



中南大学
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

地球科学与信息物理学院
School of Geoscience and Info-physics

2022级地电场与电法勘探课外拓展选题

大地电磁法测深剖面相关参数的计算

Calculation of Relevant Parameters of Sounding
Section by Magnetotelluric Method

组长：杨曜堃

指导老师：严家斌

小组成员：魏冰雁 曾森宇 赵秋莹 张浩宇



目录 CONTENTS

01 综述

Introduction

02 方法与算法实现

Methodology, Algorithm and implementation

03 计算结果

Result

04 研究结论

Conclusions



01

综述

Introduction



综述

Introduction



中南大學
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

问题重述

第六章 大地电磁法

利用给定的数据和格式计算某大地电磁剖面的电阻率、相位及其他参数（相干度、倾子振幅和相位等），并画出相应的图件。



研究基础

计算过程中最重要的一步：从电场强度和磁场强度的功率谱得到阻抗

- S. M. Kay 在他的教材中详细介绍了最小二乘估计方法以及各自衍生方法
- 严家斌、杨生、柳建新等对大地电磁阻抗估计方法进行了研究

-
- [1] 严家斌.大地电磁信号处理理论及方法研究.中南大学.2003
 - [2] 杨生.大地电磁测深法环境噪声抑制研究及其应用.中南大学.2004
 - [3] 柳建新, 严家斌, 何继善, 刘春明.基于相关系数的海底大地电磁阻抗Robust 估算方法.地球物理学报.2003
 - [4] S. M. Kay. 统计信号处理基础—估计与检测理论.Person Education. Inc. , 1993, vol 1



02

方法与算法实现

Methodology, Algorithm and implementation



由阻抗得到电阻率和相位

由阻抗得到卡尼亚电阻率

$$\rho = \frac{|Z_1(0)|^2}{\omega\mu} \quad \rho_\alpha = \frac{|Z_n(0)|^2}{\omega\mu}$$

由阻抗得到相位

$$\phi = \arg Z_N(0)$$



由电场强度和磁场强度得到阻抗

由于地下介质的各向异性，阻抗为一个张量

该线性方程组有两个线性方程，阻抗有四个分量，因此无法求解

如果测量两次，则得到四个线性方程组，可以求解

如果测量的次数更多呢？

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{Z}}\dot{\mathbf{H}}$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} Z_{xx}[\omega] & Z_{xy}[\omega] \\ Z_{yx}[\omega] & Z_{yy}[\omega] \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_x[\omega] \\ E_y[\omega] \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} H_x[\omega] \\ H_y[\omega] \end{bmatrix}$$

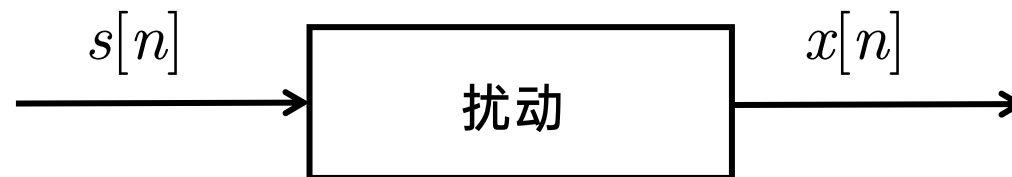


最小二乘估计理论

为了利用多次测量的结果，需要用到统计信号处理的办法，最常用的一种就是**最小二乘估计**

假设信号为线性的

$$s[n] = \theta h[n]$$



误差指标

$$J(\theta) = \sum_{n=1}^N (x[n] - \theta h[n])^2$$

误差 $x[n] - s[n] = e[n]$



最小二乘估计理论

当误差最小时，误差指标的一阶导数等于0

满足这一点，就可以求解出我们需要的参数

$$J(\theta) = \sum_{n=1}^N (x[n] - \theta h[n])^2$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{n=1}^N x[n]h[n]}{\sum_{n=1}^N h[n]^2}$$

这里所求解的得到的表达式，与高中所学线性回归中的表达式完全相同





最小二乘估计理论

对于多次测量的情形，即作为向量和矩阵处理

类似的办法得到误差指标函数

令其一阶导等于0

可得参数向量的表达式

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n=1}^N (x[n] - s[n])^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{x} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$$

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$$



最小二乘估计理论

若观测N次，写成 $\mathbf{s} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ 的形式：

$$\begin{bmatrix} E_{x1}[\omega] \\ \vdots \\ E_{xN}[\omega] \\ E_{y1}[\omega] \\ \vdots \\ E_{yN}[\omega] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{x1}[\omega] & H_{y1}[\omega] & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{xN}[\omega] & H_{yN}[\omega] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{x1}[\omega] & H_{y1}[\omega] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & H_{yN}[\omega] & H_{yN}[\omega] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx}[\omega] \\ Z_{xy}[\omega] \\ Z_{yx}[\omega] \\ Z_{yy}[\omega] \end{bmatrix}$$

套公式 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{x}$ 得到 $\hat{\mathbf{Z}} = (\dot{\mathbf{H}}^H \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^H \dot{\mathbf{E}}$

