



Offer Date: 1400/03/08

Delivery Date: 1400/04/24

How To Be a Good Baker!

۱ - مقدمه

روش کرانک-نیکلسون یک روش آنالیز عددی مبتنی بر اختلاف محدود است که برای حل مسائل حرارتی و معادلات پاره‌ای استفاده می‌شود. روش کرانک-نیکلسون یک روش ضمنی است که حل آن بر پایه آنالیزهای عددی پایدار است. این روش توسط جان کرانک و فیلیس نیکلسون در اواسط قرن بیستم ابداع شده است. در مسائل نفوذ اثبات شده است که این روش به صورت نامقید پایدار است، اگرچه جواب‌ها می‌توانند همچنان حاوی نوسانات کاذب باشند، این اتفاق به شرط بزرگ بودن عدد فوریه رخ خواهد داد. برای جلوگیری از نوسانات مزبور از روش اولر روبه عقب استفاده می‌شود. در رابطه ۱-۱ می‌توان شمای کلی این روش را مشاهده کرد.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} \left[F_i^{n+1} \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + F_i^n \left(u, x, t, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad \text{رابطه ۱-۱}$$

در جبر خطی عددی روش جهت‌های متناوب ضمنی یا ADI یک روش مبتنی بر تکرار است که مبتنی بر حل معادلات ماتریسی سیلویستر استفاده می‌شود. روش ADI یک روش پر کاربرد برای دستگاه‌های معادلات ماتریسی بزرگ است که خاستگاه آن حوزه‌های تئوری‌های سیستم و کنترل است. روش ADI برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای هذلولوی و بیضوی استفاده شده و یک روش کلاسیک برای مدل‌سازی مسائل رسانش حرارتی و نفوذ در دو جهت (یا بیشتر) است. در رابطه ۲-۱ می‌توان شمای کلی این روش را رؤیت کرد.

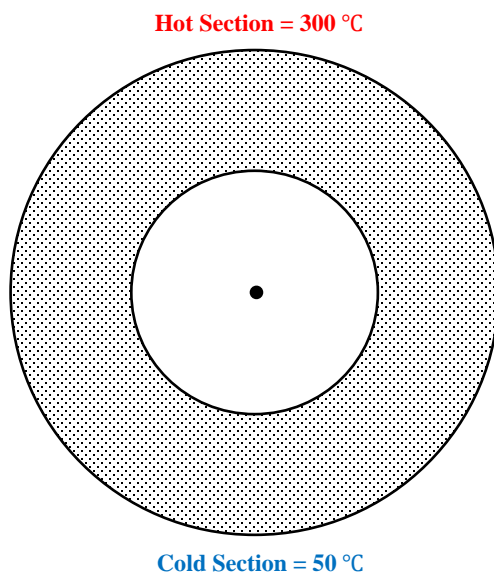
$$\begin{cases} \frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\Delta t/2} = \frac{\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{ij}^n}{\Delta x^2} \\ \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{\delta_x^2 u_{ij}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{cases} \quad \text{رابطه ۲-۱}$$

واژه‌های کلیدی: کرانک نیکلسون - روش ADI - معادلات پاره‌ای - معادلات ضمنی - آنالیز عددی



۲- شرح مسئله

یک تنور نانوايي مکانیزه ماشینی را در نظر بگیرید. این تنور مطابق شکل ۱-۲ به تسمه‌نقاله‌ای مجهز است. که نان بر روی آن قرار گرفته و از پایین در معرض یک شارّ حرارتی ثابت برابر با $20 \frac{kW}{m^2}$ و در مابقی جهتها در معرض جریان هوا قرار دارد. دمای محیط پیرامون خمیر نان ثابت نبوده، اما ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را می‌توان ثابت فرض کرد. ابعاد خمیر نان $0.5 \times 10 \times 50$ سانتی‌متر است. چگالی خمیر نان برابر با $720 \frac{kg}{m^3}$ ، ضریب انتقال حرارت رسانشی برابر با $0.223 \frac{W}{m.K}$ و ظرفیت حرارتی ویژه آن $3600 \frac{J}{kg.K}$ است.



