تمرین اول درس نظریه الگوریتمی بازی ها   پویا خانی 99210283

تمرین 30.1 :

قسمت a : در این حالت دو تعادل نش داریم. یکی اینکه همه به دنبال گوزن بیفتند یکی اینکه همه دنبال خرگوش میفتند. 2 حالت دیگر را بررسی میکنیم:

الف) حالتی که حداقل 1 و حداکثر یکی کمتر از m شکارچی به دنبال گوزن بیفتند، یک تعادل نش نیست زیرا هر کدام از شکارچی ها به نفع اش هست که دنبال خرگوش بیفتند چون با کمتر از m شکارچی نمیتوانند گوزن را شکار کنند(شرط سوال)

ب) حالتی که حداقل m و حداکثر یکی کمتر از n (تعداد کل شکارچیان) دنبال گوزن باشند هم تعادل نش نیست زیرا اون یه نفر(یا چند نفر) باقیمانده به نفع اشون هست که به دنبال گوزن بیفتند چون امتیاز بیشتری دریافت میکنند. پس این حالت هم تعادل نش نیست.

قسمت b : در این حالت شکارچی وقتی گوزن رو ترجیح میده که یه حدی از گوزن یا بیشتر گیرش بیاید(1/k) وگرن اگه تعداد شکارچی های دنبال کننده گوزن بیشتر شود، طبیعتا سهم کمتری به شکارچی ها میرسد و خب شکارچی ها ترجیح میدهند در این حالت دنبال خرگوش باشند.

در این حالت از مسئله، فقط یک action profile میتواند تعادل نش باشد و آن این است که دقیقا k شکارچی دنبال گوزن بیفتند و مابقی همه دنبال خرگوش باشند. این نتیجه گیری از استدلال زیر بدست می آید:

اگه کمتر از m شکارچی دنبال گوزن باشند که خب هیچی گیرشان نمی آید و خب ترجیح شکارچی ها اینه که به جای اینکار، دنبال خرگوش بیفتند. اگر بین m تا کمتر از k شکارچی دنبال گوزن باشند که خب آن شکارچی هایی که دنبال خرگوش هستند ترجیح میدهند دنبال گوزن باشند تا

امتیاز بیشتری کسب کنند. اگر هم بیشتر از k شکارچی دنبال گوزن بیفتند که خب ترجیح میدهند خرگوش رو دنبال کنند چون سهمشان از 1/k کمتر میشه و خرگوش رو ترجیح میدهند.

از طرف دیگه در حالت تعادل نش، میتوانیم استدلال کنیم که اگر کسی که دنبال خرگوش بوده دنبال گوزن بیفته، ضرر میکنه چون سهمش از 1/k کمتر میشه و کسی که دنبال گوزن بوده اگه دنبال خرگوش بیفته هم ضرر میکنه چون میتونسته 1/k بدست بیاره از گوزن اما الان از دستش داده و امتیاز کمتری بدست آورده.

پس این مسئله همان یک تعادل نش یکتا را دارد.

تمرین 31.1 :

در این حالت بسط داده شده سوال شکار گوزن، هر پروفایل (e,e,….,e) که e یک عدد در بازه 0 تا k باشد، یک تعادل نش است. در این پروفایل امتیازی که هر بازیگر کسب میکند به اندازه e است.

دلیل اینکه این پروفایل تعادل نش است این است که اگر بازیگر i یک e(i) کمتر از e انتخاب کند، امتیازی که دریافت میکند برابر میشود با e(i) که خب کمتر از e است و از طرف دیگر اگر یک e(i) بزرگتر از e انتخاب کند هم امتیازی که دریافت میکند برابر 2e – e(i) است که این هم کمتر از e است. پروفایلی هم که e(i) ها برابر نباشند، تعادل نش نیست زیرا کسی که effort level ای بیشتر از min انتخاب کند، ترجیح میدهد effort level خود را کاهش دهد به min که امتیاز بیشتری کسب کند.

