Convex-HW1-Theoretical

Friday, October 27, 2023 5:45 PM

Question 1:

الف) نشان دهید که برای ماتریس متقارن A، رابطه زیر برقرار است:

$$\sqrt[n]{\det (\mathbf{A})} \le \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}{n} \le \|\mathbf{A}\|_2$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

نامساوی حسابی - هندسی $\rightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} \Longrightarrow \sqrt[n]{det(A)} \le \frac{tr(A)}{n} \rightarrow$ سمت چپ قضیه

$\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i| \rightarrow$ اثبات در سوال 7

سمت راست قضیه

$$\lambda_i \le \max_j |\lambda_j| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \le n \times \max_j |\lambda_j| \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} \le \max_j |\lambda_j| = \|A\|_2$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{det(A)} \le \frac{tr(A)}{n} \le \|A\|_2$$

ب) در صورتی‌که $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مربعی A باشد، نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \le \|\mathbf{A}\|_F^2$$

و تساوی هنگامی برقرار است که $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ باشد.

برای قسمت ب) ماتریس A را از Schur Decomposition آن استفاده می‌کنیم

Schur Decomposition $\rightarrow A = QUQ^+$

در نظر داشته باشید که Q یک Unitary Matrix است و Q^+، Conjugate Transpose است.

U نیز یک ماتریس بالا مثلثی است.

$$\|A\|_F^2 = tr(A^+A) = tr(QU^+Q^+QUQ^+) = tr(QU^+UQ^+) = tr(Q^+QU^+U) = tr(U^+U)$$

در ادامه اثبات می‌کنیم که درایه‌های روی قطر ماتریس U در واقع λ های ماتریس اصلی هستند:

$$Ax = \lambda x \rightarrow QUQ^+x = \lambda x \rightarrow UQ^+x = \lambda Q^+x \Rightarrow Uy = \lambda y \Rightarrow (U - \lambda I)y = 0$$

با توجه به اینکه U یک ماتریس بالا مثلثی است. $det(U - \lambda I)$ برابر با ضرب اعضای روی قطر اصلی می‌شود، در نتیجه عناصر روی قطر ماتریس U همان λ های ماتریس A می‌باشند

$$tr(U^+U) = \sum_{i,j} |u_{ij}|^2 \ge \sum_i |\lambda_i|^2 \longrightarrow \|A\|_F^2 \ge \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

اثبات حالت تساوی:

قسمت اول) $A^+A = AA^+ \longrightarrow \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

$A^+A = AA^+ \xrightarrow[\text{Decomp.}]{\text{Schur}} QU^+UQ^+ = QUU^+Q^+ \Rightarrow$ حال می‌خواهیم اثبات کنیم که U قطری است.

(توجه کنید که می‌دانیم عناصر روی قطر U همان λ هستند)

$U \in C^{n\times n}, \; U' \in C^{(n-1)\times(n-1)}$ این کار را با استقرا انجام می‌دهیم.

(توجه کنید n تا درایه متناظر روی قطر ها همان ها هستند)

$$U \in C^{n\times n} \quad , \quad U' \in C^{(n-1)\times(n-1)}$$

این کار را با استقرا انجام می‌دهیم.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \quad u_{13} \cdots u_{1n} \\ 0 & U' \end{pmatrix} \Rightarrow U^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & 0 \\ u_{12}^* & \\ \vdots & U'^* \\ u_{1n}^* & \end{pmatrix}$$

$$UU^* = U^*U \Rightarrow |u_{11}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_{1i}|^2 \Rightarrow \forall_{2\leq i\leq n} \; u_{1i} = 0$$

در نتیجه اگر U' قطری باشد U نیز قطری است.

پایه استقرا: $U \in C^{1\times 1}$ ← که بدیهی است. در نتیجه اثبات کردیم که U نیز قطری است که روی قطر λها وجود دارند.

$$\Rightarrow \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$$

$$\|A\|_F^2 = \sum |\lambda_i|^2 \Rightarrow A^+A = AA^+$$ (قسمت دوم)

$$\|A\|_F^2 = tr(U^+U) = \sum |\lambda_i|^2 \Rightarrow$$ U یک ماتریس قطری است $$\Rightarrow U^+U = UU^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow QU^+Q^+QUQ^+ = QUQ^+QU^+Q^+ \Rightarrow A^+A = AA^+$$

Question 2)

دستگاه معادلات $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ یک ماتریس کشیده افقی $(m < n)$ با رتبه کامل سطری است. بردار $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^T(\mathbf{AA}^T)^{-1}\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید. مشخصاً این بردار در معادله $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ صدق می‌کند و لذا یک جواب این دستگاه است. در این تمرین قصد داریم با استفاده از تعامد، نشان دهیم که $\mathbf{x}^*$ در میان جواب‌های دستگاه کمترین نُرم اقلیدسی را دارد.