需要注意，由于电场强度和磁场强度在频率与为复数

所以要将转置改为共轭转置



Robust 阻抗估计

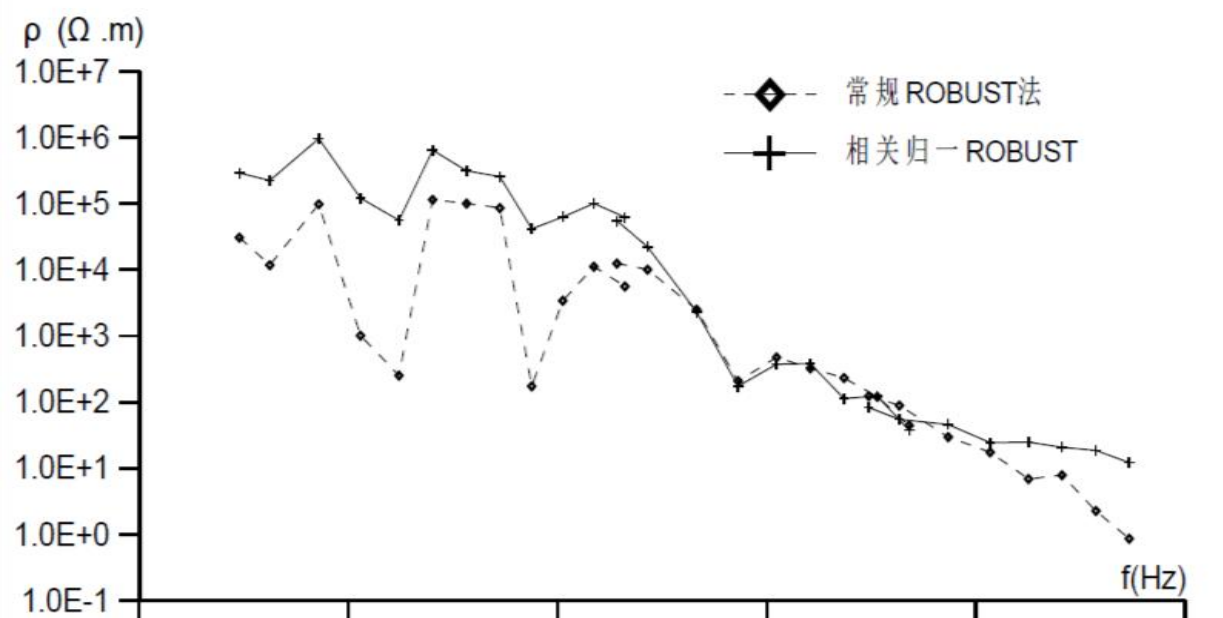
在 Kay 所写的教材中，提到了一种名为**加权最小二乘估计**的方法。

这种方法给偏离较大的数据样本低权重，强调那些被认为是更可靠的数据样本。

在海洋大地电磁中，这被称为 Robust 阻抗估计，可以解决跳变点的问题。

$$J(\mathbf{Z}) = (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{H}}\mathbf{Z})^H \mathbf{W} (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{H}}\mathbf{Z})$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = (\dot{\mathbf{H}}^H \mathbf{W} \dot{\mathbf{H}})^{-1} \dot{\mathbf{H}}^H \mathbf{W} \dot{\mathbf{E}}$$





阻抗的计算

为了利用所给的数据格式，需要对误差指标进行实部和虚部分解后求导，得到

$$\sum_{i=1}^N E_{xi} H_{xi}^* = Z_{xx} \sum_{i=1}^N H_{xi} H_{xi}^* + Z_{xy} \sum_{i=1}^N H_{yi} H_{xi}^*$$

$$\sum_{i=1}^N E_{xi} H_{yi}^* = Z_{xx} \sum_{i=1}^N H_{xi} H_{yi}^* + Z_{xy} \sum_{i=1}^N H_{yi} H_{yi}^*$$

将自功率谱和互功率谱组合成平均功率谱

$$\overline{E_x H_x^*} = Z_{xx} \overline{H_x H_x^*} + Z_{xy} \overline{H_y H_x^*}$$

$$\overline{E_x H_y^*} = Z_{xx} \overline{H_x H_y^*} + Z_{xy} \overline{H_y H_y^*}$$

$$\overline{E_y H_x^*} = Z_{xx} \overline{H_x H_x^*} + Z_{xy} \overline{H_y H_x^*}$$

$$\overline{E_y H_y^*} = Z_{xx} \overline{H_x H_y^*} + Z_{xy} \overline{H_y H_y^*}$$



阻抗的计算

从而，得到线性最小二次估计的阻抗

其中，A 和 B 是 E 和 H 的组合，一共有 $C_{42} = 6$ 种组合。

在这 6 种组合里，Ex-Hy 或 Ey-Hx 两种组合会导致线性方程组是病态的，因此不被使用。即有四种求解方法。

$$\hat{Z}_{xx}[\omega] = \frac{\overline{E_x A^* H_y B^*} - \overline{E_x B^* H_y A^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{xy}[\omega] = \frac{\overline{E_x B^* H_x A^*} - \overline{E_x A^* H_x B^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{yx}[\omega] = \frac{\overline{E_y A^* H_y B^*} - \overline{E_y B^* H_y A^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{yy}[\omega] = \frac{\overline{E_y B^* H_x A^*} - \overline{E_y A^* H_x B^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$



相干度的计算

这四种求解方法得到的结果未必完全相同

为了衡量它们的差别，引入全矢量信息相干度

$$CP_{uv} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^4 |\overline{Z_{uv}} - Z_{uv}^k|}{4|\overline{Z_{uv}}|}$$

范围在 0 到 1，越大说明计算结果越好

$$\hat{Z}_{xx}[\omega] = \frac{\overline{E_x A^* H_y B^*} - \overline{E_x B^* H_y A^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{xy}[\omega] = \frac{\overline{E_x B^* H_x A^*} - \overline{E_x A^* H_x B^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{yx}[\omega] = \frac{\overline{E_y A^* H_y B^*} - \overline{E_y B^* H_y A^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$

$$\hat{Z}_{yy}[\omega] = \frac{\overline{E_y B^* H_x A^*} - \overline{E_y A^* H_x B^*}}{\overline{H_x A^* H_y B^*} - \overline{H_x B^* H_y A^*}}$$



倾子矢量振幅和相位的计算

采用类似的方法计算倾子矢量的
振幅和相位

可以得到右边的结果

$$H_z[\omega] = A_{zx}[\omega]H_x[\omega] + B_{zy}[\omega]H_y[\omega]$$

$$A_{zx}[\omega] = \frac{\overline{H_y H_y^* H_z H_x^*} - \overline{H_y H_x^* H_z H_y^*}}{\overline{H_x H_x^* H_y H_y^*} - \overline{H_x H_y^* H_y H_y^*}}$$

