سوال اول –

قسمت الف) اگر مجموع هر دو فرآیند پواسن مفروض را فرآیند W بنامیم:

$$p_W(w) = P(W = w) = \sum_{i=0}^{w} P(X = i \,\&\, Y = w - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{w} P(X = i)P(Y = w - i) = \sum_{i=0}^{w} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{w-i}}{(w-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{w} \frac{w!}{i!\,(w-i)!}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i e^{-\lambda_2}\lambda_2^{w-i}}{w!} = \sum_{i=0}^{w} \binom{w}{i}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i e^{-\lambda_2}\lambda_2^{w-i}}{w!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{w!}\sum_{i=0}^{w} \binom{w}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{w-i} = \frac{e^{-\lambda}}{w!}(\lambda_1 + \lambda_2)^w = \frac{e^{-\lambda}\lambda^w}{w!} \rightarrow poisson$$

قسمت ب) از آنجا که فرآیند های $\{N_1(t); t > 0\}$ و $\{N_2(t); t > 0\}$ طبق گفته سوال فرآیند پواسن هستند، لذا خواص SIP و IIP را دارند و طبق کلاس درس میدانیم که مجموع آن ها یعنی $\{N(t); t > 0\}$ نیز این خواص را دارد.حال باز طبق کلاس درس میدانیم که:

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) = 0\right] \approx 1 - \lambda\delta + o(\delta)$$

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) = 1\right] \approx \lambda\delta + o(\delta)$$

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) \geq 2\right] \approx o(\delta)$$

لذا داریم:

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) = 0\right] = P\left[\widetilde{N}_1(t, t + \delta) = 0\right]P\left[\widetilde{N}_2(t, t + \delta) = 0\right]$$

$$= (1 - \lambda_1\delta)(1 - \lambda_2\delta) \approx 1 - \lambda\delta$$

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) = 1\right] = P\left[\widetilde{N}_1(t, t + \delta) = 1\right]P\left[\widetilde{N}_2(t, t + \delta) = 1\right]$$

$$= (\lambda_1\delta)(\lambda_2\delta) = \lambda\delta$$

$$P\left[\widetilde{N}(t, t + \delta) \geq 2\right] = P\left[\widetilde{N}_1(t, t + \delta) \geq 2\right]P\left[\widetilde{N}_2(t, t + \delta) \geq 2\right]$$

$$= o(\delta)o(\delta) = 0$$

لذا میبینیم که فرآیند $\{N(t); t > 0\}$ نیز یک فرآیند پواسن است.

سوال دوم –

قسمت الف) صورت سوال، از ما خواسته امید ریاضی X_1 را محاسبه کنیم. یعنی میانگین یک توزیع نمایی با نرخ ۲ که همان فاصله از زمان صفر(یعنی باز شدن بوفه) تا زمان اولین ورود.میدانیم که میانگین یک توزیع نمایی با نرخ ۲ برابر است با ½ لذا میانگین زمان اولین ورود به بوفه نیز برابر ½ دقیقه یعنی ۳۰ ثانیه است.

قسمت ب)وقتی میگوییم میخواهیم در ۱ دقیقه اول یک ورود داشته باشیم به شرط آنکه در ۵ دقیقه اول یک ورود داشته باشیم یعنی :

$$P[N(5) = 1|N(1) = 1]$$

طبق رابطه احتمال شرطی میدانیم که:

$$P[N(1) = 1|N(5) = 1] = \frac{P[N(1) = 1, N(5) = 1\ ]}{P[N(5) = 1]}$$

$$= \frac{P[N(1) = 1\ , \widetilde{N}(1,5) = 0]}{P[N(5) = 1]}$$

حال طبق خاصیت *SIP* و *IIP* داریم:

$$\frac{P[N(1) = 1\ , \widetilde{N}(1,5) = 0]}{P[N(5) = 1]} = \frac{P[N(1) = 1]P[N(4) = 0]}{P[N(5) = 1]}$$

لذا با توجه به رابطه احتمال یک توزیع پواسن داریم:

$$\frac{P[N(1) = 1]P[N(4) = 0]}{P[N(5) = 1]} = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda} * \lambda^0 e^{-4\lambda}}{5\lambda^1 e^{-5\lambda}} = 1/5$$

