به نام خدا

بهینه‌سازی محدب ۱ (۲۵۷۵۶)

تمرین شماره ۴

نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۱۴۰۲

زمان تحویل: جمعه ۱۷ آذر

سوالات این تمرین از مسائل مرجع اصلی درس و مسائل تکمیلی آن انتخاب شده‌اند. لطفاً از نسخه قرار داده‌شده در *CW* برای کتاب (*Convex Optimization*) و مسائل تکمیلی (*Convex Optimization Additional Exercises*) استفاده کنید.

۱- مسائل شامل نرم ۱ و بی‌نهایت (سوال ۴.۱۱ کتاب، بخش‌های *b* و *e*)

۲- مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی (سوالات ۴.۱۲ و ۴.۲۰ کتاب)

۳- مساله *QP* مقاوم (سوال ۴.۲۸ کتاب)

۴- مکمل شور و نمایش *LMI* (سوال ۴.۸ مسائل تکمیلی)

۵- بهینه‌سازی توابعی از مقادیر ویژه به فرم *SDP* (سوال ۴.۴۳ کتاب)

۶- فرآیند محدب-مقعر (سوال ۴.۴۴ مسائل تکمیلی، بخش‌های *a* و *b*)

۷- سوال امتیازی: انتخاب نوع *Solver* (سوال ۴.۶ مسائل تکمیلی)

۸- سوال امتیازی: مساله *QCQP* غیر محدب

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ و $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{S}^n$ هستند. به وضوح این مساله غیرمحدب است ولی در این تمرین خواهیم دید که می‌توان آن را به صورت معادل به یک مساله محدب تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

الف) طبق قضیه‌ای در جبرخطی، در صورتی‌که یک ترکیب خطی مثبت معین از دو ماتریس $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ وجود داشته باشد، می‌توان این دو ماتریس را در یک پایه قطری کرد. فرض کنید که چنین شرایطی برقرار باشد. (مثلا کافی است که $\mathbf{A}$ مثبت معین باشد که این حالت خاص را در تمرین اول دیدید.)

بر مبنای تجزیه به مقادیر ویژه، روشی ارائه دهید که بتوان $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ را به صورت همزمان قطری کرد. یعنی داشته باشیم:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T diag(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T diag(\boldsymbol{\beta})\mathbf{P}$$

ب) با جای‌گذاری نسخه قطری‌شده $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ در مساله اولیه و تعریف $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{P}^{-T}\mathbf{b}$ و تغییر متغیر $\mathbf{y} = \mathbf{Px} \odot \mathbf{Px}$ ($\odot$ ضرب درایه به درایه است)، نشان دهید که معادل مساله زیر محدب بوده و پاسخ مساله اولیه را بر حسب پاسخ این مساله بیان کنید.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y}} \quad & \boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{y} - 2|\boldsymbol{\gamma}|^T\sqrt{\boldsymbol{y}} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\beta}^T\mathbf{y} = 0 \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{aligned}$$