پویا خانی 99210283 به نام خدا تمرین سری دوم

تمرین 163.2 :

این بازی دو بازیکن 1 و 2 دارد و مسیر های منتهی به ترمینال های مختلفی میتونه اتفاق بیفته:

برای سادگی نمایش دادن آن ها قرارداد میکنیم مثلا (A,B) یعنی ابتدا A وتو شود سپس B

لذا مسیر های منتهی به ترمینال(play) ها میشوند:

(X,Z) – (X,Y) – (Y,Z) – (Y,X) – (Z,X) – (Z,Y)

یعنی در واقع هر انتخاب دوتایی(با احتساب ترتیب) از 3 قانون X و Y و Z میتواند رخ دهد.

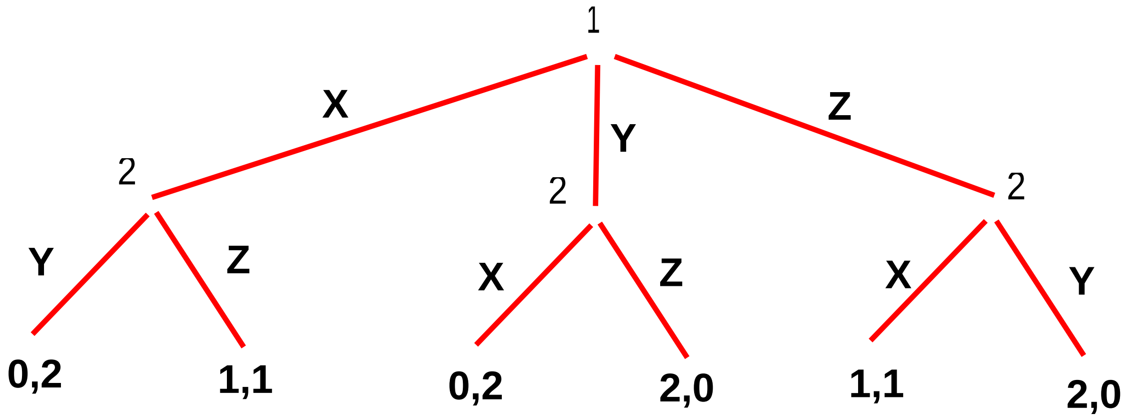
وقتی میگوییم بازیگر اول انتخاب شدن(وتو نشدن) به ترتیب چپ به راست X – Y – Z را ترجیح میدهد یعنی عملا داریم تابع سودمندی را تعریف میکنیم. اگر فرض کنیم ترجیح اول هر بازیگر 2 امتیاز، ترجیح دوم آن 1 امتیاز و ترجیح آخر آن 0 امتیاز برای او به ارمغان بیاورد، لذا برای بازیگر اول داریم:

P(Y,Z) = P(Z,Y) = 2 , P(X,Z) = P(Z,X) = 1 , P(X,Y) = P(Y,X) = 0

به همین منوال، برای بازیگر دوم داریم:

P(X,Y) = P(Y,X) = 2 , P(X,Z) = P(Z,X) = 1 , P(Y,Z) = P(Z,Y) = 0

لذا درخت بازی به شکل درخت صفحه بعد در می آید.توجه شود در صورت سوال آمده که ابتدا بازیگر 1 وتو میکند و سپس نوبت بازیگر 2 میشود.



حال برای بدست آوردن نقطه تعادل نش، از پایین به بالا روی درخت بررسی میکنیم:

در چپ ترین زیر شاخه وقتی نوبت به بازیگر 2 میرسد، قطعا Y را وتو میکند. در زیرشاخه وسط، قطعا X را و در راست ترین زیرشاخه هم قطعا X را. لذا بازیگر 1 باید بین سود (2و0) – (0و2) – (1و1) که مرتبط با وتو کردن X و Y و Z است، یکی را وتو کند که قطعا Z را وتو میکند. پس نقطه تعادل نش میشود (Z,X) و این تنها نقطه تعادل نش ما است.

این نقطه تعادل نش ای که بدست آوردیم با فرض این است که هر دو بازیگر، درست و منطقی عمل کنند. حال اگر فرض کنیم بازیگر اول ممکن است غیر منطقی عمل کند، لذا بازیگر 2 باید به ازای هر عملی از بازیگر 1 ، یک استراتژی بهینه برای خود داشته باشد. یعنی عملا استراتژی بازیگر 2 میشه یه چیزی مثل مثلا Y-Z-X که معنی میکنیم: اگر بازیگر 1 بیاید X را وتو کند، بازیگر 2 میاید Y را وتو میکند، اگر بازیگر 1 بیاید Y را وتو کند، بازیگر 2 میاید Z را وتو میکند و در آخر اگر بازیگر 1 بیاید Z را وتو کند بازیگر 2 میاید X را وتو میکند.

