



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۴۰۰

CE-40695

فرایندهای تصادفی : تمرین سوم

مدرس: مهدی جعفری

۱ سوال اول

الف) اگر $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ و $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ و X و Y از هم مستقل باشند، نشان دهید که $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

ب) اگر $N_1(t) : t \geq 0$ و $N_2(t) : t \geq 0$ دو فرایند مستقل پواسون با نرخ λ_1 و λ_2 باشند، نشان دهید که $N_1(t) + N_2(t) : t \geq 0$ یک فرایند پواسون با نرخ $\lambda_1 + \lambda_2$ است.

۲ سوال دوم

نرخ ورود دانشجویان به بوفه دانشگاه شریف از یک فرایند پواسون با نرخ دو مشتری در دقیقه پیروی می کند.

الف) به صورت متوسط، چقدر طول میکشد تا بعد از باز شدن بوفه، اولین دانشجو وارد بوفه شود؟

ب) اگر در پنج دقیقه اول شروع به کار بوفه، تنها یک دانشجو وارد آن شده باشد، احتمال آن که این دانشجو در دقیقه اول وارد شده باشد چقدر است؟

ج) چقدر احتمال دارد که در پنج دقیقه شروع به کار بوفه، دقیقاً سه دانشجو وارد آن شده باشند؟

۳ سوال سوم

اگر برای فرایند $X(t)$ داشته باشیم: $X(t) = At, t \in R, A \sim N(0, 1)$

الف) نشان دهید که $X(t)$ یک فرایند گاوسی است.

ب) مقدار امید ریاضی و اتو کوواریانس این فرایند را به دست آورید.

۴ سوال چهارم

فرایند تصادفی ورود را دنباله ای از متغیرهای تصادفی صعودی به صورت $0 < S_1 < S_2 < \dots < S_n$ تعریف میکنیم که هر S_i زمان وقوع رخداد i ام است. این فرایند را میتوان به دو شیوه دیگر نمایش داد: ۱- دنباله متغیرهای تصادفی X_i که فاصله زمانی میان رخداد i و $i - 1$ است ۲- متغیر $N(t)$ که برابر تعداد رخدادها در بازه زمانی $[0, t]$ است.

الف) نشان دهید که $P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n)$
 ب) فرض کنید X_1, X_2, \dots متغیرهای تصادفی iid با تابع چگالی $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ هستند و برای $n \geq 1$ داریم
 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ نشان دهید که برای $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$ داریم:

$$f_{S_1, S_2, \dots, S_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n)$$

ج) برای یک فرایند پواسون با نرخ λ مقدار $Pr(S_1, S_2, \dots, S_{n-1} | S_n = t)$ را به دست آورید.

۵ سوال پنجم

در ترمینال جنوب، اتوبوس ها با نرخ ۱۰ اتوبوس بر ساعت از ترمینال خارج میشوند و به سمت شهر مقصد میروند. تعداد مسافران هر اتوبوس مستقل از دیگر اتوبوس ها دارای توزیع زیر است:

تعداد مسافران	احتمال
۱۰	۰.۶
۲۰	۰.۲
۳۰	۰.۲

با چه احتمالی در طی ۷۲ ساعت، بیش از ۱۰۵۰۰ مسافر به سمت شهر خود حرکت میکند؟ (راهنمایی: از تقریب نرمال استفاده کنید.)

۶ سوال ششم

فرض کنید $N(t); t > 0$ یک فرایند پواسون با نرخ λ است.

الف) تابع چگالی احتمال توام^۱ $N(t)$ و $N(t+s)$ را محاسبه کنید. ($s > 0$)

ب) $E[N(t)N(t+s)]$ ، $s > 0$

ج) اگر $\tilde{N}(t, \tau)$ تعداد ورودها^۲ در بازه $(t, \tau]$ باشد. $E[\tilde{N}(t_1, t_3) \cdot \tilde{N}(t_2, t_4)]$ را محاسبه کنید ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4$).

۷ سوال هفتم

پنج شمع که طول عمر هریک از یک توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می کند را در اختیار داریم. همه ی شمع ها را در زمان $t = 0$ روشن می کنیم. اگر Y را زمانی در نظر بگیریم که طول می کشد تا سومین شمع به طور کامل تمام شود. امید ریاضی و واریانس Y را محاسبه کنید.

موفق باشید

^۱ joint probability mass function

^۲ Arrivals