الف) نشان دهید که برای هر $\mathbf{x}$ دلخواه از مجموعه جواب دستگاه، $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \in N(\mathbf{A})$ است.

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ Ax^* = b \end{array}\right\} \Rightarrow A(x - x^*) = 0 \leadsto (x - x^*) \in N(A)$$

ب) با استفاده از نتیجه قسمت الف، نشان دهید که برای هر $\mathbf{x}$ دلخواه از مجموعه جواب دستگاه، $\mathbf{x}^* \perp (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ است. با توجه به تئوری اساسی جبرخطی، $\mathbf{x}^*$ متعلق به کدام زیرفضای اساسی ماتریس $\mathbf{A}$ است.

$$x^* = A^T(AA^T)^{-1}b = A^T v$$

$$(x - x^*) \perp x^* \Rightarrow x^{*T}(x - x^*) = 0 \Rightarrow x^{*T}x - x^{*T}x = v^TAx - v^TA\underbrace{A^T(AA^T)^{-1}b}_{v} =$$

$$\Rightarrow v^TAx - v^Tb = v^Tb - v^Tb = 0$$

ج) با استفاده از نتیجه قسمت ب، نشان دهید که $\|\mathbf{x}\|_2^2 \geq \|\mathbf{x}^*\|_2^2$ است. به عبارتی، $\mathbf{x}^*$ از بین تمامی پاسخ‌های دستگاه کمترین نُرم اقلیدسی را دارد.

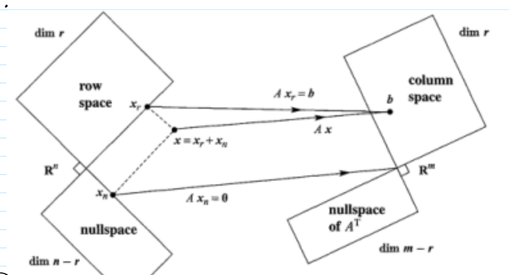
$$\underbrace{(x - x^*)}_{y} \in N_{(A)} \Rightarrow x = x^* + y \longrightarrow \begin{cases} y \in N_{(A)} \\ x^* \perp y \end{cases}$$

$$\|x\|_2^2 = \|x^* + y\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 + \|y\|_2^2 \Rightarrow \|x\|_2^2 \geqslant \|x^*\|_2^2$$

د) ماتریس نگاشت به فضای سطری و فضای پوچی را به دست آورید. توجه کنید که این ماتریس‌ها قرار است بردار $\mathbf{x}$ را به زیرفضاهای گفته‌شده نگاشت کنند و سایز آن‌ها $n \times n$ است. رتبه این ماتریس‌ها را نیز بیان کنید.

$$x = x_r + x_n \xrightarrow{(x - x^*) \in N(A)} x = x^* + x_n \Rightarrow$$

زیرفضاهای گفته‌شده نگاشت کنند و سایز آن‌ها $n \times n$ است. رتبه این ماتریس‌ها را نیز بیان کنید.



$$x = x_r + x_n \xrightarrow{(x - x^*) \in N(A)} x = x^* + x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = A^T(AA^T)^{-1} b + x_n = A^T(AA^T)^{-1} A x + x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = P x + x_n \Rightarrow x_n = (I - P)\, x \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad A^T(AA^T)^{-1}A \longrightarrow$ ماتریس نگاشت به فضای سطری $\rightsquigarrow \operatorname{rank}(P_r) = m$

$I - A^T(AA^T)^{-1}A \longrightarrow$ ماتریس نگاشت به فضای پوچی $\rightsquigarrow \operatorname{rank}(P_n) = n - m$

Question 3)

الف) ماتریس بلوکی $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$، $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ است. با نوشتن رابطه وارون ماتریس بلوکی، اتحاد زیر که به لم معکوس ماتریس موسوم است را اثبات کنید. فرض کنید که معکوس ماتریس‌های موجود در این رابطه وجود داشته باشند.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$$

ابتدا ماتریس معکوس را برای ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی بدست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

حال برای ماتریس بلوکی M دو نوع Decomposition می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

حال با توجه به این دو نوع Decomposition، M^{-1} را حساب می‌کنیم.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} + D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}_{11} = M^{-1}_{11} \Rightarrow (A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$M^{-1}_{11} = M^{-1}_{11} \Rightarrow (A-BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

ب) شرایط معکوس‌پذیری و معکوس ماتریس $\mathbf{I} + \mathbf{uv}^T$ را به دست آورید که در آن $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس همانی بوده و $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ است.