حال با این فرض، نقاط تعادل نش ما میشود (Z,Z-X-X) و (Z,Y-X-X) چون در هر دو نقطه اگر فرض کنیم بازیگر 1 انتخاب Z را fix کرده باشد، بازیگر 2 استراتژی دیگری نمیتواند جایگزین اینها کند تا امتیاز بیشتری کسب کند. با اگر این استراتژی های بازیگر 2 را fix کنیم، بازیگر 1 جایگزین بهتری به جای Z ندارد. پس با فرض اینکه بازیگر 2 بازیگر 1 را تصادفی(لزوما منطقی بازی نکند) فرض کند، این 2 نقطه تعادل نش را داریم.

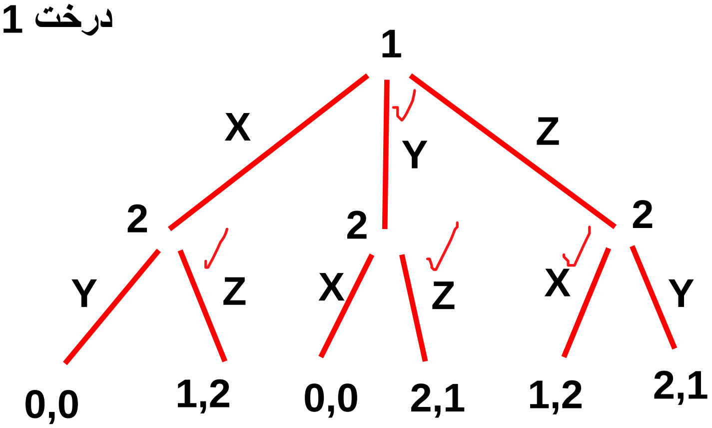
تمرین 173.3

در این حالت قطعا زیربازی یک تعادل نش یکتا دارد(با فرض اینکه بازیگر ها perfect information) بازی میکنند. این تعادل نش (Z,Y-X-X) است. خروجی این تعادل این است که Y انتخاب میشود(وتو نمیشود).

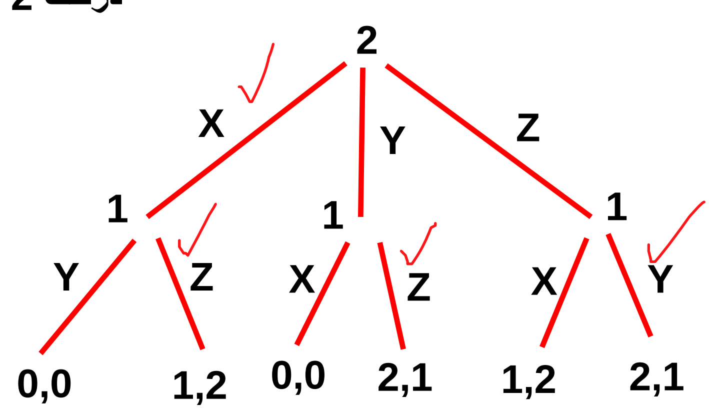
نقطه تعادل دیگری که در سوال قبل داشتیم یعنی (Z,Z-X-X) نقطه تعادل نش زیربازی این سوال نیست با اینکه خروجی این استراتژی ها هم انتخاب Y است.

حال اگر ترجیح بازیگر 2 تغییر کند، سوال از ما خواسته شرایطی را در نظر بگیریم که بازیگر 1 اول حق وتو داشته باشد و ترجیحی برای بازیگر 2 مثال بزنیم که خروجی نهایی تغییر کند(با خروجی های گفته شده). لذا فرض کنیم ترجیح بازیگر 2 اول Y سپس X سپس Z باشد. با مشاهده درخت1 متوجه میشویم خروجی نهایی X میشود. حال سوال خواسته بررسی کنیم اگر بازیگر 2 ابتدا وتو کند، خروجی چه میشود.با توجه به درخت 2 مشاهده میشود که در این بازی خروجی Y میشود.

درخت 1



درخت 2



تمرین 185.2 :

قسمت a : خب مشخص است که اگر بازیگر 1 کیک را به صورت نامساوی تقسیم کند، چون انتخاب با بازیگر 2 است، حتما قطعه بزرگ تر را انتخاب کرده و بازیگر 1 ضرر میکند. لذا حتما بازیگر 1 کیک را مساوی تقسیم میکند که بهترین حالت برایش رخ دهد. یعنی تمام نقاط تعادل نش این بازی در این حالت شامل مساوی تقسیم کردن کیک توسط بازیگر 1 است.

