta} \frac{V \angle 30^\circ}{Z_\Delta \angle \theta} = \frac{V \angle 30^\circ - \theta}{Z_\Delta}$$

Nous définissons l'amplitude du courant comme

$$je\Delta = \frac{V_L}{Z_\Delta} \quad (5.110)$$

Ainsi,

$$je_{UnB} = je\Delta \angle 30^\circ - \theta \quad (5.111)$$

De la même manière,

$$je_{Colombie-Britannique} = je\Delta \angle -90^\circ - \theta \quad (5.112)$$

$$je_{Californie} = je\Delta \angle 150^\circ - \theta \quad (5.113)$$

Le courant en ligne $un-U$ est

$$\begin{aligned} je_{aA} &= je_{UnB} - je_{Californie} \\ &= je\Delta \angle 30^\circ - \theta - je\Delta \angle 150^\circ - \theta \\ &= je\Delta \angle 30^\circ - \theta \times 1 - 1 \angle 120^\circ \\ &= je\Delta \angle 30^\circ - \theta \times 1,5 - j0,8660 \\ &= je\Delta \angle 30^\circ - \theta \times \sqrt{3} \angle -30^\circ \\ &= je_{UnB} \times \sqrt{3} \angle -30^\circ \end{aligned}$$

L'amplitude du courant de ligne est

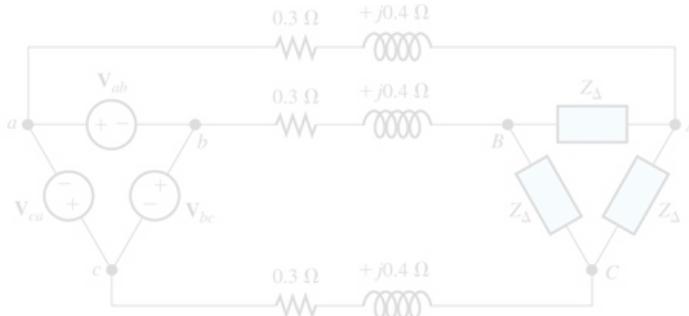
$$je_l = \sqrt{3}je\Delta \quad (5.114)$$

Pour une charge connectée en triangle équilibré, l'amplitude du courant de ligne est égale à la racine carrée de trois fois l'amplitude du courant dans n'importe quel bras du triangle.

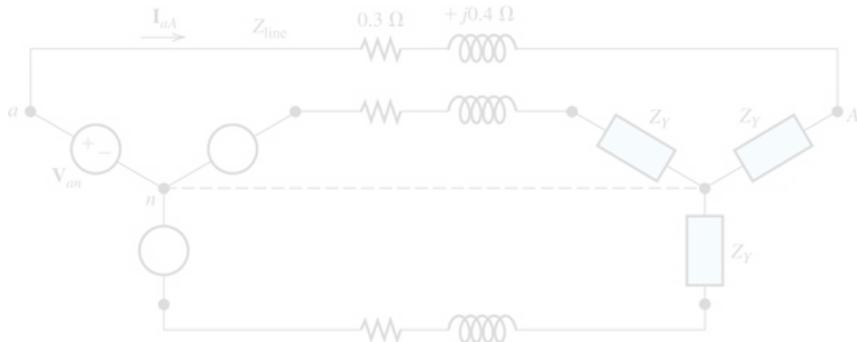
Exemple 5.15 Analyse d'un système delta-delta équilibré

Considérez le circuit illustré dans **Figure 5.48(a)**. Une source connectée en triangle fournit de l'énergie à un triangle-charge connectée via des fils ayant des impédances de $Z_{doubler} = 0,3 + j0,4\Omega$. Les impédances de charge sont $Z = 30 + j6$. Les tensions sources sont

$$\begin{aligned} V_{unB} &= 1000 \angle 30^\circ \\ V_{avant-J.C.} &= 1000 \angle -90^\circ \\ V_{Californie} &= 1000 \angle 150^\circ \end{aligned}$$



(a) Original circuit



(b) Wye-connected equivalent circuit

Figure 5.48

Circuit de [Exemple 5.15](#)

Trouvez le courant de ligne, la tension ligne à ligne au niveau de la charge, le courant dans chaque phase de la charge, la puissance délivrée à la charge et la puissance dissipée dans la ligne.

Solution

Tout d'abord, nous trouvons les équivalents connectés en étoile pour la source et la charge. (En fait, nous n'avons besoin de travailler qu'avec un tiers du circuit car les deux autres tiers sont les mêmes, à l'exception des angles de phase.) Nous choisissons de travailler avec le U/Nphase du circuit équivalent en étoile. Résolution [Équation 5.103](#) pour V_{un} ,

nous constatons que

$$V_{un} = \sqrt{\frac{V_{un,b}}{3}} \angle -30^\circ = \sqrt{\frac{1000}{3}} \angle -30^\circ = 577.4 \angle -30^\circ$$

Souvent, il est pratique de commencer une analyse en trouvant l'équivalent étoile-étoile d'un système.

En utilisant [Équation 5.106](#), nous avons

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} = \frac{30 + j6}{3} = 10 + j2$$

Maintenant, nous pouvons dessiner le circuit équivalent en étoile, qui est représenté dans [Figure 5.48\(b\)](#).

Dans un système étoile-étoile équilibré, nous pouvons considérer que les points neutres sont connectés ensemble comme indiqué par la ligne pointillée dans [Figure 5.48\(b\)](#). Grâce à [le principe triphasé à trois circuits monophasés](#), nous pouvons écrire

$$V_{un} = Z_{\text{doubler}} + Z_Y j e_a A$$

Donc,

$$\begin{aligned}
j_e_{aA} &= \frac{V_{Un}}{Z_{doubler+Z_Y}} = \frac{577,4 \angle 0^\circ}{0,3 + j0,4 + 10 + j2} \\
&= \frac{577,4 \angle 0^\circ}{10,3 + j2,4} = \frac{577,4 \angle 0^\circ}{10,58 \angle 13,12^\circ} \\
&= 54,60 \angle -13,12^\circ
\end{aligned}$$

Pour trouver la tension phase-neutre à la charge, nous écrivons

$$\begin{aligned}
V_{Un} &= j e_{aA} Z_Y = 54,60 \angle -13,12^\circ \times (10 + j2) \\
&= 54,60 \angle -13,12^\circ \times 10,20 \angle 1,31^\circ \\
&= 556,9 \angle -1,81^\circ
\end{aligned}$$

Maintenant, nous calculons la tension ligne à ligne au niveau de la charge :

$$\begin{aligned}
V_{UnB} &= V_{Un} \times \sqrt{3} \angle 30^\circ = 556,9 \angle -1,81^\circ \times \sqrt{3} \angle 30^\circ \\
&= 964,6 \angle 28,19^\circ
\end{aligned}$$

Le courant traversant la phase UnB de la charge est

$$\begin{aligned}
j_e_{UnB} &= \frac{V_{UnB}}{Z_A} = \frac{964,6 \angle 28,19^\circ}{30 + j6} = \frac{964,6 \angle 28,19^\circ}{30,59 \angle 11,31^\circ} \\
&= 31,53 \angle 16,88^\circ
\end{aligned}$$

La puissance délivrée à la phase UnB de la charge est le courant efficace au carré multiplié par la résistance :

$$P_{UnB} = j e_{UnB} R_{MS} = \frac{31,53}{2}^2 (30) = 14,91 \text{ kW}$$

Les puissances délivrées aux deux autres phases de la charge sont les mêmes, donc la puissance totale est

$$P = 3 P_{UnB} = 44,73 \text{ kW}$$

La puissance perdue dans la ligne UV est

$$P_{doublerUV} = j e_{aA} R_{doubler} = \frac{54,60}{2}^2 (0,3) = 0,447 \text{ kW}$$

La puissance perdue dans les deux autres lignes est la même, donc la perte de ligne totale est

$$P_{doubler} = 3 \times P_{doublerUV} = 1,341 \text{ kW}$$

Exercice 5.17

Une source connectée en triangle a des tensions données par

$$\begin{aligned}
V_{unb} &= 1000 \angle 30^\circ \\
V_{avanJ-C} &= 1000 \angle -90^\circ \\
V_{Californie} &= 1000 \angle 150^\circ
\end{aligned}$$

Cette source est connectée à une charge connectée en triangle composée de $50 - \Omega$ résistances. Trouvez les courants de ligne et la puissance délivrée à la charge.

Répondre $j e_{aA} = 34,6 \angle 0^\circ, j e_{bB} = 34,6 \angle -120^\circ, j e_{cC} = 34,6 \angle 120^\circ; P = 30 \text{ kW.}$

5.8 Analyse AC avec MATLAB

Dans cette section, nous allons illustrer comment MATLAB peut grandement faciliter l'analyse de circuits alternatifs complexes. En fait, un ingénieur en exercice travaillant sur un ordinateur n'aura peut-être pas grand intérêt à utiliser une calculatrice, car il est facile de garder une fenêtre MATLAB ouverte pour toutes sortes de calculs d'ingénierie. Bien sûr, vous aurez probablement besoin d'utiliser des calculatrices pour les examens de cours et lorsque vous passerez les examens d'ingénieur professionnel (PE). Les examens PE n'autorisent que des calculatrices scientifiques assez simples, et vous devriez vous entraîner avec l'une de celles autorisées avant de tenter les examens.

Données complexes dans MATLAB

Par défaut, MATLAB suppose que $j = \sqrt{-1}$. Cependant, j'ai rencontré au moins un bug dans le logiciel attribuable à l'utilisation j au lieu de i , et donc je recommande d'utiliser i dans MATLAB et la Symbolic Toolbox. Nous devons faire attention à ne pas utiliser j à d'autres fins lors de l'utilisation de MATLAB pour analyser les circuits à courant alternatif. Par exemple, si nous devions utiliser j comme nom d'une variable courante ou autre, nous rencontrions plus tard des erreurs si nous utilisions également j pour l'unité imaginaire sans réaffecter sa valeur.