ماتریس بلوکی M را به صورت روبرو در نظر بگیرید: $M = \begin{bmatrix} I & u \\ v^T & -1 \end{bmatrix}$ و $M \in R^{(n+1)\times(n+1)}$

طبق قسمت الف) $\Rightarrow (I + uv^T)^{-1} = I + Iu(-1 - v^TIu)^{-1}v^TI = I - u(1+v^Tu)^{-1}v^T$

با توجه به اینکه $1+v^Tu$ یک عدد است، اگر $1+v^Tu \neq 0$ باشد. در نتیجه معکوس ماتریس را داریم:

$$(I+uv^T)^{-1} = I - \frac{uv^T}{(1+v^Tu)}$$

ج) به ازای هر ماتریس معکوس‌پذیر $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و هر دو بردار $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ نشان دهید:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{uv}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{uv}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}$$

همانند قسمت قبل ماتریس بلوکی M را به صورت $M = \begin{bmatrix} A & v^T \\ u & -1 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

طبق قسمت الف) $\Rightarrow (A+uv^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}u(-1 - v^TA^{-1}u)^{-1}v^TA^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

Question 4)

$U \succ 0 \rightarrow \forall_{x\neq 0}\ x^TUx \succ 0$

$U \succeq 0 \rightarrow \forall_{x\neq 0}\ x^TUx \succeq 0$

یکی از مفاهیم پرکاربرد در درس، بررسی مثبت معین یا نیمه‌معین بودن یک ماتریس متقارن است. ماتریس بلوکی $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را به صورت $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید که در آن $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$، $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ و $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ است. با فرض معکوس‌پذیری $\mathbf{C}$، ماتریس $\mathbf{S} = \mathbf{C} - \mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ را مکمل شور ماتریس $\mathbf{A}$ در $\mathbf{M}$ می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $\mathbf{M} > 0$ است اگر و تنها اگر $\mathbf{A} > 0$ و $\mathbf{S} > 0$ باشد.

در مرحله اول ماتریس بلوکی M را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ B^TA^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^TA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = Q^TLQ \rightsquigarrow L = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

قسمت اول) $M \succ 0 \Rightarrow A \succ 0 ,\ S \succ 0$

$$M \succ 0 \Rightarrow \forall x: x^TMx \succ 0 \Rightarrow \forall x: x^TQ^TLQx \succ 0 \Rightarrow \forall y: y^TLy \succ 0 \Rightarrow \forall y: \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\Rightarrow \forall y_1, y_2: y_1^TAy_1 + y_2^TSy_2 \succ 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall y_1: y_1^TAy_1 \succ 0 \rightarrow A \succ 0 \\ \forall y_2: y_2^TSy_2 \succ 0 \rightarrow S \succ 0 \end{cases}$$

قسمت دوم) $A \succ 0 ,\ S \succ 0 \Rightarrow M \succ 0$

قسمت دوم) $A\succ 0$ و $S\succ 0 \Rightarrow M\succ 0$

$$A\succ 0 \rightarrow \forall y_1 :\ y_1^T A y_1 \succ 0$$
$$S\succ 0 \rightarrow \forall y_2 :\ y_2^T S y_2 \succ 0$$
$$\Rightarrow \forall y_1 , y_2 :\ y_1^T A y_1 + y_2^T S y_2 \succ 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall y_1 , y_2 : \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2\end{bmatrix} \succ 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall y :\ y^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S\end{bmatrix} y \succ 0 \Rightarrow \forall y : y^T L y \succ 0 \xrightarrow[y=Qx]{} \forall x : x^T Q^T L Q x \succ 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x :\ x^T M x \succ 0 \Rightarrow M\succ 0 \quad ✓$$

ب) اگر $\mathbf{A} \succ 0$ باشد، آنگاه $\mathbf{M} \succcurlyeq 0$ است اگر و تنها اگر $\mathbf{S} \succcurlyeq 0$ باشد.

$$A\succ 0 \rightarrow \forall_{y_1\neq 0} y_1 :\ y_1^T A y_1 \succ 0$$
$$S\succcurlyeq 0 \rightarrow \forall_{y_2\neq 0} y_2 :\ y_2^T A y_2 \succcurlyeq 0$$
$$\rightarrow \forall_{y_1\neq 0,\ y_2\neq 0} y_1 , y_2 :\ y_1^T A y_1 + y_2^T S y_2 \succ 0$$
$$\forall_{y_1\neq 0} y_1 ,\ y_2 = 0 :\ y_1^T A y_1 \succ 0$$
$$\forall_{y_2\neq 0} y_2 ,\ y_1 = 0 :\ y_2^T S y_2 \succcurlyeq 0$$
$$\Rightarrow \forall_{y\neq 0} y ,\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2\end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \Rightarrow y^T L y \succcurlyeq 0 \Rightarrow$$
$$\xrightarrow{y=Qx} \forall_{x\neq 0} x \ \ x^T Q^T L Q x \succcurlyeq 0 \Rightarrow \forall_{x\neq 0} x \ \ x^T M x \succcurlyeq 0 \Rightarrow M \succcurlyeq 0$$

قابل توجه است که تمامی این مراحل معکوس پذیر هستند. در نتیجه عبارت درست است.