قسمت ج) میدانیم که احتمال اینکه در ۵ دقیقه اول، ۳ ورود داشته باشیم یعنی $P_{N(5)}(3)$ باید محاسبه شود. طبق رابطه احتمال توزیع پواسن که در کلاس درس مطرح شد، داریم:

$$P_{N(5)}(3) = \frac{(2 * 5)^3 e^{-(2*5)}}{3!} = \frac{1000e^{-10}}{6}$$

سوال سوم –

قسمت الف) اگر n زمان دلخواه را نمونه برداری کنیم و با آن زمان ها از فرآیند X(t) نمونه برداری کنیم، خروجی برابر است با:

$$At_1, At_2, \dots, At_n$$

لذا با احتساب نمونه برداری هایمان، داریم:

$$X(t) = f(At_1, At_2, \dots, At_n) = f(At_1) * f(At_2|At_1) * \dots * f(At_n|At_{n-1})$$

حال میدانیم که توزیع ترم اول، توزیعی گاوسی است و توزیع های شرطی در ترم های بعد، به صورت عدد اسکالر در می آیند.لذا کل ضرب های زنجیره ای بالا توزیع گاوسی دارند.لذا فرآیند *x(t)* هم توزیع گاوسی دارد.

قسمت ب)

$$\mu = E[X(t)] = E[At] = E[A]t = 0$$

$$Auto - covariance = E[(X(t_1) - \mu)(X(t_2) - \mu)] = E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$= E[A^2]t_1t_2 = t_1t_2$$

سوال چهارم –

قسمت الف) توجه شود که $\{S_n \leq t\}$ یعنی ورود n ام قبل از زمان t رخ داده است(مثلا زمان τ) یعنی تعداد ورود در زمان τ برابر است با n یعنی $N(\tau) = n$. پس قطعا در زمان t که بزرگ تر از τ است، تعداد ورود بزرگ تر مساوی n است یعنی $\{N(\tau) \geq n\}$. از طرف دیگر با داشتن متغیر m به شرطی که m>n باشد، از $\{N(t) = m\}$ که یعنی تا لحظه t ما m ورود داشتیم، نتیجه میشود که ورود m ام قبل یا مساوی زمان t رخ داده است یعنی $\{S_m \leq t\}$ است.لذا قطعا ورود n ام که طبق شرط کوچک تر از m بود، قبل تر رخ داده است و شرط $\{S_n \leq t\}$ برقرار است.بخاطر معادل بودن دو طرفه، مفروض سوال اثبات شد.

قسمت ب) میدانیم که(طبق کلاس درس):

$$f_{S_1S_2}(s_1s_2) = \lambda^2 e^{-\lambda s_2}$$

حال اثبات را به روش استقرا جلو میبریم. فرض میکنیم رابطه مفروض در سوال برای n صحیح است. برای n+1 داریم:

$$f_{S_1S_2\dots S_{n+1}}(s_1,s_2,\dots,s_{n+1}) = f_{S_1S_2\dots S_n}(s_1,s_2,\dots,s_n) f_{S_{n+1}|S_1S_2\dots S_n}(s_{n+1}|s_1,s_2,\dots,s_n)$$
$$= \lambda^n e^{-\lambda s_n} f_{S_{n+1}|S_1S_2\dots S_n}(s_{n+1}|s_1,s_2,\dots,s_n) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}}$$

آخرین مساوی به این دلیل برقرار شد که $X_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ و اینکه X_{n+1} از S_i ها به شرط **i<n+1** مستقل است لذا:

$$f_{S_{n+1}|S_1S_2\dots S_n}(s_{n+1}|s_1,s_2,\dots,s_n) = \lambda e^{-\lambda(s_{n+1}-s_n)}$$

حال دیدیم که برای ***n+1*** هم همان رابطه ای که در صورت سوال مفروض بود و ما فرض کردیم صادق است، برقرار است. لذا مفروض سوال نیز برقرار است و ثابت شد.

قسمت ج) این سوال توزیع احتمال توام به صورت شرطی را از ما میخواهد.با توجه به چیزی که در قسمت ب بدست آوردیم و توزیع احتمال حاشیه ای، داریم:

$$f_{S_1,\dots,S_{n-1}|S_n}(s_1,\dots,s_{n-1}|s_n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda s_n}}{\frac{\lambda^n s_n^{n-1} e^{-\lambda s_n}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{s_n^{n-1}}$$

سوال پنجم – با توجه به اینکه تعداد مسافران هر اتوبوس مستقل از اتوبوس دیگر است، میانگین یک توزیع احتمال گسسته برابر است با:

$$\mu = E[X] = \sum_{i=1}^{3} E[x_i] = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 10 * 0.6 + 20 * 0.2 + 30 * 0.2 = 16$$

