



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۴۰۰

CE-40695

فرایندهای تصادفی : تمرین دوم

مدرس: مهدی جعفری

۱ سوال اول

برای یک سیستم $H(\omega)$ با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ نشان دهید که:
الف) اگر $x(t)$ یک فرایند WSS باشد و $R_{xx}(\tau) = e^{j\alpha\tau}$ در آن صورت :

$$R_{yx}(\tau) = e^{j\alpha\tau} H(\alpha) \quad R_{yy}(\tau) = e^{j\alpha\tau} |H(\alpha)|^2 \quad (۱)$$

ب) اگر $R_{xx}(t_1, t_2) = e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)}$ باشد، در آن صورت :

$$R_{yx}(t_1, t_2) = e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha) \quad R_{yy}(t_1, t_2) = e^{j(\alpha t_1 - \beta t_2)} H(\alpha) H^*(\beta) \quad (۲)$$

۲ سوال دوم

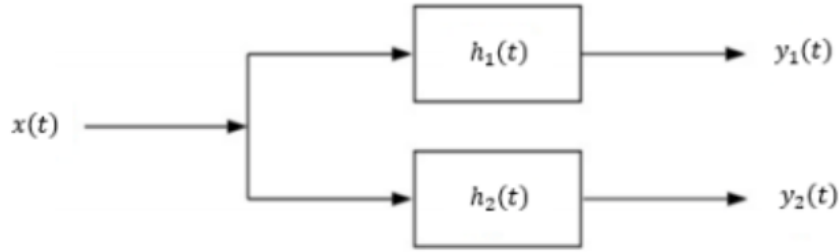
معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 26 + v(t) \quad R_{vv}(\tau) = 10\delta(\tau) \quad (۳)$$

الف) مقدار $E[y(t)]$, $E[y(t)^2]$, $R_{yy}(t)$ را به دست آورید.
ب) با فرض نرمال بودن $v(t)$ مقدار $P(y(t) \leq 3)$ را به دست آورید.

۳ سوال سوم

$R(\tau)$ را برای حالت‌های زیر بدست آورید:



شکل ۱: تصویر سوال چهارم

الف) $S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$

ب) $S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4}$

پ) $S(\omega) = \frac{1}{(4+\omega^2)^2}$

۴ سوال چهارم

در سیستم مشخص شده در شکل ؟؟، $x(t)$ را فرایندی WSS با تابع خودهمبستگی $R_{xx}(\tau)$ و میانگین صفر در نظر بگیرید. مقادیر خواسته شده در ادامه را بر حسب $R_{xx}(\tau)$ و پاسخ ضربه دو سیستم $h_1(t), h_2(t)$ بدست آورید:

الف) کواریانس توام فرایندهای خروجی $C_{y_1 y_2}(\tau)$

ب) تابع چگالی توان توام $S_{y_1 y_2}(\omega)$

۵ سوال پنجم

دو سیستم را در نظر بگیرید که معادلات دیفرانسیل زیر بین سیگنال‌های ورودی و خروجی آن برقرار است. فرایند ورودی $x(t)$ را یک نویز گاوسی سفید با میانگین صفر در نظر بگیرید که تابع همبستگی آن به صورت $R_x(\tau) = 2b\delta(\tau)$ می‌باشد. (a, b اعدادی ثابت هستند.)

$$a \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) = x(t) \quad (۴)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t)u(t) \quad (۵)$$

الف) مقدار تابع همبستگی فرایند خروجی در لحظه صفر یعنی $R_y(0)$ را بدست آورید.
ب) آیا فرایند $y(t)$ یک فرایند WSS است؟

۶ سوال ششم

الف) دو فرآیند $x_1(t)$ و $x_2(t)$ mean_ergodic هستند و میانگین آنها به ترتیب برابر با η_1 و η_2 هستند در صورتی که داشته باشیم:

$$x(t) = x_1(t) + cX_2(t) \quad (۶)$$

به طوری که c یک متغیر مستقل با مقادیر ۰ و ۱ با احتمال برابر $\frac{1}{2}$ باشد. آیا mean_ergodic $x(t)$ است؟
ب) فرآیند زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + c \quad (۷)$$

که در آن a و b دو متغیر تصادفی uncorrelated هستند که میانگین آنها برابر با صفر و واریانسی یکسان دارند. آیا mean_ergodic $x(t)$ است؟ چرا؟

پ) در صورتی که A و ω اعدادی ثابت و ϕ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین $[-\pi, \pi]$ باشد آیا فرآیند زیر mean_ergodic است؟ چرا؟

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (۸)$$

موفق باشید