

特殊方程作业 4

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 4 月 26 日

问题 1 采用分离变量法求解下列位势方程的形式解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 10, 0 < y < 10 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=10} = 0, & 0 \leq y \leq 10 \\ u|_{y=0} = 0, u|_{y=10} = 100, & 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

要求：得到形式解后，图示计算结果。

问题 #1	Grade:
<p>边界条件有一组是齐次的，可以采用分离变量法，假设</p> $u(x, y) = X(x)Y(y)$ <p>代入偏微分方程，得到</p> $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$ <p>得到两个常微分方程</p> $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ <p>代入关于 x 的边界条件，得到本征值和本征函数</p> $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{10}\right)^2, n = 1, 2, \dots$ $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{10} x, n = 1, 2, \dots$	<p><i>Faculty Comments</i></p>

问题 #1	Grade:
<p>进一步求解 $Y(y)$, 得到通解</p> $Y_n(y) = C_n \sinh \frac{n\pi}{10}y + D_n \cosh \frac{n\pi}{10}y, \quad n = 1, 2, \dots$ <p>得到满足位势方程和齐次边界条件的特解</p> $u_n(x, y) = \left(C_n \sinh \frac{n\pi}{10}y + D_n \cosh \frac{n\pi}{10}y \right) \sin \frac{n\pi}{10}x$ <p>叠加原理, 得到一般解</p> $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sinh \frac{n\pi}{10}y + D_n \cosh \frac{n\pi}{10}y \right) \sin \frac{n\pi}{10}x$ <p>代入关于 y 的非齐次边界条件</p> $\begin{cases} u _{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{10}x = 0 \\ u _{y=b} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sinh n\pi + D_n \cosh n\pi) \sin \frac{n\pi}{10}x = 100 \end{cases}$ <p>根据傅里叶级数知识, 可得</p> $D_n = 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh n\pi \sin \frac{n\pi}{10}x = 100$ <p>即</p> $C_n = \frac{2U_0}{10 \sinh n\pi} \int_0^{10} \sin \frac{n\pi}{10}x dx$ <p>求解积分可得</p> $C_n = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \sinh n\pi}, & n = 1, 3, \dots \\ 0, & n = 2, 4, \dots \end{cases}$ <p>得到形式解后</p> $u(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{10}x \sinh \frac{2n+1}{10}y}{(2n+1) \sinh(2n+1)\pi}$	<p><i>Faculty Comments</i></p>

根据形式解，取叠加系数 $N = 100$ ，采用如下 MATLAB 代码进行计算

test4_script.m

```
1      % 分离变量法求解位势方程图示
2      clear;
3
4      U0 = 100;
5      x = 0:0.2:10;
6      y = 0:0.2:10;
7      [X,Y] = meshgrid(x,y);
8      N = 100;
9
10     uxy = zeros(length(y),length(x));
11     for n = 1:2:N
12         uxy = (1/(n*sinh(n*pi)))*sin(n*pi*X/10).*sinh(n*pi*Y/10)+uxy;
13     end
14     uxy = 4*U0*uxy/pi;
15
16     % 绘制图像
17     contourf(X,Y,uxy,20);
18     xlabel('x');
19     ylabel('y');
20     colorbar;
```

程序计算结果如图 1 所示

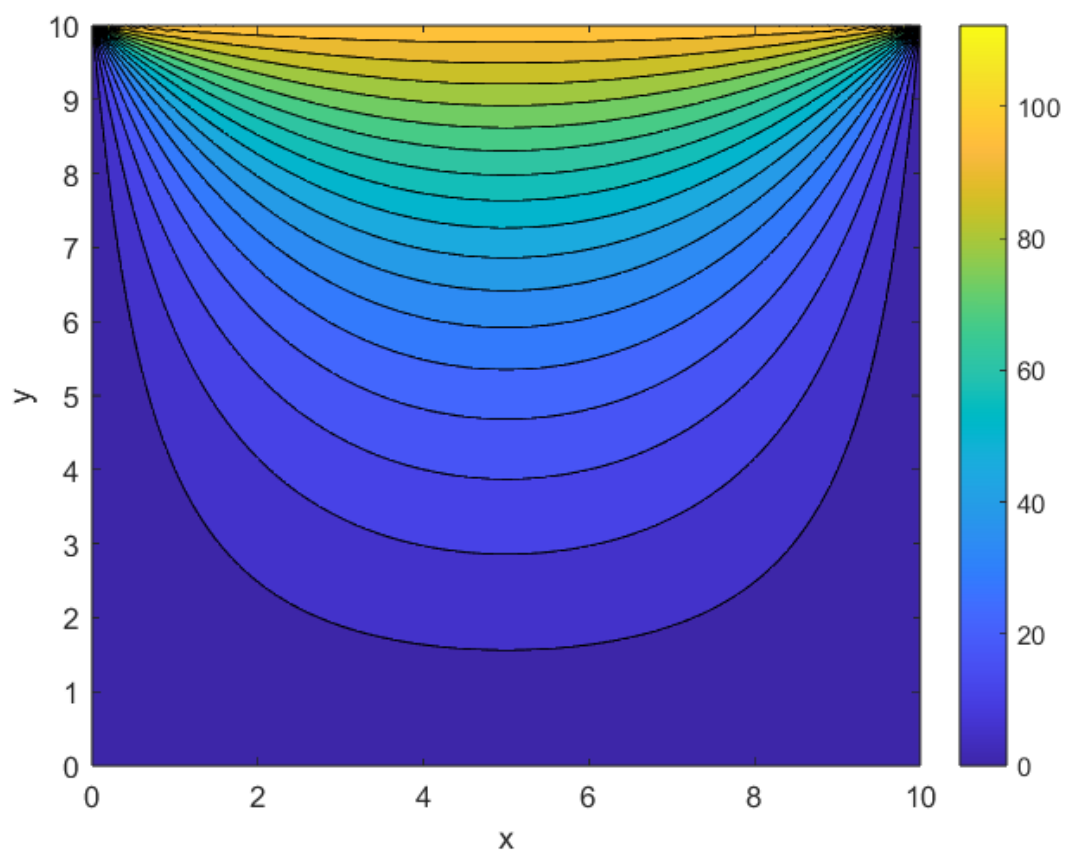


图 1: 第一题结果图