



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۴۰۰

CE-40695

## فرآیندهای تصادفی: تمرین اول

مدرس: مهدی جعفری

سؤال ۱ فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع احتمال مشترک زیر باشند.

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y(1+y) & 0 \leq x \leq 3 \text{ and } 0 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

۱. مقدار  $c$  را بیابید.

۲. مقدار احتمال  $P(1 \leq X \leq 2, 0 \leq Y \leq 1)$  را بیابید.

۳. تابع  $cdf$  مشترک  $X$  و  $Y$  را به ازای  $a$  و  $b$  بین صفر تا ۳ بیابید.

۴. تابع  $cdf$  حاشیه‌ای  $F_X(a)$  را برای  $a$  بین صفر و ۱ بیابید.

۵. تابع  $pdf$  حاشیه‌ای  $f_X(x)$  را مستقیماً بر اساس رابطه‌ی  $f(x, y)$  بیابید و سپس بررسی کنید آیا با مشتق  $F_X(x)$  برابر است یا خیر.

۶. آیا  $X$  و  $Y$  مستقل هستند؟

سؤال ۲ فرض کنید متغیرهای پیوسته‌ی تصادفی  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  از یکدیگر مستقل بوده و توزیع یکسانی داشته باشند. تابع چگالی احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی زیر را پیدا کنید.

$$Y = \max[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n] \quad 1.$$

$$Y = \min[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n] \quad 2.$$

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad 3.$$

سؤال ۳ متغیرهای تصادفی  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  را به صورت iid با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  در نظر بگیرید. مقادیر  $S_n$  و  $Y_n$  را به ترتیب به صورت  $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{S_{2n}}{\sigma\sqrt{2n}}$  و  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$  تعریف می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$  را بیابید.

سؤال ۴ فرض کنید تعدادی اتوبوس برای رسیدن به ایستگاه اتوبوس در ساعت ۱۲ ظهر برنامه‌ریزی شده‌اند اما همواره با  $X$  دقیقه تأخیر می‌رسند.  $X$  یک متغیر تصادفی نمایی است که تابع چگالی آن به صورت  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  می‌باشد. همچنین فرض کنید شما دقیقاً رأس ساعت ۱۲ به ایستگاه می‌رسید.

۱. احتمال آن که برای رسیدن اتوبوس بیشتر از ۵ دقیقه منتظر بمانید را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید تاکنون ۱۰ دقیقه منتظر مانده‌اید، حال احتمال آن که مجبور باشید ۵ دقیقه‌ی دیگر یا بیشتر منتظر بمانید را محاسبه کنید.

سؤال ۵ متغیر تصادفی  $X$  را با تابع چگالی  $f = e^{-2|x|}$  در نظر بگیرید. برای هر کدام از متغیرهای تصادفی ذکر شده تابع چگالی را بیابید.

$$Y = \begin{cases} |X| & |X| \leq 1 \\ 1 & |X| \geq 1 \end{cases} \quad ۱.$$

$$Z = X^2 \quad ۲.$$

سؤال ۶ فرض کنید که  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع هندسی و احتمال موفقیت  $p$  باشد.

۱. احتمال اینکه نتیجه‌ی اولین اجرای آزمایش موفق نباشد چقدر است؟  $(P(X > 1))$

۲. مقدار  $P(X \leq k)$  را به دست آورید.

۳. احتمال اینکه حداقل در  $k$  آزمایش اول به موفقیت نرسد چقدر است؟  $(P(X > k))$

۴. نشان دهید که عبارت زیر در این آزمایش برقرار است و آن را تفسیر کنید.

$$P(X = r + k | X > k) = P(X = r)$$

سؤال ۷ عبارات زیر را اثبات کنید:

۱. با فرض مستقل بودن  $X$  و  $Y$   $E(X|Y = y) = E(X)$

۲.  $E(XY|Y = y) = yE(X|Y = y)$

۳.  $E(XY) = E(YE(X|Y))$

سؤال ۸  $X$  را یک متغیر تصادفی یکنواخت در بازه‌ی  $0 \leq x \leq 2$  در نظر بگیرید.

۱. با استفاده از نامساوی چیشف یک کران پایین برای  $P(|X - 1| \leq 0.75)$  به دست آورید و با مقدار دقیق این احتمال مقایسه کنید.

۲.  $P(|X - \mu_X| \leq k)$  را به شکل تابعی از  $k$  رسم کنید و آن را با کران به دست آمده در نامساوی چیشف مقایسه کنید و توضیح دهید که با افزایش  $k$  کران چه تغییری می‌کند.

نکات

- در این تمرین و سایر تمرین‌های درس، با هرگونه تقلب شدیداً برخورد خواهد شد.
- در صورت داشتن هرگونه سؤال از طریق quera اقدام کنید.
- موعد تحویل این تمرین تا روز ۳ شنبه ۳۱ ام فروردین می‌باشد.
- تأخیر به صورت خطی اعمال می‌شود و تا ۴ روز پس از موعد تمرین می‌توانید پاسخ‌های خود را ارسال کنید.

موفق باشید