$S_M = A - BA^{-1}B \longleftarrow$

ج) ماتریس‌های متقارن $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید که $\mathbf{A}$ ماتریسی مثبت معین است. نشان دهید ماتریس $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\ \mathbf{B}&\mathbf{A}\end{bmatrix}$ مثبت معین است اگر و تنها اگر مقادیر تکین ماتریس $\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ همگی کوچکتر از ۱ باشند.

$M\succ 0 \Leftrightarrow A\succ 0 ,\ S\succ 0$ با توجه به قسمت قبل داریم که

می‌دانیم که $A\succ 0$ است. در نتیجه حکم این سؤال این است که اثبات کنیم: $S\succ 0 \Leftrightarrow \sigma_i(A^{-1/2}BA^{-1/2}) < 1$

$$S\succ 0 \Leftrightarrow \forall_{x\neq 0} x :\ x^T (A - BA^{-1}B) x \succ 0 \xLeftrightarrow[y=A^{1/2}x]{} \forall_{y\neq 0} y :\ y^T (I - A^{-1/2}BA^{-1}BA^{-1/2}) y \succ 0$$
$$\Leftrightarrow \forall_{y\neq 0} y :\ y^T \Big(I - \underbrace{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^T}_{F^T}\underbrace{(A^{-1/2}BA^{-1/2})}_{F}\Big) y \succ 0 \Leftrightarrow \forall_{y\neq 0} y :\ y^T (I - F^TF) y \succ 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(F^TF) < 1 \Leftrightarrow \sigma(F) < 1 \Leftrightarrow \sigma(A^{-1/2}BA^{-1/2}) < 1$$

Question 5)

الف) اگر $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و متقارن باشد، آنگاه مقادیر حقیقی $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ و بردارهای دو به دو متعامد $\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_n$ وجود دارد که بردار $\mathbf{q}_i$ بردار ویژه $\mathbf{A}$ متناظر با مقدار ویژه λ_i باشد.

بالا مثلثی

$$A \xrightarrow[\text{Decomp}]{\text{Schur}} A = QDQ^T$$

$A \xrightarrow[\text{Decomp.}]{\text{Schur}} A = QDQ^T \to$ بالا مثلثی

$A \to \text{Symmetric} \Rightarrow A^T = A \Rightarrow QD^TQ^T = QDQ^T \Rightarrow D \to$ قطری است

و در سوال های قبل اثبات کرده بودیم که روی قطر D لاندا ها قرار دارند.

$$A = QDQ^T \to AQ = QD \to A(q_1\ q_2 \cdots q_n) = (q_1\ q_2 \cdots q_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(q_1\ q_2 \cdots q_n) = (\lambda_1 q_1\ \ \lambda_2 q_2 \cdots \lambda_n q_n) \to Aq_i = \lambda_i q_i$$

q_i بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ_i می باشد.

برای اثبات حقیقی بودن لانداها داریم که:

$Av = \lambda v$

$$\hookrightarrow \|Av\|_2^2 = v^t A^t A v = v^t A^2 v = v^t A \lambda v = \lambda v^t A v = \lambda^2 v^t v = \lambda^2 \|v\|_2^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{\|Av\|_2^2}{\|v\|_2^2} \Rightarrow \lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

برای تمام q_iها داریم چون λ_iها از تجزیه شور می آیند و Q یک ماتریس Unitary است.

در نتیجه به هم عمودند.

ب) ماتریس متقارن **A** را با مقادیر ویژه $\lambda_n \le \cdots \le \lambda_1$ در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\lambda_k = \max_{\substack{S\subseteq\mathbb{R}^n\\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{\mathbf{x}\in S\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \min_{\substack{C\subseteq\mathbb{R}^n\\ \dim(C)=n-k+1}} \max_{\substack{\mathbf{x}\in C\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

$$\lambda_k = \max_{\substack{S\subseteq R^n\\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{x\in S\\ x\neq 0}} \frac{x^TAx}{x^Tx}$$

ابتدا اثبات سمت ".." تساوی را می نویسیم:

$A = QDQ^T$ همانطور که در قسمت قبل اثبات کردیم داریم:

که $R = \text{Span}\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ و $\langle q_i, q_j\rangle = 0 \quad (i\neq j)$

به صورتی که هر q_i، بردار ویژه مربوط به ویژه مقدار λ_i می باشد.