تمرین 34.2 :

قسمت a : اگر k=m=1 باشد یعنی هر کاندید فقط یک پشتیبان(supporter) دارد یعنی مجموع شهروندان 2 است پس مسئله به یک بازی دو بازیگره تبدیل میشود. در این شرایط بازی مانند بازی prisoner’s dilemma میشود البته به جز نام Action ها یعنی اگر هر دو بازیگر رای ممتنع بدهند، قطعا حالت ties for first place رخ میدهد و هر دو بازیگر هرکدام 1 امتیاز دریافت میکنند. اگر یکی رای بدهد و دیگری ممتنع بدهد، آن که رای داده به اندازه c-2 امتیاز و دیگری 0

امتیاز بدست می آورد(چون کاندید مورد نظر بازیگر اولی پیروز شده و دیگری شکست خورده است). اگر هر دو بازیگر رای بدهند، هر کدام c-1 امتیاز کسب میکنند چون رای داده اما حالت ties for first place پیش آمده است. یعنی جدول امتیاز ها مانند زیر میشود:

		B supps: Vote	B supps: Abstain
A supps	Vote	$1-C\,,1-C$	$2-C\,,0$
	Abstain	$0\,,2-C$	$1\,,1$

قسمت b : برای حالتی که k=m باشد اما مشخص نباشد چه عددی است، برای فرموله سازی مسئله فرض میکنیم که تعداد پشتیبان های کاندید A که تصمیم میگیرند رای بدهند(ممتنع ندهند) n(A) است و تعداد پشتیبان های کاندید B که تصمیم میگیرند رای بدهند هم n(B) باشد،

الف) اگر همه اشخاصی که پشتیبان هر دو کاندید هستند تصمیم بگیرند رای بدهند یعنی n(A) = n(B) = k = m باشد، برای بررسی تعادل نش این استدلال را می آوریم که اگر پشتیبانی در این حالت تصمیم بگیرد رای ممتنع بدهد(تصمیم خود را تغییر دهد با فرض ثابت بودن بقیه شرایط مسئله)، خب باعث میشود کاندید مورد علاقه اش ببازد و این باعث میشود که امتیازی که قبلا بدست آورده بود(وقتی رای مثبت میداد) از 1 – c به 0 کاهش پیدا کند. از آنجایی که در شرایط مسئله داریم که C کوچک تر از 1 است، لذا حالتی که همه رای بدهند، یک تعادل نش است چون همه به نوعی دارند best response عمل میکنند.

ب) اگر تعداد اشخاصی که به هر کاندید رای میدهند برابر باشند ولی تمام شهروندان رای ندهند(تعدادی رای ممتنع بدهند) یعنی داشته باشیم n(A) = n(B) < k or m آنگاه اگر شهروندی که قبلا ممتنع بوده تصمیم بگیرد رای بدهد، باعث میشود که کاندید مورد علاقه اش پیروز شود و امتیاز او از 1 به 2 – c افزایش میابد. بنابرین عاقلانه است که رای بدهد و بنابرین رای ندادن best response نیست. لذا این حالت یک تعادل نش نیست.

ج) اگر تعداد رای دهندگان یک کاندید یکی بیشتر از دیگری باشد(هر دو حالت قرینه هم هستند و برای راحتی کار، ما یک حالت یعنی $n(A) = n(B) + 1$ را بررسی میکنیم) ، یک شهروند پشتیبان کاندید بازنده اگر تصمیم بگیرد رای خود را از ممتنع به مثبت تغییر دهد، خب باعث میشود کاندید مورد علاقه اش که قبلا بازنده بود، الان مساوی با کاندید دیگر شود لذا امتیازی که پشتیبان گفته شده بدست می آورد از 0 به $1 - c$ افزایش میابد. لذا حالت گفته شده یک تعادل نش نیست.

د) اگر تعداد رای دهندگان یک کاندید 2 یا بزرگتر، بیشتر از دیگری باشد، یعنی برای مثال $n(A) = n(B) + x$ که x بزرگتر مساوی 2 است، پشتیبان کاندید پیروز شده اگه تصمیم بگیرد رای خود را ممتنع کند یا پشتیبان کاندید بازنده تصمیم بگیرد رای خود را از ممتنع مثبت کند، هیچ تاثیری در نتیجه انتخابات نمیگذارند لذا امتیاز آن ها هم تغییری نمیکند، اما نکته ای که هست این است که بازیگر گفته شده اول(پشتیبان پیروز شده) قبلا که رای میداد، هزینه c را متقبل میشد اما الان هزینه ای متقبل نمیشود پس این باعث میشود که حالت گفته شده یک تعادل نش نباشد.

