Question 11 -

Question 11 - Problems involving l_1 and l_∞ norms.

b) minimize $\|Ax-b\|_1$

$\|Ax-b\|_1 = \sum |a_k^T x - b_k|$

Eq. Prob: minimize $1^T s$

s.t. $Ax-b \leq s$

$Ax-b \geq -s$

$-s_k \leq a_k^T x - b_k \leq s_k \rightarrow |a_k^T x - b_k| \leq s_k$

در نتیجه بدست آوردن مقدار اپتیمال به این صورت است که $|a_k^T x - b_k| = s$

e) minimize $\|Ax-b\|_1 + \|x\|_\infty$

برای بدست آوردن $\min \|x\|_\infty$ با توجه به اینکه

$\|x\|_\infty = \max x_j \rightarrow \forall j: x_j \leq \|x\|_\infty$

مسئله را می توان به صورت زیر حل کرد:

minimize $1^T s + y$

s.t. $Ax-b \leq s$

$Ax-b \geq -s$

$x \leq y \, 1$

$x \geq -y \, 1$

$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \rightarrow$ بردار تمام یک

Question 12 - Network flow Problem

$$\text{minimize} \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad b_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Question 20 - Power Assignment.

Primal Obj. $\Rightarrow$ $\text{maximize} \quad \min \left\{ \dfrac{S_i}{I_i + \sigma_i} \right\}$

این رابطه را می توان مانند زیر به طوری تغییر داد که به شکل Generalized Liner-fractional در آوریم

$$\text{s.t.} \quad S_i = G_{ii} P_i$$

$$\sum_{k \neq i} G_{ik} P_k \cancel{+\sigma_i} = I_i$$

$$0 \leq P_i \leq P_i^{max}$$

$$\sum_{k \in K_l} P_k \leq P_l^{gp}, \quad \sum_{j=1}^{n} G_{ij} P_j \leq P_i^{rc}$$

Objective: $\text{minimize} \quad \max_i \left\{ \dfrac{\sum_{k \neq i} G_{ik} P_k + \sigma_i}{G_{ii} P_i} \right\}$

$$\text{s.t.} \quad 0 \leq P_i \leq P_i^{max}$$

$$\sum_{k \in K_l} P_k \leq P_l^{gp}$$

$$\sum_{j=1}^{n} G_{ij} P_j \leq P_i^{rc}$$

Additional

Question 8. Schur complements & LMI representation

$$h(x) \leq t \rightarrow (Ax+b)^T \left(P_0 + \sum x_i P_i \right)^{-1} (Ax+b) \leq t$$

ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} t & (Ax+b)^T \\ (Ax+b) & P_0 + \sum x_i P_i \end{bmatrix} \succeq 0$$

با استفاده از Schur Complement به Opt. Obj. می‌رسیم.

Question 43.

a) اگر $t \leq \lambda$ باشد، در نتیجه باید $A(x) \preceq tI$ باشد.

minimize $\quad t$

s.t. $\quad A(x) \preceq tI$

b) مانند قسمت قبلی که برای λ_m نیز داریم: $\lambda_m \geq t_m \Longleftrightarrow A(x) \succeq t_2 I$

minimize $\quad t_1 - t_m$

s.t. $\quad t_m I \preceq A(x) \preceq t_1 I$

c)

با استفاده از Hint مسئله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\text{minimize} \quad \cancel{\lambda} \quad \lambda/\gamma$$

$$\text{s.t.} \quad \gamma I \preceq A_{(x)} \preceq \lambda I \quad \rightarrow \quad Prob(1)$$

$$\text{domain: } \{(\lambda, \gamma) \mid \gamma \geq 0\}$$

$$t := \lambda/\gamma \ , \ s = 1/\gamma \ , \ y = x/\gamma$$

مسئله را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم.