$S'_k = \text{Span}\{q_k, \cdots, q_n\}$, $\dim S'_k = n-k+1$ فضای S'_k را به صورتی در نظر بگیریم که

در نتیجه اگر یک بردار $x \in S$ بخواهیم انتخاب کنیم به صورتی که $x = \sum_{i=1}^{m} (q_i^T x) q_i$ باشد.

$m \geq k$ است و در نتیجه حداقل یک بردار q_i در فضای S'_k داریم.

$$\frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{y^TDy}{y^Ty} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (q_i^Ty)^2}{\sum_{i=1}^{m} (q_i^Ty)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_k (q_i^T y)^2}{\sum_{i=1}^{m} (q_i^Ty)^2} = \lambda_k$$

در نتیجه اثبات کردیم که همیشه $\frac{x^TAx}{x^Tx}$ ای کوچکتر از λ_k است حال اثبات وجودی می آوریم که خود λ_k وجود دارد.

$y = \sum_{i=1}^{k} (q_i^T y) q_i$.

وجود دارد.

$$y = \sum_{i=1}^{k} (q_i^T y)\, q_i$$

$$\frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{y^TDy}{y^Ty} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (q_i^Ty)^2}{\sum_{i=1}^{k} (q_i^Ty)^2} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_k (q_i^Ty)^2}{\sum_{i=1}^{k} (q_i^Ty)^2} = \lambda_k$$

$$\lambda_k = \max_{\substack{S\subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{x\in S \\ x\neq 0}} \frac{x^TAx}{x^Tx}$$ در نتیجه به λ_k می‌توانیم برسیم پس اثبات کردیم

برای اثبات $$\lambda_k = \min_{\substack{S\subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=n-k+1}} \max_{x\in S} \frac{x^TAx}{x^Tx}$$ نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

ج) اگر $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریس‌هایی متقارن باشند، پاسخ مساله بهینه‌سازی زیر را به‌دست آورید:

$$\max_{\mathbf{x}\neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}}$$

روش اول: اگر $B \succ 0$ باشد می‌توانیم $B^{1/2}$ را تعریف کنیم

$$\max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^TBx} = \max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{\underbrace{(xB^{1/2})^T}_{y^T}\underbrace{(B^{1/2}x)}_{y}} = \max_{y\neq 0} \frac{y^TB^{-1/2}AB^{-1/2}y}{y^Ty} = \lambda_{max}(B^{-1/2}AB^{-1/2})$$

$$B^{-1/2}AB^{-1/2}x = \lambda x \Longrightarrow B^{-1}AB^{-1/2}x = \lambda B^{-1/2}x \Rightarrow B^{-1}Ay = \lambda y$$

پس $$\lambda_{max}(B^{-1}A) = \lambda_{max}(B^{-1/2}AB^{-1/2})$$

$$\max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^TBx} \longrightarrow \lambda_{max}(B^{-1}A)$$

حال اگر $B \prec 0$ باشد $B' = -B \succ 0$

$$\max_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^TBx} = \max_{x\neq 0} \frac{-x^TAx}{x^TB'x} = -\min_{x\neq 0} \frac{x^TAx}{x^TB'x} = -\min_{y\neq 0} \frac{y^TB'^{-1/2}AB'^{-1/2}y}{y^Ty} =$$

$$= -\lambda_{min}(B'^{-1/2}AB'^{-1/2}) = -\lambda_{min}(B'^{-1}A) = -(-\lambda_{max}(B^{-1}A)) = \lambda_{max}(B^{-1}A)$$

Question6)

یکی از کاربردهای تجزیه به مقادیر تکین، محاسبه تقریب رتبه پایین یک ماتریس است. ماتریس $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ با رتبه r را با تجزیه به مقادیر تکین $\mathbf{A}=\mathbf{U\Sigma V}^T$ در نظر بگیرید. به ازای یک عدد $k\leq r$، ماتریس $\mathbf{A}_k\in\mathbb{R}^{m\times n}$ را به صورت $\mathbf{A}_k=\mathbf{U}_k\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{V}_k^T$ تعریف می‌کنیم که در آن $\mathbf{U}_k$ و $\mathbf{V}_k$ به ترتیب k ستون اول $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ بوده و $\mathbf{\Sigma}_k$ بلوک $k\times k$ بالا و سمت چپ ماتریس $\mathbf{\Sigma}$ است که شامل k مقدار تکین بزرگ $\mathbf{A}$ می‌شود. به عبارت دیگر، $\mathbf{A}_k$ را می‌توان به صورت $\mathbf{A}_k=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i\,\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^T$ بیان کرد که ماتریسی رتبه k است.