نتیجه گیری: از بررسی حالت های مختلف بالا نتیجه میشود بازی گفته شده، یک تعادل نش یکتا دارد و آن حالت الف است.

قسمت c : در حالتی که پشتیبان های A کمتر از پشتیبان های B باشند یعنی $k < m$ آنوقت استدلال میکنیم:

الف) اگر تعداد رای دهندگان هردو برابر باشند(طبیعتا کمتر مساوی k باید باشند)، پشتیبان B که قبلا ممتنع بوده و الان تصمیم میگیرد رای بدهد، باعث پیروزی کاندید مورد علاقه خودش میشود لذا امتیازش از 1 به $2 - c$ افزایش میابد پس این حالت تعادل نش نیست.

ب) اگر تعداد رای دهندگان مثلا A یکی بیشتر از B باشد، پشتیبان کاندید B که قبلا ممتنع بود اگر تصمیم بگیرد رای مثبت دهد، امتیاز خود را از 0 به $1 - c$ افزایش میدهد پس این حالت هم تعادل نش نیست.

ج) اگر همه پشتیبان های A رای بدهند و تعداد رای دهندگان کاندید B یکی بیشتر از A باشد، طبیعتا پشتیبان A ای وجود ندارد که رای ممتنع داده باشد و پشتیبان A که قبلا رای داده اگر ممتنع شود، باعث میشود هزینه c را ندهد و تاثیری هم در نتیجه انتخابات ندارد. لذا این حالت هم تعادل نش نیست.

د) حالت آخر هم این است که همه پشتیبان های A رای دهند و پشتیبان های B که رای دادند، 2 یا بزرگتر، از A باشند، به استدلال شبیه حالت ج ، نتیجه میگیریم رای دهنده A ترجیح میدهد ممتنع شود و این تعادل نش نیست.

نتیجه گیری: در این حالت اصلا تعادل نش نداریم.

تمرین 42.1 :

برای حل این مسئله ابتدا باید best response هر بازیگر به انتخاب ثابت بازیگر دیگر را حساب کنیم تا بتوانیم آن هارا با هم تقاطع دهیم. امتیاز بازیگر اول برابر است با $a1(a2 – a1)$ که برای ماکسیمم کردن آن باید از آن بر حسب a1 مشتق بگیریم و برابر با صفر قرار دهیم. با اینکار داریم $max(1) = ½ * a2$. امتیاز بازیگر دوم هم برابر است با $a2(1 – a1 – a2)$ که از آن بر حسب a2 مشتق میگیریم و برابر صفر قرار میدهیم. که داریم $max(2) = ½ * (1 – a1)$

حال این دو تابع را بر حسب a1 و a2 رسم کرده و نقطه تقاطع های آن میشود تعادل های نش برای این مسئله که چون هر دو تابع خط هستند، لذا یک نقطه تقاطع بیشتر ندارند و لذا ما یک تعادل نش یکتا داریم. با برابر قراردادن این دو خط(جایگذاری a1 با a2 /2 در رابطه max(2) نتیجه میگیریم که $a2 = 2/5$ و با جایگذاری آن در $a1 = a2/2$ بدست می آید $a1 = 1/5$) ، نقطه (1/5 , 2/5) به عنوان تعادل نش یافته میشود.

تمرین 42.2 :

در این سوال مجموعه action برای هر نفر بر خلاف دیگر سوال ها، مجموعه ای پیوسته بین 0 و 1 است(تلاشی که شخص برای انجام پروژه میکند) که آن را با Xi نمایش میدهیم.

همچنین سودی که هر شخص پس از انجام پروژه و تقسیم سود به اندازه مساوی میکند برابر است با $½ * f(x1,x2) – c(Xi)$ زیرا سود پروژه تقسیم بر 2 میشود و هر شخص متناسب با تلاشی که میکند، اندازه $c(Xi)$ ضرر میکند که Xi همان میزان تلاش است.

