课后作业：一维模型大地电磁响应的差分解法

杨曜堃 张浩宇

2024 年 5 月 7 日

1 差分正演算法推导

一维大地介质中，电场满足微分方程

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + i\omega\mu\sigma(z)E_x = 0 \tag{1}$$

其中 σ 为介质的电导率，其单位为 S/m，μ 为介质的磁导率，取 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$H/m。使用有限差分法求解，对电场离散化，如图 1所示

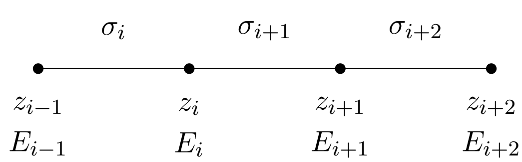

图 1: 电场离散化

采用有限差分法计算偏导数

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right|_{z_i} = \frac{1}{\Delta z^2}\left(E_{i-1} - 2E_i + E_{i+1}\right) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)可得

$$\frac{1}{\Delta z^2}(E_{i-1} - 2E_i + E_{i+1}) + i\omega\mu\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right)E_i = 0 \tag{3}$$

即

$$\frac{1}{\Delta z^2}E_{i-1} + \left[i\omega\mu\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right) - \frac{2}{\Delta z^2}\right]E_i + \frac{1}{\Delta z^2}E_{i+1} = 0 \tag{4}$$

将式(4)推广到所有节点，并写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_{N-1}+\sigma_N}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

为了使方程组可解，需加入边界条件。由上边界条件，电场在空气中不衰减，取 $E_0 = 1$。对于下边界，电磁波按复指数衰减，因而满足微分方程

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + kE_x = 0 \tag{6}$$

将式(6)转为差分格式

$$\left(\frac{1}{\Delta z} + k\right) E_N - \frac{1}{\Delta z} E_{N-1} = 0 \tag{7}$$

将边界条件加入式(5)，可得完整线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\Delta z^2} & i\omega\mu\left(\frac{\sigma_{N-1}+\sigma_N}{2}\right)-\frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\Delta z} & \frac{1}{\Delta z}+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_{N-1} \\ E_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

从而可以求出 E_x，进一步可以求出视电阻率和相位

$$Z_{1\mathrm{D}} = E_x \left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)^{-1} \tag{8a}$$

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu}|Z_{ID}|^2 \tag{8b}$$

$$\theta = \arctan\frac{\mathrm{Re}\{Z_{1\mathrm{D}}\}}{\mathrm{Im}\{Z_{1\mathrm{D}}\}} \tag{8c}$$

其中 $Z_{1\mathrm{D}}$ 是地表处的阻抗，即地表处电场与磁场之比。为了提高视电阻率计算精度，将偏导数写成

$$\left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{2L}(-11E_0 + 18E_1 - 9E_2 + 2E_3) \tag{9}$$

其中 L 为节点 1 至节点 4 的距离。

2 一维模型试算分析

选取二层 G 型地电模型，其模型参数为 $\sigma_1 = 0.1\text{S/m}$，$\sigma_2 = 0.01\text{S/m}$，$h = 1000\text{m}$，如图 2所示。

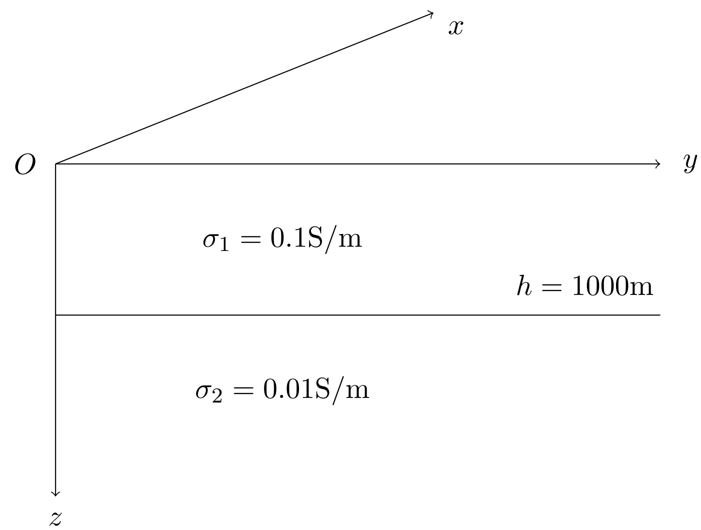

图 2: 二层 G 型地电模型

根据有限差分法正演公式，编写 MATLAB 程序，计算结果如图 3所示

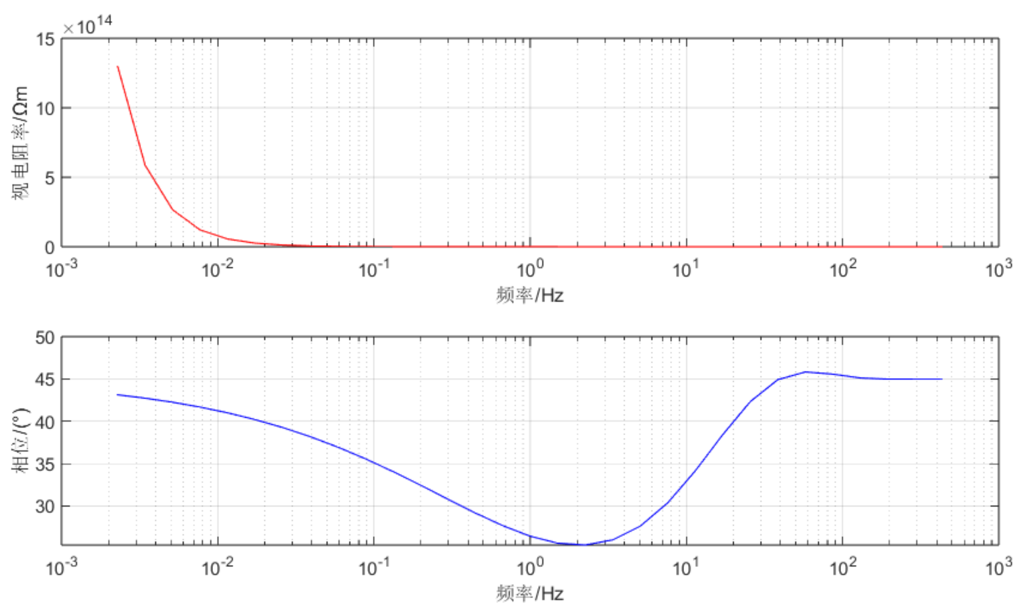

图 3: 正演计算结果图