Les nombres complexes sont représentés sous forme rectangulaire (comme $3 + 4i$ ou alternativement $3 + i * 4$) dans MATLAB.

Nous pouvons utiliser le fait que $M\angle\theta = M\exp(j\theta)$ pour saisir des données polaires. Dans MATLAB, les angles sont supposés être en radians, nous devons donc multiplier les angles exprimés en degrés par $\pi/180$ pour convertir en radians avant de les saisir. Par exemple, nous utilisons la commande suivante pour saisir la tension $V_m = 5 \angle -5^\circ$:

```
>> Vs = 5*carré(2)*exp(i*45*pi/180) Contre =
```

```
5.0000 + 5.0000i
```

Nous pouvons facilement vérifier que MATLAB a correctement calculé la forme rectangulaire de $5 \angle -5^\circ$.

Alternativement, nous pourrions utiliser la formule d'Euler

$$M\angle\theta = M\exp(j\theta) = M[\cos(\theta) + j\sin(\theta)]$$

pour saisir des données polaires, toujours avec des angles en radians. Par exemple, $V_m = 5 \angle -5^\circ$ peut être saisi comme :

```
>> Vs = 5*carré(2)*cos(45*pi/180) + i*5*carré(2)*sin(45*pi/180) Contre =
```

```
5.0000 + 5.0000i
```

Les valeurs qui sont déjà sous forme rectangulaire peuvent être saisies directement. Par exemple, pour saisir $Z = 3 + j4$, nous utilisons la commande :

```
>> Z = 3 + i*4
```

```
Z =
```

```
3.0000 + 4.0000i
```

Alors, si nous entrons

```
>> Ix = Vs/Z
```

```
Ix =
```

```
1.4000 - 0.2000i
```

MATLAB effectue l'arithmétique complexe et donne la réponse sous forme rectangulaire.

Trouver la forme polaire des résultats MATLAB

Souvent, nous avons besoin de la forme polaire d'une valeur complexe calculée par MATLAB. Nous pouvons trouver la grandeur à l'aide de la commande `abs` et l'angle en radians à l'aide de la commande `angle`. Pour obtenir l'angle en degrés, nous devons convertir l'angle en radians en multipliant par $180/\pi$. Ainsi, pour obtenir la grandeur et l'angle en degrés pour `Vs`, nous entrerions les commandes suivantes :

```
>> abdos (vs)%Trouvez la grandeur de Vs.ans =  
7.0711  
>> (180/pi)*angle(Vs)%Trouvez l'angle de Vs en degrés.ans =  
45.0000
```

Ajout de nouvelles fonctions à MATLAB

Comme nous souhaitons souvent saisir des valeurs ou voir des résultats sous forme polaire avec les angles en degrés, il est pratique d'ajouter deux nouvelles fonctions à MATLAB. Ainsi, nous écrivons un fichier m, nommé pin.m, contenant les commandes pour convertir de la forme polaire à la forme rectangulaire, et nous le stockons dans notre dossier de travail MATLAB. Les commandes du fichier m sont :

```
fonction z = pin (magnitude, angle en degrés) z =
magnitude*exp(j*angleendegrés*pi/180)
```

Ensuite, nous pouvons entrer $V_s = \sqrt{2} \angle 45^\circ$ simplement en tapant la commande :

```
>> Vs = broche(5*carré(2),45)
Contre =
5.0000 + 5.0000i
```

Nous avons choisi pin comme nom de cette nouvelle fonction pour suggérer une « entrée polaire ». Ce fichier est inclus dans le dossier MATLAB. (Voir [Annexe E](#) pour plus d'informations sur l'accès à ce dossier.)

De même, pour obtenir la forme polaire d'une réponse, nous créons une nouvelle fonction, nommée pout (pour suggérer « polar out »), avec les commandes :

```
fonction [y] = pout(x);
grandeur = abs(x);
angle en degrés = (180/pi)*angle(x); y =
[angle de grandeur en degrés];
```

qui sont stockées dans le fichier m nommé pout.m. Ensuite, pour trouver la forme polaire d'un résultat, nous pouvons utiliser la nouvelle fonction. Par exemple,

```
>> faire la moue(Vs)
ans =
7.0711    45.0000
```

Voici un autre exemple simple :

```
>> moue(i*200)
ans =
200 90
```

Résolution d'équations de réseau avec MATLAB

Nous pouvons facilement résoudre les équations de tension de nœud ou de maillage et effectuer d'autres calculs pour les circuits à courant alternatif dans MATLAB. Les étapes sont les suivantes :

1. Écrivez les équations de courant de maillage ou de tension de nœud.
2. Mettez les équations sous forme de matrice, ce qui est $ZI = V$ pour les courants de maille, dans lesquels Z est la matrice des coefficients, j est le vecteur colonne des variables courantes du maillage à trouver, et V est le vecteur colonne des termes constants. Pour les tensions de nœuds, les équations matricielles prennent la forme $YV = j$ dans lequel Y est le

matrice de coefficients, \mathbf{V} est le vecteur colonne des variables de tension des nœuds à déterminer, et $\mathbf{j}\mathbf{e}$ est le vecteur colonne des constantes.

3. Entrez les matrices dans MATLAB et calculez les courants de maillage ou les tensions de nœuds en utilisant l'approche de matrice inverse. $\mathbf{j}\mathbf{e} = \text{inv}(\mathbf{Z})\mathbf{V}$ pour les courants de maille ou $\mathbf{V} = \text{inv}(\mathbf{Y})\mathbf{j}\mathbf{e}$ pour les tensions de nœud, où inv désigne l'inverse de la matrice.
4. Utilisez les résultats pour calculer d'autres quantités d'intérêt.

Exemple 5.16 Analyse du courant de maillage de phase avec MATLAB

Déterminer les valeurs des courants de maille, la puissance réelle fournie par \mathcal{V}_1 , et la puissance réactive fournie par \mathcal{V}_2 dans le circuit de [Figure 5.49](#).

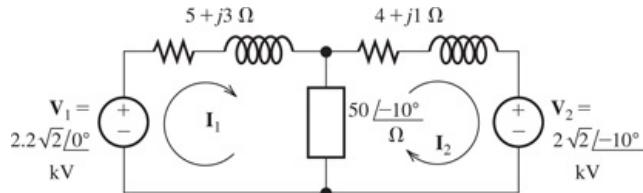


Figure 5.49

Circuit pour [Exemple 5.16](#).

Solution

Tout d'abord, nous appliquons KVL à chaque boucle en obtenant les équations maillage-courant :

$$\begin{aligned} 5 + j3 - jI_1 + 50 \angle -10^\circ - jI_1 - jI_2 &= 2200 \sqrt{2} \\ 50 \angle -10^\circ - jI_2 - jI_1 + (4 + j)jI_2 + 2000 \sqrt{2} \angle 30^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, ces équations deviennent

$$\begin{bmatrix} 5 + j3 + 50 \angle -10^\circ & -50 \angle -10^\circ \\ -50 \angle -10^\circ & 4 + j + 50 \angle -10^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} jI_1 \\ jI_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2200 \sqrt{2} \\ -2000 \sqrt{2} \angle -30^\circ \end{bmatrix}$$

Nous allons résoudre ces équations pour jI_1 et jI_2 . Ensuite, nous calculerons la puissance complexe délivrée par \mathcal{V}_1

$$S_1 = \frac{1}{2} \mathcal{V}_1 \mathbf{j}I_1^*$$

Finalement, le pouvoir est la vraie partie de S_1 et la puissance réactive est la partie imaginaire.

Nous entrons dans la matrice des coefficients \mathbf{Z} et la matrice de tension \mathbf{V} dans MATLAB, en utilisant notre nouvelle fonction `pin` pour entrer des valeurs polaires. Ensuite, nous calculons la matrice actuelle.

```
>> Z = [(5 + i*3 + broche(50,-10)) (-pin(50,-10));...
(-broche(50,-10)) (4 + i + broche(50,-10))];
```

```
>> V = [2200*sqrt(2); -pin(2000*sqrt(2),-10)];
```

```
>> Je = inv(Z)*V
```

```
=
```

```
74.1634 + 29.0852i
```

```
17.1906 + 26.5112i
```

Cela nous a donné les valeurs des courants de maillage sous forme rectangulaire. Ensuite, nous obtenons la forme polaire pour les courants de maillage, en utilisant notre nouvelle fonction `pout` :

```
>> faire la moue(I(1))
```

ans =

79.6628 21.4140

```
>> faire la moue(I(2))
```

ans =

31.5968 57.0394

Ainsi, les courants sont $i_1 = 79,66 \angle 21,41^\circ$ A et $i_2 = 31,60 \angle 57,04^\circ$ A, arrondi à deux décimales lieux. Ensuite, nous calculons la puissance complexe, la puissance réelle et la puissance réactive pour la première source.

$$S_1 = 1V_{211}^*$$

```
>> S1 = (1/2)*(2200*carré(2))*conj(I(1));
```

```
>> P1 = réel(S1) P1
```

=

1.1537e + 005

```
>> Q1 = image(S1)
```

Q1 =

- 4.5246e + 004

Ainsi, l'énergie fournie par V_1 est de 115,37 kW et la puissance réactive est de -45,25 kVAR. Les commandes de cet exemple apparaissent dans le fichier m nommé Example_5_16.

Exercice 5.18

Utilisez MATLAB pour résoudre les tensions des nœuds de phase sous forme polaire pour le circuit de [Figure 5.50](#).