شکل ۱-۲: شمای مسئله

فرض می‌شود که دمای پیرامون خمیر نان در طول تسمه‌نقاله به صورت خطی تغییر می‌کند. طول تسمه‌نقاله ۱۴ متر بوده که در منطقه داغ تنور به حداکثر دمای خود می‌رسد در عین حال می‌توان فرض کرد که دمای محیط پیرامون خمیر نان در طول تسمه‌نقاله تابعیت مستقیم از زمان دارد. در اثر انجام فرآیند پخت نان حرارتی به میزان ۱۳۵۰ وات تولید می‌شود. توزیع دمایی در جهت طول و ارتفاع خمیر نان فرض شود. مبتنی بر فرضیات مناسب ضریب انتقال حرارت محیط را بدست آورید.



۳- خواسته‌ها

- (۱-۳) مبتنی بر استفاده از روش‌های مطرح شده در مقدمه سرعت گردش تسمه‌نقاله را طوری تعیین کنید که دمای تمام نقاط خمیر در یک دور چرخش تسمه‌نقاله حداقل برابر با ۲۰۰ درجه سانتی‌گراد شود. مشاهدات خود را با آوردن ادله کافی شرح دهید.
- (۲-۳) قسمت ۱-۳ را با در نظر گرفتن تشعشع در اجسام سیاه تکرار کنید (فرضیات خود را مطرح کنید).
- (۳-۳) در وسط تسمه‌نقاله توزیع دما را در ارتفاع ۲۵ سانتی‌متری رسم کنید.
- (۴-۳) نتایج قسمت ۱-۳ با فرض ثابت نبودن ضریب انتقال حرارت محیط و انجام رگرسیون خواص ترموفیزیکی محیط به‌روزرسانی کنید. (امتیازی)

۴- توضیحات

- (۱-۴) پاسخ نهایی خود را به صورت فایل اسکریپت متلب با پسوند (m)، به همراه گزارشی مختصر و مفید از روند حل مسئله شامل فرضیات مدل‌سازی، نتایج شبیه‌سازی و پاسخ خواسته‌های مسئله را (به همراه ضمیمه‌های آن شامل فایل عکس مربوط به نتایج شبیه‌سازی) با رعایت اصول گزارش‌نویسی با پسوند (pdf) آپلود نمایید.
- (۲-۴) فایل‌های نهایی خود را با رعایت دستورالعمل زیر مربوط به نام‌گذاری در سامانه آپلود نمایید. شایان ذکر است که هرگونه عدم تطابق در نحوه نام‌گذاری، **کسر نمره قابل توجهی** را در پی خواهد داشت.

دستورالعمل نام‌گذاری:

FirstName_LastName_StudentID.m

فایل شبیه‌سازی متلب:

FirstName_LastName_StudentID.pdf

فایل گزارش:

FirstName_LastName_StudentID.rar (or .zip)

فایل فشرده (زیپ) نهایی:

- (۳-۴) انجام پروژه به صورت انفرادی است. واضح است که در صورت یافتن تشابه به صورت آشکار در روند مدل‌سازی مسئله و شبیه‌سازی، نمره طرفین **صفر** لحاظ خواهد شد.
- (۴-۴) جهت پاسخگویی به سؤالات شما پیرامون مسئله، تالار گفت‌وگو در سامانه درس‌افزار ایجاد خواهد شد. لذا به سؤالاتی که غیر از این طریق پرسیده شود، پاسخ داده نخواهد شد.



۵- مراجع

- [1] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, and A. Lavine, *Principles of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons Singapore Pte. Limited, 2013.
- [2] D. Anderson, J. C. Tannehill, R. H. Pletcher, R. Munipalli, and V. Shankar, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. CRC Press, 2020.

با آرزوی سربلندی و موفقیت

محمد مهدی حیدری، طاهّا محمدیان اهرابی، امیرارسلان خوارزمی

خرداد ۱۴۰۱