سوال ۱ –

قسمت اول) داریم:

$$c\left[\int_0^3\int_0^3 x^2y(1+y)\,dxdy\right]=1$$

$$1\rightarrow\ \int_0^3 x^2y(1+y)dx=\ y(1+y)\left[\frac{1}{3}x^3\right]\Big\| 0\le x\le 3=y(1+y)[9-0]=9y(1+y)$$

$$2\rightarrow\int_0^3 9y(1+y)\ \ dy=\ 9\int_0^3 y+y^2\ \ dy=9\left(\frac{27}{2}\right)=\frac{243}{2}$$

$$1{,}2\ \ \rightarrow c*\left(\frac{243}{2}\right)=1\ \ \rightarrow c=\frac{2}{243}$$

قسمت دوم) از مقدار c که در قسمت قبل بدست آورده ایم داریم:

$$P(1\le x\le 2{,}0\le y\le 1)=\frac{2}{243}\left[\int_0^1\int_1^2 x^2y(1+y)\,dxdy\right]$$

$$=\frac{2}{243}\left[\int_0^1\frac{7}{3}y(1+y)\,dy\right]=\frac{2}{243}*\frac{35}{18}=\frac{35}{2187}\approx 0.016$$

قسمت سوم) بنا به خواسته شده ی سوال داریم:

$$F_{X,Y}(X\le a,Y\le b)=\int\limits_0^b\int\limits_0^a\frac{2}{243}x^2y(1+y)\,dxdy$$

$$=\frac{2}{243}\int_0^b\int_0^a x^2y(1+y)\,dxdy=\ \frac{2}{243}*\frac{a^3}{3}\left(\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}\right)=\frac{a^3(2b^3+3b^2)}{2187}$$

قسمت چهارم) ابتدا از روی تابع $f_{X,Y}(x,y)$ باید تابع $f_X(x)$ را بدست آورده که همان تابع pdf حاشیه ای است سپس از آن cdf حاشیه ای را بدست می آوریم:

$$F_X(0 \le a \le 1) = \frac{2}{243}\int_0^a \int_0^3 x^2 y(1+y)\, dy dx = \frac{a^3}{27}$$

قسمت پنجم)داریم:

$$f_X(x) = \int_0^3 f_{X,Y}(x,y)\, dy = \frac{2}{243}\frac{27x^2}{2} = \frac{x^2}{9}$$

$$F_X(x) = \lim_{y \to 3} \frac{x^3(2y^3+3y^2)}{2187} = \frac{x^3}{27} \xrightarrow{\text{مشتق}} F'_X(x) = \frac{x^2}{9} = f_X(x)$$

قسمت ششم) برای بررسی مستقل بودن آن ها میتوانیم صحت رابطه زیر را بررسی کنیم زیرا میدانیم در صورت برقراری رابطه زیر، x و y مستقل اند:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y)$$

ابتدا $f_Y(y)$ را بدست می آوریم:

$$f_Y(y) = \int_0^3 f_{X,Y}(x,y)\, dx = \frac{2y(1+y)}{27}$$

حال:

$$f_X(x) * f_Y(y) = \frac{x^2}{9} * \frac{2y(1+y)}{27} = \frac{2x^2 y(1+y)}{243} = f_{X,Y}(x,y)$$

پس میفهمیم که مستقل هستند.

سوال ۲ –

قسمت اول) داریم:

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[\max(X_1, \dots, X_n) \le y] = P[X_1 \le y] \dots P[X_2 \le y]$$
$$= F_{X_1}(y) \dots F_{x_n}(y)$$
$$\to PDF\ is : f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left(F_{X_1}(y) \dots F_{x_n}(y)\right)}{dy}$$
$$= f_{X_1}(y)\left[F_{X_2}(y) \dots F_{x_n}(y)\right] + f_{X_2}(y)\left[F_{X_1}(y)F_{X_3}(y) \dots F_{x_n}(y)\right] + \cdots$$