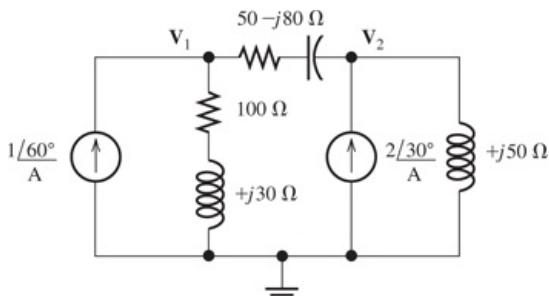


Figure 5.50

Circuit pour [Exercice 5.18](#).



Répondre Les commandes MATLAB sont :

```
effacer tout
```

```
Y = [(1/(100+i*30)+1/(50-i*80)) (-1/(50-i*80));... (-1/(50-i*80)) (1/(i*50)+1/(50-i*80))];
```

```
je = [broche(1,60); broche(2,30)];
```

```
V = inv(Y)*I;
```

```
moue(V(1))
```

```
moue(V(2))
```

et les résultats sont $V_1 = 79,98 \angle 106,21^\circ$ et $V_2 = 124,13 \angle 16,30^\circ$.

Résumé

1. Une tension sinusoïdale est donnée par $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$, où V_m est la valeur de crête de la tension, ω est la fréquence angulaire en radians par seconde, et θ est l'angle de phase. La fréquence en hertz est $f = 1/T$, où T est la période. De plus, $\omega = 2\pi f$.
2. Pour des raisons d'uniformité, nous exprimons les tensions sinusoïdales en termes de fonction cosinus. Une fonction sinusoïdale peut être convertie en fonction cosinus en utilisant l'identité $\sin(\theta) = \cos(-90^\circ)$.
3. La valeur efficace (ou valeur efficace) d'une tension périodique $v(t)$ est

$$V_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

La puissance moyenne délivrée à une résistance par $v(t)$ est

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{V_{\text{RMS}}^2}{R}$$

De même, pour un courant $i(t)$, nous avons

$$j_{\text{erms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T j^2(t) dt}$$

et la puissance moyenne délivrée si $j(t)$ traverse une résistance est

$$P_{\text{moyenne}} = j_{\text{erms}}^2 R$$

Pour une sinusoïde, la valeur efficace est la valeur de crête divisée par $\sqrt{2}$.

4. Nous pouvons représenter les sinusoïdes à l'aide de phaseurs. La grandeur du phaseur est la valeur maximale de la sinusoïde. L'angle de phase du phaseur est l'angle de phase de la sinusoïde (en supposant que nous ayons écrit la sinusoïde en termes de fonction cosinus).
5. Nous pouvons ajouter (ou soustraire) des sinusoïdes en ajoutant (ou en soustrayant) leurs phasors.
6. La tension du phasor pour un circuit passif est le courant du phasor multiplié par l'impédance complexe du circuit. Pour une résistance, $V_R = R I_R$, et la tension est en phase avec le courant. Pour une inductance, $V_L = j\omega L I_L$, et la tension devance le courant de 90° . Pour une capacité, $V_C = -j(1/\omega C) I_C$, et la tension est en retard de 90° sur le courant.
7. De nombreuses techniques apprises en [Chapitre 2](#) pour les circuits résistifs peuvent être appliquées directement aux circuits sinusoïdaux circuits si les courants et les tensions sont remplacés par des phaseurs et les éléments passifs du circuit sont remplacés par leurs impédances complexes. Par exemple, les impédances complexes peuvent être combinées en série ou en parallèle de la même manière que les résistances (à l'exception du fait qu'il faut utiliser une arithmétique complexe). Les tensions de nœud, le principe de division du courant et le principe de division de la tension s'appliquent également aux circuits à courant alternatif.
8. Lorsqu'un courant sinusoïdal traverse une tension sinusoïdale, la puissance moyenne délivrée est $P = V_{\text{RMS}} j_{\text{erms}}$ parce que (θ) , où θ est l'angle de puissance, qui est trouvé en soustrayant l'angle de phase du courant de l'angle de phase de la tension (c'est-à-dire, $\theta = \theta_v - \theta_i$). Le facteur de puissance est donc $\cos(\theta)$.
9. La puissance réactive est le flux d'énergie aller-retour entre la source et les éléments de stockage d'énergie (*Let C*). Nous définissons la puissance réactive comme étant positive pour une inductance et négative pour une capacité. L'énergie nette transférée par cycle par le flux de puissance réactive est nulle. La puissance réactive est importante car un système de distribution d'énergie doit avoir des valeurs nominales de courant plus élevées si la puissance réactive circule que ce qui serait nécessaire pour une puissance réactive nulle.
10. La puissance apparente est le produit de la tension efficace et du courant efficace. De nombreuses relations utiles entre la puissance, la puissance réactive, la puissance apparente et l'angle de puissance peuvent être obtenues à partir des triangles de puissance représentés dans [Figure 5.25](#) sur la page [244](#).
11. En régime permanent, un réseau composé de résistances, d'inductances, de capacités et de sources sinusoïdales (toutes de la même fréquence) a un équivalent de Thévenin constitué d'une tension de phaseur

source en série avec une impédance complexe. L'équivalent de Norton consiste en une source de courant de phaseur en parallèle avec l'impédance de Thévenin.

12. Pour un transfert de puissance maximal d'un circuit alternatif à deux bornes vers une charge, l'impédance de charge est choisie comme étant le conjugué complexe de l'impédance de Thévenin. Si la charge est contrainte d'être une résistance pure, la valeur du transfert de puissance maximal est égale à la grandeur de l'impédance de Thévenin.
13. En raison des économies de câblage, la distribution d'énergie triphasée est plus économique que la distribution monophasée. Le flux d'énergie dans les systèmes triphasés équilibrés est régulier, tandis que la puissance est pulsatoire dans les systèmes monophasés. Ainsi, les moteurs triphasés ont généralement l'avantage de produire moins de vibrations que les moteurs monophasés.

Problèmes

Section 5.1 : Courants et tensions sinusoïdaux

P5.1. Considérez le tracé de la tension sinusoïdale $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$ montré dans [Figure 5.1](#) sur la page [216](#) et les déclarations suivantes :

1. Étire la courbe sinusoïdale verticalement.
2. Comprime la courbe sinusoïdale verticalement.
3. Étire la courbe sinusoïdale horizontalement.
4. Comprime la courbe sinusoïdale horizontalement.
5. Déplace la courbe sinusoïdale vers la droite.
6. Déplace la courbe sinusoïdale vers la gauche.

Quelle déclaration décrit le mieux

- a. Augmentation de l'amplitude maximale V_m ?
- b. Augmenter la fréquence?
- c. Décroissant θ ?
- d. Diminution de la fréquence angulaire ω ?
- e. Augmenter la période ?

P5.2. Quelles sont les unités de la fréquence angulaire ω ? Pour la fréquence f ? Quel est le rapport entre eux ?

***P5.3.** Une tension est donnée par $v(t) = 10 \sin(1000\pi t + 30^\circ)$. Tout d'abord, utilisez une fonction cosinus pour exprimer $v(t)$. Ensuite, trouvez la fréquence angulaire, la fréquence en hertz, l'angle de phase, la période et la valeur efficace. Trouvez la puissance que cette tension délivre à un $50\text{-}\Omega$ résistance. Trouvez la première valeur du temps après $t=0$ que $v(t)$ atteint sa valeur maximale. $v(t)$ à l'échelle en fonction du temps.

* Indique que les réponses sont contenues dans les fichiers de solutions des étudiants. Voir [Annexe E](#) pour en savoir plus

P5.4. Répéter **Problème P5.3** pour $v(t) = 50 \sin 500\pi t + 120^\circ$.

***P5.5.** Une tension sinusoïdale $v(t)$ a une valeur efficace de 20 V, a une période de $100\mu\text{m}$, et atteint un pic positif à $t=20\mu\text{m}$. Écrivez une expression pour $v(t)$.

P5.6. Une tension sinusoïdale a une valeur de crête de 15 V, a une fréquence de 125 Hz et passe par zéro avec une pente positive à $t=1\text{ ms}$. Écrivez une expression pour la tension.

P5.7. Un courant $i(t) = 10 \cos(2000\pi t)$ coule à travers un $100\text{-}\Omega$ résistance. Esquissez $i(t)$ et $p(t)$ à l'échelle en fonction du temps. Trouvez la puissance moyenne délivrée à la résistance.

P5.8. Nous avons une tension $v(t) = 1000 \sin 500\pi t$ à travers un $500\text{-}\Omega$ résistance. Esquissez $v(t)$ et $p(t)$ à l'échelle en fonction du temps. Trouvez la puissance moyenne délivrée à la résistance.

P5.9. Supposons que nous ayons un courant sinusoïdal $i(t)$ qui a une valeur efficace de 5 A, a une période de 10 ms et atteint un pic positif à $t=3\text{ ms}$. Écrivez une expression pour $i(t)$.

P5.10. UN **Figure de Lissajous** résultats si une sinusoïde est tracée par rapport à une autre. Considérez $x(t) = \cos(\omega_x t)$ et $y(t) = \cos(\omega_y t + \theta)$. Utilisez un programme informatique de votre choix pour générer des valeurs de x et y pendant 20 secondes à 100 points par seconde et obtenir un tracé de y contre x pour

a. $\omega_x = \omega_y$ et $\theta = 90^\circ$;

b. $\omega_x = \omega_y$ et $\theta = 45^\circ$;

c. $\omega_x = \omega_y$ et $\theta = 0^\circ$;

d. $\omega_x = 2\pi$, $\omega_y = 4\pi$, et $\theta = 0^\circ$.

