

特殊方程作业 3

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 3 日

问题 1 采用分离变量法求解下列热传导方程定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{t=0} = 4 \sin \pi x \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

问题 #1	Grade:
<p>采用分离变量法，令 $u(x, t) = X(x)T(t)$，代入偏微分方程得到</p> $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$ $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) \end{cases}$ <p>利用本征值法，代入边界条件</p> $X(0) = X(1) = 0$ <p>，得到本征值和本征函数</p> $\lambda_n = (n\pi)^2, X_n(x) = \sin n\pi x, n = 1, 2, \dots$ <p>进一步求解一阶微分方程 $\frac{T'(t)}{T(t)} = -(an\pi)^2$，方程两边对 t 积分得到</p> $\ln T_n(t) = -(an\pi)^2 t + C$ $T_n = C_n e^{-(an\pi)^2 t}$ <p>得到满足条件的一组特解</p> $u_n(x, t) = C_n e^{(-an\pi)^2 t} \sin n\pi x$ <p>代入初始条件</p> $u _{t=0} = \sum C_n \sin n\pi x = 4 \sin \pi x$ <p>于是可以取 $C_1 = 4$，得到定解问题的解</p> $u(x, t) = 4e^{-(a\pi)^2 t} \sin \pi x$	<p><i>Faculty Comments</i></p>