特殊方程作业 10

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 4 月 26 日

问题 1 采用拉普拉斯变换法求解下列热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = T_0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u(x,t)|_{x=+\infty}\text{有界} \end{cases}$$

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

对 $u(x,t)$ 做关于 t 的拉普拉斯变换，定义

$$U(x,s) \triangleq \mathscr{L}\{u(x,t)\} = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-st}\mathrm{d}s$$

根据拉普拉斯变换的微分性质

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\mathscr{L}\{u(x,t)\} - u(x,0) = sU(x,s) - T_0$$

另一边

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\mathrm{d}U(x,s)}{\mathrm{d}x^2}$$

代入偏微分方程得到非齐次线性偏微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x,s)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{s}{a^2}U(x,s) = -\frac{T_0}{a^2}$$

对应齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x,s)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{s}{a^2}U(x,s) = 0$$

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

解之，得到齐次方程的通解

$$\widetilde{U}(x,s)=C_1e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}+C_2e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

我们确信 $u(x,t)$ 在 $t>0$ 不含冲激函数以及高阶奇异函数，因此可以利用拉普拉斯变换的初值定理，即

$$\lim_{s\to\infty}sU(x,s)=u(x,0^+)=T_0$$

说明

$$\lim_{s\to\infty}U(x,s)=0$$

这要求 $C_2=0$，即 $\widetilde{U}(x,s)=C_1e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$。注意到非齐次方程的非齐次项为常数，因此很自然想到非齐次方程的特解为一个常数

$$U^*(x,s)=-\frac{T_0}{s}$$

根据条件 $u(x,t)=0$，得知 $U(x,s)=0$，因此可得 $C_1=\dfrac{T_0}{s}$。非齐次方程的通解为为

$$U(x,s)=\frac{T_0}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}-\frac{T_0}{s}$$

对该解做拉普拉斯逆变换，根据线性性质

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{U(x,s)\right\}=T_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right\}-T_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

对于第二项可以轻松得到 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=1$，因此重点关注第一项。根据黎曼-梅林反演公式

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}e^{st}\mathrm{d}s$$

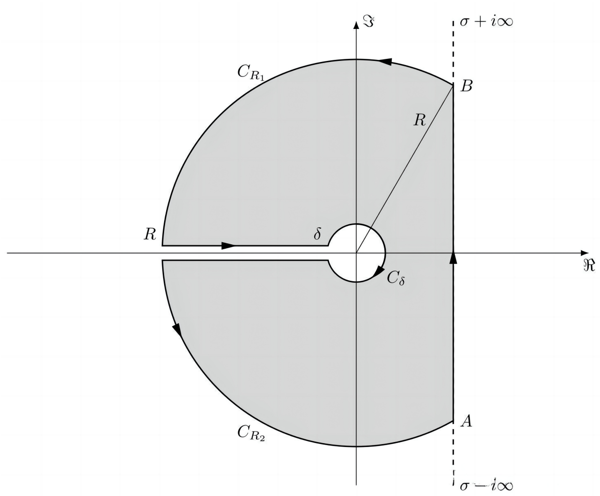
为了求解该积分，需要构造函数

$$f(z)=\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{z}}{a}x}e^{zt}$$

取 $\sigma>0$，规定 z 的辐角取值范围在 $(-\pi,\pi]$，取围道如图所示

问题 #1　　Grade:

Faculty Comments



$z=0$ 是 $f(z)$ 的一个支点，因此围道需要沿实轴割开。$f(z)$ 在围道内是可解析的，根据留数定理

$$\left(\int_A^B + \int_{C_{R_1}} + \int_R^\delta + \int_{C_\delta} + \int_\delta^R + \int_{C_{R_2}}\right) f(z)\mathrm{d}z = 0$$

观察被积函数 $f(z)$ 中指数上的实部

$$\mathrm{Re}\left\{-\sqrt{Re^{j\theta} + Re^{j\theta t}}\right\} = Rt\cos\theta - \sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2} < 0$$

因此针对 C_{R_1} 上的积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R_1}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

同理针对 C_{R_2} 上的积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{R_2}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于 C_δ 上的积分，也可以判断出

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

此时还剩下两个积分，可以计算

$$\lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\int_R^\delta f(ye^{\pi j})\mathrm{d}y = -\int_0^\infty \frac{e^{-j\frac{\sqrt{y}}{a}x}}{y} e^{-yt}\mathrm{d}y$$

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

$$\lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\int_R^\delta f(ye^{\pi j})\mathrm{d}y = -\int_0^\infty \frac{e^{-j\frac{\sqrt{y}}{a}x}}{y}e^{-yt}\mathrm{d}y$$

这里的 y 只是作为积分变量，不具备实际物理意义。两式相加即可得到

$$\lim_{R\to\infty,\ \delta\to 0}\left(\int_R^\delta f(z)\mathrm{d}z + \int_\delta^R f(z)\mathrm{d}z\right) = 2j\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\sqrt{y}}{a}x}{y}e^{-yt}\mathrm{d}y$$

从而便可计算出黎曼-梅林反演公式的结果

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}e^{st}\mathrm{d}s = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\sqrt{y}}{a}x}{y}e^{-yt}\mathrm{d}y$$

红色部分积分求解非常困难，其中一种思路是利用帕塞瓦尔定理（傅里叶变换是酉变换），先令 $y=u^2$ 进行换元

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\sqrt{y}}{a}x}{y}e^{-yt}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\frac{xu}{a}}{u}e^{-u^2t}\mathrm{d}u$$

然后计算 $\frac{1}{u}$ 的傅里叶变换和 $\sin\frac{xu}{a}e^{-u^2t}$ 的傅里叶逆变换。这一方法比较麻烦，需要再次利用留数定理计算围道积分以及高斯积分公式，所以这里只给出有用的计算结果

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}\right\} = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

也可以通过查阅积分表得知

> $$\int_0^\infty \frac{e^{-p+xy}}{\pi(p+x)}\sin(a\sqrt{x})\mathrm{d}x = -\sinh(a\sqrt{p}) + \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{y}}-\sqrt{py}\right) + \frac{e^{a\sqrt{p}}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{y}}+\sqrt{py}\right)$$

两种方法效果是一样的, 最终都可以得到结果

$$u(x,t) = T_0\ \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + T_0$$