DATE / / 400109843 SUBJECT : پریا لب

سؤال ① :

الف) برای کاهش bias راهکارهای زیر را می‌توان استفاده کرد

1: انتخاب کردن feature های بیشتر

2: با افزایش تعداد داده ها در training datasets

3: افزایش پیچیدگی مدل

ب) اگر ویژگی های یک مدل Correlated باشه، به این معناست

که این مدل در واقع overfit است که bias زیاد است و داده های

همچنین واریانس نیز بالا است ~~...~~ حذف ویژگی های هم بسته ~~...~~ باعث

باعث می شود که bias کمتر نشوده که این اتفاق ممکن است Variance به

قدر ناچیزی افزایش پیدا کنه که در کل مدل را بهتر می کنه

پ)

- درست ، با ثابت در نظر گرفتن پیچیدگی مدل و با افزایش داده‌ها اثر

نویز را کمتر می کنیم و مدل بهتر می شود.

- نادرست ، ~~اگه پیچیدگی کم است~~ ~~underfit~~ باشه، اگه مدل overfit باشه، افزایش

پیچیدگی ، مدل را بهتر نمی کنه.

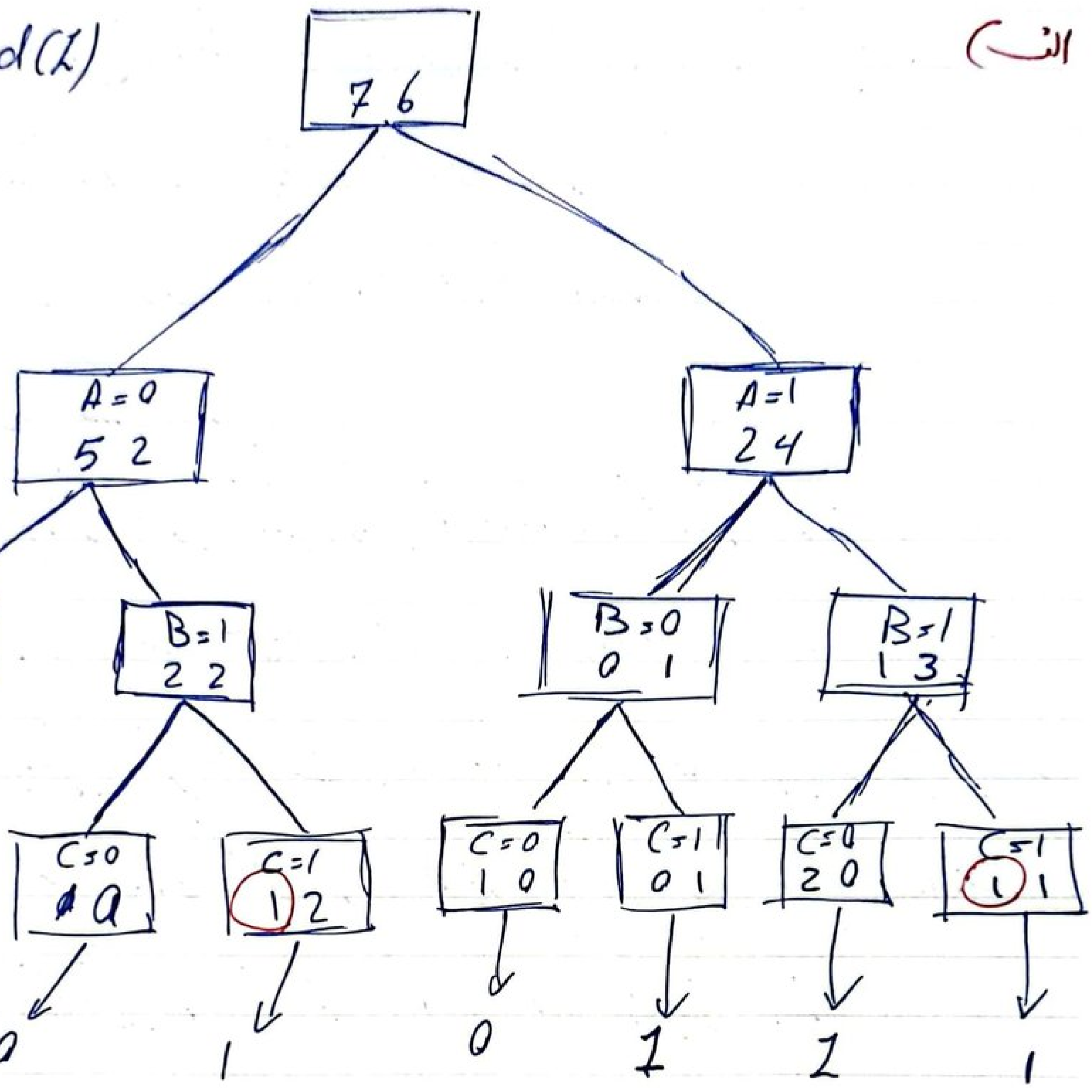
iman NOTEBOOK

سوال ②:

left: bad(0)

right: good(1)

الف)



$$error = \frac{2}{13} = 15{,}38\%$$

ب) حداکثر خطا زمانی اتفاق می‌افتد که بین k کلاس که داریم، نتوانیم تبعیض قائل شویم و برای همه یک حدس واحد بزنیم

در نتیجه

$$error = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$$

سوال 3 :

الف) در Multi-Class regression در واقع از softmax function استفاده می کنیم به صورتی که

$$P(y=j \mid x; w) = \frac{e^{w_j^T x}}{\sum_{i=1}^{K} e^{w_i^T x}} \rightarrow$$ که در آن W یک ماتریس است.

