



دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

بهار ۱۴۰۰

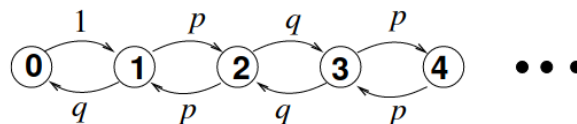
CE-40695

فرایندهای تصادفی : تمرین چهارم

مدرس: مهدی جعفری

۱ سوال اول

فرآیند مارکوف زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱: تصویر سوال اول

الف) آیا فرآیند بالا تحویل‌ناپذیر (irreducible) است؟

ب) آیا فرآیند بالا یک توزیع پایا دارد؟

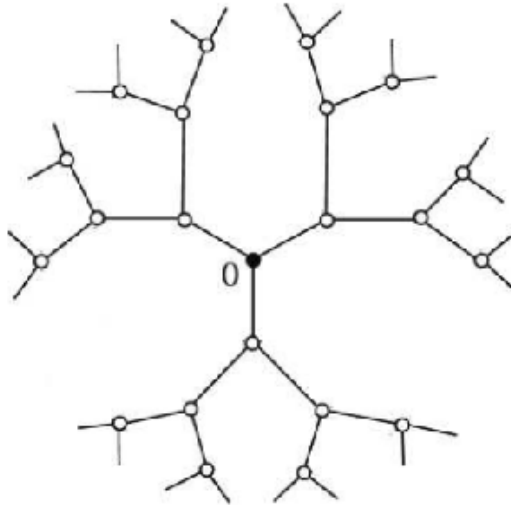
پ) دوره تناوب $d(i)$ هر گام را بیابید.

ت) کدام گام‌ها گذرا و کدام گام‌ها برگشتی هستند.

۲ سوال دوم

یک قدم زدن تصادفی بر روی گراف بی‌نهایت زیر را در نظر بگیرید. در این گراف هر گام سه همسایه دارد و احتمال انتقال به هر کدام $1/3$ است.

الف) گام ۰ را گام مرکزی در نظر بگیرید. سپس $D(i)$ را فاصله‌ی گام i به گام ۰ در نظر بگیرید؛ به تعریف دیگر تعداد انتقال‌های مورد نیاز برای رسیدن از گام ۰ به گام i . حال X_n را موقعیت زنجیره در زمان n در نظر بگیرید. با فرض این که فرآیند $Z_n = D(X_n)$ یک فرآیند مارکوف است، احتمالات انتقال - یا همان transition probabilities - را بیابید.



شکل ۲: تصویر سوال دوم

- ب) نشان دهید Z_n گذرا است.
 پ) نشان دهید X_n نیز گذرا است. (راهنمایی: می‌توانید از قسمت قبل استفاده کنید).

۳ سوال سوم

یک قمارباز در یک بازی شرکت می‌کند که در هر دست با احتمال p یک دلار می‌برد و با احتمال $q = 1 - p$ یک دلار می‌بازد. مساله پاکبختی قمارباز (the gambler ruin problem) به این شکل تعریف می‌شود که با شروع از x دلار پول احتمال بردن b دلار قبل از باختن همه‌ی پول چقدر است. در واقع داریم:

$$\phi_x = P_x(S_b < S_0) \quad (۱)$$

- الف) نشان دهید که این مساله را می‌توان به شکل یک مساله‌ی فرآیند مارکوف جذب‌کننده - absorbing - با گام‌های $0, 1, \dots, b$ مدل کرد.
 ب) معادله‌ی تولیدکننده‌ی $\phi(x)$ را با کمک $\phi(x-1)$ و $\phi(x+1)$ بنویسید.
 پ) اگر $p = q = 1/2$ ، نشان دهید:

$$\phi(x) = x/b \quad (۲)$$

ت) اگر $p \neq q$ ، آنگاه نشان دهید:

$$\phi(x) = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p^b) - 1} \quad (۳)$$

۴ سوال چهارم

فردی ۵ چتر دارد که بعضی از آن‌ها در خانه و بعضی از آن‌ها در محل کارش است و در بین خانه و محل کارش در رفت و آمد است. این فرد فقط اگر باران بیاید همراه خودش چتر می‌برد و اگر باران نیاید چتر را در محلی که هست جا می‌گذارد. بعضی مواقع ممکن است همه‌ی چترها در یکی از محل‌ها باشد و خود فرد در آن یکی محل و باران شروع به باریدن کند و این فرد مجبور باشد جابجا شود، در این صورت این فرد خیس خواهد شد.

الف) اگر احتمال آمدن باران p باشد، احتمال این که این فرد خیس شود چقدر است؟
ب) با فرض $p = 0.7$ ، اگر این شخص بخواهد احتمال خیس شدنش کمتر 0.1 باشد چند چتر باید داشته‌باشد؟

۵ سوال پنجم

یک قدم‌زن تصادفی ساده با $p = 0.7$ که از نقطه‌ی صفر شروع به حرکت می‌کند در نظر بگیرید. احتمال این که به نقطه‌ی 2 زودتر از نقطه‌ی -3 برای بار اول برسد چقدر است. همچنین میانگین تعداد گام‌هایی که قدم‌زن به نقطه‌ی 2 یا -3 برسد چقدر است.

۶ سوال ششم

فرض کنید S_n یک قدم‌زن تصادفی ساده با $S_0 = 0$ است. نشان دهید $|S_n|$ نیز یک مارکوف است.

موفق باشید