سوال اول –

قسمت الف) بله تحویل ناپذیر است زیرا در این زنجیره از هر حالت به هر حالت دیگر دسترسی وجود دارد.

قسمت ب) برای بررسی این حالت، باید معادلات تعادل را به شکل زیر بنویسیم:

$$\pi(0) = \pi(1)q \,, \pi(1)p = \pi(1)p \,, \pi(2)q = \pi(2)q \,, \ldots$$

با بررسی معادله زیر داریم:

$$\pi(0) = \pi(1)q \xrightarrow{\pi(1)=b} \pi(0) = bq \,, \pi(2) = \pi(3) = \cdots = \pi(1) = b$$

چون مجموع پای ها از ایندکس اول تا ایندکس بینهایت باید ۱ باشند، لذا نتیجه میگیریم b=0 لذا تمام پای ها صفر هستند پس اصلا یک توزیع احتمالاتی نیست لذا توزیع پایا هم نیست.

قسمت پ) چون که طبق گفته قسمت الف، کل حالت ها با یکدیگر در ارتباط اند لذا برای محاسبه دوره تناوب حالت ها کافی است دوره تناوب یکی از حالت هارا بررسی کنیم. اگر اولین حالت یعنی حالت صفر را در نظر بگیریم:

$$d(0) = \gcd\{2,4,\ldots\} = 2 = d(i) \quad for\ all\ i$$

قسمت ت) داریم:

$$if\ \varphi(i) = P_i(\tau_N < \tau_0) \rightarrow \varphi(0) = 0 \,, \varphi(N) = 1$$

$$if\ X_0 = 0 \rightarrow \tau_0 = 0 \rightarrow \varphi(0) = P_0(\tau_N < 0) = 0$$

$$if\ X_0 = N \rightarrow \tau_N = 0 \rightarrow \tau_0 \geq 1 \rightarrow \varphi(N) = P_N(0 < \tau_0) = 1$$

$$So\ for\ i \in \{1, N-1\} \rightarrow \varphi(i) = p_{i,i+1}\,\varphi(i+1) + p_{i,i-1}\,\varphi(i)$$

$$We\ have \begin{cases} p = p_{i,i+1} = p_{i,i-1} & i \cong odd \\ q = p_{i,i+1} = p_{i,i-1} & i \cong even\ and\ positive \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} p[\varphi(i+1) - \varphi(i)] = q[\varphi(i) - \varphi(i-1)] & i \cong odd \\ q[\varphi(i+1) - \varphi(i)] = p[\varphi(i) - \varphi(i-1)] & i \cong even \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi(i)-\varphi(i-1)=\dfrac{q}{p}\varphi(1) & i \ \cong even \\ \varphi(i)-\varphi(i-1)=\dfrac{q}{p}\varphi(1) & i \cong odd \end{cases}$$

حال طبق تئوری محاسبات داریم:

$$\varphi(i)=[\varphi(i)-\varphi(i-1)]+[\varphi(i-1)-\varphi(i-2)]+\cdots+[\varphi(2)-\varphi(1)]+\varphi(1)$$

اگر فرض کنیم i و N فرد باشد:

$$\varphi(i)=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i}{2}}\varphi(1)+\frac{i}{2}\varphi(1)$$

$$\varphi(i)=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{i}{2}}+\frac{i}{2}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{N}{2}}+\frac{N}{2}}=P_i(\tau_N<\tau_0)\rightarrow \lim_{N\to\infty}P_i(\tau_N<\tau_0)=0$$

$\rightarrow \lim_{N\to\infty}P_i(\tau_0<\infty)=1 \rightarrow$ تمام حالت ها بازگشتی هستند

سوال دوم –

قسمت الف) اگر فرض کنیم کانتور های با مرکز برابر روی نقطه اولیه داشته باشیم، هر کانتور مشخص کننده حالت های با فاصله برابر با مرکز باشند، حال وقتی مثلا $Z_n=k$ باشد، مهم نیس زنجیره الان کجا است زیرا کانتور ها مهم هستند. برای تغییر حالت بعدی یعنی k+1 ، سه حالت ممکن است پیش بیاید. اول اینکه در حرکت بعدی از مرکز دور شود. یا به مرکز نزدیک شود یا اصلا مبدا خود مرکز باشد:

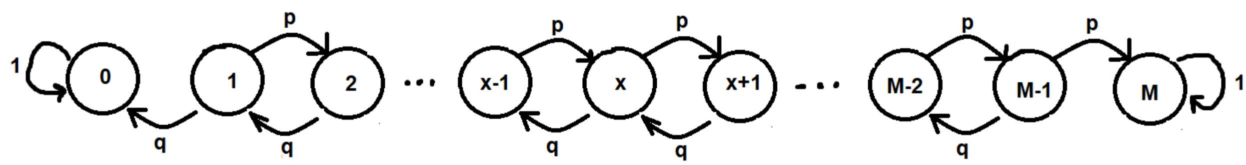
$$\begin{cases} P(Z_{n+1}=k+1\ |Z_n=k)=\dfrac{2}{3} & \text{حالت اول} \\ P(Z_{n+1}=k-1\ |Z_n=k)=\dfrac{1}{3} & \text{حالت دوم} \\ P(Z_{n+1}=1\ |Z_n=0)=1 & \text{حالت سوم} \end{cases}$$

قسمت ب) چون احتمال دور شدن از مرکز از نزدیک شدن به آن بیشتر است، لذا زنجیره گذرا است.

قسمت ج) همان طور که گفته شد، در نهایت ما به سمت دور از مرکز حرکت میکنیم(وقتی n به سمت بینهایت میل بکند). این بین ممکن است ما به مرکز نزدیک شویم اما بنا به قوانین احتمالاتی، مطمئنیم که به دفعات محدود کانتور های نزدیک به مرکز بازدید میشوند.البته منظور از نزدیک هر کانتور با هر عددی است زیرا در نهایت مطمئنیم در n بینهایت، Zn به سمت بینهایت میل میکند با احتمال یک.لذا استنباط میشود که زنجیره Xn هم گذرا است.

سوال سوم –

قسمت الف) با فرض مستقل بودن هر قمار و با فرض اینکه M=x+b داریم:



قسمت ب) داریم:

$$\varphi(0) = 0\,, \varphi(b) = 1\,,$$
$$\varphi(x) = p\varphi(x+1) + q\varphi(x-1) \quad for\ x = 1,2,\dots,b-1$$

قسمت پ) طبق رابطه قسمت ب داریم:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x+1) + \frac{1}{2}\varphi(x-1)$$

اگر توجه کنیم، نقطه متناظر x یعنی $\varphi(x)$ حالت خطی دارند که این خط مبدا اش نقطه متناظر با x-1 یعنی $\varphi(x-1)$ و نقطه مقصد اش نقطه متناظر با x+1 یعنی $\varphi(x+1)$ است. اگر فرض کنیم معادله $\varphi(x)$ به شکل زیر است، با جایگذاری فرض های اولیه سوال، داریم:

$$\varphi(x) = Gx + H \xrightarrow{\varphi(0)=0\,,\varphi(b)=1} \begin{cases} \varphi(0) = 0 = G * 0 + H \rightarrow H = 0 \\ \varphi(b) = 1 = Gb + 0 \rightarrow G = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi(x) = Gx + H \xrightarrow{H=0,G=\frac{1}{b}} \varphi(x) = \frac{x}{b}$$

قسمت ت) فرض میکنیم:

$$A=\frac{q}{p}\rightarrow q=Ap=1-p\rightarrow p=\frac{1}{1+A}\ ,q=\frac{A}{1+A}$$