<u>**قسمت a :**</u> در این حالت اگر داشته باشیم $f(x1,x2) = 3x1x2$ و $c(Xi) = Xi^2$ آنگاه برای تحلیل تعادل نش داریم:

بازیگر اول برای اینکه سود خود را ماکسیمم کند باید با فرض ثابت بودن x2 یک x1 انجام دهد که تابع $3/2 * x1x2 – x1^2$ که برای محاسبه آن باید بر حسب x1 مشتق بگیریم و برابر با صفر قرار دهیم، لذا داریم:

$$d f1 / d x1 = 3/2 * x2 – 2x1 = 0 \rightarrow x1 = ¾ * x2$$

با همین استدلال برای بازیگر دوم داریم:

$$X2 = ¾ * x1$$

با برابر قرار دادن دو معادله بالا نقطه (0,0) بدست می آید یعنی دو بازیگر هیچ تلاشی نکنند! لذا سود هر کدام هم صفر میشود! این تعادل نش هم یکتا است.

<u>**قسمت b :**</u> در این حالت اگر داشته باشیم $f(x1,x2) = 4x1x2$ و $c(Xi) = Xi$ آنگاه برای تحلیل تعادل نش داریم:

برای بازیگر اول تابع سود $2x1x2 – x1$ بدست می آید که برای ماکسیمم کردن آن سه حالت را بررسی میکنیم. حالت اول وقتی است که $x2 < ½$ باشد که در این حالت best response بازیگر

اول میشود 0 یعنی $X1 = 0$. حالت بعدی وقتی است که $x2 = ½$ که بازیگر اول هرجوری تلاش کند، best response عمل میکند و حالت سوم وقتی است که $x2 > ½$ باشد که در این حالت best response بازیگر اول میشود $x1= 1$. همین استدلال ها برای بازیگر دوم هم پابرجاست.

لذا ما سه تعادل نش داریم شامل: (1 ,1) , (1/2 , 1/2) , (0,0) که سود بازیکن ها در این سه تعادل برابر است با (1,1) , (0,0) , (0,0) که منطقی است حالت سوم را بازیگر ها انتخاب کنند تا بیشترین سود را ببرند.

تمرین 44.1 :

بازیگر اول به فرض ثابت بودن تعامل c2 از بازیگر دوم، best response ای میتواند ارائه دهد زمانی است که تابع سود او یعنی $w + c2 + (w-c1) * (c1 + c2)$ ماکسیمم شود. لذا از تابع مربوطه بر حسب c1 مشتق گرفته و صفر قرار میدهیم و بدست می آوریم که $c1 = ½ * (w-c2)$

با همین استدلال برای بازیگر دوم داریم $c2 = ½ * (w – c1)$

با برابر قرار دادن دو تابع بالا برای پیدا کردن تعادل نش به نقطه (1/3w,1/3w) میرسیم که این یک نقطه تعادل نش یکتا است. در این تعادل نش، سود بازیگر ها میشود $4/3w + 4/9w^2$

اما اگر هر بازیکن بیشتر سرمایه گذاری کند برای مثال به اندازه 1/2w آنگاه سود $3/2w + 1/2w^2$ بدست می آورد که خب سود بیشتری است که این تناقض منطق با نظریه بازی ها و مفهوم تعادل نش است.

تمرین 52.2 :

این بازی(جدول 53.1) سه تا تعادل نش دارد: (A,A),(A,C),(C,A) زیرا با فرض ثابت بودن انتخاب بازیگر ستون، در حالتی که بازیگر ستون A بازی کند، بازیگر سطر همان A برایش best response است و برعکس(یعنی اگر بازیگر سطر A بازی کند ، برای بازیگر ستون هم A یک best response است) لذا ما یک تعادل نش داریم. در حالت های (A,C) و (C,A) هم با استدلال گفته شده متوجه میشویم تعادل نش داریم.(یادآوری: تقاطع best response ها میشه تعادل نش)

حال اگر بازی بین اعضای یک جمعیت واحد انجام شود،یعنی در یک بازی متقارن همه یک نقش داشته باشند و label گذاری بازیگر ها صرفا برای تفکیک ظاهری آن ها باشد، فقط تعادل نش (A,A) پابرجاست(تنها تعادل نش متقارن این مسئله است) چون دیگر مفهوم تفاوت بین بازیگر ها پاربرجا نیست و هر دو بازیگر برای داشتن یک تعادل نش متقارن، باید action یکسانی انجام دهند.