ب) در روش logistic regression در واقع هدف به دست آوردن W است (تمامی w_i ها)

پ) $$L(w_1, \dots, w_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} \ln \{ P(Y=y_i \mid X=x_i) \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln \left\{ \frac{e^{w_{y_i}^T x_i}}{1+\sum_{j=1}^{K-1} e^{w_j^T x_i}} \right\} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ w_{y_i}^T x_i - \ln \left\{ 1+\sum_{j=1}^{K-1} e^{w_j^T x_i} \right\} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_{y_i}^T x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ 1+\sum_{j=1}^{K-1} e^{w_j^T x_i} \right\}$$

ت) حال برای سادگی حل این بخش عبارت [illegible] را تعریف می کنیم که تنها زمانی 1 است که $y_i = k$ باشد و در غیر این صورت برابر با 0 است در نتیجه log likelihood به شکل زیر می شود.

DATE / /   SUBJECT:

$$\cancel{L = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} t_{i,k} w_k^T x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} t_{i,k} \ln\left\{1+\sum_{j=1}^{K-1} e^{w_j^T x_i}\right\}}$$

$$L = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} t_{i,k} w_k^T x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} t_{i,k} \ln\left\{1+\sum_{j=1}^{K-1} e^{w_j^T x_i}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_{w_j} L = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j} x_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} t_{i,k} \times \frac{e^{w_j^T x_i}}{1+\sum_{l=1}^{K-1} e^{w_l^T x_i}} x_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_{w_j} L = \sum_{i=1}^{n} \left\{ t_{i,j} - \frac{e^{w_j^T x_i}}{1+\sum_{l=1}^{K-1} e^{w_l^T x_i}} \right\} x_i$$

ب)

$$h(w_1, \dots, w_{K-1}) = L(w_1, \dots, w_{K-1}) - \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{K-1} w_l^T w_l$$

$$\nabla_{w_k} h = \nabla_{w_k} L - \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{K-1} \nabla_{w_k}(w_l^T w_l) = \nabla_{w_k} L - \lambda w_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_{w_k} h = \sum_{i=1}^{n} \left\{ t_{i,j} - \frac{e^{w_j^T x_i}}{1+\sum_{l=1}^{K-1} e^{w_l^T x_i}} \right\} x_i - \lambda w_k$$

سوال 4)

الف) در واقع هدف در روش مینیمم کردن loss function است که همانند زیر تعریف می‌شود.

$$\text{Loss function: } \frac{1}{2}\|y - Xw\|_2^2$$

$$\text{Loss function: } \frac{1}{2}(y - Xw)^T(y - Xw) = loss$$

$$\nabla_w(loss) = \nabla_w\left\{\frac{1}{2}(y - Xw)^T(y - Xw)\right\} = \nabla_w\left\{\frac{1}{2}(y^T - w^TX^T)(y - Xw)\right\}$$

$$= \nabla_w\left\{y^Ty - y^TXw - w^TX^Ty + w^TX^TXw\right\} \times \frac{1}{2} =$$

$$= -X^Ty + X^TXw$$

$$\nabla_{\hat{w}}(loss) = 0 \rightarrow \hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

حال اگر تنها بر روی یک ویژگی بخواهیم این مدل را آموزش دهیم

انگار که همه x_iها بجز x_j صفر هستند در نتیجه

$$w_j = \frac{x_j^Ty}{x_j^Tx_j}$$

ب) اگر ستون ها ماتریس X متعامد باشند به این معناست که

$x_i^Tx_j = 0 \rightarrow i \neq j$ اگر

پس در واقع ماتریس X^TX یک ماتریس قطری می‌شود که

$$(X^TX)_{ii} = x_i^Tx_i$$

DATE / / SUBJECT :

و طبیعتاً چون که ماتریس X^TX یک ماتریس قطری است

$(X^TX)^{-1}$ نیز قطری است و روی قطر آن ~~X^TX~~

مقادیر به صورت زیر هستند: $(X^TX)^{-1}_{ii} = \frac{1}{x_i^Tx_i}$

و در نتیجه طبق قسمت قبل: $\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$

و داریم که $w_i = \frac{x_i^Ty}{x_i^Tx_i}$ که همان نتیجه گیری قسمت الف)

است.

ب) $X = (1 \quad x$