特殊方程作业 9

地物 2201 班 杨曜堃

2024 年 3 月 25 日

问题 1 采用傅里叶变换法求解下列热传导方程的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| \leqslant a \\ 0, & |x| > a,\ a > 0 \end{cases} \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 \end{cases}$$

要求：图示 $t = 1$、$a = 1, 3, 5$ 时的计算结果。

问题 #1	Grade:
首先对 u 进行关于 x 的傅里叶变换 $$\mathscr{F}\left\{u(x,t)\right\} = U(\omega,t) = \int_{-infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}x$$ 根据傅里叶变换的微分性质 $$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = (j\omega)^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$ 同理做关于 t 的傅里叶变换 $$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x}\mathrm{d}u(x,t)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$ 对 $\varphi(x)$ 做傅里叶变换，由于是方波，无需查表便可推导其傅里叶变换 $$\mathscr{F}\left\{\varphi(x)\right\} = \varPhi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-j\omega x}\mathrm{d}x$$	***Faculty Comments***

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

被积函数在 $(-\infty,-a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上为 0，可以改写积分上下限

$$\begin{aligned}\Phi(\omega)&=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-j\omega x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2ja\omega}\left[e^{-ja\omega}-e^{ja\omega}\right]\\&=\frac{\sin a\omega}{a\omega}\end{aligned}$$

因此，定解问题可以转变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\omega^2U(\omega,t)=0\\U(\omega,0)=\Phi(\omega)\end{cases}$$

求解常微分方程得到通解

$$U(\omega,t)=A(\omega)e^{-\omega^2t}$$

代入初始条件可得

$$A(\omega)=\Phi(\omega)$$

即频域上的解

$$U(\omega,t)=\Phi(\omega)e^{-\omega^2t}$$

此时还需要对 $U(\omega,t)$ 做傅里叶逆变换，注意到该频域上的解是两函数相乘的形式。根据傅里叶变换的卷积性质可知，$u(x,t)$ 应该是两函数对应逆变换的卷积形式，并且显然有

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\Phi(\omega)\right\}=\varphi(x)$$

所以只需关注高斯函数的傅里叶逆变换，可以证明高斯函数的傅里叶变换任然是高斯函数（高斯函数是傅里叶变换的特征函数）。证明如下

> 设 $f(x)=e^{-\pi x^2}$，定义
>
> $$F(\omega)\triangleq\mathscr{F}\left\{f(x)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}e^{-j\omega x}\mathrm{d}x$$
>
> 为了满足归一化条件，需要将角频率 ω 转换成自然频率 ξ

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi j x \xi} \mathrm{d}x$$

显然有 $F(0) = 1$，$f'(x) = -2\pi x f(x)$。对 $F(\xi)$ 求导，利用先导后积的性质

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi j x) f(x) e^{-2\pi j x \xi} \mathrm{d}x \\ &= j \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi j x \xi} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

结合傅里叶变换的微分性质，得到微分方程

$$F'(\xi) = j\mathscr{F}\left\{f'(x)\right\} = j(2\pi j \xi)F(\xi) = -2\pi\xi F(\xi)$$

定义 $G(\xi) \triangleq e^{\pi\xi^2} F(\xi)$，对 $G(\xi)$ 求导并代入微分方程

$$\begin{aligned} G'(\xi) &= 2\pi\xi e^{\pi\xi^2} F(\xi) + e^{\pi\xi^2} F'(\xi) \\ &= 2\pi\xi e^{\pi\xi^2} F(\xi) - 2\pi\xi e^{\pi\xi^2} F(\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $G(\xi)$ 应该为一个常数，由于 $F(0) = 1$，所以 $G(\xi) \equiv 1$。因此可得 $F(\xi) = e^{-\pi\xi}$ 即

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\pi x^2}\right\} = e^{-\pi\xi^2}$$

证毕。

这一性质提供了一种便利性，而本题所关注的 $e^{-\omega^2 t}$ 可以看作是对标准高斯函数做伸缩变换得到的。根据结论，不妨计算 e^{-ax^2} 的傅里叶变换，记

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

利用分部积分法

$$\begin{aligned} I &= \frac{j}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}e^{-j\omega x} = \frac{j}{\omega}\left(0 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} \mathrm{d}e^{-ax^2}\right) \\ &= \frac{2ja}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} e^{-j\omega x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{2ja}{\omega} \mathscr{F}\left\{x e^{-ax^2}\right\} \end{aligned}$$

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

利用傅里叶变换微分性质的对偶性质

$$I=-\frac{2a}{\omega}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\omega}$$

解该微分方程可得

$$I(\omega)=I(0)e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

很显然

$$I(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

得到

$$\mathscr{F}\left\{e^{-ax^2}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