*P5.11.Trouvez la valeur efficace de la forme d'onde de tension indiquée dans Figure P5.11

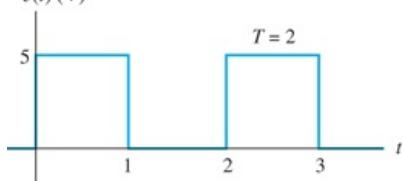


Figure P5.11

*P5.12.Calculez la valeur efficace de l'onde sinusoïdale redressée demi-onde indiquée dans Figure P5.12

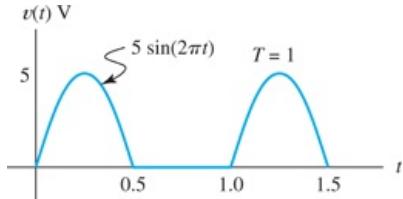


Figure P5.12

*P5.13.Trouvez la valeur efficace de la forme d'onde actuelle indiquée dans Figure P5.13

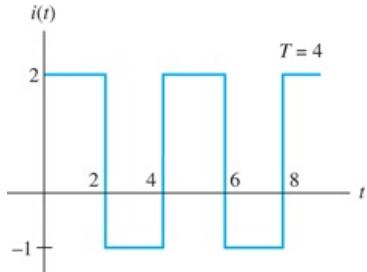


Figure P5.13

P5.14.Déterminer la valeur efficace de $v(t) = U_N \cos(2\pi t) + B \sin(2\pi t)$.

P5.15.Déterminer la valeur efficace de $v(t) = 5 + 10 \cos(20\pi t)$.

P5.16.Calculer la valeur efficace de la forme d'onde périodique représentée dans Figure P5.16

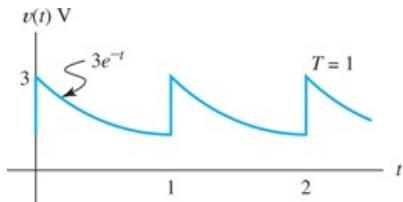


Figure P5.16

P5.17.Trouvez la valeur efficace de la forme d'onde de tension indiquée dans Figure P5.17

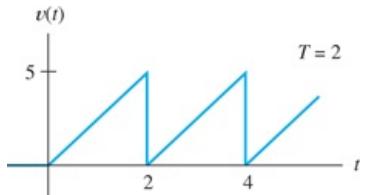


Figure P5.17

P5.18. La valeur efficace d'une forme d'onde périodique est-elle toujours égale à la valeur de crête divisée par la racine carrée de deux ? Quand est-ce le cas ?

Section 5.2 : Phasors

P5.19. Quelles étapes faut-il suivre pour additionner des courants ou des tensions sinusoïdales ? Que doit-on faire pour les sinusoïdes ?

P5.20. Décrivez deux méthodes pour déterminer la relation de phase entre deux sinusoïdes de même fréquence.

***P5.21.** Supposons que $v_1(t) = 100 \cos(\omega t)$ et $v_2(t) = 100 \sin(\omega t)$. Utilisez des phasors pour réduire la somme $v_m(t) = v_1(t) + v_2(t)$ à un seul terme de la forme $V_m \cos(\omega t + \theta)$. Dessinez un diagramme de phase, montrant V_1 , V_2 , et V_m . Indiquez les relations de phase entre chaque paire de ces phasors.

***P5.22.** Considérez les phasors montrés dans [Figure P5.22](#). La fréquence de chaque signal est ≈ 200 Hz. Écrivez une expression du domaine temporel pour chaque tension sous la forme $V_m \cos(\omega t + \theta)$. Énoncez les relations de phase entre les paires de ces phasors.

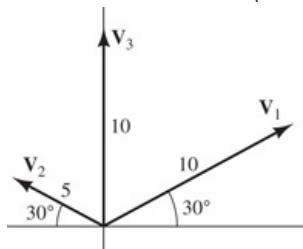


Figure P5.22

***P5.23.** Réduire $5 \cos \omega t + 75^\circ - 3 \cos \omega t - 75^\circ + 4 \sin(\omega t)$ à la forme $V_m \cos(\omega t + \theta)$.

P5.24. Deux tensions sinusoïdales de même fréquence ont des valeurs efficaces de 8 V et 3 V. Quelle est la plus petite valeur efficace que pourrait avoir la somme de ces tensions ? La plus grande ? Justifiez vos réponses.

P5.25. Supposons que $v_1(t) = 100 \cos(\omega t + 45^\circ)$ et $v_2(t) = 150 \sin(\omega t + 60^\circ)$. Utilisez des phasors pour réduire la somme $v_m(t) = v_1(t) + v_2(t)$ à un seul terme de la forme $V_m \cos(\omega t + \theta)$. Dessinez un diagramme de phase montrant V_1 , V_2 , et V_m . Indiquez les relations de phase entre chaque paire de ces phasors.

P5.26. Écrivez une expression pour la sinusoïde représentée par [Figure P5.26](#) de la forme $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$, donnant les valeurs numériques de V_m , ω , et θ . Déterminez également le phasor et la valeur efficace de $v(t)$.

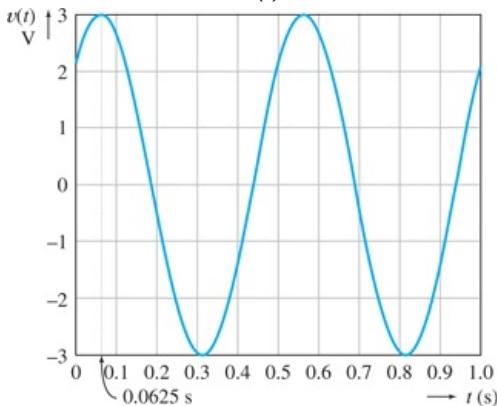


Figure P5.26

P5.27.Nous avons $v(t) = 10 \cos(\omega t + 30^\circ)$. Le courant $i_1(t)$ a une valeur efficace de 5 A et conduit $v(t)$ de 20° . (Le courant et la tension ont la même fréquence.) Dessinez un diagramme phasorique montrant les phaseurs. Écrivez une expression pour $i_1(t)$ de la forme $i_1 = V_m \sin(\omega t + \theta)$. **P5.28.** Réduire $5 \cos(\omega t) + 5 \cos(\omega t + 30^\circ) + 5 \cos(\omega t + 150^\circ)$ à la forme $V_m \sin(\omega t + \theta)$.

P5.29.À l'aide d'un programme informatique de votre choix, obtenez un tracé de $v(t) = \cos(19\pi t) + \cos(21\pi t)$ pour t allant de 0 à 2 s par incrément de 0,01 s. (Remarquez que, comme les termes ont des fréquences différentes, ils ne peuvent pas être combinés en utilisant des phasors.) Ensuite, considérant que les deux termes peuvent être représentés comme la projection réelle de la somme de deux vecteurs tournant (à des vitesses différentes) dans le plan complexe, commentez le tracé.

P5.30.Un courant sinusoïdal $i_1(t)$ a un angle de phase de 30° . De plus, $i_1(t)$ atteint son pic positif 2 ms plus tôt que le courant $i_2(t)$ fait. Les deux courants ont une fréquence de 200 Hz. Déterminez l'angle de phase de $i_2(t)$.

Section 5.3 : Impédances complexes

P5.31.Écrivez la relation entre la tension et le courant du phasor pour une inductance. Répétez l'opération pour la capacité.

P5.32.Énoncez la relation de phase entre le courant et la tension pour une résistance, pour une inductance et pour une capacité.

***P5.33.**Une tension $v(t) = 10 \cos(2000\pi t)$ est appliquée à une inductance de 100 mH. Trouvez l'impédance complexe de l'inductance. Trouvez la tension et le courant du phasor et construisez un diagramme de phasor. Écrivez le courant en fonction du temps. Esquissez la tension et le courant à l'échelle en fonction du temps. Énoncez la relation de phase entre le courant et la tension.

***P5.34.**Une tension $v(t) = 10 \cos(2000\pi t)$ est appliquée à un $10-\mu\text{F}$ Capacité. Trouvez l'impédance complexe de la capacité. Trouvez la tension et le courant du phasor et construisez un diagramme de phasor. Écrivez le courant en fonction du temps. Esquissez la tension et le courant à l'échelle en fonction du temps. Énoncez la relation de phase entre le courant et la tension.

P5.35.Un certain élément de circuit est connu pour être une résistance, une inductance ou une capacité.

Déterminez le type et la valeur (en ohms, en henrys ou en farads) de l'élément si la tension et le courant de l'élément sont donnés par

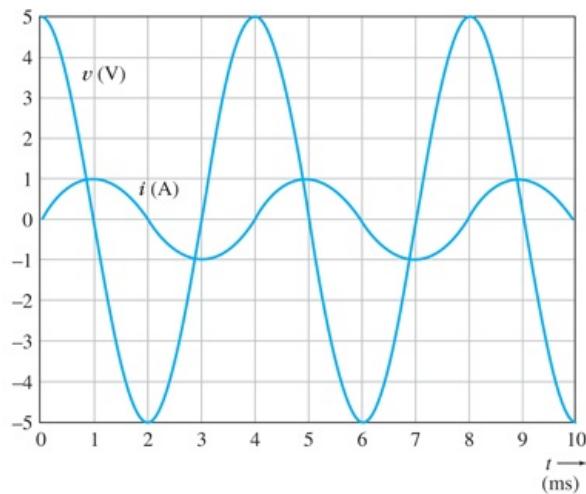
- a. $v(t) = 100 \sin(200t + 30^\circ)$ V, $i(t) = \cos(200t + 30^\circ)$ A;
- b. $v(t) = 500 \cos(100t + 50^\circ)$ V, $i(t) = 2 \cos(100t + 50^\circ)$ A;
- c. $v(t) = 100 \cos(400t + 30^\circ)$ V, $i(t) = \cos(400t + 30^\circ)$ A.