قسمت دوم) داریم:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}P[\min(X_1, \dots, X_n) \le y] = \frac{d}{dy}(1 - \mathrm{P}[\min(X_1, \dots, X_n) > y)]$$
$$= -\frac{d}{dy}(P[X_1 > y]P[X_2 > y] \dots P[X_n > y])$$
$$= -\frac{d}{dy}\left(\left(1 - F_{X_1}(y)\right)\left(1 - F_{X_2}(y)\right) \dots \left(1 - F_{X_n}(y)\right)\right)$$
$$= f_{X_1}(y)\left(\left(1 - F_{X_2}(y)\right) \dots \left(1 - F_{X_n}(y)\right)\right)$$
$$+ f_{X_2}(y)\left(1 - F_{X_1}(y)\right)\left(1 - F_{X_3}(y)\right) \dots \left(1 - F_{X_n}(y)\right) + \cdots$$

قسمت سوم) میدانیم که *PDF* هه مجموع یک سری متغیر تصادفی برابر است با کانولوشن *PDF* های آن ها لذا:

$$f_Y(y) = \frac{1}{n}\left[f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \dots * f_{X_n}(x)\right]$$
$$= \frac{(f_{X_1} * f_{X_2} * \dots * f_{X_n})(x)}{n} = \frac{f_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(x)}{n}$$

سوال ۳ –

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1} + \cdots + X_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\right)(X_1 + \cdots + X_n) + \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\right)(X_{n+1} + \cdots + X_{2n})$$

طبق قانون حد مرکزی، میدانیم که $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\right)(X_1 + \cdots + X_n)$ یک توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است که در یک ضریبی هم ضرب میشه. جمله $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2n}}\right)(X_{n+1} + \cdots + X_{2n})$ هم دقیقا یک توزیع $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ است که در یک ضریبی ضرب میشود.مجموع این دو توزیع نرمال مستقل هم میشه یک توزیع $N(2\mu, \frac{2\sigma^2}{n})$.

سوال ۴ –

قسمت اول)

$$P[X \geq 5] \leq \frac{E[X]}{5} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{5} = \frac{1}{5\lambda}$$

قسمت دوم) طبق قضیه *memorylessness* داریم:

$$P[X \geq 10 + 5 \mid X \geq 10] = P[X \geq 5] \leq \frac{1}{5\lambda}$$

سوال ۵ – ابتدا تابع *PDF* هه متغیر *X* را به شکل زیر بازنویسی میکنیم:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & x < 0 \\ e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

سپس تابع *CDF* متغیر تصادفی *X* را مینویسیم(با انتگرال گیری از تابع *PDF* بالا):

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{2} & x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-2x}}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

قسمت اول) برای این سوال تئوری زیر مطرح است:

Theorem 4.2
Consider a continuous random variable X with domain R_X, and let $Y = g(X)$. Suppose that we can partition R_X into a finite number of intervals such that $g(x)$ is strictly monotone and differentiable on each partition. Then the PDF of Y is given by

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i).\left|\frac{dx_i}{dy}\right| \qquad (4.6)$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are real solutions to $g(x) = y$.

ابتدا از روی رابطه *Y* میفهمیم که:

$$R_Y = [0,1]$$

برای *y* های بین صفر و یک:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{|g'(y)|} + \frac{f_X(-y)}{|g'(-y)|} = e^{-2*y} + e^{2*-y} = 2e^{-2y}$$

برای دیگر نقاط هم که $f_Y(y) = 0$ است.

