

特殊方程作业 5

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 9 日

问题 1 采用分离变量法求解下列非齐次波动方程。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

问题 #1	Grade:
<p>由于非齐次项只是关于 x 的函数，因此可以设</p> $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$ <p>代入偏微分方程，可得</p> $v''(x) = -\sin \pi x$ <p>解出</p> $v(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x + C_1 x + C_2$ <p>代入边界条件</p> $v(0) = C_2 = 0, \quad v(1) = C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 = 0$ <p>即</p> $v(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x$ <p>而 $w(x, t)$ 是对应齐次定解问题的通解，容易得到</p> $w_n(x, t) = \sin n\pi x (C_n \sin n\pi t + D_n \cos n\pi t)$ <p>代入初始条件</p> $D_n \sin n\pi x = -v(x) = -\frac{1}{\pi^2} \sin \pi x, \quad D_1 = -\frac{1}{\pi^2}$ $C_n \sin n\pi x = 0, \quad C_n = 0$ <p>得到形式解</p> $u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x (1 - \cos \pi t)$	<p><i>Faculty Comments</i></p>