特殊方程作业 2

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 3 日

求解满足下列边界条件及初始条件的弦振动方程。

问题 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0, & t \geqslant 0 \\ u|_{t=0} = \sin \pi x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

问题 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0, & t \geqslant 0 \\ u|_{t=0} = \sin 2\pi x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin 3\pi x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

问题 3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0, & t \geqslant 0 \\ u|_{t=0} = \sin \pi x + 3\sin 2\pi x - \sin 5\pi x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

问题 #1 Grade:

分离变量法, 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入偏微分方程可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$$

代入边界条件，得到常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''(t)+\lambda X(t)=0 \\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$$

采用本征值法讨论，排除零解情况，得到在 $\lambda>0$ 时

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

代入边界条件得到

$$X(0)=A=0,\ X(1)=B\sin\sqrt{-\lambda}=0$$

由于 B 不能为 0，所以 $\sin\sqrt{\lambda}=0$，解出

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\ X_n(x)=B\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

进一步可以解出

$$T_n(t)=C_n\cos n\pi t+D_n\sin n\pi t,\ n=1,2,\cdots$$

得到满足条件的一组特解

$$u_n(x,t)=(C_n\cos n\pi t+D_n\sin n\pi t)\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

代入初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\sum C_n\sin n\pi x=\sin\pi x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=n\pi\sum D_n\sin n\pi x=0 \end{cases},n=1,2,\cdots$$

因此我们取 $C_1=1$，$D_n=0$，得到形式解

$$u(x,t)=\cos\pi t\sin\pi x$$

Faculty Comments

问题 #2 Grade:

Faculty Comments

分离变量法, 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入偏微分方程可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{4}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$$

代入边界条件，得到常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''(t)+\lambda X(t)=0 \\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$$

采用本征值法讨论，排除零解情况，解出本征值和本征函数

$$\lambda_n=(n\pi)^2,\ X_n(x)=\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

进一步可以解出

$$T_n(t)=C_n\cos 2n\pi t+D_n\sin 2n\pi t,\ n=1,2,\cdots$$

得到满足条件的一组特解

$$u_n(x,t)=(C_n\cos 2n\pi t+D_n\sin 2n\pi t)\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

代入初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\sum C_n\sin n\pi x=\sin 2\pi x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=2n\pi\sum D_n\sin n\pi x=\sin 3\pi x \end{cases},n=1,2,\cdots$$

取 $C_2=1$，$D_3=\dfrac{1}{6\pi}$，得到形式解

$$u(x,t)=\cos 4\pi t\sin 2\pi x+\frac{1}{6\pi}\sin 6\pi t\sin 3\pi x$$

问题 #3 Grade:

Faculty Comments

分离变量法, 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入偏微分方程可得

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$$

采用本征值法讨论，并代入边界条件，解出

$$X_n(x)=\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

$$T_n(t)=C_n\cos n\pi t+D_n\sin n\pi t,\ n=1,2,\cdots$$

得到满足条件的一组特解

$$u_n(x,t)=(C_n\cos n\pi t+D_n\sin n\pi t)\sin n\pi x,\ n=1,2,\cdots$$

代入初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\sum C_n\sin n\pi x=\sin\pi x+3\sin 2\pi x-\sin 5\pi x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=n\pi\sum D_n\sin n\pi x=0 \end{cases},n=1,2,\cdots$$

我们取 $C_1=1$，$C_2=3$，$C_5=-1$，$D_n=0$，得到形式解

$$u(x,t)=\cos\pi t\sin\pi x+3\cos 2\pi t\sin 2\pi x-\cos 5\pi t\sin 5\pi x$$