سوال ۱ – با استفاده از قضیه factorization داریم:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i I_{(0,\infty)}(x_i) * \frac{e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{-\theta}}}{\theta^{2n}}$$

لذا یک آمار کافی یک بعدی برای این مدل برابر جمع ***Xi*** ها میباشد.

سوال ۲ – با توجه به تعریف تابع چگالی داریم:

$$\int_{x_0}^{\infty}\theta x_0^{\theta}x^{-\theta-1}dx=1\rightarrow\int_{x_0}^{\infty}x^{-\theta-1}dx=\frac{1}{\theta x_0^{\theta}}\quad(*)$$

حال گشتاور اول را محاسبه میکنیم:

$$\mu_1=E[X]=\int_{x_0}^{\infty}x\theta x_0^{\theta}x^{-\theta-1}dx=\theta x_0^{\theta}\int_{x_0}^{\infty}x^{-\theta}dx\quad(**)$$

با توجه به * و ** داریم:

$$\int_{x_0}^{\infty}x^{-\theta}dx=\frac{1}{(\theta-1)x_0^{\theta-1}}\rightarrow\mu_1=\frac{\theta x_0}{\theta-1}$$

حال باید مشخص کنیم که آیا تتا را میتوان بر حسب تابعی از گشتاور اول نوشت یا نه. اگر توانستیم این کار را بکنیم، تخمین بر اساس روش گشتاور ها برای تتا را بدست آورده ایم. لذا داریم:

$$\frac{\mu_1}{x_0}=\frac{\theta}{\theta-1}\rightarrow\theta=\frac{\mu_1}{\mu_1-x_0}\rightarrow\theta_{method\ of\ moments}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-x_0}$$

سوال ۳ – این تخمینگر یک تخمینگر بیشینه درست نمایی است. داریم:

$$Var(\hat{\tau}_{ML}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|Y_i|\right) \overset{iid}{\Rightarrow} Var(\hat{\tau}_{ML}) = \frac{1}{n}Var(|Y|)$$

حال داریم:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{2\tau}\exp\left(-\frac{|y|}{\tau}\right)dx = 0$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{2\tau}\exp\left(-\frac{|y|}{\tau}\right)dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{y^2}{2\tau}\exp\left(\frac{-y}{\tau}\right)dx = \ 2\tau^2$$

$$E(|y|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|}{2\tau}\exp\left(-\frac{|y|}{\tau}\right)dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{y}{2\tau}\exp\left(\frac{-y}{\tau}\right)dx = \tau$$

توجه شود آخرین انتگرال در دو خط بالا، نوعی انتگرال تابع چگالی توزیع گاما است و به همین دلیل جواب نهایی برابر با این جواب ها شد.

حال داریم:

$$Var(|Y|) = E(|Y|^2) - [E(|Y|)]^2 = E(Y^2) - [E(|Y|)]^2 = 2\tau^2 - \tau^2 = \tau^2$$

پس در نهایت داریم:

$$Var(\hat{\tau}_{ML}) = \frac{1}{n}Var(|Y|) = \frac{\tau^2}{n} \to MSE(\hat{\tau}_{ML}) = \frac{\tau^2}{n} + 0 = \frac{\tau^2}{n}$$

سوال ۴ – اگر فرض کنیم:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

سپس تابع درست نمایی برابر میشود با :

$$f_n(x|\theta) = \begin{cases} e^{n\theta - Y} & for\ \theta < \min\{X_1, \dots, X_n\} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) برای هر مقدار x ، تابع درست نمایی گفته شده بالا ماکسیمم میشود زمانی که تتا بیشترین مقدار ممکن را بگیرد که برابر است با $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ اما همانطور که در تابع بالا میبینیم، شرط کوچک تر برای تتا و $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ بیان شده است لذا تتا نمیتواند برابر با $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ شود پس *MLE* وجود ندارد.

ب) اگر تابع درست نمایی قسمت الف را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{\theta - x} & for\ x \geq \theta \\ 0 & for\ x < \theta \end{cases}$$

آنگاه مقدار درست نمایی برای تتا های کوچک تر مساوی $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ غیرصفر میشود لذا تتا میتواند برابر با $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ شود لذا *MLE* وجود دارد و مقدار تخمین زده شده برای تتا هم برابر با $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ میشود.

سوال ۵ – داریم:

$$f(\theta|y) = \frac{f(\theta, y)}{f(y)},$$

$$f(\theta, y) = f(y|\theta)f(\theta) = \left[\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}\right]\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\right]$$
$$= \binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},$$

$$f(y) = \int_0^1 f(\theta, y)d\theta = \int_0^1 \binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1}d\theta$$
$$= \binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1}\,d\theta$$
$$= \binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

$$\rightarrow f(\theta|y) = \frac{f(\theta, y)}{f(y)} = \frac{\binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1}}{\binom{n}{y}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}}$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(y+\alpha)\Gamma(n-y+\beta)}\theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1}$$

سوال ۶ – در نوتبوک آورده شده است.