$$\text{minimize} \quad t$$

$$\text{s.t.} \quad I \preceq sA_0 + \sum y_i A_i \preceq tI \qquad Prob(2)$$

$$s > 0$$

حال باید اثبات کنیم این دو مسئله با هم برابرند. جواب مسئله اول را P_1^*، و جواب مسئله دوم را P_2^* در نظر بگیرید. با تغییر متغیرهایی که در بالا ارائه شده می‌توان مسئله ① را به ② تبدیل کرد $\longleftarrow P_1^* \geq P_2^*$

و با تغییر متغیرهای $\lambda = t/s$ و $x = y/s$ و $\gamma = 1/s$ می‌توان مسئله را به مسئله ② تبدیل کرد $\longleftarrow P_2^* \geq P_1^*$

d)

$$A(x) = A^+ - A^-$$
$$A^+ \succeq 0 , \quad A^- \succeq 0$$

d)

ابتدا نشان می دهیم که $\mathrm{tr}(A^+) + \mathrm{tr}(A^-) = \sum |\lambda_i|$

$$A(x) \succ 0 \rightarrow A(x) = Q \Lambda Q^T$$

که $\Lambda = \Lambda^+ - \Lambda^-$

$$\Lambda^+ = Q^T A^+ Q \qquad \Lambda^- = Q^T A^- Q$$

$$\mathrm{tr}(A^+) = \mathrm{tr}(Q \Lambda^+ Q^T) = \mathrm{tr}(Q^T Q \Lambda^+) = \mathrm{tr}(\Lambda^+)$$

$$\mathrm{tr}(A^+) + \mathrm{tr}(A^-) = \mathrm{tr}(\Lambda^+) + \mathrm{tr}(\Lambda^-)$$

هم چنین چون با تریس کار داریم. می توان فرض کرد که Λ^+ و Λ^- قطری اند به صورتی که

$$\Lambda^-_{ii} = \max(-\lambda_i, 0)$$
$$\Lambda^+_{ii} = \max(0, \lambda_i)$$

Eq. Prob. $\quad$ minimize $\mathrm{tr}(A^+) + \mathrm{tr}(A^-)$

s.t. $A(x) = A^+ - A^-$

$A^+ \succeq 0 , \quad A^- \succeq 0$

Question 4.4 - Additional)

a) minimize $\underbrace{f_0(x)}_{\text{Convex}} + \overbrace{g(x^k)}^{\text{Cte}} + \overbrace{\nabla g(x^k)^T (x - x^k)}^{\text{affine}}$

$$\text{s.t.} \quad f_i(x) \le 0 \rightarrow \text{Convex}$$

$$Ax = b \rightarrow \text{Affine}$$

Each Constraint and Objective is Convex

So the problem is convex as well

b) ~~$f_0(x^{k+1}) + g(x^{k+1}; x^k)$~~ با توجه به الگوریتم داریم که

$$f_0(x^{k+1}) + \hat{g}(x^{k+1}; x^k) \le f_0(x^k) + \underbrace{\hat{g}(x^k; x^k)}_{\rightarrow g(x^k)}$$

$$f_0(x^{k+1}) + \hat{g}(x^{k+1}; x^k) \le f_0(x^k) + g(x^k) \quad \text{(I)}$$

Concavity $g(x)$: $g(x^{k+1}) - g(x^k) \ge \nabla g(x^k)^T (x^{k+1} - x^k)$

$$g(x^{k+1}) \ge \underbrace{g(x^k) + \nabla g(x^k)^T (x^{k+1} - x^k)}_{\hat{g}(x^{k+1}; x^k)}$$

$$\Rightarrow f_0(x^{k+1}) + \hat{g}(x^{k+1}; x^k) \le f_0(x^{k+1}) + g(x^{k+1})$$

$$\text{(I)} \Rightarrow f_0(x^{k+1}) + g(x^{k+1}) \le f_0(x^k) + g(x^k)$$

Question 6 - Additional -

a) $$\text{minimize} \quad \frac{\|Ax-b\|_1}{1-\|x\|_\infty}$$

این مسئله به صورت کلی Convex نیست.