حال واریانس را محاسبه میکنیم:

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$
$$= (10-16)^2 * 0.6 + (20-16)^2 * 0.2 + (30-16)^2 * 0.2$$
$$= 21.6 + 3.2 + 39.2 = 64$$

لذا انحراف استاندارد برابر است با:

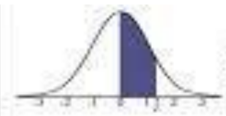
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{64} = 8$$

وقتی میگوییم نرخ خروج اتوبوس از ترمینال هر ساعت ۱۰ اتوبوس است و سوال از ما میخواهد احتمال اینکه طی ۷۲ ساعت، ۱۰۵۰۰ مسافر سوار اتوبوس ها شوند، لذا سوال از ما میپرسد با چه احتمالی در ۱۰*۷۲=۷۲۰ اتوبوس، بیش از

۱۰۵۰۰ مسافر سوار میشوند.یعنی میانگین با چه احتمالی در هر اتوبوس، $\frac{10500}{720} = \frac{175}{12}$ مسافر سوار میشوند.اگر تعداد مسافران حساب شده را x بنامیم و از میانگین و انحراف استاندارد محاسبه شده برای محاسبه ***z-score*** استفاده کنیم، داریم:

$$z - score = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\frac{175}{12} - 16}{8} = -\frac{17}{96} \approx -0.18$$

اگر از جدول زیر برای پیدا کردن مقدار متناظر با ***z-score*** در توزیع نرمال استفاده کنیم، عدد بدست آمده برابر است با ***0.0714***(کیفیت تصویر در اینجا بد نمایش داده میشود و شما میتوانید با یک سرچ ساده، تصویری با کیفیت خوب را ببینید) :



STANDARD NORMAL TABLE (Z)

Entries in the table give the area under the curve between the mean and z standard deviations above the mean. For example, for z = 1.25 the area under the curve between the mean (0) and z is 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

چون مقدار ***z-score*** منفی است لذا احتمال اینکه تعداد مسافر در هر اتوبوس بزرگ تر از ***175/12*** باشد، برابر است با:

$$P\left[x > \frac{175}{12}\right] \approx 0.5 + 0.0714 = 0.5714$$

البته این مقدار تقریبی است و اگر مقدار دقیق را بخواهیم، باید انتگرالی از منفی بی نهایت تا ***z-score*** را با ضریبی مشخص محاسبه کنیم که بخاطر خلاصه سازی پاسخ، دیگر آن را محاسبه نمیکنیم و به جدول و احتمال تقریبی بسنده میکنیم.

سوال ششم –

قسمت الف) در ابتدا به مفاهیم notation ها میپردازیم. میدانیم وقتی میگوییم N(t) یعنی تعداد ورود در بازه صفر تا t . حال N(t+s) یعنی تعداد ورود در بازه صفر تا t+s . بازه صفر تا t+s از دو زیر بازه صفر تا t و t تا t+s تشکیل شده است.پس میتوانیم بنویسیم:

$$N(t+s) = N(t) + \tilde{N}(t, t+s)$$

از مفاهیم و تعاریف فرآیند تصادفی پواسن میدانیم که از لحاظ آماری، تعداد ورود در یک بازه با تعداد ورود در یک بازه دیگر مستقل است به شرطی که بازه ها مستقل باشند و اشتراکی نداشته باشند. لذا میتوانیم بگوییم $\tilde{N}(t, t+s)$ از $N(t)$ مستقل است.از قضیه *SIP* میدانیم که توزیع ورود ها در $\tilde{N}(t, t+s)$ با توزیع ورود ها $N(s)$ برابر است، بنابراین داریم:

$$P_{N(t)N(t,t+s)}(k,l) = P[N(t)=k].P\left[\tilde{N}(t,t+s) = l-k\right]$$

$$= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} * \frac{(\lambda s)^{l-k} e^{-\lambda s}}{(l-k)!}$$

رابطه بالا یعنی احتمال اینکه L ورود در بازه صفر تا t+s رخ دهد و با فرض اتفاق افتادن این رویداد، احتمال اینکه k ورود از این L ورود در بازه صفر تا t رخ دهد. اولین term که همان تابع احتمال یک متغیر تصادفی پواسن است و دومین term یک متغیر تصادفی شرطی دوجمله ای است لذا داریم:

$$P_{N(t)N(t,t+s)}(k,l) = \frac{\left(\lambda(t+s)\right)^k e^{-\lambda(t+s)}}{l!} * \binom{l}{k} \left(\frac{t}{t+s}\right)^k \left(\frac{s}{t+s}\right)^{l-k}$$