P5.36.Esquisser les tracés des grandeurs des impédances d'une inductance de 10 mH, une $10-\mu\text{F}$ capacité et un $50-\Omega$ résistance à l'échelle en fonction de la fréquence pour la plage de zéro à 1000 Hz. **P5.37.**

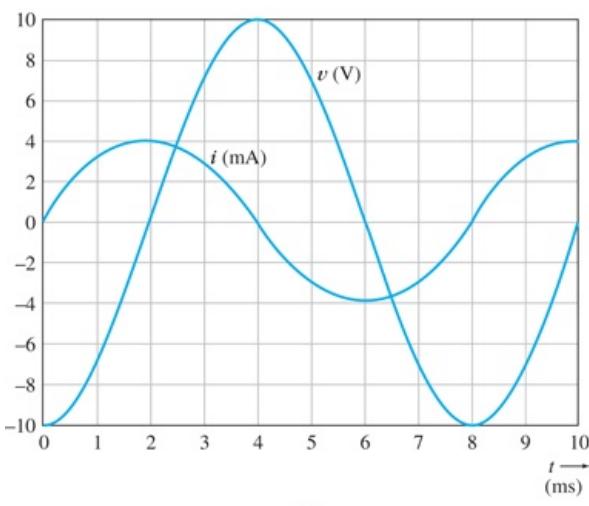
- a. Un certain élément a une tension de phase de $V = 100 \angle 30^\circ$ V et le courant de $i = 5 \angle 120^\circ$ A. La fréquence angulaire est de 500 rad/s. Déterminer la nature et la valeur de l'élément.
- b. Répétez pour $V = 20 \angle -45^\circ$ V et le courant de $i = 5 \angle -135^\circ$ A.
- c. Répétez pour $V = 5 \angle 45^\circ$ V et le courant de $i = 5 \angle 45^\circ$ A.

P5.38.

- a. Le courant et la tension d'un certain élément de circuit sont indiqués dans [Figure P5.38\(a\)](#). Déterminer la nature et la valeur de l'élément.



(a)



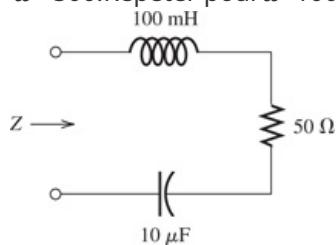
(b)

Figure P5.38b. Répétez pour **Figure P5.38(b)** .

Section 5.4 : Analyse de circuit avec des phaseurs et des impédances complexes

P5.39. Donnez une procédure étape par étape pour l'analyse en régime permanent des circuits avec des sources sinusoïdales.

Quelle condition doit être remplie pour les sources ?

P5.40.** Trouvez l'impédance complexe sous forme polaire du réseau représenté par **Figure P5.40** pour $\omega = 500$. Répéter pour $\omega = 1000$ et $\omega = 2000$.**Figure P5.40**P5.41.** Trouvez les phasors pour le courant et pour les tensions du circuit représenté dans **Figure P5.41** . Construire un diagramme de phase montrant V_m , $j\epsilon$, V_R , et V_L . Quelle est la phase relation entre V_m et $j\epsilon$?

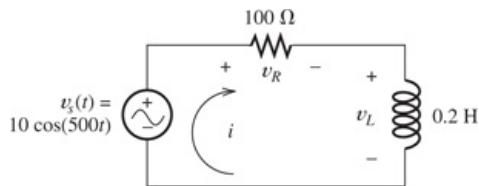


Figure P5.41

P5.42. Modifiez l'inductance à 0,1 H et répétez le problème P5.41. **P5.43.**

Trouvez l'impédance complexe du réseau représenté par [Figure P5.43](#) pour $\omega = 500$. Répéter = 1000 et $\omega = 2000$.

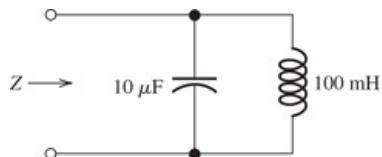


Figure P5.43

P5.44. Une inductance de 10 mH, une 100- Ω résistance et une 100- μF Les condensateurs sont connectés en parallèle. Calculez l'impédance de la combinaison pour des fréquences angulaires de 500, 1000 et 2000 radians par seconde. Pour chaque fréquence, indiquez si l'impédance est inductive, purement resistive ou capacitive.

P5.45. Trouvez les phasors pour le courant et les tensions pour le circuit indiqué dans [Figure P5.45](#) Construire un diagramme de phase montrant $V_m, j\phi_e, V_R$ et V_C . Quelle est la relation de phase entre V_m et $j\phi_e$?

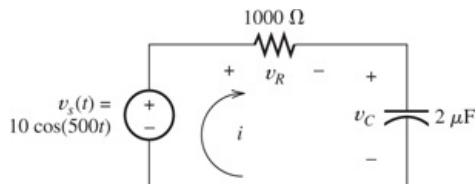


Figure P5.45

***P5.46.** Répétez le problème P5.45 en modifiant la valeur de capacité à 1 μF .

P5.47. Trouvez les phasors pour la tension et les courants du circuit indiqué dans [Figure P5.47](#) Construire un diagramme de phase montrant $j\phi_m, V, j\phi_R$ et $j\phi_L$. Quelle est la relation de phase entre V et $j\phi_m$?

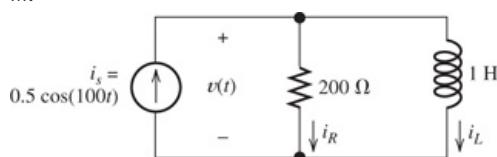


Figure P5.47

***P5.48.** Trouvez les phasors pour la tension et les courants pour le circuit indiqué dans [Figure P5.48](#) Construire un diagramme de phase montrant $j\phi_m, V, j\phi_R$ et $j\phi_C$. Quelle est la relation de phase entre V et $j\phi_m$?

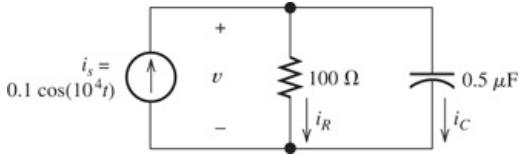


Figure P5.48

*P5.49. Considérez le circuit illustré dans [Figure P5.49](#). Trouver les phasors jem , V_r , jel , et jc . Comparez la valeur maximale de $je_l(t)$ avec la valeur maximale de $jem(t)$. La réponse vous surprend-elle ? Expliquez-la.

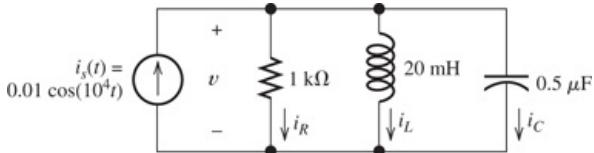


Figure P5.49

P5.50. Considérez le circuit illustré dans [Figure P5.50](#). Trouver les phasors V_m , je , V_L , V_R , et V_C . Comparez la valeur maximale de $v_L(t)$ avec la valeur maximale de $v_R(t)$. Trouvez-vous la réponse surprenante ? Expliquez.

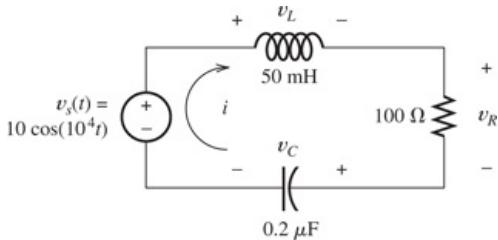


Figure P5.50

P5.51. Considérez le circuit illustré dans [Figure P5.51](#). Trouver les phasors V_1 , V_2 , V_R , V_L , et je . Dessinez le diagramme de phase à l'échelle. Quelle est la relation de phase entre je et V_1 ? Entre je et V_L ?

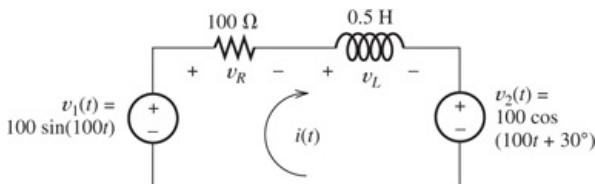


Figure P5.51

P5.52. Considérez le circuit illustré dans [Figure P5.52](#). Trouver les phasors I , i_R , et i_c . Construction diagramme de phasor.

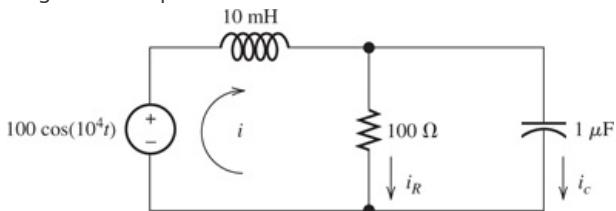


Figure P5.52

*P5.53.Résolvez les tensions de nœud indiquées dansFigure P5.53 .

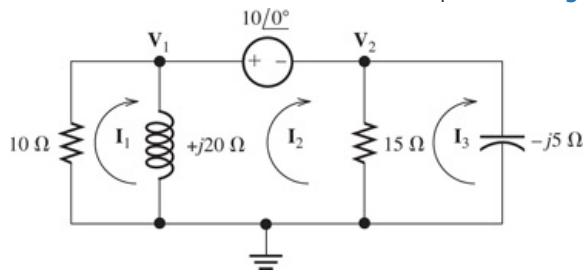


Figure P5.53

P5.54.Résolvez la tension du nœud indiquée dansFigure P5.54 .

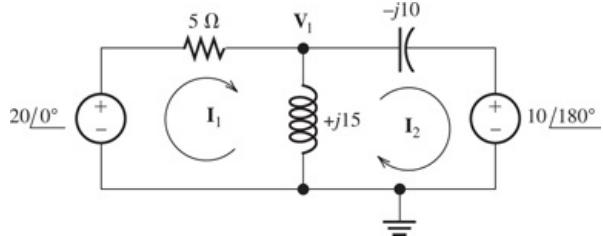


Figure P5.54

P5.55.Résolvez la tension du nœud indiquée dansFigure P5.55 .

