# 特殊方程作业 7

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 22 日

**问题 1** 利用行波法求解下列 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -a\varphi'(x) \end{cases}$$

**问题 2** 利用 D'Alembert 解的计算公式求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \phi(x) \end{cases}$$

1. $a = 1$，$\varphi(x) = 3e^{-x^2}$，$\phi(x) = 0$
2. $a = 3$，$\varphi(x) = 0$，$\phi(x) = xe^{-x^2}$

**要求**: 得到形式解（即 D'Alembert 解）后，图示计算结果。

## 问题 #1 　　　　Grade:

*Faculty Comments*

采用自变量的线性组合作为新变量

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$$

代入偏微分方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

这意味着 $u(\xi, \eta)$ 可以写成两个连续一元函数的和，即

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

## 问题 #1 Grade:

*Faculty Comments*

进而得到通解

$$u(x,t)=F(x+at)+G(x-at)$$

代入初始条件

$$u|_{t=0}=F(x)+G(x)=\varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=aF'(x)-aG'(x)=-a\varphi'(x)$$

方程两边对 $x$ 在区间

$$[x_0,x]$$

上积分

$$\int_{x_0}^{x}F'(x)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{x}G'(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_0}^{x}\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

计算得到

$$F(x)-G(x)=k(x_0)-\varphi(x)$$

其中 $k(x_0)=F(x_0)-G(x_0)+\varphi(x_0)$，从而联立解出 $F(x)$、$G(x)$

$$F(x)=\frac{1}{2}k(x_0)$$

$$G(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}k(x_0)$$

将 $x$ 分别用 $x+at$ 和 $x-at$ 替换可得

$$F(x+at)=\frac{1}{2}k(x_0)$$

$$G(x-at)=\varphi(x-at)-\frac{1}{2}k(x_0)$$

得到该 Cauchy 问题的 D'Alembert 解

$$u(x,t)=\varphi(x-at)$$

## 问题 #2.1 Grade:

*Faculty Comments*

根据 D'Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi(s)\mathrm{d}s$$

代入 $a=1$，$\varphi(x)=3e^{-x^2}$，$\phi(x)=0$

## 问题 #2.1 Grade:

即得到形式解

$$u(x,t) = \frac{3}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}\right]$$

采用 MATLAB 计算代码图示结果。

*Faculty Comments*

test7_2_1.m

```
% 问题2.1达朗贝尔解图示
clear;

x = -4:0.1:4;
t = 0:0.1:2.5;
[X,T] = meshgrid(x,t);
uxt = 1.5*(exp(-(X+T).^2)+exp(-(X-T).^2));

% 绘制图像
figure;
surf(X,T,uxt);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u');
```

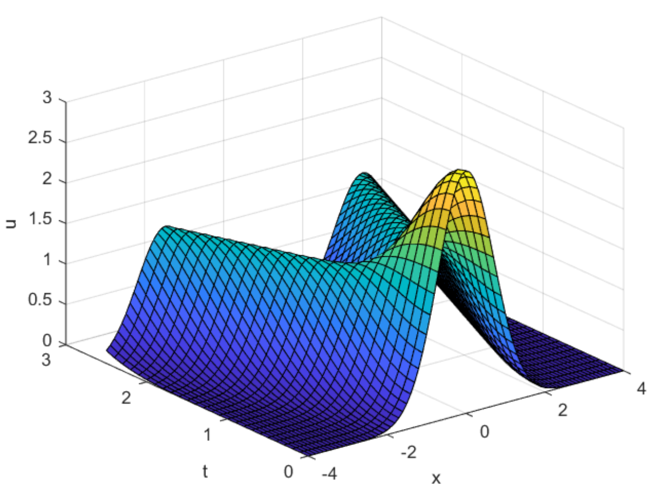


图 1: 题 2.1 结果图

## 问题 #2.2

**Grade:**

*Faculty Comments*

根据 D'Alembert 公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi(s)\mathrm{d}s$$

代入 $a=3$，$\varphi(x)=0$，$\phi(x)=xe^{-x^2}$ 即得到形式解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} se^{-s^2}\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{12}[e^{-(x+3t)^2} - e^{-(x-3t)^2}] \end{aligned}$$

采用 MATLAB 计算代码图示结果。

test7_2_2.m

```
% 问题2.2达朗贝尔解图示
clear;

x = -10:0.5:10;
t = 0:0.1:2;
[X,T] = meshgrid(x,t);
uxt = -(exp(-(X+3*T).^2)-exp(-(X-3*T).^2))/12;

% 绘制图像
figure;
surf(X,T,uxt);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u');
```

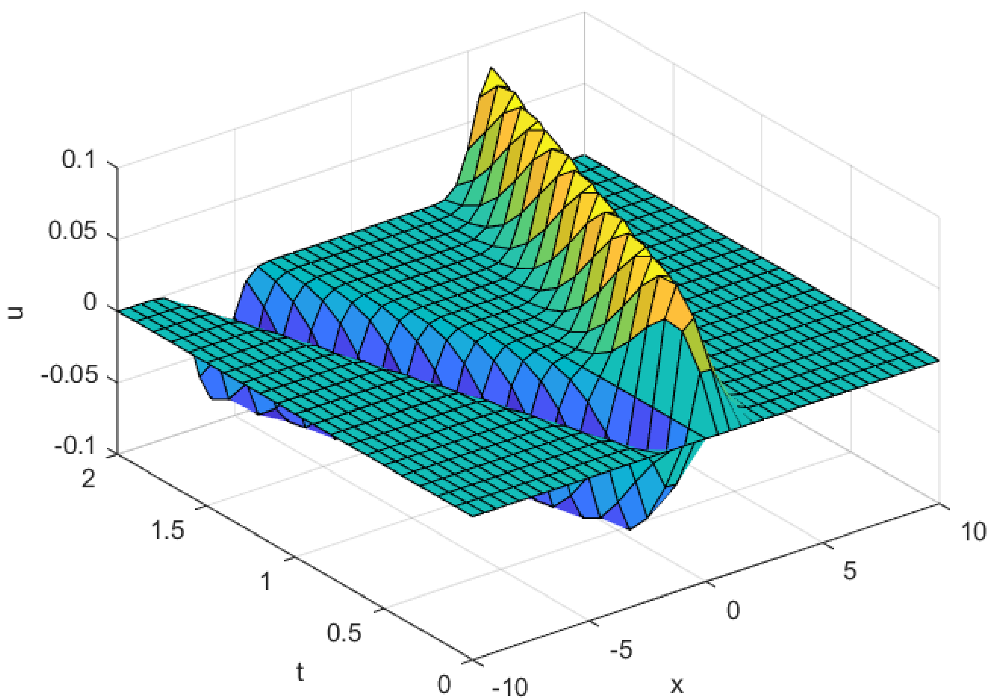


图 2: 题 2.2 结果图