用 $\dfrac{1}{4a}$ 替换 a，可以得到

$$\mathscr{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{4a}}\right\}=2\sqrt{a\pi}e^{-a\omega^2}$$

再由傅里叶变换的线性性质可得

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{2\sqrt{a\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\right\}=e^{-a\omega^2}$$

利用该傅里叶变换对，得出 $e^{-\omega^2t}$ 的傅里叶逆变换

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-\omega^2t}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

因此定解问题的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

进一步计算得到

$$u(x,t)=\frac{1}{4a\sqrt{\pi t}}\int_{-a}^{a}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\mathrm{d}\xi$$

该积分项为非初等函数，令 $z=\dfrac{\xi-x}{2\sqrt{t}}$，$\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}\xi$，结果可以改写为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-a-x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{a-x}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}\mathrm{d}z$$

问题 #1 Grade:

Faculty Comments

利用误差函数

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\mathrm{d}z$$

所以有

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{4a}\int_0^{\frac{a-x}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}\mathrm{d}z-\frac{1}{4a}\int_0^{\frac{-a-x}{2\sqrt{t}}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{4a}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{a-x}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{-a-x}{2\sqrt{t}}\right)\right]\end{aligned}$$

误差函数为奇函数，从而原定解问题的解可以写成

$$u(x,t)=\frac{1}{4a}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

当 $t=1$ 时，采用如下 MATLAB 代码计算 $a=1,3,5$ 时的结果。

test9.m

```
% 一维无限长杆热传导问题结果图示
clear;

x = -10:0.01:10;
a = [1 3 5];
for i = 1:size(a,2)
u(i, : ) = 0.25*(erf(0.5*(x+a(i)))-erf(0.5*(x-a(i))))/a(i);
end

% 绘制图像
plot(x,u);
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('a=1','a=3','a=5');
```

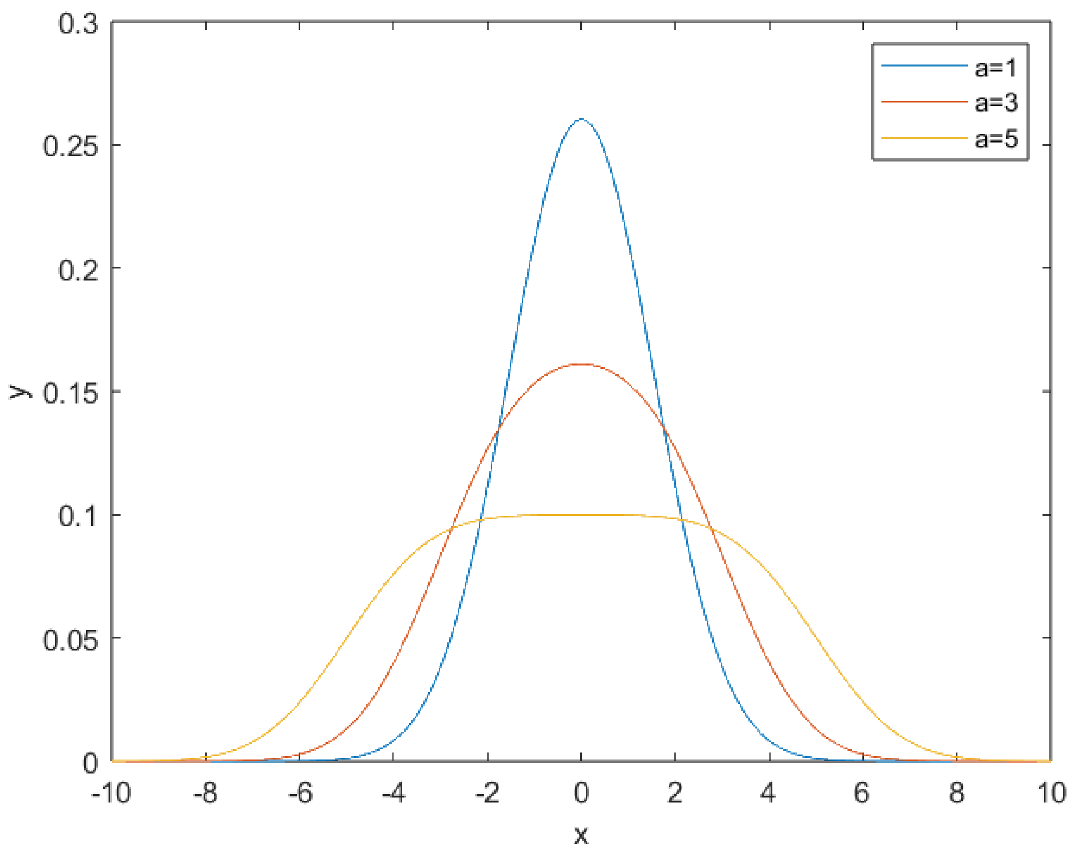

图 1: MATLAB 计算结果图示