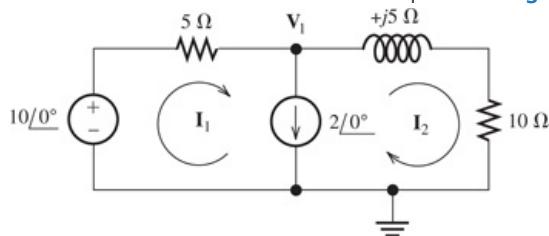


Figure P5.55

P5.56.Résolvez les tensions de nœud indiquées dansFigure P5.56 .

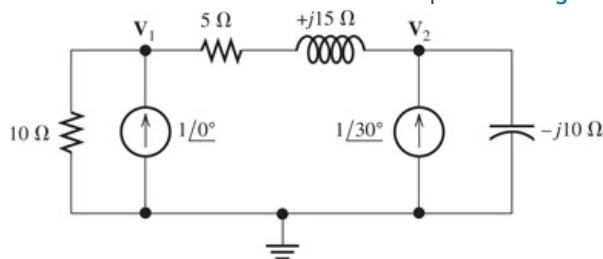


Figure P5.56

*P5.57.Résolvez les courants de maillage indiqués dansFigure P5.54 .

P5.58.Résolvez les courants de maillage indiqués dansFigure P5.55 .

P5.59.Résolvez les courants de maillage indiqués dansFigure P5.53 .

P5.60.

- Une inductance de 20 mH est en série avec une $50-\mu\text{F}$ capacité. Dessinez ou utilisez le programme informatique de votre choix pour produire un tracé de l'amplitude de l'impédance en fonction de la fréquence angulaire ω de zéro à 2000 rad/s et l'axe vertical de 0 à 100Ω .
- Répétez l'opération avec l'inductance et la capacité en parallèle.

P5.61.

- a. Une inductance de 20 mH est en série avec une $50\text{-}\Omega$ Résistance. Dessinez ou utilisez le programme informatique de votre choix pour produire un tracé de l'amplitude de l'impédance en fonction de la fréquence angulaire. Permettre ω allant de zéro à 5000 rad/s.
- b. Répétez l'opération avec l'inductance et la résistance en parallèle.

Section 5.5 : Puissance dans les circuits à courant alternatif

P5.62. Quelles sont les unités habituelles pour la puissance réelle ? Pour la puissance réactive ? Pour la puissance apparente ? **P5.63.**

Quel est le lien entre le facteur de puissance et l'angle de puissance ?

P5.64. En supposant qu'une source de courant alternatif non nulle soit appliquée, indiquez si la puissance et la puissance réactive sont positives, négatives ou nulles pour

- a. une résistance pure;
- b. une inductance pure ;
- c. une capacité pure.

P5.65. On dit qu'une charge a un facteur de puissance avancé. Est-elle capacitive ou inductive ? La puissance réactive est-elle positive ou négative ? Répétez l'opération pour une charge avec un facteur de puissance retardé.

P5.66.

- a. Esquissez un triangle de puissance pour une charge inductive, étiquetez les côtés et indiquez l'angle de puissance.
- b. Répétez l'opération pour une charge capacitive.

P5.67. Expliquez pourquoi les ingénieurs des centrales électriques et des systèmes de distribution sont concernés

- a. avec la puissance réelle absorbée par une charge ;
- b. avec la puissance réactive.

P5.68. Définissez ce que nous entendons par « correction du facteur de puissance ». Pour la correction du facteur de puissance d'une charge inductive, quel type d'élément devons-nous placer en parallèle avec la charge ?

***P5.69.** Considérons une charge qui a une impédance donnée par $Z = 100 - j50\Omega$. Le courant qui circule à travers cette charge est $i = 15 \sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ A}$. La charge est-elle inductive ou capacitive ? Déterminer la puissance facteur, puissance, puissance réactive et puissance apparente délivrées à la charge.

P5.70. Nous avons une charge avec une impédance donnée par $Z = 30 + j40\Omega$. La tension aux bornes de cette charge est $V = 1500 \sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ V}$. La charge est-elle inductive ou capacitive ? Déterminez le facteur de puissance, la puissance, puissance réactive et puissance apparente délivrées à la charge.

P5.71. La tension du phaseur aux bornes d'une certaine charge est $V = 1000 \sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ V}$, et le courant de phase à travers c'est $i = 15 \sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ A}$. Déterminer le facteur de puissance, la puissance, la puissance réactive, apparente puissance et impédance. Le facteur de puissance est-il en avance ou en retard ?

P5.72. La tension aux bornes d'une charge est $v(t) = 104\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$, et le courant à travers la charge est $i(t) = 20 \sqrt{2} \cos(\omega t - 20^\circ) \text{ UN}$. La direction de référence pour les points actuels dans le référentiel positif pour la tension. Déterminer le facteur de puissance, la puissance, la puissance réactive et la puissance apparente de la charge. Cette charge est-elle inductive ou capacitive ?

P5.73. En supposant qu'une source de tension alternative non nulle soit appliquée, indiquez si la puissance et la puissance réactive sont positives, négatives ou nulles pour

- a. une résistance en série avec une inductance ;
- b. une résistance en série avec une capacité. (Supposons que les résistances, l'inductance et la capacité soient non nulles et de valeur finie.)

P5.74. En supposant qu'une source de tension alternative non nulle soit appliquée, que peut-on dire sur le fait que la puissance et la puissance réactive sont positives, négatives ou nulles pour une capacité pure en série avec une inductance pure ? Considérons les cas dans lesquels l'amplitude de l'impédance de la capacité est supérieure, égale ou inférieure à l'amplitude de l'impédance de l'inductance.

P5.75. Répétez le problème P5.74 pour l'inductance et la capacité en parallèle.

P5.76.Déterminez la puissance de chaque source indiquée dans Figure P5.76 la . Indiquez également si chaque source fournit ou absorbe de l'énergie.

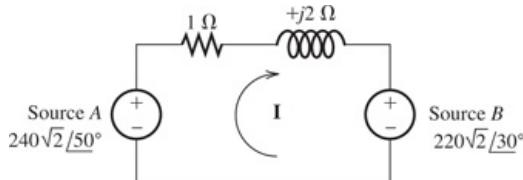


Figure P5.76

P5.77.Déterminez la puissance de chaque source indiquée dans Figure P5.77 la . Indiquez également si chaque source fournit ou absorbe de l'énergie.

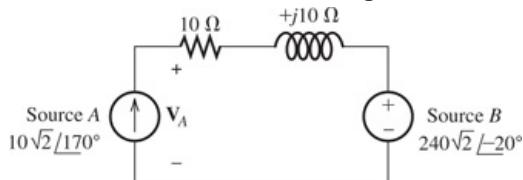


Figure P5.77

P5.78.Une source de 60 Hz et 220 Vrms alimente une charge constituée d'une résistance en série avec une inductance. La puissance réelle est de 1 500 W et la puissance apparente est de 2 500 VAR. Déterminez la valeur de la résistance et la valeur de l'inductance.

P5.79.Considérez le circuit illustré dans Figure P5.79 . Trouvez le courant de phaseur I. Trouvez la puissance, puissance réactive et puissance apparente délivrée par la source. Déterminez le facteur de puissance et indiquez s'il est en retard ou en avance.

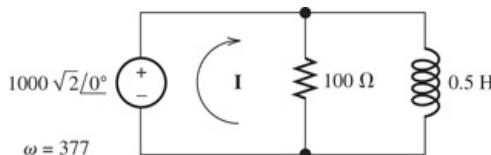


Figure P5.79

***P5.80.**Répétez le problème P5.79 en remplaçant l'inductance par une $10-\mu\text{F}$ capacitance.

P5.81.Deux charges, U et B, sont connectés en parallèle sur une ligne de 1 kV-rms à 60 Hz, comme indiqué dans

Figure P5.81 . Charger U consomme 10 kW avec un facteur de puissance en retard de 90 pour cent. B a une puissance apparente de 15 kVA avec un facteur de puissance en retard de 80 %. Trouvez la puissance, la puissance réactive et la puissance apparente délivrées par la source. Quel est le facteur de puissance vu par la source ?

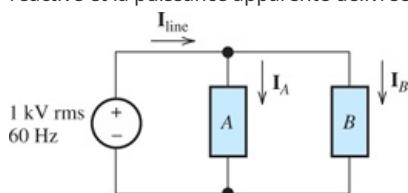


Figure P5.81

P5.82.Répétez le problème P5.81 si la charge U consomme 5 kW avec un facteur de puissance en retard de 90 pour cent. B consomme 10 kW avec un facteur de puissance de 80 pour cent.

P5.83.Trouvez la puissance, la puissance réactive et la puissance apparente délivrées par la source dans Figure

P5.83 Trouvez le facteur de puissance et indiquez s'il est en avance ou en retard.

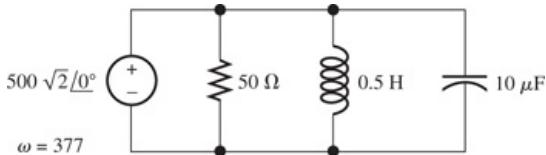


Figure P5.83

P5.84. Répétez le problème P5.83 avec la résistance, l'inductance et la capacité connectées en série plutôt qu'en parallèle.

***P5.85.** Considérez la situation illustrée dans [Figure P5.85](#). Une source de 1000 V-rms fournit de l'énergie à un charge. La charge consomme 100 kW avec un facteur de puissance en retard de 25 pour cent.

- Trouver le phasorje, en supposant que le condensateur n'est pas connecté au circuit.
- Trouvez la valeur de la capacité qui doit être connectée en parallèle avec la charge pour obtenir un facteur de puissance de 100 pour cent. En général, les ingénieurs en systèmes électriques évaluent les capacités utilisées pour la correction du facteur de puissance en fonction de leur puissance réactive nominale. Quelle est la valeur nominale de cette capacité en kVAR ? En supposant que cette capacité soit connectée, trouvez la nouvelle valeur du phaseurje.
- Supposons que la source soit connectée à la charge sur une longue distance. Quels sont les avantages et les inconvénients potentiels de la connexion de la capacité à la charge ?