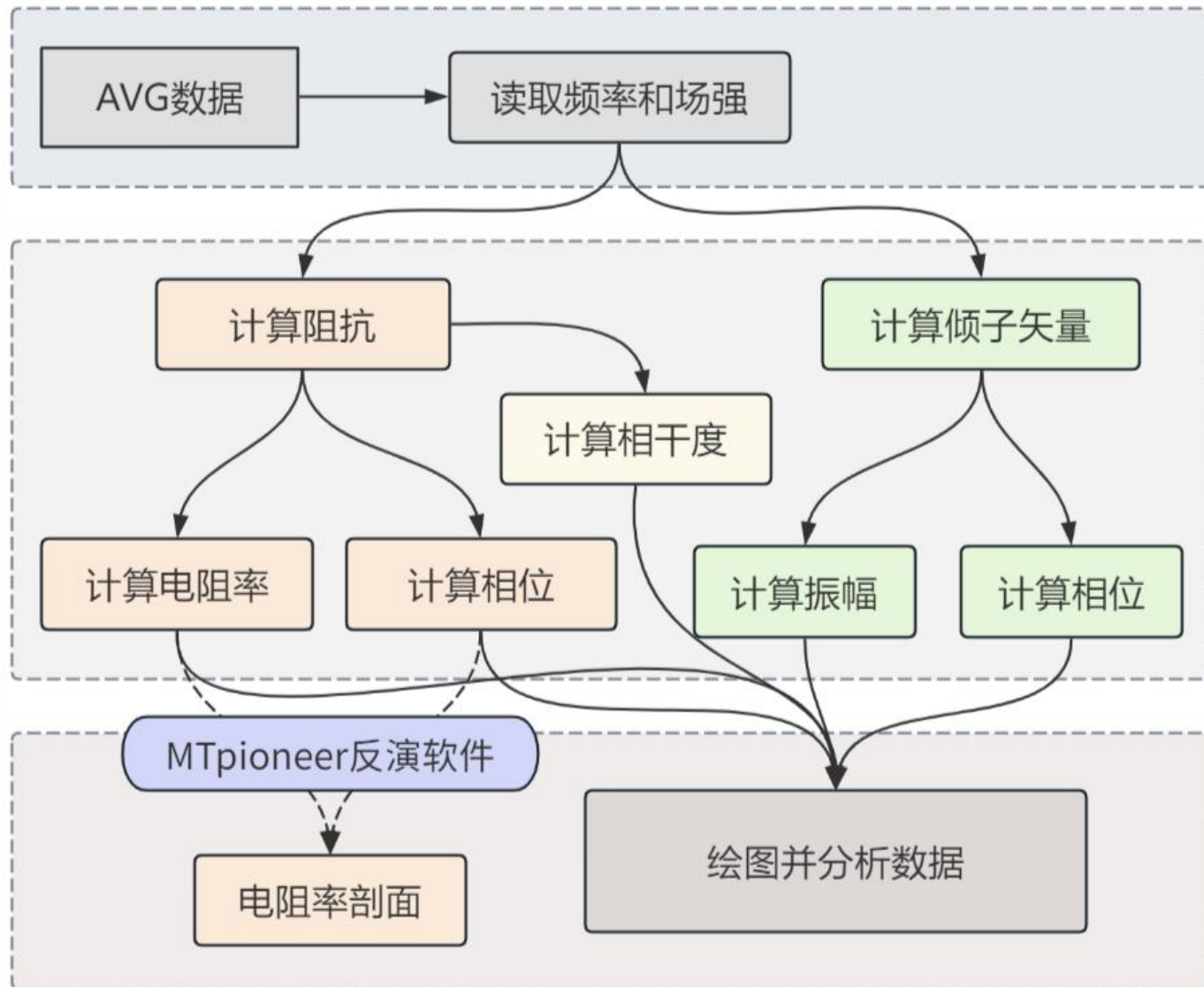
$$B_{zy}[\omega] = \frac{\overline{H_x H_x^* H_z H_y^*} - \overline{H_x H_y^* H_z H_x^*}}{\overline{H_x H_x^* H_y H_y^*} - \overline{H_x H_y^* H_y H_y^*}}$$



小结

$$\rho_{\alpha} = \frac{|Z[\omega]|^2}{2\pi f \times 4\pi \times 10^{-7}}$$
$$\phi = \arctan \frac{\Re Z[\omega]}{\Im Z[\omega]}$$

需要注意，测量数据的单位分别为电场强度 mV/km，磁场强度为 nT，需要转换为国际单位制 V/m 和 A/m





MATLAB实现

MATLAB implementation



中南大學
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

MATLAB实现

根据现有算法，我们设计了完整的大地电磁数据处理程序，可以计算电阻率、相位、相干度和倾子矢量振幅和相位。



完整的代码在 Github 仓库开源

<https://github.com/PourRevenir/Magnetotelluric-Signal-Processing>

```
1 file = '40-13';
2 filename = [file, '.AVG'];
3
4 % read .AVG data file
5 [f, Data] = ReadAvgData(filename);
6
7 % calculate
8 [rxy, ryx, phxy, phyx, Azx, Bzy, CPxy, CPyx] = Magnetotelluric(f, Data);
9
10 % plot
11 PlotResistivity(f, CPxy, CPyx, file)
```