با توجه به اینکه $\dfrac{\sum |a_k x - b|_1}{1-\|x\|_\infty} = \dfrac{\|Ax-b\|_1}{1-\|x\|_\infty}$ ترکیبی از چند کسر است.

می‌توان مثال‌هایی زد که هر کدام از آن یکی از این قسمت‌ها Concave شود.

مثال: $\dfrac{1-2x}{1-x} \longrightarrow$ Concave

اما این مسئله QuasiConvex است.

$$S_\alpha = \left\{x \;\middle|\; \frac{\|Ax-b\|_1}{1-\|x\|_\infty} \leq \alpha \right\} = \left\{x \;\middle|\; \|Ax-b\|_1 + \alpha\|x\|_\infty \leq \alpha \right\}$$

$$\text{minimize} \quad \frac{\|Ax-b\|_1^2}{1-\|x\|_\infty} \cancel{\leq t} \rightarrow \text{is Convex}$$

epigraph form:

$$\frac{\|Ax-b\|_1^2}{1-\|x\|_\infty} \leq t \Leftrightarrow \frac{\|Ax-b\|_1^2}{t} + \|x\|_\infty \leq 1$$

$\rightarrow$ perspective

6) $\cancel{\text{minimize} \quad \frac{\|Ax-b\|_1}{1-\|x\|_\infty}}$ Quasi Convex

$$S_\alpha = \{ x \mid \|Ax-b\|_1 + \alpha\|x\|_\infty \leq \alpha \}$$

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad x \\ &\text{s.t.} \quad \|Ax-b\|_1 + \alpha\|x\|_\infty \leq \alpha \end{aligned}$$

مانند سوال ۱۱ کتاب می‌توان این فرم را به صورت

$$\begin{aligned} &\text{find} \quad x \\ &\text{s.t.} \quad 1^T t + \alpha y \leq \alpha \\ &\qquad -t \preceq Ax - b \preceq t \\ &\qquad -y.1 \preceq x \preceq y.1 \end{aligned}$$

Non-Convex QCQP:

الف

$D \succ 0$

$s_1 A + s_2 B \succ 0 \rightarrow s_1 A + s_2 B = Q^T D Q \succ 0$

$D^{-1/2} Q B Q^T D^{-1/2} = P^T D_B P \rightsquigarrow$

قطری

$\rightsquigarrow D_B = \underbrace{P D^{-1/2} Q}_{U^T} B \underbrace{Q^T D^{-1/2} P^T}_{U} \rightarrow B = U D_B U^T$

$s_1 A + s_2 B = Q^T D Q \Longrightarrow s_1 Q A Q^T + s_2 Q B Q^T = D \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow s_1 (D^{-1/2} Q A Q^T D^{-1/2}) + s_2 (D^{-1/2} Q B Q^T D^{-1/2}) = I \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow s_1 (\cancel{U}^T A U) + s_2 D_B = I \rightsquigarrow \cancel{A}$

$\hookrightarrow \cancel{\&} \; U^T A U = \dfrac{I - s_2 D_B}{s_1} \rightarrow$ Diagonal

$\Rightarrow A = U D_A U^T, \; B = U D_B U^T$

ب

$x^T A x - 2b^T x = x^T P^T \mathrm{diag}(\alpha) P x - 2b^T x$

$x^T B x = 0 \rightarrow x^T P^T \mathrm{diag}(\beta) P x = 0$

$(Px) \odot (Px) = y \rightarrow x^T P^T D P x = \sum d_i (Px)_i^2 = \sum d_i y_i =$

$= d^T y$

$\max 2b^T x = \max b^T P^{-1} P x = \max \gamma^T P x = \max \sum \pm \gamma_i \sqrt{y_i} =$

$= \max \sum |\gamma_i| \sqrt{y_i}$

Eq. Prob: $\min_y \; \alpha^T y - 2 |\gamma|^T \sqrt{y}$

$\cancel{B} \, \beta^T y = 0$

$y \geq 0$