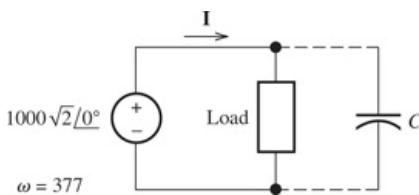


Figure P5.85

Section 5.6 : Circuits équivalents de Thévenin et Norton

P5.86. De quoi est constitué un circuit équivalent de Thévenin en régime permanent alternatif ? Un circuit équivalent de Norton ? Comment sont déterminées les valeurs des paramètres de ces circuits ?

P5.87. Pour atteindre la puissance maximale délivrée à une charge, quelle valeur d'impédance de charge est requise si

- la charge peut avoir n'importe quelle valeur complexe ;
- la charge doit être une résistance pure ?

P5.88. Dans un circuit alternatif constitué d'une charge connectée à un circuit de Thévenin, est-il possible que la tension de charge dépasse la tension de Thévenin en amplitude ? Si non, pourquoi ? Si oui, dans quelles conditions est-ce possible ? Expliquez.

***P5.89.**

- Trouvez les circuits équivalents de Thévenin et de Norton pour le circuit représenté sur la figure [Figure P5.89](#).

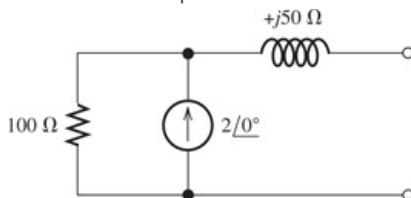


Figure P5.89

- Trouvez la puissance maximale que ce circuit peut fournir à une charge si la charge peut avoir une impédance complexe.

c. Répétez si la charge est purement résistive.

P5.90.

a. Trouvez les circuits équivalents de Thévenin et de Norton pour le circuit représenté sur la figure [Figure P5.90](#).

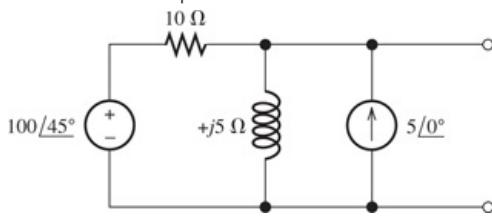


Figure P5.90

b. Trouvez la puissance maximale que ce circuit peut fournir à une charge si la charge peut avoir une impédance complexe.

c. Répétez si la charge doit être purement résistive.

P5.91. Dessinez les circuits équivalents de Thévenin et Norton pour [Figure P5.91](#), étiquetant les éléments et terminaux.

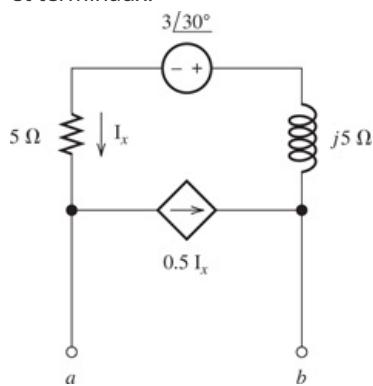


Figure P5.91

P5.92. Dessinez les circuits équivalents de Thévenin et Norton pour [Figure P5.92](#), étiquetant les éléments et terminaux.

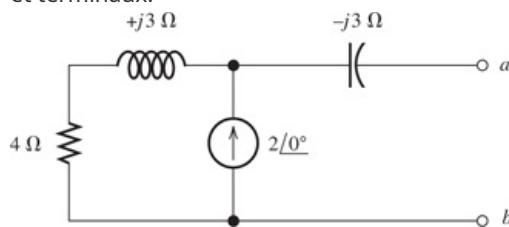


Figure P5.92

P5.93. L'équivalent Thévenin d'un réseau à deux bornes est représenté dans [Figure P5.93](#) la fréquence est $f = 60 \text{ Hz}$. Nous souhaitons connecter une charge entre des bornes a – b qui est constitué d'une résistance et d'une capacité en série de telle sorte que la puissance délivrée à la résistance soit maximisée. Trouvez la valeur de la résistance et la valeur de la capacité.

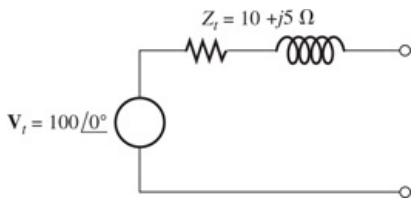


Figure P5.93

*P5.94. Répétez le problème P5.93 avec la charge requise devant être constituée d'une résistance et d'une capacité en parallèle.

Section 5.7 : Circuits triphasés équilibrés

P5.95. Une source triphasée à séquence positive équilibrée a

$$v_{un}(t) = 100 \cos(377t + 90^\circ) \text{ V}$$

- Trouvez la fréquence de cette source en Hz.
- Donnez des expressions pour $v_{bn}(t)$ et $v_{chinois}(t)$.
- Répétez la partie (b) pour une source à séquence négative.

P5.96. Une source triphasée a

$$v_{un}(t) = 100 \cos(\omega t - 60^\circ) =$$

$$v_{bn}(t) = 100 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$v_{chinois}(t) = -100 \cos(\omega t)$$

S'agit-il d'une source de séquence positive ou de séquence négative ? Trouvez des expressions temporelles pour $v_{un}(t)$, $v_{avant.J.-C.}(t)$, et $v_{Californie}(t)$.

*P5.97. Une source triphasée connectée en étoile équilibrée a des tensions phase-neutre de 440 V rms. Trouvez l'amplitude de la tension phase-phase rms. Si cette source est appliquée à une charge connectée en étoile composée de trois 30Ω résistances, trouvez l'amplitude du courant de ligne efficace et la puissance totale délivrée.

*P5.98. Chaque phase d'une charge connectée en étoile se compose d'un 50Ω résistance en parallèle avec un $100\mu F$ Capacité. Déterminez l'impédance de chaque phase d'une charge équivalente connectée en triangle. La fréquence de fonctionnement est de 60 Hz.

P5.99. Que pouvez-vous dire sur le flux de puissance en fonction du temps entre une source triphasée équilibrée et une charge équilibrée ? Est-ce vrai pour une source monophasée et une charge ? En quoi est-ce un avantage potentiel pour le système triphasé ? Quel est l'autre avantage de la distribution d'énergie triphasée par rapport à la distribution monophasée ?

P5.100. Une source connectée en triangle fournit de l'énergie à une charge connectée en triangle, comme illustré dans Figure

P5.100 La tension ligne à ligne efficace à la source est $V_{un} = 440 \text{ V}$. L'impédance de charge est $Z_\Delta = 10 - j2$. Trouver $v_{ea}(t)$, $V_{un}(t)$, $v_{eu}(t)$, la puissance totale délivrée à la charge et la puissance perdue dans la ligne.

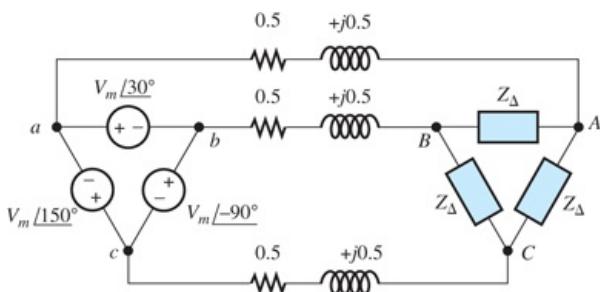


Figure P5.100

*P5.101.Répétez le problème P5.100, avec $Z_d = 5 - j2$.

P5.102.Une source connectée en étoile à séquence négative a des tensions de ligne à neutre $V_{un} = V_{Y \angle 0^\circ}$, $V_{bn} = V_{Y \angle 120^\circ}$, et $V_{chinois} = V_{Y \angle -120^\circ}$. Trouver les tensions entre phases $V_{un\ b}$, $V_{avan\ J.-C.}$, et $V_{Californie}$. Construisez un diagramme de phase montrant les deux ensembles de tensions et comparez-le avec [Figure 5.41](#)

[\[](#) sur la page [261](#).

P5.103.Une source triphasée à séquence positive équilibrée connectée en étoile de 60 Hz a des tensions ligne à ligne de $V_L = 440$ V eff. Cette source est connectée à une charge connectée en étoile équilibrée. Chaque phase de la charge est constituée d'une inductance de $0,3$ H en série avec une 50Ω résistance. Trouvez les phaseurs de tension ligne-ton-neutre, les phaseurs de tension ligne-à-ligne, les phaseurs de courant de ligne, la puissance et la puissance réactive délivrées à la charge. Supposons que la phase de V_{un} est nul.

P5.104.Une source triphasée connectée en étoile équilibrée a des tensions phase-neutre de 240 V rms. Trouvez la tension phase-phase rms. Cette source est appliquée à une charge connectée en triangle, dont chaque branche est constituée d'un 10Ω résistance en parallèle avec un $+j5\Omega$ réactance. Déterminer l'amplitude du courant de ligne efficace, le facteur de puissance et la puissance totale délivrée.

P5.105.Dans ce chapitre, nous avons considéré uniquement les charges équilibrées. Cependant, il est possible de déterminer un circuit en étoile équivalent pour un triangle non équilibré, et vice versa. Considérons les circuits équivalents

illustrés dans [Figure P5.105](#) [\[](#) Dérivez les formules pour les impédances du Y en fonction de la impédances du delta. [*Indice:* Égalisez les impédances entre les paires de bornes correspondantes des deux circuits avec la troisième borne ouverte. Résolvez ensuite les équations pour Z_{un} , Z_b , et Z_c en termes de Z_A , Z_B , et Z_C . Faites attention à bien distinguer les indices majuscules et minuscules.]