03

计算结果

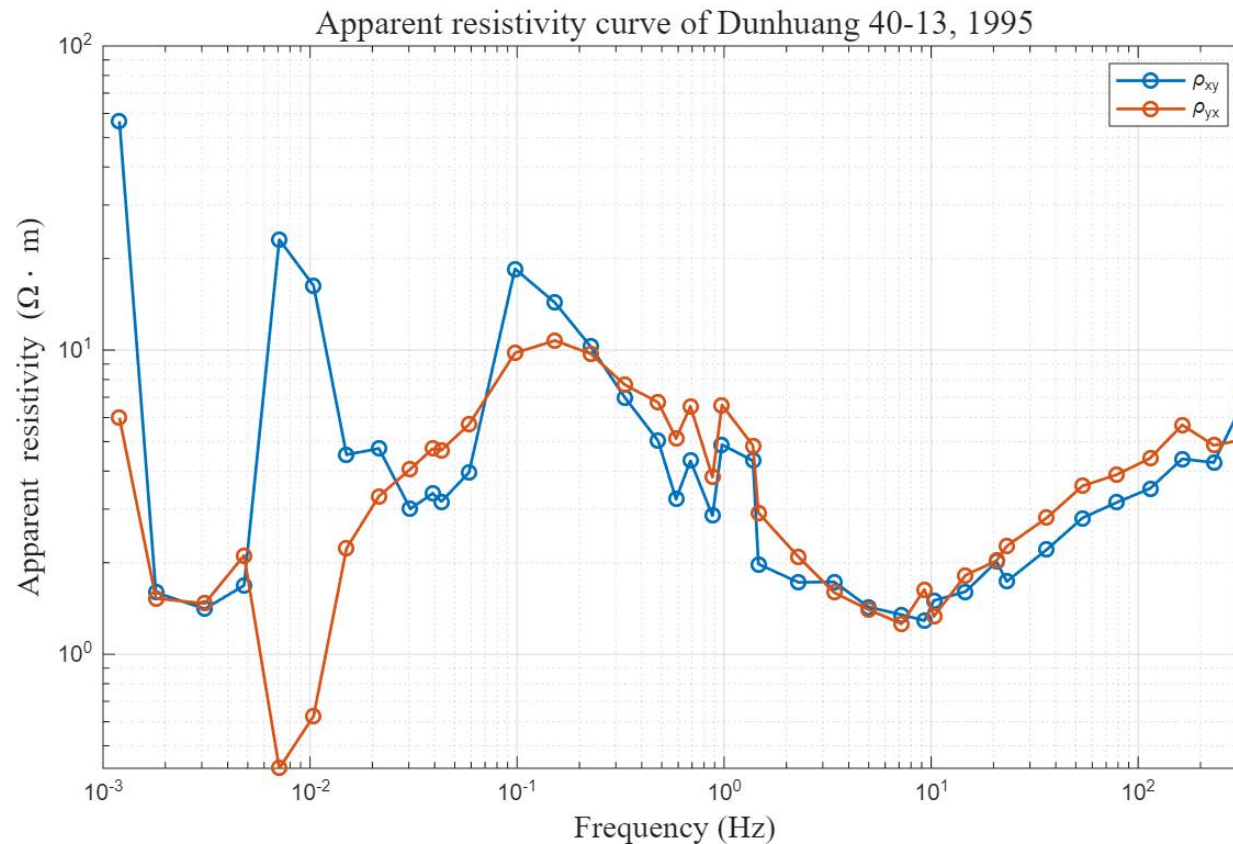
Result



视电阻率曲线

右图为1995年在敦煌40测线13测点采集的大地电磁测深数据的计算结果。

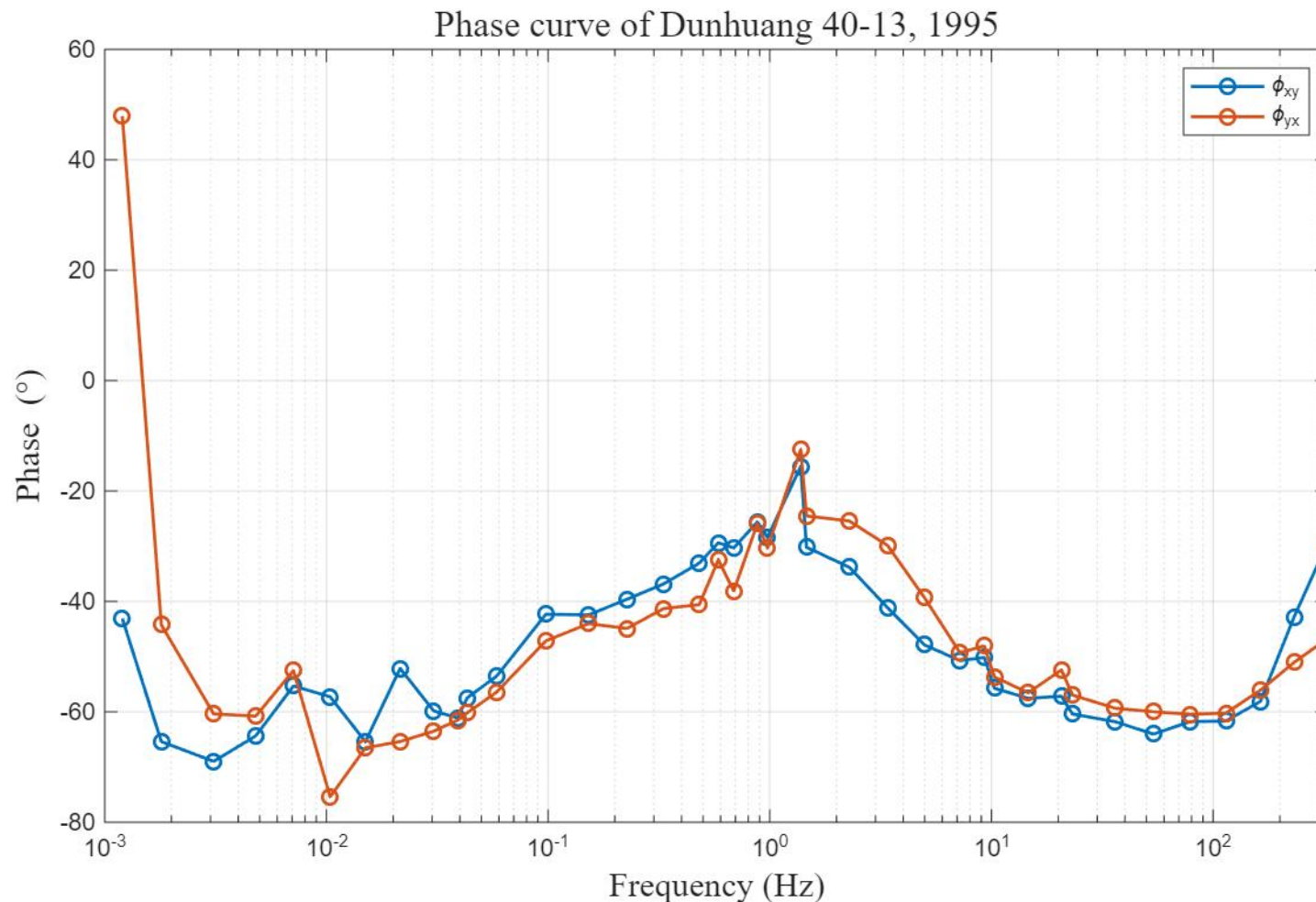
从图中可以看到，视电阻率 ρ_{xy} 和 ρ_{yx} 并不相等，可能是由于地下介质的各向异性所致。