الف) بهترین تقریب رتبه k از $\mathbf{A}$ با معیار نُرم فروبینیوس از مساله بهینه‌سازی زیر به‌دست می‌آید:

$$\min_{\mathbf{X}:\ \mathrm{rank}(\mathbf{X})\leq k} \|\mathbf{A}-\mathbf{X}\|_F$$

نشان دهید که $\mathbf{A}_k$ پاسخ مساله بهینه‌سازی فوق است؛ یعنی به ازای هر ماتریس دلخواه $\mathbf{X}$ با رتبه k داریم: $\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_F \leq \|\mathbf{A}-\mathbf{X}\|_F$.

I; $$A - A_{i-1} = \sum_{k=i}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$
$$\hookrightarrow \sigma_1(A-A_{i-1}) = \sigma_i(A)$$

II; $$\sigma_1(A+B) \leq \sigma_1(A)+\sigma_1(B)$$
$$\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$$

$\sigma_1(A+B) \leq \sigma_1(A)+\sigma_1(B)$

(II): $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$

$X: \operatorname{rank}(X) \leq k$

نشان دهید که $\mathbf{A}_k$ پاسخ مساله بهینه‌سازی فوق است؛ یعنی به ازای هر ماتریس دلخواه $\mathbf{X}$ با رتبه k داریم: $\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_F \leq \|\mathbf{A}-\mathbf{X}\|_F$.

ب) در صورتی‌که به جای نُرم فروبینیوس از معیار نُرم ۲ در مساله فوق استفاده کنیم، نشان دهید که $\mathbf{A}_k$ همچنان پاسخ مساله بهینه‌سازی تغییریافته خواهد بود.

در این مسئله ابتدا بخش ب) را حل می‌کنیم:

$$\|A-A_k\|_2 \leq \|A-X\|_2$$

$A = U\Sigma V^T$ که $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_r]$

فرض کنید $\operatorname{rank}(B) \leq k$ باشد $\Longleftarrow$ $\operatorname{nullity}(B) \geq n-k$

فضای برداری $V' = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ را در نظر بگیرید.

$\hookrightarrow \operatorname{rank}(V') = k+1$

$$\operatorname{rank}(V') + \operatorname{nullity}(B) \geq n+1 \longrightarrow \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) \cap \operatorname{Null}(B) \neq \emptyset$$

در نتیجه می‌توان یک بردار مانند $w \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) \cap \operatorname{Null}(B)$ انتخاب کنیم به صورتی که

$$\|w\|_2 = 1 \quad \text{و} \quad w = \sum_{i=1}^{k+1} (v_i^T w) v_i = \sum_{i=1}^{k+1} w_i v_i \qquad Bw \in \operatorname{Null}(B)$$

$$\|A-B\|_2 = \sup_{x \neq 0} \|(A-B)x\|_2 \geq \|(A-B)w\|_2 = \|Aw\|_2 = w^T A^T A w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A-B\|_2 = w^T V \Sigma^2 V^T w \xrightarrow{w = \sum_{i=1}^{k+1} w_i v_i} = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 w_i^2 \geq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} w_i^2$$

$$\Longrightarrow \|A-B\|_2^2 \geq \|A-A_k\|_2^2$$

برای اثبات قسمت الف) به صورت زیر عمل می‌کنیم: $\sigma_{k+1}(A) \leq \sigma_1(A-B)$

فرض کنید $A = X + Y$ باشد.

$$\sigma_i(X) + \sigma_j(Y) = \sigma_1(X - X_{i-1}) + \sigma_1(Y - Y_{j-1}) \geq \sigma_1(X + Y - X_{i-1} - Y_{j-1})$$

$$X_{i-1} + Y_{j-1} = B \rightarrow \operatorname{rank}(B) \leq i+j-2 \qquad = \sigma_1(A - X_{i-1} - Y_{j-1})$$

پس طبق قسمت ب) داریم که $\sigma_1(A-B) \geq \sigma_{i+j-2}(A)$

$$\|A-B\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A-B)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \sigma_{i+k}(A)^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i(A)^2 = \|A-A_k\|_F^2$$

Question 7)

الف) بر اساس تعریف ذکرشده برای نُرم ۲ ماتریس، نشان دهید که $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_{max}(\mathbf{A})$.

$$\|A\|_2 = \sup \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup \frac{x^T A^T A x}{x^T x} = \lambda_{max}(A^T A) = \sigma_{max}(A)$$

ب) با توجه مقادیر تکین $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T$، عبارت $\kappa_A = \|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$ را برحسب مقادیر تکین $\mathbf{A}$ محاسبه کرده و نشان دهید که $\kappa_A \geq 1$ است. κ_A را عدد حالت ماتریس $\mathbf{A}$ می‌نامیم و معیاری برای پایداری عددی ماتریس است.