قسمت b : در این قسمت 3 چیز را باید اثبات کنیم:

1- برای بازیگر 2 فرقی نمیکنه کدام تکه را انتخاب کند.
2- بازیگر 1 حداقل تکه p1 را به اندازه p2 دوست دارد(یا مساوی یا بیشتر)
3- مثالی بزنیم که مطمئن باشیم بازیگر 1 تکه p1 را به p2 ترجیح قطعی میدهد.

در کل این اثبات ها فرض میکنیم c یعنی کل کیک.
اثبات 1: با برهان خلف اثبات میکنیم. برهان خلف این است که فرض کنیم بازیگر 2 تکه p2 را به p1 ترجیح میدهد. خب در این حالت بازیگر 1 میتواند با زیرکی تکه p1 را بزرگ ببرد و بازیگر 2 تکه کوچک را ترجیح دهد. حال یه تکه ای(زیرمجموعه) از p2 به نام p که با p2 برابر نیست را در نظر بگیرید. طبق فرض سوال، بازیگر 2 باقیمانده p2 – p را ترجیح میدهد. حال اگر بازیگر 1 بیاید به صورت (c-p,p) کیک را تقسیم کند، بازیگر 2 میاد p را انتخاب میکند. حال فرض کنیم p1 زیرمجموعه غیر مساوی از c-p باشد. لذا قطعا بازیگر 1 میاید c-p-p1 را ترجیح میدهد.
پس بازیگر 1 بهتر است تقسیم بندی دوم را به جای (p1,p2) انجام دهد که این با مفهوم تعادل نش زیربازی (p1,p2) در تناقض است. پس نتیجه میگیریم بازیگر 2 برایش هیچ تفاوتی ندارد.

اثبات 2: این را هم با برهان خلف اینکه بازیگر 1 میاید p2 را به p1 ترجیح میدهد اثبات میکنیم.اگر بازیگر 1 تقسیم بندی (p,c-p) را انجام دهد به طوری که p خیلی بزرگ تر از c-p باشد(تکه دوم خیلی کوچک باشد)، آنگاه بازیگر 1 طبق فرض سوال c-p را ترجیح میدهد و بازیگر 2 که برایش فرقی نمیکند، تکه باقیمانده یعنی p را برمیدارد. بنابرین نتیجه میگیریم این فرض اشتباه است و همیشه بازیگر 1 تکه p1 را به p2 ترجیح میدهد.

اثبات 3: برای مثال فرض کنیم که تکه ای از روی کیک خامه بیشتری داشته باشد.طبق فرض سوال، بازیگر 2 برایش اندازه کیک مهم است فقط، یعنی خامه برایش معنی ای ندارد. اما بازیگر 1

خامه خیلی دوست دارد و به اندازه کیک ترجیحش میدهد. یعنی اندازه کوچک خامه دار را به اندازه بزرگ بدون خامه ترجیح میدهد.

در این حالت قطعا بازیگر 1 کیک را جوری به اندازه مساوی میبرد که تمام خامه ها برای خودش بیفتد و این مشترک در تمام نقاط تعادل نش زیربازی گفته شده است. یعنی بازیگر 1 هم اندازه بازیگر 2 کیک برمیدارد هم خامه ها را برمیدارد.

در این زیربازی هیچ وقت اتفاق نمیفتد که بازیگر 2 حتی کمی خامه بدست آورد چون در این حالت بازیگر 1 کیک را نامساوی میبرد به شکلی که تکه کوچک همه خامه هارا روی خود داشته باشد. در این حالت مشخص است که بازیگر 2 تکه بزرگتر بدون خامه را برمیدارد و باز کل خامه ها به بازیگر1 میرسد(چون خامه را به اندازه کیک ترجیح میدهد). لذا تعادل نش این زیربازی این است که دو قطعه کیک به اندازه مساوی داشته باشیم که روی یکی از آنها خامه باشد و این تکه را بازیگر1 بردارد.

پاسخ این سوال تمام شده و قبل از درج تصاویر با یک نرم افزار دیگر این فاصله اینجا افتاده بود و نمیشد ویرایش کرد. معذرت

تمرین 363.3 :

نکته: این بازی یک بازی دو نفره zero sum است و میدانیم مقدار تعادل نش با مقدار maxmin یکسان است لذا بخاطر اینکه جدول نکشیم، مقدار تعادل نش را می یابیم.