视电阻率曲线

相位曲线相较电阻率曲线可以获得较深的探测深度。

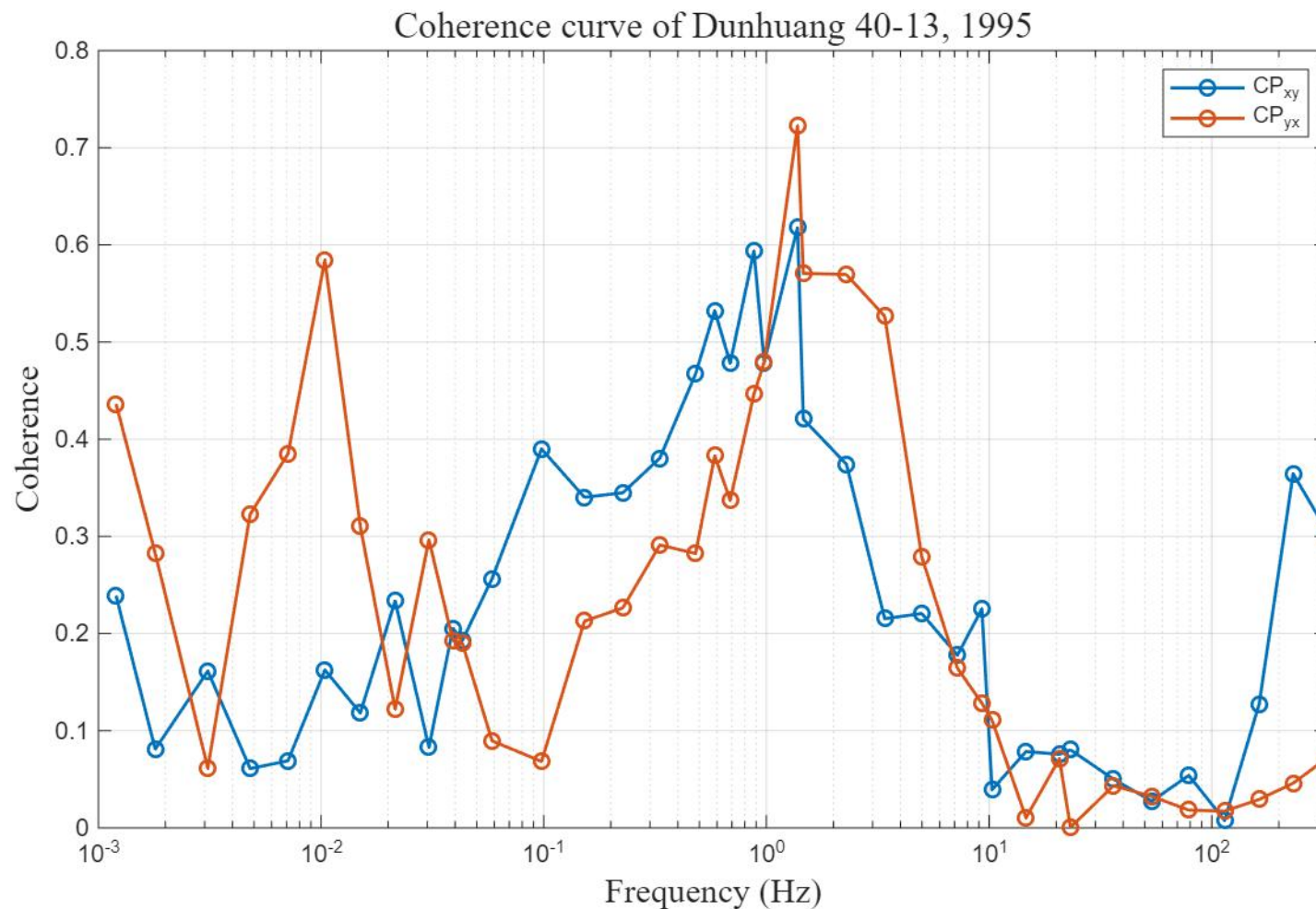




相干度曲线

相干度曲线反映了测量和计算结果的好坏。

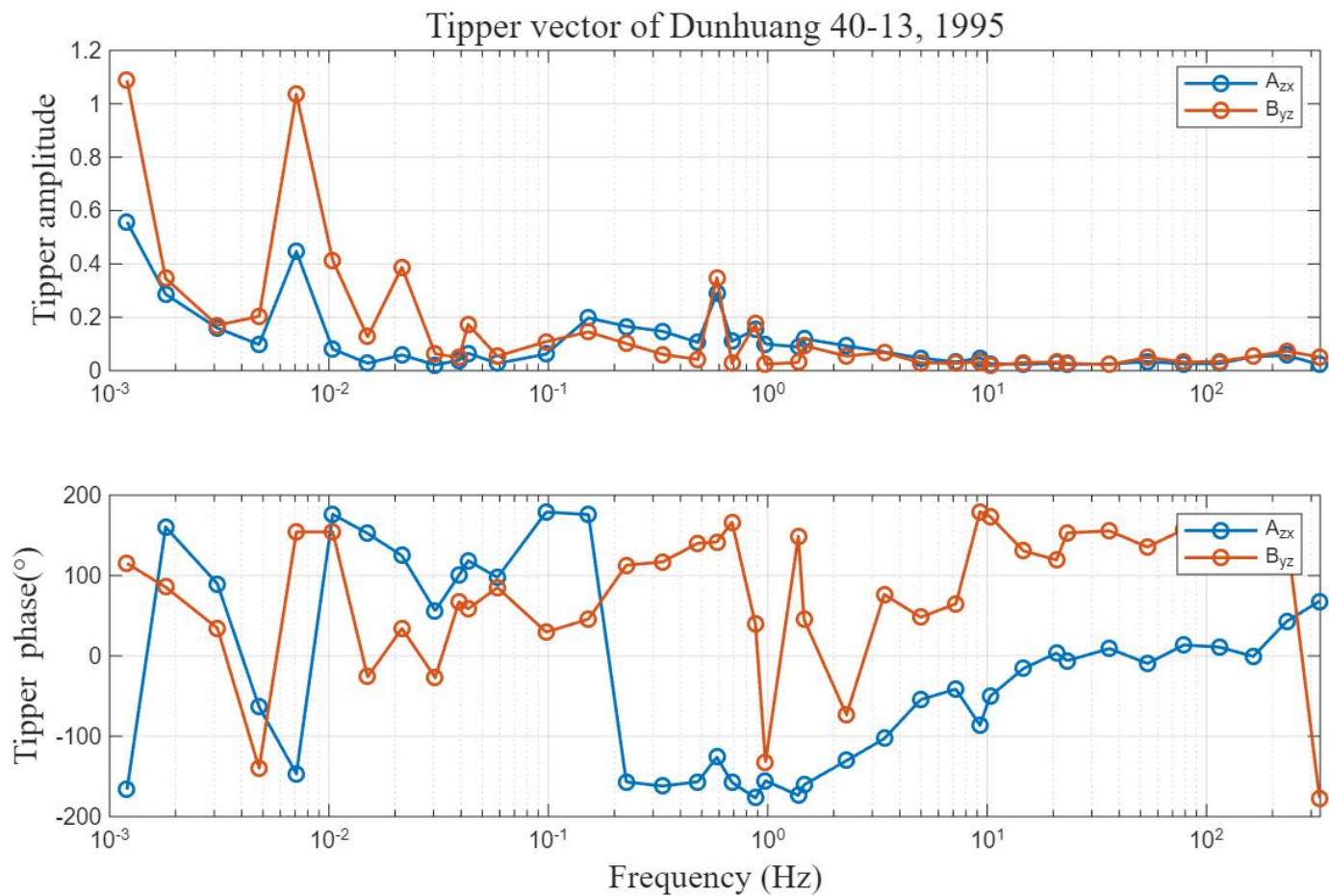
相干度计算结果不理想的原因可能包括程序不合理、数据的年代过早等。





倾子矢量振幅和相位曲线

倾子矢量的振幅和相位如右图所示。





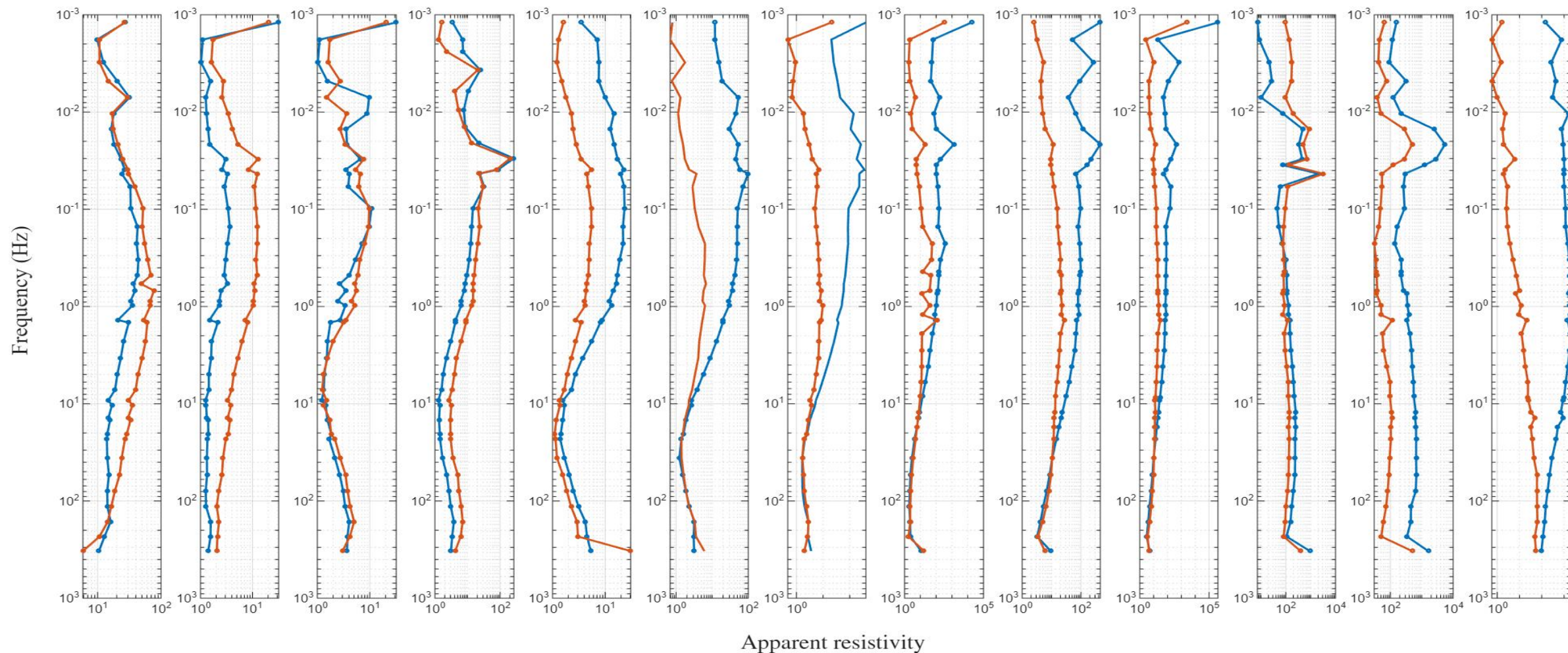
计算结果

Result



中南大学
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