تمرین 114.2 :

اگر احتمال اینکه بازیگر سطر T را انتخاب کند p باشد و احتمال اینکه بازیگر ستون L را انتخاب کند q باشد، پس فرموله سازی زیر را داریم:

		q	1 - q
		L	R
p	T	6,0	0,6
1 - p	B	3,2	6,0

		q	1 - q
		L	R
p	T	0,1	0,2
1 - p	B	2,2	0,1

حال تعادل نش بازی سمت چپ را حساب میکنیم:

U1(L) = U1(R) -> 6q + 0(1-q) = 3q + 6(1-q) -> 3q = 6 – 6q -> 9q = 6 -> q = 2/3

U2(T) = U2(B) -> 0(p) + 2(1-p) = 6p + 0(1-p) -> 2 – 2p = 6p -> p = 1/4

پس ما یک تعادل نش mixed یکتا داریم و آن نقطه زیر است:

((p,1-p),(q,1-q)) = ((1/4,3/4),(2/3,1/3))

با همین روش تعادل نش بازی سمت راست را حساب میکنیم:

U1(L) = U1(R) -> 0(q) + 0(1-q) = 2q + 0(1-q) -> q = 0

U2(T) = U2(B) -> p + 2(1-p) = 2p + (1-p) -> -2p = -1 -> p = 1/2

پس ما یک تعادل نش mixed یکتا داریم و آن نقطه زیر است:

((p,1-p),(q,1-q)) = ((1/2,1/2),(0,1))

تمرین 114.3 :

اصل منطق این بازی هم یک چیزی توی مایه های بازی شکار گوزن است که به تعامل بازیگر ها باهمدیگر و تلاش همگانی نیاز است.

این بازی 3 تعادل نش mixed دارد.

1- حالتی که هر دو تصمیم بگیرند تلاش و در نتیجه هیچ سودی هم دریافت نکنند یعنی نقطه ((1,0),(1,0)) زیرا در این حالت هیچ کسی حاضر نیست تصمیم بگیرد تلاش کند و ضرر c را متحمل شود و هیچ سودی هم دریافت نکند. این تعادل یک تعادل pure است.
2- حالتی که هر دو تصمیم بگیرند تلاش کنند و سود 1-c را کسب کنند. چون در این حالت هم کسی حاضر نیست تلاش نکند و سود 1-c را رها کرده و سود 0 را بدست بیاورد. این تعادل یک تعادل pure است.
3- حالتی که هردو با احتمال c حاضر باشند تلاش کنند که این یک تعادل نش mixed است.

در حالتی که c افزایش یابد، هیچ تاثیری توی تعادل ها نمیگذارد. زیرا با افزایش c هیچ تغییری در اولویت سود او اتفاق نمی افتد یعنی ترتیب سود ها تغییر نمیکند لذا دو تعادل pure سرجای خود باقی میمانند. در حالت mixed هم اگر بازیگری c بیشتری داشته باشد یعنی سود کمتری وقتی تصمیم میگیرد تلاش کند، بدست می آورد لذا کمتر از قبل علاقه به اینکار نشان میدهد. لذا برای برقراری تعادل بازیگر دیگر باید علاقه بیشتری به تلاش کردن داشته باشد که تعادل نش mixed پابرجا باشد وگرن بهم میخورد.

تمرین 114.4 :

با توجه به مفروضات سوال، اگر امروز تصمیم بگیری شنا کنی، سودی که بدست می آوری برابر میشود با -pi*c + 2(1-pi) بدون توجه به اینکه دوست تو چه تصمیمی میگیرد.اگر تو تصمیم بگیری شنا نکنی و دوستت تصمیم بگیرد شنا کند، با احتمال pi دوستت مورد حمله کوسه قرار

میگیرد و تو فردای آن روز شنا نمیکنی و با احتمال 1 – pi دوست تو مورد حمله کوسه قرار نمیگیرد و تو فردا شنا میکنی. در این حالت سود مورد انتظار تو میشه 1 – pi

حال اگر هر دو تصمیم بگیرید شنا نکنید، سود مورد انتظار شما میشه max{-pi*c + 1 – pi , 0}

لذا فرموله سازی زیر را داریم:

	Swim	Wait
Swim	- pi * c + 2(1 - pi)	- pi * c + 2(1 - pi)
Wait	1 - pi	max{ - pi*c + 1 - pi , 0 }

برای پیدا کردن تعادل نش mixed حالت های زیر را بررسی میکنیم:

-اگر سود مورد انتظار حالتی که هر دو تصمیم میگیرید شنا کنید، یعنی -pi*c + 1 – pi بزرگتر از صفر باشد، اینکه تصمیم بگیرید شنا کنی، best response برای هر دو حالت تصمیم دوستت است. لذا هر دو نفر تصمیم میگیرند شنا کنند پس این یک تعادل نش یکتا است.