لذا داریم:

$$\varphi(x)=\frac{A^x-1}{A^b-1},$$

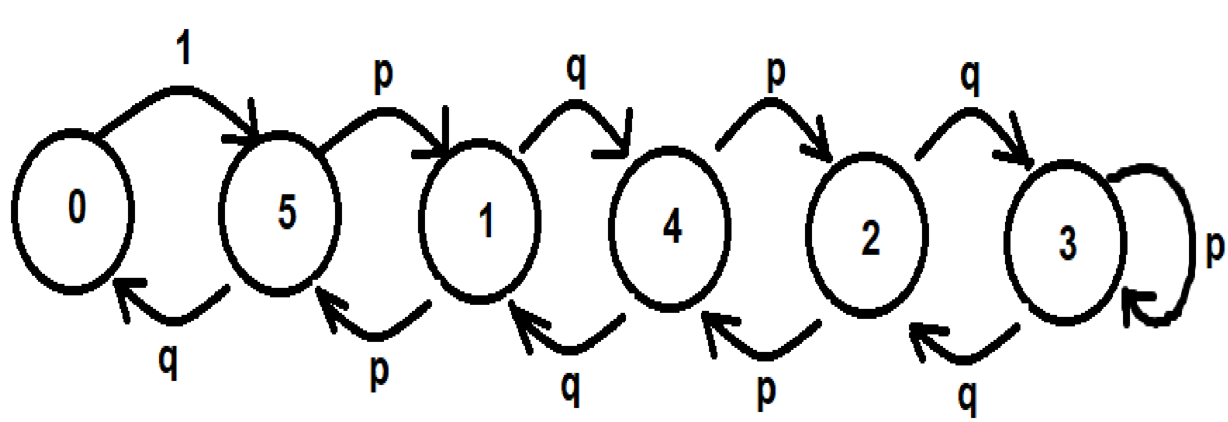
$$\varphi(x+1)=\frac{A^{x+1}-1}{A^b-1},$$

$$\varphi(x-1)=\frac{A^{x-1}-1}{A^b-1}$$

$$\rightarrow\varphi(x)=p\varphi(x+1)+q\varphi(x-1)=\frac{1}{1+A}\frac{A^{x+1}-1}{A^b-1}+\frac{A}{1+A}\frac{A^{x-1}-1}{A^b-1}$$

$$=\frac{A^{x+1}-1-A+A^x}{(1+A)(A^b-1)}=\frac{A^x(1+A)-(1+A)}{(1+A)(A^b-1)}=\frac{A^x-1}{A^b-1}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^b-1}$$

سوال چهارم – اگر فرض کنیم احتمال اینکه باران نیاید برابر باشد با q=1-p و زنجیره مارکفی تشکیل دهیم که هر حالت یعنی تعداد چتر هایی که در همان مکانی که هستیم، پیشمان وجود دارد:



لذا داریم:

$$\pi(1) = \pi(2) = \pi(3) = \pi(4) = \pi(5), \pi(0) = \pi(5)q\ ,$$

$$\sum_{i=0}^{5} \pi(i) = 1 \ \rightarrow \ \pi(0) + \sum_{i=1}^{5} \pi(i) = 1 \rightarrow \pi(5)q + 5\pi(5) = 1$$

$$\rightarrow \ \pi(5) = \frac{1}{q+5} \rightarrow \ \pi(0) = \frac{q}{q+5}$$

قسمت الف) ما زمانی خیس میشویم که در حالت صفر باشیم و باران بیاید یعنی:

$$P_{wet} = \pi(0) * p = \frac{pq}{q+5}$$

قسمت ب) با فرض اینکه *p=0.7* باشد:

$$P_{wet} = \frac{0.7 * 0.3}{0.3 + 5} \approx 0.04$$

میبینیم که با این تعداد چتر و این احتمالات، احتمال خیس شدن ما چهارصدم است و فرض قسمت ب این سوال با همین تعداد چتر صادق است. حال اگر بخواهیم کمترین تعداد چتر ممکن را داشته باشیم و بازهم احتمال خیس شدنمان کمتر یک دهم باشد(طبق صورت سوال) ، مشابه با چیزهایی که در ابتدای این سوال گفتیم، اگر *m* چتر داشته باشیم، احتمال خیس شدن برابر است با رابطه زیر و با توجه به خواسته سوال داریم:

$$P_{wet} = \frac{pq}{q+m} \xrightarrow{we\ want\ P_{wet}\ smaller\ than\ 0.1} \frac{0.7 * 0.3}{0.3 + m} < \frac{1}{10}$$

$$\rightarrow m + 0.3 > 10 * 0.7 * 0.3 \rightarrow m > 1.8 \ \rightarrow m = 2$$

یعنی با دو چتر هم با این احتمالات میتوانیم تضمین کنیم که احتمال خیس شدنمان کمتر یک دهم است.