$$A = U \Sigma V^T \Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & & 0 \\ & 1/\sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \sigma_{max}(A) \qquad \|A^{-1}\|_2 = \sigma_{max}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{min}(A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(A) = \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)}$$

با توجه به اینکه $\sigma_i(A) > 0$ است و $\sigma_{max}(A) > \sigma_{min}(A)$ در نتیجه داریم که $\frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} = K(A) > 1$

ج) دستگاه معادلات $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ را در نظر بگیرید. در صورتی‌که بردار $\mathbf{b}$ در فرآیند اندازه‌گیری دچار خطای کوچک $\mathbf{e}$ شود (به‌گونه‌ای‌که $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{e}$)، پاسخ دستگاه ($\tilde{\mathbf{x}}$) نیز دچار خطا خواهد شد. نشان دهید که خطای نسبی $\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$ بر حسب خطای نسبی اندازه‌گیری $\frac{\|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$ به صورت $\kappa_A^{-1}\frac{\|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \leq \frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \kappa_A \frac{\|\mathbf{e}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2}$ باند می‌شود. بر این اساس، اگر κ_A بزرگ باشد، خطای کوچک اندازه‌گیری می‌تواند به خطای بزرگی در پاسخ دستگاه منجر شود. در چنین شرایطی $\mathbf{A}$ را بد حالت می‌نامیم.

$$\left.\begin{matrix} A\tilde{x} = \tilde{b} = b - e \\ Ax = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(x - \tilde{x}) = e \Rightarrow x - \tilde{x} = A^{-1} e \quad \text{و} \quad Ax = b \rightarrow x = A^{-1} b$$

$$\text{I}: \; \|b\|_2 = \|AA^{-1}b\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}b\|_2 \Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}b\|_2} \leq \frac{\|A\|_2}{\|b\|_2}$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|A^{-1}e\|_2}{\|A^{-1}b\|_2} \leq \frac{\|A^{-1}\|_2 \|e\|_2}{\|A^{-1}b\|_2} \leq \frac{\|A^{-1}\|_2 \|e\|_2}{\|b\|_2} \|A\|_2 \leq K_A \frac{\|e\|_2}{\|b\|_2}$$

$$\text{II}: \; \|AA^{-1}e\|_2 \leq \|A\|_2 \|A^{-1}e\|_2 \Rightarrow \frac{\|e\|_2}{\|A\|_2} \leq \|A^{-1}e\|_2$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|A^{-1}e\|_2}{\|A^{-1}b\|_2} \geq \frac{\|A^{-1}e\|_2}{\|A^{-1}\|_2 \|b\|_2} \geq \frac{\|e\|_2}{\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \|b\|_2} \geq K_A^{-1} \frac{\|e\|_2}{\|b\|_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_A^{-1} \frac{\|e\|_2}{\|b\|_2} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq K_A \frac{\|e\|_2}{\|b\|_2}$$

د) در صورتی‌که اندازه‌گیری و مدل به صورت همزمان دچار یک خطای کوچک شوند (یعنی: $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{e}$ و $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{E}$)، کران بالای فوق را بازنویسی نمایید.

$$\left.\begin{array}{l} A\tilde{x} = \tilde{b} - E\tilde{x} \\ Ax = b \end{array}\right\} \Rightarrow A(\tilde{x}-x) = (\tilde{b}-b) - E\tilde{x} \Rightarrow (\tilde{x}-x) = A^{-1}\left\{(\tilde{b}-b) - E\tilde{x}\right\}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}-x\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\{\|\tilde{b}-b\|_2 + \|E\|_2\|\tilde{x}\|_2\right\} \xrightarrow{\|\tilde{x}\|_2 \leq \|x\|_2 + \|\tilde{x}-x\|_2}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}-x\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\{\|e\|_2 + \|E\|_2\left(\|x\|_2 + \|\tilde{x}-x\|_2\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - \|A^{-1}\|_2\|E\|_2\right)\frac{\|\tilde{x}-x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A^{-1}\|_2\left\{\frac{\|e\|_2}{\|x\|_2} + \|E\|_2\right\} \xrightarrow{\|b\|_2 \leq \|A\|_2\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \left(1 - K_A\frac{\|E\|_2}{\|A\|_2}\right)\frac{\|\tilde{x}-x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A^{-1}\|_2\left\{\frac{\|e\|_2\|A\|_2}{\|b\|_2} + \|E\|_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\tilde{x}-x\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{K_A\left(\frac{\|e\|_2}{\|b\|_2} + \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2}\right)}{1 - K_A\frac{\|E\|_2}{\|A\|_2}}$$

Question 8)

دو ماتریس $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید به صورتی‌که رابطه $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ برقرار است. نشان دهید:

الف) اگر $\mathbf{A}$، n مقدار ویژه متمایز داشته باشد، آنگاه ماتریس‌های $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{AB}$ قطری‌شدنی خواهند بود.

$$Aq = \lambda q \rightarrow A(q_1\ q_2 \cdots q_n) = (q_1\ q_2 \cdots q_n)\Lambda \Rightarrow A = Q\Lambda Q^T$$

q_i بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه λ_i است.