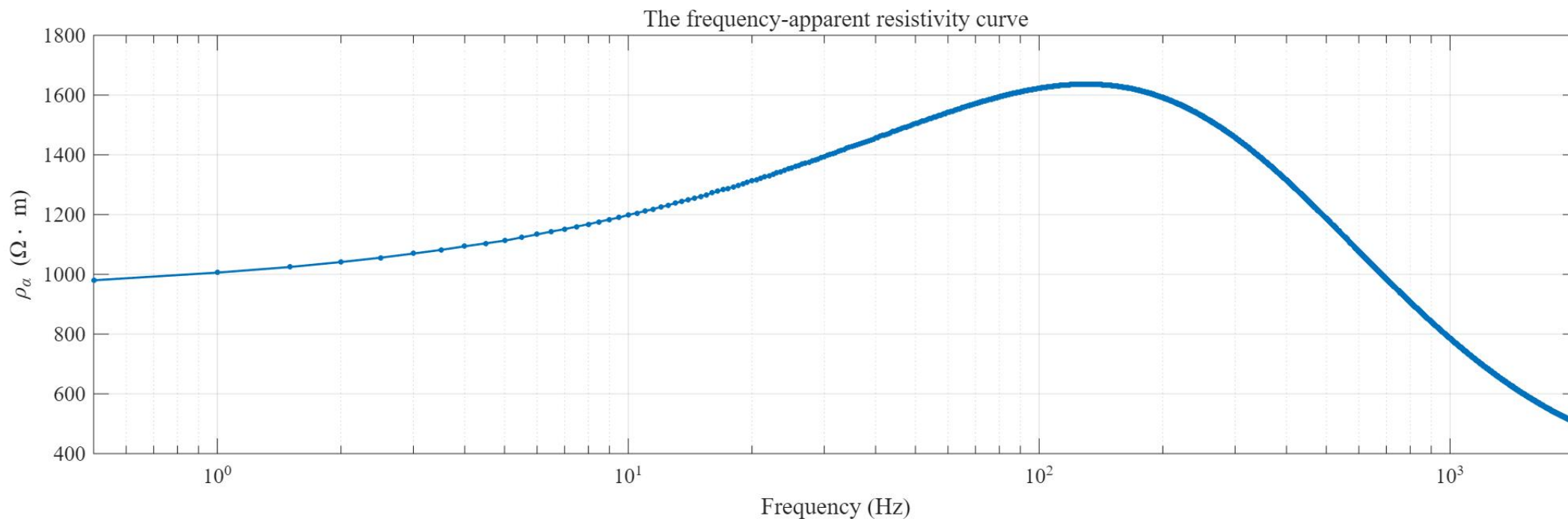
40测线13个测点的视电阻率测深曲线





时间序列大地电磁数据处理

为了验证方法的准确，我们使用了加分作业中的时间序列大地电磁数据，计算了视电阻率曲线，为 K 型曲线





计算结果

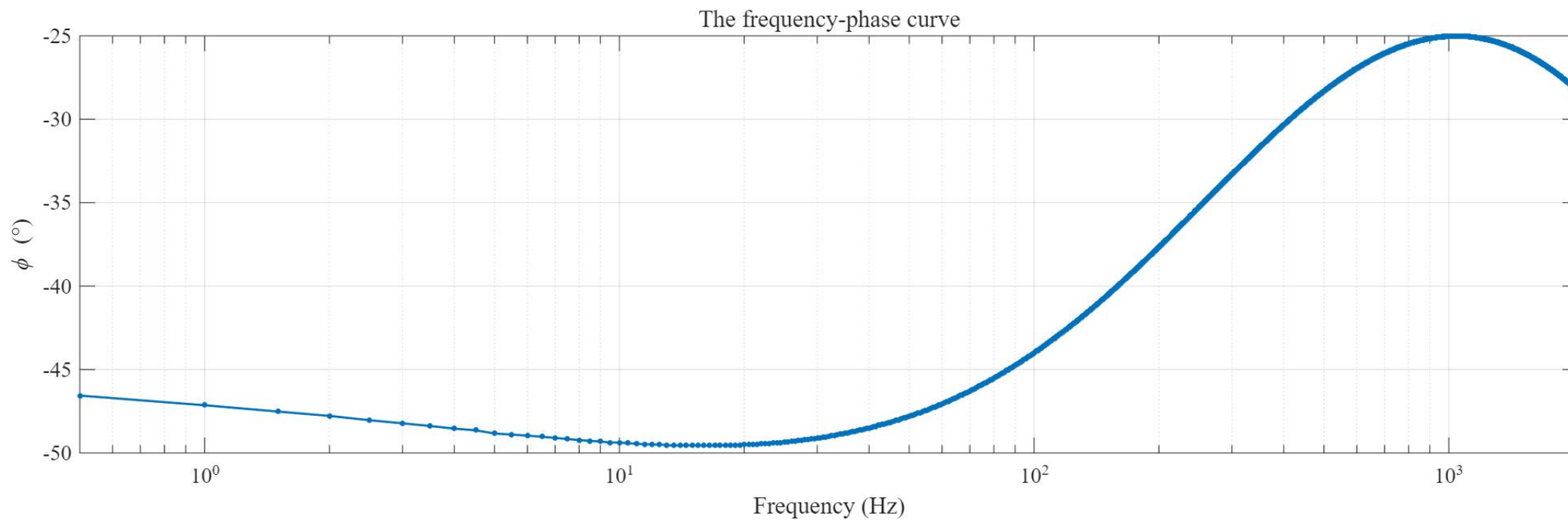
Result



中南大學
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

时间序列大地电磁数据处理

以及相位曲线



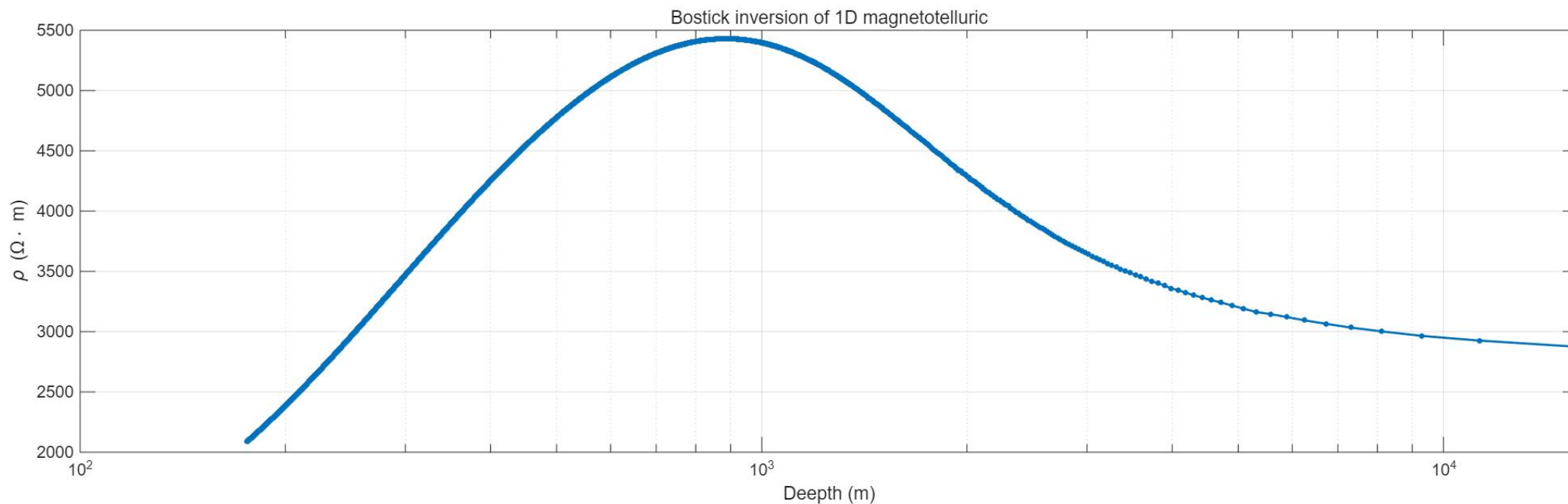


时间序列大地电磁数据处理

利用一维 Bostick 反演得到电阻率-深度曲线