طبق فرمولی که قبلا داشتیم اگر احتمال انتخاب L توسط بازیگر ستون را q بنامیم داریم:

-2q + 1 – q =q + q – 1 ->5q = 2 -> q=2/5->player 2’s max-min payoff = -1/5

تمرین 365.1 :

برای جدول این سوال اگر احتمال انتخاب T توسط بازیکن سطر را p و احتمال انتخاب L توسط بازیگر ستون را q بنامیم، داریم:

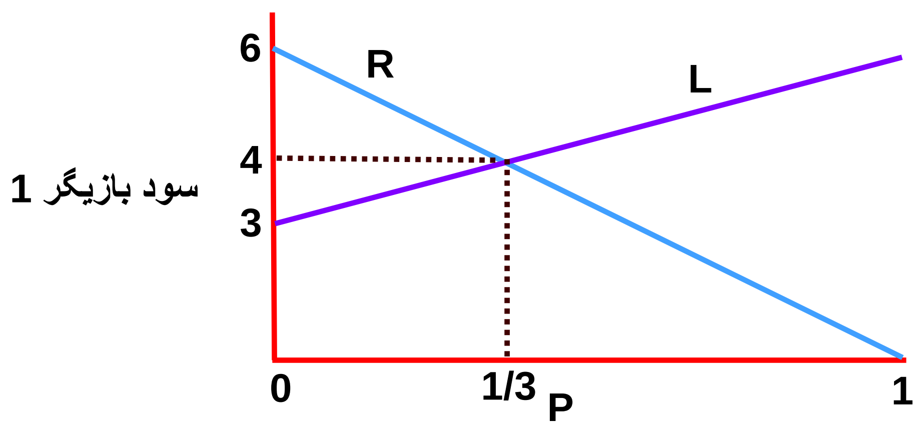
$6p + 3(1-p) = 6(1-p) \rightarrow 6p + 3 - 3p = 6 - 6p \rightarrow 9p = 3 \rightarrow p= 1/3$

$6(1-q) = 2q \rightarrow 8q = 6 \rightarrow q = 3/4$

از 2 رابطه بالا نتیجه میشه که این مسئله یک نقطه تعادل نش mixed داره که استراتژی بازیگر سطر (1/3,2/3) و استراتژی بازیگر ستون (3/4,1/4) باشد. در این نقطه، سود بازیگر سطر میشه:

$1/3 * 6 + 2/3 * 3 = 4$

حال برای یافتن مقدار maxmin خطوط زیر را رسم کرده و بین خطوط min نقطه برخورد آنها را که در اصل maximum of minimums است را حساب میکنیم که برابر با 4 است.



تمرین 369.2 :

اگر فرض کنیم یه تعادل نش mixed مثل (a,b) وجود داشته باشد، چون بازی متقارن است پس تعادل نش mixed مثل (b,a) هم موجود است. اگر سود بازیگر سطر در نقطه تعادل اول X باشد، سود او در نقطه تعادل دوم X- است که با توجه به شرایط سوال داریم X = -X لذا X = 0 است یعنی در این بازی ها، سودی که بازیگر ها بدست می آورند، صفر است.

تمرین 372.3 :

قسمت a : در این فرموله سازی از notation ای مانند 4,5 استفاده میکنیم که یعنی بازیگر 4 را نشان میدهد و 5 را حدس میزند. لذا با توجه به محدودیتی که سوال روی مسئله گذاشته(تعداد انگشتانی که hold میشوند 1 یا 2 است) لذا هر بازیکن 4 تا انتخاب دارید:

1,2 – 1,3 – 2,3 – 2,4

در این حالت جدول سود بازیگر ها مانند جدول زیر میشود:

	1,2	1,3	2,3	2,4
1,2	**0,0**	**2,-2**	**-3,3**	**0,0**
1,3	**-2,2**	**0,0**	**0,0**	**3,-3**
2,3	**3,-3**	**0,0**	**0,0**	**-4,4**
2,4	**0,0**	**-3,3**	**4,-4**	**0,0**

اگر احتمال انتخاب 1,2 توسط بازیگر سطر p1 ، انتخاب 1,3 توسط آنها p2 و به همین ترتیب p3 و p4 باشد، پس استراتژی بازیگر سطر میشه (p1,p2,p3,p4)

برای اینکه حداقل به اندازه 0 سود کند(ضرر نکند) به ازای هر استراتژی pure بازیگر ستون، باید نامساوی های زیر برقرار باشند:

2p1 – 3p4 >= 0 -> p1 >= 3/2 * p4
-3p1 + 4p4 >= 0 -> p1 <= 4/3 * p4

از دو نامساوی بالا نتیجه میگیریم که p1 = p4 = 0 پس p3 = 1 – p2

حال دو نامساوی دیگر تعریف میکنیم با توجه به مفروضات مسئله:

-2p2 + 3p3 >= 0 -> p2 <= 3/2 * p3
3p2 – 4p3 >= 0 -> p2 >= 4/3 * p3 ---> 4/7 <= p2 <= 3/5

پس هر استراتژی (0,p2,1-p2,0) که p2 آن در نامساوی بالا صدق کند، یک نقطه maxmin برای بازیگر سطر است و چون بازی متقارن است، پس برای بازیگر ستون هم هست.ترکیب این دو استراتژی هم مشخصا میشه نقطه تعادل های نش این مسئله.

تمرین 387.3 :

بهترین پاسخ وقتی یک بازیگر از طرف مقابلش انتخاب 1,3 را میبیند، انتخاب 1,2 است.
به همین منوال پاسخ به 1,2 میشه 2,3 و پاسخ به 2,4 میشه 1,3 و پاسخ به 2,3 میشه 2,4 .

چون هیچ انتخاب بازیکن ها strictly dominated نیست، بازیکن ها هرکاری بکنند دارن منطقی عمل میکنند.

تمرین 387.5 :

اگر رقیب m را انتخاب کند، بازیگری که m را انتخاب کند tie میکند و بازیگری که 0 را انتخاب کند میبازد. اگر رقیب 0 یا L را انتخاب کند، بازیگری که m را انتخاب کند میبرد و بازیگری که 0 یا L را انتخاب کند یا tie میکند یا میبازد. اگر رقیب هر انتخاب دیگری بکند، بازیگری که m را انتخاب کند میبرد و بازیگری که 0 یا L را انتخاب کند میبازد.
پس نتیجه میگیریم که جایگاه های 0 و L توسط m به عبارتی strictly dominated میشوند.

اگر در بازی جایگاه های 0 و L را از بین ببریم، جایگاه های 1 و L-1 همان اتفاق بالا برایشان می افتد. اگر این از بین بردن را ادامه دهیم، در آخر m برایمان باقی میماند.

تمرین 388.2 :

برای راحتی کار، در این مسئله ما به firm ها همون بازیگر میگیم یعنی بازیگر 1 یعنی firm 1

با مطالعه مسئله اصلی متوجه میشویم که سود بازیگر 1 برای هر خروجی بزرگتر از ½*(a – c) کمتر از سود اون برای خروجی برابر با مقدار گفته شده است(برای هر خروجی بازیگر 2)

پس هر خروجی بزرگتر از مقدار گفته شده بر مقدار گفته شده strictly dominated است.(برای هر دو بازیگر)
حال اگر هر خروجی بزرگتر از مقدار گفته شده را نادیده بگیریم(برای هر بازیگر)، مقدار max سود ای که میتوانیم به ازای خروجی مقدار گفته شده برای بازیگر 1 از مسئله بگیریم، میشه (a – c) * ¼ لذا این مقدار جای خروجی های نادیده گرفته شده را میگیرد یعنی strictly dominated میشوند بر هر سود توسط خروجی کمتر از (a – c) * ¼
حال اگر هر مقدار کمتر از (a – c) * ¼ را نادیده بگیریم، به همان استدلال گفته شده بالا، هر خروجی بزرگتر از (a – c) * 3/8 توسط خروجی (a – c) * 3/8 میشه strictly dominated

اگر این منوال را ادامه دهیم، متوجه میشویم اگر به تعداد محدود این کار را تکرار کنیم، به نقطه تعادل نش (a – c) * 1/3 میرسیم. توجه شود اغلب اطلاعات این پاسخ از figure های 58.1 و 59.1 کتاب اصلی استخراج شده.

تمرین 391.1 :
نقطه تعادل نش این بازی شامل نقاط تعادل pure و mixed میشه:
1- (T,L)
2- هر استراتژی ((0,0,1),(0,q,1-q)) با مقادیر q بین صفر و یک
3- هر استراتژی ((0,p,1-p),(0,0,1)) با مقادیر p بین صفر و یک

این بازی dominance solvable است زیرا T و L تنها انتخاب های weakly dominated هستند و وقتی آنها تنها weakly dominated به نام M و C را حذف میکنند، استراتژی (B,R) با سود (0,0) را نتیجه میدهند. اگر T و سپس L و سپس C حذف شوند، هیچ انتخاب دیگری weakly dominated نیست و استراتژی های (M,R) و (B,R) باقی میمانند.