قسمت ب) با توجه به تقسیم بازه قسمت قبل داریم:

$$E[N(t)N(t+s)] = E\left[N(t)\left(N(t) + \tilde{N}(t,t+s)\right)\right]$$

$$= E\left[N^2(t) + N(t)\tilde{N}(t,t+s)\right]$$

$$= E[N^2(t)] + E[N(t)]E[N(s)]$$

حال برای محاسبه term اول باید ممان مرتبه دو بدست آوریم. میدانیم امید ریاضی(میانگین) یک متغیر تصادفی پواسن با تابع چگالی احتمال $\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$ برابر است با λt و واریانس آن نیز برابر با همین مقدار است(در کلاس درس استاد محاسبه کردند). لذا ممان مرتبه ۲ آن برابر است با $\lambda t + (\lambda t)^2$. هم چنین میانگین یک متغیر تصادفی پواسن با تابع چگالی احتمال $\frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!}$ برابر است با λs . لذا با تجمیع موارد بالا داریم:

$$E[N(t)N(t+s)] = \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda t \lambda s$$

قسمت ج) در این قسمت بازه ها اشتراک دارند و مستقل نیستند. لذا برای حل آن باید بازه هارا به زیربازه ها بشکنیم لذا داریم:

$$\tilde{N}(t_1, t_3) = \tilde{N}(t_1, t_2) + \tilde{N}(t_2, t_3)\ , \tilde{N}(t_2, t_4) = \tilde{N}(t_2, t_3) + \tilde{N}(t_3, t_4)$$

حال محاسبه میکنیم:

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{N}(t_1, t_3)\tilde{N}(t_2, t_4)\right] &= E\left[\left(\tilde{N}(t_1, t_2) + \tilde{N}(t_2, t_3)\right)\tilde{N}(t_2, t_4)\right] \\ &= E\left[\tilde{N}(t_1, t_2)\tilde{N}(t_2, t_4)\right] + E\left[\tilde{N}^2(t_2, t_3)\right] + E\left[\tilde{N}(t_2, t_3)\tilde{N}(t_3, t_4)\right] \\ &= \lambda^2(t_2 - t_1)(t_4 - t_2) + \lambda^2(t_3 - t_2)^2 + \lambda(t_3 - t_2) + \lambda^2(t_3 - t_2)(t_4 - t_3) \\ &= \lambda^2(t_3 - t_1)(t_4 - t_2) + \lambda(t_3 - t_2) \end{aligned}$$

سوال هفتم – در این سوال در حقیقت از ما خواسته شده در ابتدا تصور کنیم ۵ شمع داریم که همزمان روشن میشوند. سپس طبیعتا یکی از آن ها خاموش شده و بخاطر خاصیت بدون حافظه بودن توزیع نمایی، حال انگار همه چیز از اول با ۴ شمع شروع شده. همینطور که ادامه دهیم، با هر خاموش شدن یک شمع، مسئله ای جدید با یک شمع کمتر داریم.اگر تمام متغیر های تصادفی این مسئله هارا به عنوان یک توزیع نمایی در نظر بگیریم، وقتی ۵ شمع داریم، نرخ توزیع نمایی 5λ است و وقتی ۴ شمع داریم، نرخ توزیع آن 4λ است و وقتی ۳ شمع داریم به طور مشابه نرخ 3λ است.مسئله را جلوتر نمیبریم زیرا سوال از ما خواسته تا خاموش شدن سومین شمع را در نظر بگیریم.

مسئله قابل محاسبه، در حقیقت در نظر گرفتن جمع ۳ زیر مسئله است(اول ۵ شمع سپس ۴ شمع و در آخر ۳ شمع).میدانیم که امید ریاضی یک توزیع نمایی با نرخ لاندا برابر با $\frac{1}{\lambda}$ و واریانس آن برابر با $\frac{1}{\lambda^2}$ است لذا داریم:

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = \frac{1}{5\lambda} + \frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{3\lambda} \approx 0.78\lambda$$

$$\begin{aligned} Var[X_1 + X_2 + X_3] &= Var[X_1] + Var[X_2] + Var[X_3] \\ &= \frac{1}{(5\lambda)^2} + \frac{1}{(4\lambda)^2} + \frac{1}{(3\lambda)^2} \approx 0.21\lambda^2 \end{aligned}$$