- اگر در حالت بالا سود مورد انتظار کوچک تر از صفر باشد، دقیقا برعکس میشه و نقطع تعادل نش یکتا حالتی است که هر دو تصمیم بگیرند شنا نکنند.

- در حالتی که سود مورد انتظار حالت های بالا، بین صفر و 1 – pi باشد، بهترین پاسخ به شنا کردن امروز دوستت این است که تو منتظر بمانی و بهترین پاسخ به منتظر ماندن دوستت این است که تو شنا بکنی. پس دو تعادل نش داریم که یک نفر شنا کند و یک نفر منتظر بماند(2 جایگشت). یک تعادل نش دیگر هم وجود دارد و آن حالتی است که هر کسی با احتمال (2 – pi*c)/(1 – pi) تصمیم بگیرد امروز شنا کند. این حالت از محاسبه سود مورد انتظار هر بازیگر به انتخاب های خودش و برابر کردن utility ها با یکدیگر بدست می آید.

تمرین 118.3 :

اگر فرض کنید زوج مرتب (a,b) نشان دهنده این باشد که ژنرال مربوطه، a تعداد لشکر خود را در مسیر اول و b تعداد لشکر خود را در مسیر دوم قرار میدهم، فرموله سازی زیر را برای این مسئله داریم:

A \ B	(2,0)	(1,1)	(0,2)
(3,0)	1,-1	-1,1	-1,1
(2,1)	1,-1	1,-1	-1,1
(1,2)	-1,1	1,-1	1,-1
(0,3)	-1,1	-1,1	1,-1

اگر پروفایل mixed ژنرال اول را با A = (p1,p2,p3,p4) نمایش دهیم و به تقارن پروفایل ژنرال دوم را با B = (q1,q2,q3) نمایش دهیم:

مشخصا در تعادل نش ای که دنبالش میگردیم، ژنرال B هیچ وقت تصمیم نمیگیرد که دو لشکر خودش را از هم جدا کرده و در دو راه قرار دهد چون با این روش عملا p1 و p4 انتخاب های بدی برای ژنرال A میشود و لذا (p1,q2) و (p4,q2) نمیتوانند تعادل نش باشند(چون A تصمیم به تعویض انتخاب خود میکند). در ادامه استنباط میشود که با p1=p4=0 شدن، بازیگر B هم p2 را ترجیح نمیدهد زیرا قطعا سود اینکه q1 یا q3 را انتخاب کند برایش بهتر است و این نشان دهنده این است که در همه تعادل هایی که در حال بررسی آن هستیم q2 باید صفر باشد.

حال اگر فرض کنیم q1 < ½ باشد پس در تعادل هایمان میفهمیم p1 = p2 = 0 باید باشد چون بازیگر B ترجیح بیشتری میدهد q4 را و در آن حالت p1 و p2 باید صفر باشند چون باعث ضرر بازیگر A میشود و بازیگر A حرکت های p3 و p4 را طبیعتا در این حالت ترجیح میدهد. در این حالت خب بازیگر B هم q1 را بر q3 ترجیح میدهد(بخاطر pi ها) و q1 =1 و q3 = 0 را در نظر میگیرد. الان به یک پارادوکس یا ناسازگاری شرایط رسیدیم پس میتوانیم اثبات کنیم تنها حالت

تعادل زمانی است که $q1 = q3 = ½$ باشد که به ناسازگاری نخوریم. در این حالت ژنرال A تمام pi هارا برابر میداند و برایش برتری ندارند. اگر p1 و p4 را به یک چشم نگاه کنیم(همه لشکر ها در یک راه) و p2 و p3 را هم به یک چشم نگاه کنیم(تقسیم کردن لشکر ها در دو مسیر) به احتمال ½ احتمال دارد A لشکر هایش را کنار هم در یک مسیر نگه دارد و به احتمال ½ ممکن است A لشکر هایش را بین دو مسیر پخش کند. لذا تعادل نش های متعددی داریم که فرمول کلی آن مانند زیر است:

((p1,p2,1/2-p2,1/2-p1),(1/2 , 0 , 1/2))

تمرین 128.1 :

با توجه به انتخاب شدن فروشنده توسط خریدار ها فرموله سازی زیر پدید می آید:

		Buyer 2: Seller 1	Buyer 2: Seller 2
Buyer 1	Seller 1	1/2 * (1-p1) , 1/2 * (1-p2)	1-p1 , 1-p2
	Seller 2	1-p2 , 1-p1	1/2 * (1-p2) , 1/2 * (1-p1)

با توجه به مقادیر مختلف p1 و p2 ما تعادل های نش مختلفی میتوانیم داشته باشیم.