حال اثبات می‌کنیم که q_iها عمود به یکدیگر هستند. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم

$$\alpha q_1 + \beta q_2 = 0 \rightarrow A(\alpha q_1 + \beta q_2) = 0 \Rightarrow \alpha\lambda_1 q_1 + \beta\lambda_2 q_2 = 0$$

برای اثبات کامل‌تر از استقرا باید استفاده کنیم

$$\Rightarrow \alpha\lambda_1 q_1 + \beta\lambda_1 q_1 = 0 \Rightarrow \beta(\lambda_1 - \lambda_2)q_2 = 0 \xrightarrow{\lambda_1 \neq \lambda_2} \beta = 0 \ \times$$

در نتیجه برای A یک تجزیه داریم که $A = QDQ^T$ ، $D \leftarrow$ قطری

$$AB = BA \Rightarrow QDQ^T B = B\,QDQ^T \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (I): B = QD^{-1}Q^T B Q D Q^T \\ (II): B = QDQ^T BQD^{-1}Q^T \end{array}\right\} \Rightarrow D^{-1}\underbrace{Q^T BQ}_{P}D = D\underbrace{Q^T BQ}_{P}D^{-1} \Rightarrow$$

(II) : $B = Q D Q^{-1} B \underbrace{Q D Q^{-1}}_{P}$ ... $\underbrace{}_{P}$

$\Rightarrow \quad P = D^2 P D^{-2} \Rightarrow$ از برابری عنصر ijها این دو ماتریس : $P_{ij} = (D^2 P D^{-2})_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{ij} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^2 P_{ij} \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} P_{\substack{ij \\ i \neq j}} = 0 \Rightarrow$ P کاملاً قطری است.

$Q^T B Q = P_{\text{قطری}} \longrightarrow B = Q P Q^T$

$AB = Q D Q^T Q P Q^T = Q \underbrace{DP}_{\text{قطری}} Q^T \longrightarrow$ AB نیز قطری پذیر است

ب) اگر **A** و **B** قطری‌شدنی باشند، ماتریس معکوس‌پذیر **P** وجود خواهد داشت به‌گونه‌ای‌که هر دو ماتریس $\mathbf{D_1 = P^{-1}AP}$ و $\mathbf{D_2 = P^{-1}B}P$ قطری باشند. در این حالت **A** و **B** را قطری‌شدنی همزمان می‌نامیم. به عبارتی می‌توانیم هر دو ماتریس را به صورت همزمان و در یک پایه مشترک قطری کنیم. آیا عکس این رابطه نیز برقرار است؟ (یعنی اگر **A** و **B** همزمان قطری‌شدنی باشند، می‌توان گفت $\mathbf{AB = BA}$؟)

$D_1 = P^{-1} A P \Rightarrow A = P D_1 P^{-1} \qquad D_2 = P^{-1} B P \Rightarrow B = P D_2 P^{-1}$

$AB = P D_1 P^{-1} P D_2 P^{-1} = P D_1 D_2 P^{-1}$

$BA = P D_2 P^{-1} P D_1 P^{-1} = P D_2 D_1 P^{-1}$

با توجه به اینکه $D_1 D_2$ و $D_2 D_1$ قطری هستند $D_2 D_1 = D_1 D_2$ در نتیجه داریم که $\longrightarrow AB = BA$

ج) برقراری شرط $\mathbf{AB = BA}$ امری دشوار است و برای قطری‌سازی همزمان دو ماتریس باید به دنبال شرطی کاربردی‌تر باشیم. برای این منظور، ماتریس‌های متقارن $\mathbf{A, B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید در صورتی‌که **A** مثبت معین باشد، ماتریس معکوس‌پذیر **P** وجود خواهد داشت به‌گونه‌ای‌که $\mathbf{P^T AP = I}$ و $\mathbf{P^T BP}$ قطری است.

$A \succ 0 \longrightarrow \lambda_i > 0$ و $A = Q D Q^T \longrightarrow$ به صورتی که D قطری است و λها روی قطر قرار دارند

حال با توجه به اینکه λها مثبت است می‌توانیم $D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ تعریف کنیم

$A = Q D^{1/2} D^{1/2} Q^T \Rightarrow D^{-1/2} Q^T A \underbrace{Q D^{-1/2}}_{P} = I \Rightarrow P^T A P = I$

با توجه به شرط $AB = BA$ می‌توان مانند قسمت الف) اثبات کرد که $P^T B P$ قطری است.