هو الحق

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

CE-40695 بهار ۱۴۰۰

فرآیندهای تصادفی: تمرین پنجم

مدرس: مهدی جعفری

سؤال ۱ فرض کنید $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0,\infty)}(x), \theta > 0$$

که در آن $I_{(0,\infty)}(x)$ تابع مشخصه (Indicator function) مجموعه $(0,\infty)$ است.یک آماره کافی یک‌بعدی برای این مدل بیابید.

سؤال ۲ تابع چگالی احتمال توزیع Pareto بصورت زیر است:

$$f(x|x_0,\theta) = \theta x_0^\theta x^{-\theta-1}, x \geq x_0, \theta > 1$$

فرض کنید $x_0 > 0$ و یک نمونه n تایی i.i.d. از این توزیع به ما داده شده. تخمین روش گشتاورها از پارامتر θ را بدست آورید.

سؤال ۳ تابع چگالی احتمال توزیع Double exponential با پارامتر $\tau > 0$ بصورت زیر است:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\tau} e^{-|y|/\tau}, y \in \mathbb{R}$$

با در نظر گرفتن $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ به عنوان نمونه تصادفی از این توزیع و پارامتر ناشناخته‌ی $\tau > 0$ میانگین مربعات خطای (MSE) تخمین‌گر $\hat{\tau} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |Y_i|$ را محاسبه کنید.

سؤال ۴ فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌های تصادفی از یک توزیع با تابع چگالی احتمال به شکل زیر هستند:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{\theta - x}, x > \theta \\ 0, x \leq \theta \end{cases}$$

پارامتر θ هیچ محدودیتی ندارد.

۱. نشان دهید که تخمین بیشینه درستنمایی برای θ وجود ندارد.

۲. نحوه‌ی نوشتن تابع چگالی احتمال را برای همین توزیع طوری تغییر دهید که تخمین بیشینه درستنمایی برای آن وجود داشته باشد سپس تخمین را به دست آورید.

سؤال ۵ تابع جرم احتمال متغیر تصادفی y به شکل زیر است :

$$f(y|\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1-\theta)^{n-y}$$

$$y = 1, 2, ..., n$$

فرض کنید که تابع چگالی احتمال پیشین پارامتر θ به شکل زیر تعریف شود:

$$h(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$
$$0 < \theta < 1$$

تابع چگالی احتمال پسین پارامتر θ را به شرط $Y = y$ یعنی $f(\theta|y)$ را به دست آورید.

سؤال ۶ (بخش عملی) فرض کنید $x_1, ..., x_n$ ،n متغیر تصادفی iid نمونه‌برداری شده از توزیع پواسون با پارامتر λ باشند. در این سؤال می‌خواهیم این پارامتر را بر اساس داده‌های مشاهده شده، تخمین بزنیم. ابتدا رابطه‌ی درست‌نمایی بیشینه را بنوسید، سپس با استفاده از زبان پایتون برنامه‌ای به منظور رسم تابع درست‌نمایی بیشینه برای مجموعه دادگان زیر بنویسید. (برای تولید داده‌ها از عبارت numpy.random.poisson(lam=lam, size=n) استفاده کنید و در ابتدای برنامه خط np.random.seed(20) را اضافه نمایید .)

۱. $n = 10$ ،$lam = 5$

۲. $n = 100$ ،$lam = 5$

۳. $n = 3000$ ،$lam = 5$

۴. $n = 5000$ ،$lam = 5$

حال با توجه به نمودار به دست‌آمده از ۳ قسمت قبل مقدار λ_{MLE} را از روی نمودار تخمین بزنید. سپس در ادامه‌ی مسأله فرض کنید که توزیع $gamma(2, 0.5)$ به عنوان توزیع پیشین λ در نظر گرفته می‌شود.

۱. مجموعه‌ی داده‌ها در چهار قسمت قبل را در نظر بگیرید و نمودار بیشینه‌گر احتمال پسین را رسم کنید.

۲. با توجه به نمودارهای به دست آمده مقدار λ_{MAP} را از روی نمودار تخمین بزنید.

۳. تخمین MLE, MAP را برای بخش‌های گذشته مقایسه کنید و خلاصه‌ی تفاوت‌ها را شرح دهید.

۴. ارتباط بین این دو تخمین را زمانی که تعداد نمونه‌ها به سمت بی‌نهایت می‌رود، شرح دهید.

نکات

- در این تمرین و سایر تمرین‌های درس، با هرگونه تقلب شدیداً برخورد خواهد شد.
- در صورت داشتن هرگونه سؤال از طریق quera اقدام کنید.
- موعد تحویل این تمرین تا روز یکشنبه ۳۰ ام خرداد می‌باشد.
- تأخیر به صورت خطی اعمال می‌شود و تا ۴ روز پس از موعد تمرین می‌توانید پاسخ‌های خود را ارسال کنید.

موفق باشید