سوال ۱ –

قسمت الف)

$$R_{yx}(\tau) = R_{yx}(t_1, t_2) = E[\, y(t_1)\, x(t_2)\,] = \; E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1 - \alpha)h(\alpha)d\alpha\right) x(t_2)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t_1 - \alpha)x(t_2)]h(\alpha)d\alpha = R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1) = \; R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1)$$

$$= e^{j\alpha\tau} H(\alpha) \;\; in\ frequency\ space$$

$$R_{yy}(\tau) = E[y(t_1)y(t_2)] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1 - \alpha)h(\alpha)d\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_2 - \alpha)h(\alpha)d\alpha\right)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[\, x(t_1 - \alpha)x(t_2 - \alpha)]h(\alpha)h(\alpha) = R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2)$$

$$= e^{j\alpha\tau} |H(\alpha)|^2 \; in\ frequency\ space$$

قسمت ب)

$$R_{yx}(t_1, t_2) = E[\, y(t_1)\, x(t_2)\,] = \; E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1 - \alpha)h(\alpha)d\alpha\right) x(t_2)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t_1 - \alpha)x(t_2)]h(\alpha)d\alpha = R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1) = \; R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1)$$

$$= e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha) \; in\ frequency\ space$$

$$R_{yy}(t_1, t_2) = E[y(t_1)y(t_2)] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1 - \alpha)h(\alpha)d\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_2 - \beta)h(\beta)d\beta\right)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[\, x(t_1 - \alpha)x(t_2 - \beta)]h(\alpha)h(\beta) = R_{xx}(t_1, t_2) * h(t_1) * h(t_2)$$

$$= e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha)H^*(\beta) \;\; in\ frequency\ space \qquad (h(t) is\ real\ \&\ H(-\beta) = H^*(\beta))$$

سوال ۲– اگر ورودی سیستم را 26+v(t) و خروجی سیستم را y(t) در نظر بگیریم،

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4s+13} \qquad , \qquad h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}\sin(3t)u(t)$$

لذا میانگین ورودی برابر ۲۶ است و میانگین خروجی(E[y(t)]) برابر مقدار H(s) در نقطه صفر ضربدر میانگین ورودی است یعنی بر
۲ میشود. فرآیند مرکزی جدید زیر را تعریف میکنیم که این فرآیند، خروجی سیستم با ورودی v(t) است.

$$\tilde{y}(t) = y(t) - 2 \rightarrow E[\tilde{y}^2(t)] = \frac{10}{104}$$

لذا داریم:

$$R_{yy}(\tau) = \frac{10}{104}e^{-2|\tau|}\left[\cos(3\tau) - \frac{2}{3}\sin(3|\tau|)\right] + 4$$

طبق فرض سوال، v(t) نرمال است لذا y(t) نیز نرمال است با میانگین ۲ و واریانس 10/104 لذا:

$$P[y(t) \le 3] = G\left(\frac{3-2}{\frac{10}{104}}\right) = G(3.24)$$

سوال ۳ –

قسمت الف) میدانیم که:

$$if\ S(\omega) = \frac{q}{c^2+\omega^2} \rightarrow R_y(\tau) = \frac{q}{2c}e^{-c|\tau|}$$

حال با توجه به صورت سوال داریم:

$$S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \rightarrow R_y(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}\ OR\ R_y(\tau) = -\frac{1}{2}e^{|\tau|}$$

قسمت ب)

$$S(s) = \frac{1}{1+s^4} = \frac{1}{\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)\left(s^2-\sqrt{2}s+1\right)}$$

$$\rightarrow R(\tau) = \frac{e^{-\frac{|\tau|}{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)+\sin\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

قسمت پ) میدانیم که:

$$\frac{4}{4+w^2} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-2|\tau|}$$

لذا:

$$\frac{16}{(4+w^2)^2} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-2|\tau|} \circledast e^{-2|\tau|}$$

بنابراین برای تا های مثبت داریم(توجه شود که $R(\tau) = R(-\tau)$) :

$$R(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{0} e^{2x}e^{-2(\tau-x)}dx + \int_{0}^{\tau} e^{-2x}e^{-2(\tau-x)}dx + \int_{\tau}^{+\infty} e^{2x}e^{2(\tau-x)}dx}{16} = \frac{e^{-2|\tau|}(1+2|\tau|)}{32}$$

سوال ۴ –

قسمت الف)

$$C_{y_1y_2}(\tau) = C_{xx}(\tau) \circledast h_1(t) \circledast h_2(t) = (R_{xx}(\tau) - |\mu_x(t)|^2\ ) \circledast h_1(t) \circledast h_2(t)$$