سوال پنجم – اگر فرض کنیم m_i احتمال این باشد که ما به حالت ۲ قبل از حالت ۳- برسیم وقتی حالت اولیه در شروع حالت i باشد:

$$m_i = 0.7m_{i+1} + 0.3m_{i-1} \qquad for \quad -3 < i < 2$$
$$m_{-3} = 0 \ \ , m_2 = 1$$

حال یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهولی تشکیل داده و به وسیله سایت ***wolframalpha*** آن را حل میکنیم:

$$\begin{cases} m_{-2} = 0.7m_{-1} + 0.3m_{-3} = 0.7m_{-1} \\ m_{-1} = 0.7m_0 + 0.3m_{-2} \\ m_0 = 0.7m_1 + 0.3m_{-1} \\ m_1 = 0.7m_2 + 0.3m_0 = 0.7 + 0.3m_0 \end{cases} \rightarrow m_i = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{i+3} - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^5 - 1} \quad for \quad -3 \le i \le 2$$

سوال از ما m_0 را میخواهد. لذا داریم:

$$m_0 = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^3 - 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^5 - 1} \approx 0.93$$

در قسمت بعدی سوال، اگر فرض کنیم n_i میانگین تعداد قدم هایی باشد که به حالت ۲ یا ۳- برای بار اول برسیم، داریم:

$$n_i = 0.7n_{i+1} + 0.3n_{i-1} + 1 \qquad for - 3 < i < 2$$
$$n_2 = n_{-3} = 0$$

حال یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهولی تشکیل داده و به وسیله سایت ***wolframalpha*** آن را حل میکنیم:

$$\begin{cases} n_{-2} = 0.7n_{-1} + 0.3n_{-3} + 1 = 0.7n_{-1} + 1 \\ n_{-1} = 0.7n_0 + 0.3n_{-2} + 1 \\ n_0 = 0.7n_1 + 0.3n_{-1} + 1 \\ n_1 = 0.7n_2 + 0.3n_0 + 1 = 0.3n_0 + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow n_i = \frac{5\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{i+3} - 1\right]}{(p-q)\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5 - 1\right]} - \frac{i+3}{p-q} \quad for \quad -3 \le i \le 2$$

سوال از ما n_0 را میخواهد. لذا داریم:

$$m_0 = \frac{5\left[\left(\frac{3}{7}\right)^3 - 1\right]}{0.4\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5 - 1\right]} - \frac{3}{0.4} \approx 4.18$$

سوال ششم – در قدم زدن تصادفی میدانیم مقدار قدم بعدی میشود همان مقدار قدم قبلی یا به علاوه ۱ یا منهای ۱ با احتمال برابر(چون مشخص نیس به سمت مثبت ها رفتیم یا یا به سمت منفی ها).البته یک حالت استثنا هم داریم که در این رابطه که گفتیم صدق میکنم اما هر دو حالت منهای یک و به علاوه یک اش خروجی برابر میدهد آن هم وقتی است که حالت فعلی حالت شروع یعنی نقطه صفر باشد که در این صورت حالت بعدی یا ۱+ یا ۱- است که مقدار هر دو برابر با ۱ است.

بنابراین برای نشان دادن این که مفروض سوال یک زنجیره مارکف است، باید احتمال زیر را بررسی کنیم:

$$P(|S_{n+1}| = k\ |S_n = l) \rightarrow \begin{cases} k = l + 1\ or\ k = l - 1\ with\ equal\ prob & if\ i \neq 0 \\ k = 1 & if\ i = 0 \end{cases}$$

لذا صورت سوال ثابت شد یعنی زنجیره مارکف است.