$$h = \sqrt{\frac{\rho_{\alpha}}{2\pi f \mu}}$$

$$\rho = \rho_{\alpha} \left(\frac{90^{\circ}}{\phi_{\alpha}} - 1 \right)$$





04

研究结论

Conclusions



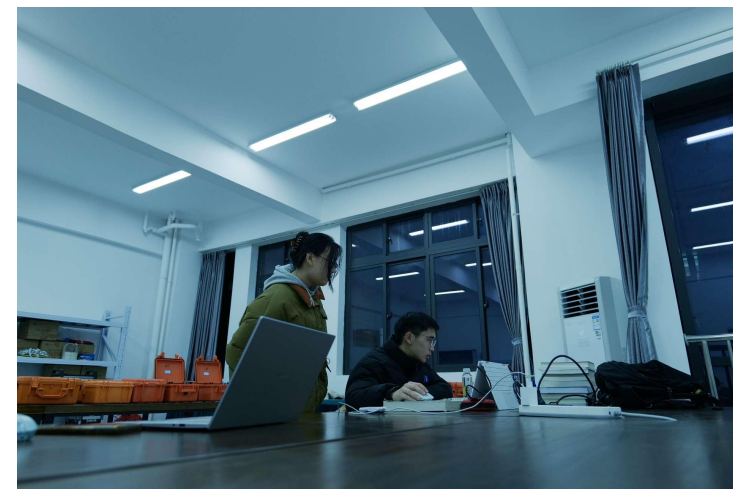
研究结论

Conclusions



中南大學
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

- 1、推导了大地电磁法中阻抗的线性最小二乘估计公式。利用这个公式，我们计算了1995年敦煌测线-40数据的视电阻率曲线、相位曲线、以及相干性和倾斜矢量。
- 2、基于相干分析，发现数据质量欠佳，导致从Bostick反演中获得的结果存在显著偏差。此外，我们对来自加分作业的大地电磁测深数据进行了处理，进行了一维Bostick反演，得到了较好的结果。
- 3、通过本次作业，团队成员对大地电磁法的基本理论和实际应用有了更深入的了解。我们还掌握了阻抗估计和必要的编程技术。此外，对电法勘探的正反演建模的理解也有了显著的提高。





中南大学
CENTRAL SOUTH UNIVERSITY

地球科学与信息物理学院
School of Geoscience and Info-physics

感谢各位老师及同学的点评!

Thank You for Listening!

2024年1月15日