قسمت دوم) برای این تابع تبدیل هم داریم:

$$f_Z(z) = \frac{f_X(\sqrt{z})}{|g'(\sqrt{z})|} + \frac{f_X(-\sqrt{z})}{|g'(-\sqrt{z})|} = \frac{e^{-2*\sqrt{z}}}{|2\sqrt{z}|} + \frac{e^{2*-\sqrt{z}}}{|-2\sqrt{z}|} = \frac{2e^{-2\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} = \frac{e^{-2\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}$$

سوال ۶ –

قسمت اول) داریم:

$$P[X=k]=\ (1-p)^{k-1}p$$
$$\rightarrow P[X>1]=P[X=2]+P[X=3]+\cdots=(1-p)p+(1-p)^2p+\cdots$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^i p=1-P[X=1]=1-p$$

قسمت دوم)

$$P[X\le k]=P[X=1]+\cdots P[X=k]=\ \sum_{i=1}^{k}(1-p)^{k-1}p$$

قسمت سوم)

$$P[X>k]=1-P[X\le k]=1-\ \sum_{i=1}^{k}(1-p)^{k-1}p$$

قسمت چهارم) در این قسمت، خاصیت *memorylessness* بودن مورد بررسی است. مفهوم آن است که اگر ما قصد داریم اینقدر آزمایش را تکرار کنیم که اولین موفقیت نصیب مان شود، توزیع احتمال شرطی به شکست های قبلی وابسته نیست یعنی اینکه ما خاطره ای از شکست هایمان نداریم و تاثیری در محاسبه احتمال پیروزی و توزیع احتمال ندارند.

$$P[X=r+k\ |X>k]=\ \frac{P[X=r+k\ \ \cap X>k\ ]}{P[X>k]}=\frac{P[X=r+k]}{P[X>k]}$$
$$=\frac{(1-p)^{r+k-1}p}{1-\ \sum_{i=1}^{k}(1-p)^{k-1}p}=(1-p)^{r-1}p=P[X=r]$$

سوال ۷ –

قسمت اول)

$$E[X|Y=y] = \sum_x x\, P(X=x|Y=y) = \sum_x x\, \frac{P(X=x\ \cap Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$\xrightarrow{X\ and\ Y\ are\ independent} E[X|Y=y] = \sum_x x \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)} = \sum_x x\, P(X=x)$$

$$= E[x]$$

روش دوم:

$$E[X|Y=y] = \sum\nolimits_x x\, f_{X|Y}(x|y) = \sum\nolimits_x x\, f_X(x) = E[X]$$

مساوی دوم اتفاق افتاد زیرا میدانیم وقتی X و Y مستقل باشند ، داریم:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

قسمت دوم)

$$E[XY|Y=y] = \sum_x xy\, P(X=x|Y=y) = \sum_x xy\, \frac{P(X=x\ \cap Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$\xrightarrow{X\ and\ Y\ are\ independent} E[XY|Y=y] = \sum_x xy\, \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \sum_x xy\, \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)} = y \sum_x \frac{P(X=x)P(Y=y)}{P(Y=y)} = y\, E[X|Y=y]$$

روش دوم:

$$E[XY|Y=y] = E[yX|Y=y] = yE[X|Y=y]$$

قسمت سوم)

$$E[XY] = E[E[XY|Y] = E[YE[X|Y]]$$

سوال ۸ –

قسمت اول)

$$* \ f_X(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \quad ,Var(x) = \int_0^2 (x-1)^2 \, f_X(x)dx = \frac{1}{3}$$

$$** \ P(|X-1| \geq 0.75) \leq \frac{Var(X)}{(0.75)^2}$$

$$\xrightarrow{*,**} P(|X-1| \leq 0.75) = 1 - P(|X-1| \geq 0.75) \ \geq 1 - \frac{Var(X)}{(0.75)^2} = \frac{1/3}{0.5625} \approx 0.4$$

$$absolute \ probability \ is = \frac{1.75 \ - 0.25}{2} = 0.75$$

قسمت دوم) همان طور که در تصویر زیر میبینیم، هرچه k بزرگ تر شود، کران پایین به احتمال واقعی و absolute نزدیک تر میشود و به عبارتی نامساوی دقیق تر میشود. دقت شود خط y=x همان احتمال واقعی است.