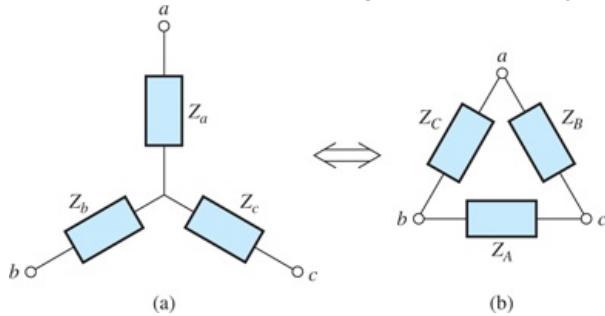


Figure P5.105

P5.106.Répétez le problème P5.105, mais résolvez les impédances du delta en fonction de celles du Y. [*Indice:* Commencez par travailler en termes d'admittances du delta (Y_{un} , Y_b , et Y_c) et les impédances du Y (Z_{un} , Z_b , et Z_c). Terminaux courts b et c pour chaque circuit. Ensuite, égalisez les admittances entre les bornes a et b et les bornes en court-circuit pour les deux circuits. Répétez cette opération deux fois de plus avec des courts-circuits entre les deux paires de bornes restantes. Résolvez les équations pour déterminer Y_{un} , Y_b , et Y_c en termes de Z_{un} , Z_b , et Z_c . Enfin, inversez les équations pour Y_{un} , Y_b , et Y_c pour obtenir les équations reliant les impédances. Attention à bien distinguer les indices majuscules et minuscules.]

Section 5.8 : Analyse AC à l'aide de MATLAB

*P5.107Utilisez MATLAB pour résoudre les tensions de nœud indiquées dans [Figure P5.107](#).

[\[](#)

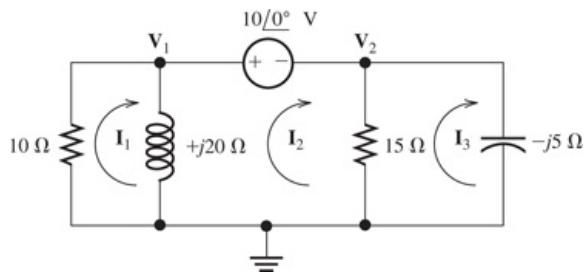


Figure P5.107

P5.108 Utilisez MATLAB pour résoudre les courants de maillage indiqués dans Figure P5.107.



*P5.109 Utilisez MATLAB pour résoudre les courants de maillage indiqués dans Figure P5.109.

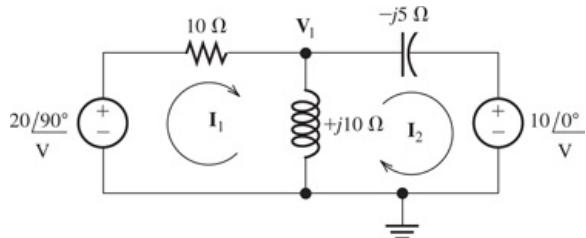


Figure P5.109

P5.110 Utilisez MATLAB pour résoudre les courants de maillage indiqués dans Figure P5.110.

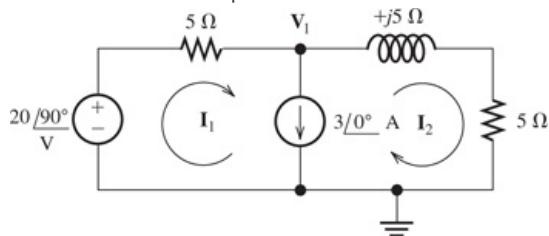


Figure P5.110

P5.111 Utilisez MATLAB pour résoudre les tensions de nœud indiquées dans Figure P5.111.

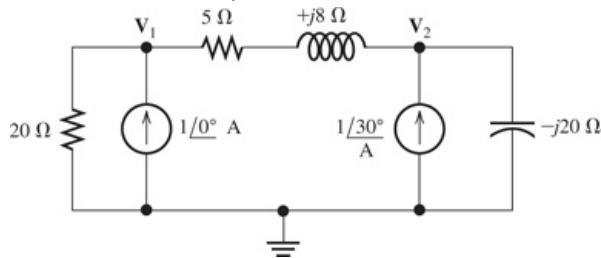


Figure P5.111

P5.112 Utilisez la boîte à outils symbolique MATLAB pour déterminer la valeur rms de $v(t)$ qui a une période de 1 s et est donnée par $v(t) = 10 \exp(-5t) \sin(20\pi t)$ V pour $0 \leq t \leq 1$ s.

Test pratique

Voici un test pratique que vous pouvez utiliser pour vérifier votre compréhension des concepts les plus importants de ce chapitre. Les réponses se trouvent dans [Annexe D](#) et des solutions complètes sont incluses dans l'étudiant Fichiers de solutions. Voir [Annexe E](#) pour plus d'informations sur les solutions étudiantes.

T5.1. Déterminer la valeur efficace du courant indiqué dans [Figure T5.1](#) et la puissance moyenne livrée à la 50Ω résistance.

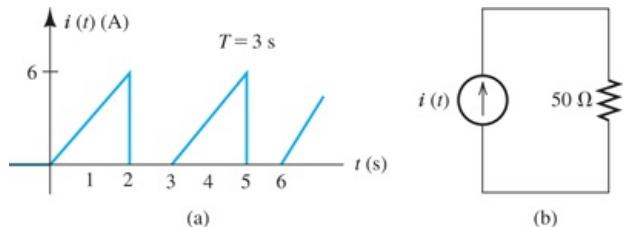


Figure T5.1

T5.2. Réduire l'expression

$$v(t) = 5 \sin(\omega t + 45^\circ) + 5 \cos(\omega t - 30^\circ)$$

à la forme $V_m \sin(\omega t + \theta)$.

T5.3. Nous avons deux tensions $v_1(t) = 15 \sin(400\pi t + 45^\circ)$ V et $v_2(t) = 5 \cos(400\pi t - 30^\circ)$ V.

Déterminer (unités comprises) :

- la valeur efficace de $v(t)$;
- la fréquence des tensions ;
- la fréquence angulaire des tensions ;
- la période des tensions ;
- la relation de phase entre $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

T5.4. Trouver les valeurs de phase de V_R , V_L , et V_C sous forme polaire pour le circuit de [Figure T5.4](#).

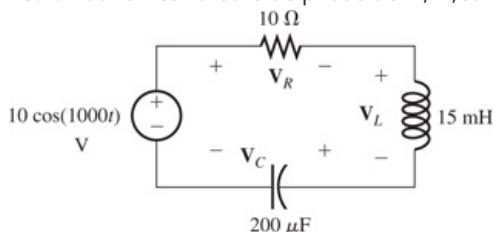


Figure T5.4

T5.5. Utilisez l'approche nœud-tension pour résoudre le problème $v(t)$ dans des conditions de régime permanent dans le circuit de [Figure T5.5](#).

[Figure T5.5](#)

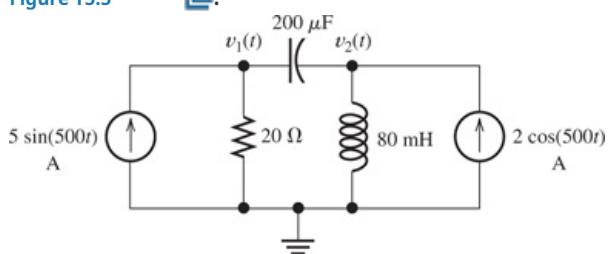


Figure T5.5

T5.6.Déterminer la puissance complexe, la puissance, la puissance réactive et la puissance apparente absorbée par la charge en**Figure T5.6** QUESTION Déterminez également le facteur de puissance de la charge.

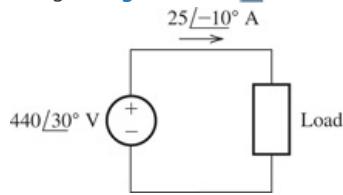


Figure T5.6

T5.7.Déterminer le courant de ligne/*easous* forme polaire pour le circuit de**Figure T5.7** QUESTION. C'est un système triphasé équilibré à séquence positive avec $V_{un} = 208 \angle 30^\circ$ V et $Z_d = 6 + j8 \Omega$.

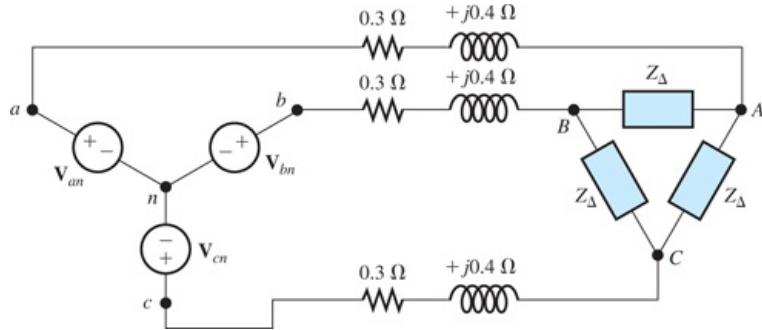


Figure T5.7

T5.8.Écrivez les commandes MATLAB pour obtenir les valeurs des courants de maillage de**Figure T5.8** forme polaire. Vous pouvez utiliser les fonctions pin et pout définies dans ce chapitre si vous le souhaitez. ANSWER dans

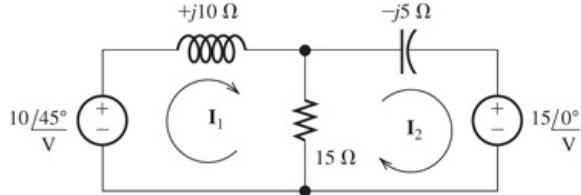


Figure T5.8