

特殊方程作业 8

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 24 日

问题 1 设 $u(x, t)$ 满足波动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

1. 写出形式解（即 D'Alembert 解）；
2. $\varphi(x)$ 与 $\phi(x)$ 满足何条件时，仅由左行波构成？
3. $\varphi(x)$ 与 $\phi(x)$ 满足何条件时，仅由右行波构成？
4. 若当 $|x| \geq 10$ 时初值为 0，那么 t 为何值时， $u(-10, t)$ 不受初始扰动的影响？

问题 #1.1	Grade:
<p>由波动方程的行波法，可以得到达朗贝尔公式</p> $u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \phi(s)ds$	<i>Faculty Comments</i>

问题 #1.2	Grade:
<p>由题 1.1 解出的答案，可以得知，当</p> $\phi(x) = \varphi'(x)$ <p>可以解出 $u(x, t) = \varphi(x+t)$，即仅有左行波。</p>	<i>Faculty Comments</i>

问题 #1.3

Grade:

由题 1.1 解出的答案，可以得知，当

$$\phi(x) = -\varphi'(x)$$

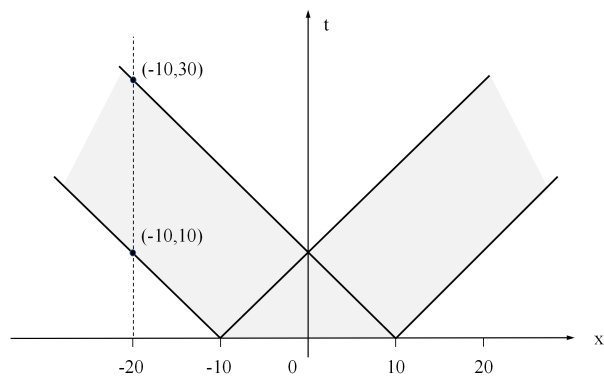
可以解出 $u(x, t) = \varphi(x - t)$ ，即仅有右行波。

Faculty Comments

问题 #1.4

Grade:

采用图解法，如图所示



可得当 $t < 10$ 或 $t > 30$ 时，不受初始扰动的影响。

Faculty Comments