قسمت ب)

$$S_{y_1y_2}(\omega) = S_x(\omega).H_1(\omega).H_2(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau).e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right) \circledast h_1(t) \circledast h_2(t)$$

سوال ۵- داریم:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(s)R_x(\tau+s)ds = v(-\tau)R_x(\tau)$$

$$\rightarrow R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(e)R_{xy}(\tau+e) = v(\tau)R_{xy}(\tau) = v(\tau)v(-\tau)R_x(\tau)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{a} - \frac{bv(t)}{a} dt \rightarrow R_y(0) = 2b\left[\frac{x(0)}{a} - \frac{bv(0)}{a}\right]^2 \delta(\tau)$$

سوال ۶ –

قسمت الف)

$$E[x(t)] = E[x_1(t)] + E[c]E[x_2(t)] = \eta_1 + 0.5\eta_2$$

حال دو حالت مختلف را بررسی میکنیم.

$$for\ specific\ \gamma, if\ c(\gamma) = 0 \rightarrow x(t) = x_1(t) \rightarrow \lim_{T\to\infty} \eta_T = \eta_1$$

$$if\ c(\gamma) = 1 \rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow \lim_{T\to\infty} \eta_T = \eta_1 + \eta_2$$

لذا *x(t)* یک فرآیند *mean ergodic* نیست.

قسمت ب) میدانیم که *x(t)* یک فرآیند *mean-ergodic* است اگر و تنها اگر:

$$\frac{1}{T}\int_0^T C(\tau)d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

ابتدا *WSS* بودن آن را بررسی میکنیم:

$$E[x(t)] = E[a]\cos(\omega t) + E[b]\sin(\omega t) + E[c] = c$$

$$C(t_1,t_2) = E[(x(t_1)-c)(x(t_2)-c)]$$
$$= E[a^2]\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + E[b^2]\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2) = \sigma^2\cos(\omega\tau)$$

لذا متوجه میشویم که یک فرآیند *WSS* است. لذا طبق قضیه *Slutsky* داریم:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2\cos(\omega\tau)\,d\tau \;=\; \frac{\sigma^2}{\omega\tau}\sin(\omega\tau) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

لذا یک فرآیند *mean-ergodic* است.

قسمت پ) با توجه به اینکه فرآیند توزیع یونیفرم در آن بازه دارد، لذا میانگین فرآیند برابر صفر است.این مطلب بدیهی است اما بخاطر کامل تر بودن، به صورت ریاضی هم اثبات میکنیم:

$$mean\big(X(t)\big) = A * mean[\cos(\omega t+\varphi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varphi)f(\varphi,t)d\varphi$$
$$= A\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega t+\varphi)\,d\varphi = \frac{A}{2\pi}\sin(\omega t+\varphi)\Big| -\pi \; to \; \pi$$
$$= \frac{A}{2\pi}[\sin(\omega t+\pi) - \sin\,(\omega t-\pi)] = 0$$

واریانس آن هم برابر است با:

$$\sigma_x^2(t) = \frac{A^2}{2}$$

همانطور که مشاهده شد، میانگین فرآیند مربوطه به زمان وابسته نیست پس این فرآیند ایستای مرتبه ۱ است.حال اگر ثابت کنیم که میانگین این فرآیند روی بازه زمانی بینهایت برابر است با میانگین محاسبه شده بالا یعنی صفر، نتیجه میشود این فرآیند *mean-ergodic* است.لذا داریم:

میدانیم که میانگین یک فرآیند با میانگین در طی زمان آن فرآیند برابر باشد، و اگر آن فرآیند ایستای مرتبه ۱ باشد، میتوانیم بگوییم فرآیند *mean-ergodic* است. لذا این موضوع را بررسی میکنیم:

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} A\cos(\omega t+\varphi)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}\right)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{A}{T\omega}\left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}+\varphi\right)+sin\left(\frac{\omega T}{2}-\varphi\right)\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{T\omega}2\sin\left(\frac{\frac{\omega T}{2}+\varphi+\frac{\omega T}{2}-\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\frac{\omega T}{2}+\varphi-\frac{\omega T}{2}+\varphi}{2}\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{A}{T\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)cos(\varphi)=\lim_{T\to\infty}\frac{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}Acos(\varphi)=0=mean(x(t))$$

لذا نتیجه میشود که فرآیند مربوطه *mean-ergodic* است.
