

特殊方程作业 6

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 12 日

问题 1 考虑满足下列边界条件及初始条件的一维热传导方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 100, u|_{x=1} = 100, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 3 \sin(5\pi x) + 100, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. 采用分离变量法求解该定解问题；
2. 验证上一步求得的 $u(x, t)$ 满足定解问题。

问题 #1.1	Grade:
<p>考虑到非齐次边界条件的具体形式，可设齐次化函数为</p> $v(x) = 100$ <p>于是令</p> $u(x, t) = v(x) + w(x, t) = w(x, t) + 100$ <p>则有</p> $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ <p>对应的定解问题为</p> $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ w _{x=0} = w _{x=1} = 0, & t \geq 0 \\ w _{t=0} = 3 \sin(5\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$	<p><i>Faculty Comments</i></p>

问题 #1.1	Grade:
<p>采用分离变量法，可得</p> $w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$ <p>代入初始条件</p> $w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) = 3 \sin(5\pi x)$ <p>于是可以取 $C_5 = 3$,</p> $w(x, t) = 3 \sin(5\pi x) e^{-(5\pi)^2 t}$ <p>问题的形式解为</p> $u(x, t) = 3 \sin(5\pi x) e^{-(5\pi)^2 t} + 100$	<p><i>Faculty Comments</i></p>

问题 #1.2	Grade:
经验证，解得的 $u(x,t)$ 是满足边界条件和初始条件的一解。	<i>Faculty Comments</i>

MATLAB 计算代码如下，用于图示辅助验证。

test6_script.m

```
1  % 图示求解结果
2  clear;
3
4  % 定义参数
5  x = 0:0.1:1;
6  t = 0:0.1:1;
7  [X,T]=meshgrid(x,t);
8
9  uxt = 3*sin(5*pi*X).*exp(-(5*pi)^2*T)+100;
10
11 % 绘制图像
12 figure;
13 contourf(X,T,uxt,20);
14 colorbar;
15 xlabel('x');
16 ylabel('t');
```

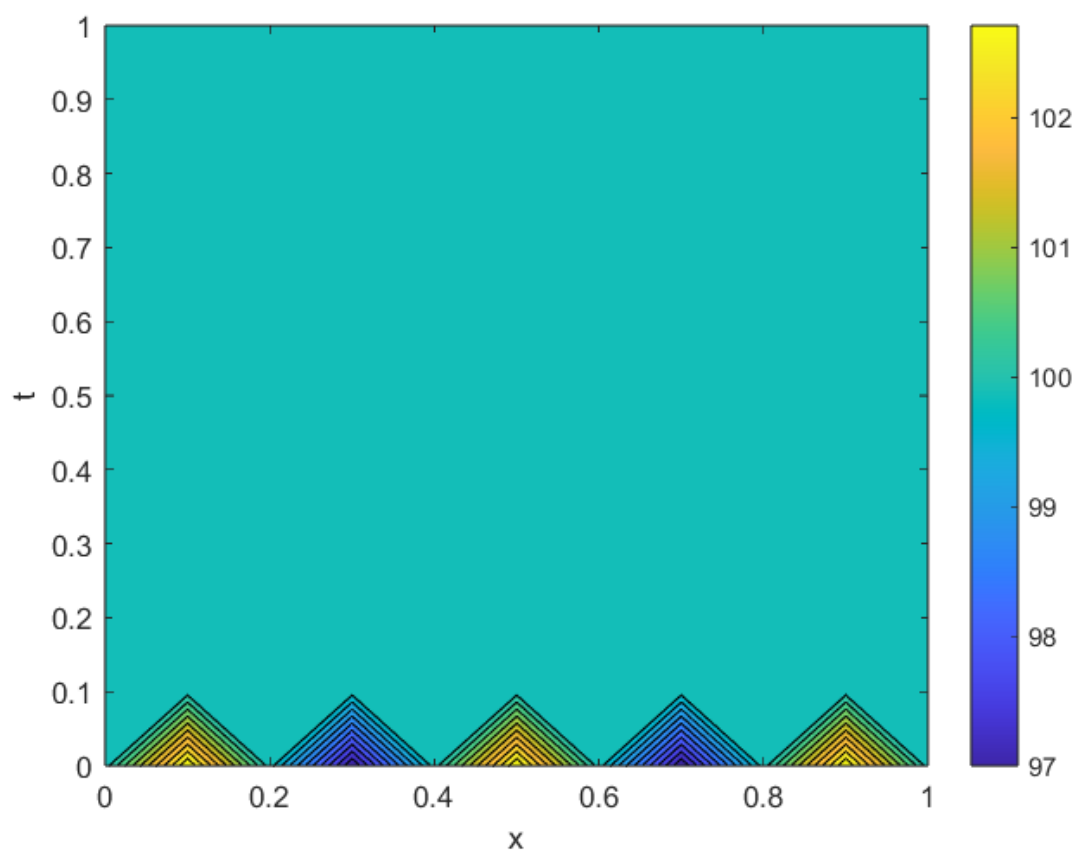


图 1: 结果图示