برای مثال اگر p1 و p2 هر دو 1 باشند ، هر زوج ((x1,1-x1),(x2,1-x2)) یک تعادل نش mixed است. توجه شود xi احتمال این است که خریدار i فروشنده 1 را انتخاب کند.

حالت اول گفته شده در سوال: قطعا خریدار ها ترجیح میدهند از فروشنده 2 خرید کنند. لذا یک تعادل نش یکتا داریم و آن حالتی است که هردو خریدار از فروشنده 2 خرید کنند.

حالت اول گفته شده در سوال وقتی به جای > از = استفاده کنیم: در این حالت اگر خریداری فروشنده 2 را انتخاب کند، خریدار دیگر هر انتخابی از نوع mixed بکند best response است و اگر حالت pure را در نظر بگیریم ترجیح میدهد او هم از فروشنده 2 خرید کند.(بهترین پاسخ است)

حالت سوم گفته شده در سوال: خریداران قطعا ترجیح میدهند از فروشنده 1 خرید کنند لذا یک تعادل نش یکتا(هردو از 1 خرید کنند) داریم.

حالت سوم گفته شده در سوال وقتی به جای < از = استفاده کنیم: در این حالت اگر خریداری فروشنده 1 را انتخاب کند، خریدار دیگر هر انتخابی از نوع mixed بکند best response است.

تمرین 141.3 :

با توجه به مفروضات سوال، فرموله سازی زیر را داریم:

		B		
		1	2	3
A	1	0 , 0	a1 , -a1	a1 , -a1
	2	a2 , -a2	0 , 0	a2 , -a2
	3	a3 , -a3	a3 , -a3	0 , 0

با توجه به فرموله سازی بالا میبینیم که این بازی هیچ تعادل نش pure ای ندارد و اگر حتی فرض کنیم که یک نفر pure بازی کند و دیگری mixed باز هم تعادل نش نداریم.

تمرین 142.1 :

در حالت 3 بازیگری، دو تعادل نش pure داریم که زمانی است که همه یا A یا B را انتخاب کنند(مشابه)

در حالتی که دو بازیگر pure بازی کنند و بازیگر باقی مانده mixed بازی کند، اگر دو بازیگر A را انتخاب کنند که بازیگر mixed هم قطعا با احتمال 1 تصمیم میگیرد A را انتخاب کند و دیگر mixed معنی ندارد. با همین استدلال متوجه میشویم تعادلی برای وقتی دو بازیگر pure بازی کنند و یک بازیگر mixed بازی کند، نداریم. در کل اگر بخواهیم تعمیم دهیم در این بازی هیچ وقت اتفاق نمی افتد که تعدادی pure و تعدادی mixed بازی کنند چون در این زمان همه mixed ها ترجیح میدهند pure و مانند pure ها همان انتخاب رو بکنند.

پس یک حالت باقی میمونه آن هم اینکه همه mixed بازی کنند. اگر احتمال اینکه هر بازیگر A را انتخاب کند A1,A2,A3 باشد، سود expected بازیگر اول وقتی بازیگر دوم و سوم با احتمال A2 و A3 انتخاب کنند، میشود: (به قرینه همین استدلال برای بازیگر های دیگر هم محاسبه میشود)

Expected 1 = $A2A3 = 4(1-A2)(1-A3)$

Expected 2 = $A1A3 = 4(1-A1)(1-A3)$

Expected 3 = $A1A2 = 4(1-A1)(1-A2)$

با حل سه معادله بالا بدست می آوریم که $A1 = A2 = A3 = 2/3$

لذا استدلال میکنیم که بازی گفته شده در سوال 3 تعادل نش mixed دارد: A,A,A و B,B,B که این دو از نوع pure هستند و ((2/3,1/3),(2/3,1/3),(2/3,1/3)) که این از نوع mixed است.